**Question 1.**

(a) Il grafo in questione è indiretto e aciclico. Il vettore dei vertici, ordinati in ordine alfabetico, risulta essere:

$$\begin{aligned} v = \{ & Acciaiuoli, Albizzi, Barbadori, Bischeri, Castellani, \\ & Ginori, Guadagni, Lamberteschi, Medici, Pazzi, \\ & Peruzzi, Ridolfi, Salviati, Strozzi, Tornabuoni\} \end{aligned}$$

Si procede pertanto scrivendo la matrice di adiacenza $W$ ed il vettore dei gradi $w_i$.

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_i = (1, 3, 2, 3, 3, 1, 4, 1, 6, 1, 3, 2, 2, 4, 2)$$

La misura di centralità invariante è unica e vale:

$$\pi_i = (\frac{1}{38}, \frac{3}{38}, \frac{1}{19}, \frac{3}{38}, \frac{3}{38}, \frac{1}{38}, \frac{2}{38}, \frac{1}{38}, \frac{3}{19}, \frac{1}{38}, \frac{3}{38}, \frac{1}{19}, \frac{1}{19}, \frac{2}{19}, \frac{1}{19}).$$

Essendo il grafo fortemente connesso e aperiodico si può concludere che la dinamica di averaging di French-De Groot converge al valore di consenso come nell'esercizio precedente:

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = \pi' x(0) = \sum_i \pi_i x_i(0), \forall x(0)$$

e pertanto, essendo $x(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, -1, 0]'$ il vettore delle condizioni iniziali, si ottiene che il valore finale di consenso vale:

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = (1)\frac{3}{19} + (-1)\frac{2}{19} = \frac{1}{19}$$

(b)

(c) L'insieme dei nodi stubborn $S = \{Castellani, Guadagni, Medici, Strozzi\}$ è globalmente raggiungibile. Sia $D = diag(\omega_i)$ e $P$ la matrice dei pesi normalizzata

$$P = D^{-1}W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto, il vettore di equilibrio della dinamica di averaging è dato dalla risoluzione del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_5 = x_7 = x_{14} = -1 \\ x_9 = +1 \\ x_i = \sum_j P_{ij} x_j, \text{æ} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15\} \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_5 = x_7 = x_{14} = -1 \\ x_9 = +1 \\ x_1 = x_9 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_9 \\ x_3 = \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{3}x_9 \\ x_4 = \frac{1}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_{11} + \frac{1}{3}x_{14} \\ x_6 = x_2 \\ x_8 = x_7 \\ x_{10} = x_{13} \\ x_{11} = \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_{14} \\ x_{12} = \frac{1}{2}x_9 + \frac{1}{3}x_{14} \\ x_{13} = \frac{1}{2}x_9 + \frac{1}{2}x_{10} \\ x_{15} = \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_9 \end{cases} \tag{2}$$

La soluzione del sistema è

$$x(0) = [1, 0, 0, -1, -1, 0, -1, -1, 1, 1, -1, 0, 1, -1, 0]' \tag{3}$$

da cui si deduce che Acciaiuoli, Pazzi e Salviati avranno la stessa opinionde dei Medici pari a +1 mentre Bischeri, Castellani, Guadagni, Lamberteschi, Peruzzi e Strozzi condivideranno l'opinione $-1$ ed i restanti Albizzi, Barbadori, Ginori, Ridolfi e Tornabuoni manterranno l'opinione iniziale pari a 0.

(d)