
Question 1.

- (a) Il grafo in questione è indiretto e aciclico. Il vettore dei vertici, ordinati in ordine alfabetico, risulta essere:

$$v = \{Acciaiuoli, Albizzi, Barbadori, Bischeri, Castellani, \\ \text{Ginori, Guadagni, Lamberteschi, Pazzi, Peruzzi,} \\ \text{Ridolfi, Salviati, Tornabuoni, Strozzi, Medici}\}$$

Si procede pertanto scrivendo la matrice di adiacenza W ed il vettore dei gradi w_i .

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_i = (1, 3, 2, 3, 3, 1, 4, 1, 1, 3, 2, 2, 2, 4, 6)$$

La misura di centralità invariante è unica e vale:

$$\pi_i = \left(\frac{1}{38}, \frac{3}{38}, \frac{1}{19}, \frac{3}{38}, \frac{3}{38}, \frac{1}{38}, \frac{2}{19}, \frac{1}{38}, \frac{1}{38}, \frac{3}{38}, \frac{1}{19}, \frac{1}{19}, \frac{1}{19}, \frac{2}{19}, \frac{3}{19} \right).$$

Essendo il grafo fortemente connesso e aperiodico si può concludere che la dinamica di averaging di French-De Groot converge al valore di consenso, come nell'esercizio precedente, dato dal limite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \pi' x(0) = \sum_i \pi_i x_i(0), \forall x(0)$$

e pertanto, essendo $x(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1]'$ il vettore delle condizioni iniziali, si ottiene che il valore finale di consenso vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = (-1)\frac{2}{19} + (1)\frac{3}{19} = \frac{1}{19}$$

- (b) Si riporta ora il codice Matlab sviluppato per visualizzare l'evoluzione della dinamica di opinione dei nodi del grafo, avendo assegnato ai due nodi stubborn {Strozzi, Medici} rispettivamente i valori -1, +1.

```

1 Families={'Acciaiuoli', 'Albizzi', 'Barbadori', 'Bischeri',
  'Castellani', 'Ginori', 'Guadagni', 'Lamberteschi', 'Pazzi',
3 'Peruzzi', 'Ridolfi', 'Salviati', 'Tornabuoni',
  'Strozzi', 'Medici'}';
5
6 %Matrice di adiacenza W
7 W = zeros(15);
8
9 W(1,15) = 1; %Acciaiuoli
10 W(2,[6 7 15]) = 1; %Albizzi
11 W(3,[5 15]) = 1; %Barbadori
12 W(4,[7 10 14]) = 1; %Bischeri
13 W(5,[3 10 14]) = 1; %Castellani
14 W(6,2) = 1; %Ginori
15 W(7,[2 4 8 13]) = 1; %Guadagni
16 W(8,7) = 1; %Lamberteschi
17 W(9,12) = 1; %Pazzi
18 W(10,[4 5 14]) = 1; %Peruzzi
19 W(11,[15 14]) = 1; %Ridolfi
20 W(12,[15 9]) = 1; %Salviati
21 W(13,[7 15]) = 1; %Tornabuoni
22 W(14,[4 5 10 11]) = 1; %Strozzi
23 W(15,[1 2 3 11 12 13]) = 1; %Medici
24
25 %vettore delle opinioni iniziali
26 x = zeros(15,1);
27 x(14) = -1;
28 x(15) = 1;
29
30 %calcolo matrice P
31 w = W*ones(15,1);
32 D = diag(w);
33 P = D\W;
34
35 nR=13; %regular nodes
36 nS=2; %stubborn nodes
37 u = [-1, 1]'; %vettore degli ingressi stubborn
38
39 Q = P(1:nR, 1:nR); %matrice P ristretta a RxR
40 E = P(1:nR, (nR+1):(nR+nS)); %matrice P ristretta a RxS
41
42 %INIZIALIZZAZIONI
43 cont = 0;
44 cont_max = 50;
45 epsilon = 1e-4; %valore di tolleranza

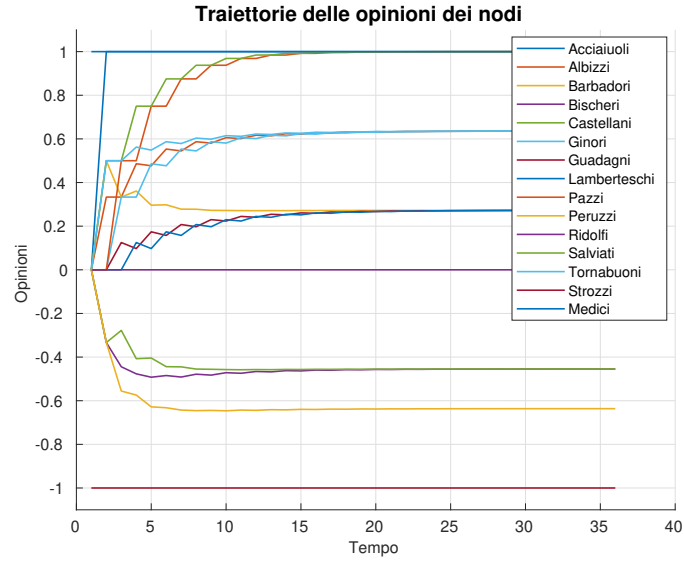
```

```

i = 1;
47 x_new = zeros(nR,1);           %vettore delle opinioni
49 x_old = zeros(nR,1);
X_i = zeros(nR, cont_max);      %matrice dei risultati
51
53 %CALCOLO PASSI DELLA DINAMICA
while(i && cont<cont_max)
55     cont = cont+1;
57     %Salvo il vettore delle opinioni nella colonna di X_i corrispondente
59     X_i(sub2ind(size(X_i),1:nR, repelem(cont, nR))) = x_new;
61     x_new = Q*x_old + E*u;
63     if(x_new-x_old <= epsilon)
        i = 0;
65     else
        x_old = x_new;
67     end
69 end
71 %PLOT DELLE TRAIETTORIE
X=zeros(nR+nS, cont);          %matrice X completa
73 X(1:nR, :) = X_i( : , 1:cont);
X(14, :) = u(1);
75 X(15, :) = u(2);
77 for k = 1:(nR+nS)
    figure(2)
79     hold on
    plot(1:cont, X(k,:), 'LineWidth', 1)
81     grid on
    ylim([-1.1 1.1])
83 end
85 xlabel('Tempo', 'FontSize', 10)
ylabel('Opinioni', 'FontSize', 10)
87 title('Traiettorie delle opinioni dei nodi', 'FontSize', 13, 'FontWeight', 'bold')
legend(Families(1:k))

```

Di seguito si riporta il grafico così prodotto, dal quale si evince che già dopo $n \approx 15$ iterazioni le opinioni dei singoli nodi si stabilizzano al loro valore finale.



Il vettore di equilibrio $x(t)$ vale:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.6363 \\ 0.2727 \\ -0.4546 \\ -0.4546 \\ 0.6362 \\ 0.2725 \\ 0.2726 \\ 1.0000 \\ -0.6364 \\ 0 \\ 1.0000 \\ 0.6363 \\ -1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

- (c) L'insieme dei nodi stubborn $S = \{Castellani, Guadagni, Medici, Strozzi\}$ è globalmente raggiungibile. Sia $D = \text{diag}(\omega_i)$ e P la matrice dei pesi nor-

malizzata.

$$P = D^{-1}W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto, il vettore di equilibrio della dinamica di averaging è dato dalla risoluzione del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_5 = x_7 = x_{14} = -1 \\ x_{15} = +1 \\ x_i = \sum_j P_{ij} x_j, \quad j = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_5 = x_7 = x_{14} = -1 \\ x_{15} = +1 \\ x_1 = x_1 5 \\ x_2 = \frac{1}{3} x_6 + \frac{1}{3} x_7 + \frac{1}{3} x_{15} \\ x_3 = \frac{1}{2} x_5 + \frac{1}{3} x_{15} \\ x_4 = \frac{1}{3} x_7 + \frac{1}{3} x_{10} + \frac{1}{3} x_{14} \\ x_6 = x_2 \\ x_8 = x_7 \\ x_9 = x_{12} \\ x_{10} = \frac{1}{3} x_4 + \frac{1}{3} x_5 + \frac{1}{3} x_{14} \\ x_{11} = \frac{1}{2} x_{15} + \frac{1}{3} x_{14} \\ x_{12} = \frac{1}{2} x_{15} + \frac{1}{2} x_9 \\ x_{13} = \frac{1}{2} x_7 + \frac{1}{2} x_{15} \end{cases} \quad (2)$$

La soluzione del sistema è

$$x(t) = [1, 0, 0, -1, -1, 0, -1, -1, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1]' \quad (3)$$

da cui si deduce che Acciaiuoli, Pazzi e Salviati avranno la stessa opinione dei Medici pari a +1 mentre Bischeri, Castellani, Guadagni, Lamberteschi, Peruzzi e Strozzi condivideranno l'opinione -1 ed i restanti Albizzi, Barbadori, Ginori, Ridolfi e Tornabuoni manterranno l'opinione iniziale pari a 0.

- (d) Il vettore di centralità Page-Rank z è la soluzione dell'equazione

$$z = (1 - \beta)P'z + \beta\nu \quad (4)$$

che equivale a calcolare il limite per $t \rightarrow \infty$ della dinamica di rete

$$y(t+1) = (1 - \beta)P'y(t) + \lambda \quad (5)$$

dove $\lambda = \beta\nu$.

Di seguito il codice Matlab utilizzato.

```
%y_new=Q'y_old+lambda
2 n = 15;
  beta = 0.15;
4 nu = (1/n)*ones(n,1);      %entrata uniforme
  Q = (1-beta)*P;
6 lambda = beta*nu;

8 %inizializzazioni
  cont_max = 60;              %stima iterazioni necessarie
10 y_old = zeros(n,1);
  y_new = zeros(n,1);
12 Y_i = zeros(n,cont_max);

14 eps = 1e-4;                %tolleranza
  flag = 1;                   %valuta se proseguire in base alla tolleranza
16 cont = 0;

18 while(flag && cont < cont_max)
    cont = cont+1;
    y_new = Q'*y_old + lambda;
    if(y_new - y_old <= epsilon)
22         flag = 0;
    else
24         y_old = y_new;
    end
26 end
```

Il vettore di centralità ottenuto è il seguente.

$$z(t) = \begin{pmatrix} 0.0317 \\ 0.0819 \\ 0.0519 \\ 0.0713 \\ 0.0714 \\ 0.0332 \\ 0.1033 \\ 0.0319 \\ 0.0367 \\ 0.0699 \\ 0.0513 \\ 0.0630 \\ 0.0537 \\ 0.0920 \\ 0.1535 \end{pmatrix}$$