Homework 1

Ornella Elena Grassi (s290310@studenti.polito.it)

November 30, 2020

Realizzato in collaborazione con Andrea Sanna(s222975)

Esercizio 1.

(a) I cammini che uniscono il nodo o al nodo d sono i seguenti:

$$p^{(1)} = o \to a \to d,$$
$$p^{(2)} = o \to b \to d,$$
$$p^{(3)} = o \to a \to b \to d.$$

Avendo ciascun arco una capacità maggiore di uno, tutti e 3 i cammini supportano flussi unitari. Per far sì che non ci siano più flussi unitari ammissibili, è necessario che la capacità di almeno un arco di ciascuno cammino sia portata a 0 oppure, al più, ad un valore $C < 1$.
Pertanto, sia ε tale che $0 < \varepsilon < 1$, basta rimuovere una quantità pari a $2 + \varepsilon$ dall'arco e_1 e $1 + \varepsilon$ dall'arco e_2 (oppure e_5) o, equivalentemente, si può pensare di rimuovere $2 + \varepsilon$ dall'arco e_4 e $1 + \varepsilon$ dall'arco e_5. Entrambe le soluzioni apportano una riduzione minima di capacità pari a $3 + 2\varepsilon$ necessariamente distribuita come descritto.

(b) Dal teorema del *Max Flow-Min Cut* il flusso massimo è pari alla somma delle capacità degli archi del taglio minimo. Nel grafo considerato i possibili tagli sono:

- u_1 associato alla partizione $\mathcal{U}_1 = \{a, b, d\}$, con capacità $C_1^* = 3+2 = 5$
- u_2 associato alla partizione $\mathcal{U}_2 = \{b, d\}$, con capacità $C_2^* = 2 + 2 + 3 = 7$
- u_3 associato alla partizione $\mathcal{U}_3 = \{a, d\}$, con capacità $C_3^* = 3 + 2 = 5$
- u_4 associato alla partizione $\mathcal{U}_4 = \{d\}$ con capacità $C_4^* = 3 + 2 = 5$

Avendo perciò 3 tagli di capacità identica, pari a 5, è opportuno aggiungere le 2 unità di capacità agli archi in comune tra i 3 tagli minimi così da massimizzare il flusso. Una possibile soluzione è la seguente:

$$C'(e_1) = C(e_1) + 1 = 4 \qquad C'(e_5) = C(e_5) + 1 = 3$$

In questo modo si ottiene:

- $C_1^* = 4 + 2 = 6$
- $C_2^* = 2 + 2 + 4 = 8$
- $C_3^* = 4 + 2 = 6$
- $C_4^* = 4 + 2 = 6$

(c) Le funzioni di ritardo associate agli archi sono

$$d_1(x) = d_5(x) = x + 1; \quad d_3(x) = 1; \quad d_2(x) = d_4(x) = 5x + 1.$$

Essendo $z = \{z_1, z_2, z_3\}$ il vettore dei flussi sui cammini da o a d tali che $z_1 + z_2 + z_3 = 1$, le funzioni di ritardo ad essi associate sono date da:

- $\Delta_1 = 6z_1 + z_3 + 2$ associato al cammino $p^{(1)} : o \to a \to d$;
- $\Delta_2 = 6z_2 + z_3 + 2$ associato a $p^{(2)} : o \to b \to d$;
- $\Delta_3 = z_1 + z_2 + 2z_3 + 3$ associato a $p^{(3)} : o \to a \to b \to d$.

L'equilibrio di Wardrop è la configurazione dei flussi che corrisponde all'ottimo per l'utente, quindi se il flusso sul percorso i con $i = 1, 2, 3$ è non nullo, cioè $z_i > 0$, il ritardo associato al percorso i deve soddisfare $\Delta_i \leq \Delta_j, \quad \forall j \neq i$. Sia $z_1 > 0$ e $z_2 > 0$. Da queste ipotesi deve risultare necessariamente

$$\begin{cases} \Delta_1 \leq \Delta_2 \Leftrightarrow 6z_1 + z_3 + 2 \leq 6z_2 + z_3 + 2 \Leftrightarrow z_1 \leq z_2 \\ \Delta_2 \leq \Delta_1 \Leftrightarrow 6z_2 + z_3 + 2 \leq 6z_1 + z_3 + 2 \Leftrightarrow z_1 \geq z_2 \end{cases}$$

Da cui si ottiene $z_1 = z_2$.

Si considera ora $z_3 > 0$, per cui deve valere

$$\begin{cases} \Delta_3 \leq \Delta_1 \Leftrightarrow z_1 + z_2 + 2z_3 \leq 6z_1 + z_3 + 2 \Leftrightarrow z_3 \leq 4z_1 - 1 \\ \Delta_1 \leq \Delta_3 \Leftrightarrow 6z_1 + z_3 + 2 \leq z_1 + z_2 + 2z_3 \Leftrightarrow z_3 \geq 4z_1 - 1 \end{cases}$$

Quindi $z_3 = 4z_1 - 1$.
Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} z_1 = z_2; \\ z_3 = 4z_1 - 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1, \end{cases} \tag{1}$$

si ottiene la configurazione dell'equilibrio di Wardrop pari a

$$z = (z_1, z_2, z_3) = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}).$$

Il corrispondente vettore di flusso sugli archi $f^{(UO)}$ in cui ciascuna delle componenti è $f^{(UO)}_{e_i}$, ossia il flusso sull'arco e_i, sarà: $f^{(UO)} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Il tempo totale di percorrenza (Total Travel Time) è dato dalla formula

$$\sum_{e\in\epsilon} C_e(f_e) = \sum_{e\in\epsilon} d_e(f) f_e$$

e pertanto vale

$$TTT = \frac{2}{3}(\frac{2}{3}+1) + \frac{1}{3}(5\frac{1}{3}+1) + 1(\frac{1}{3}) + \frac{1}{3}(5\frac{1}{3}+1) + \frac{2}{3}(\frac{2}{3}+1) = \frac{13}{3}$$

.

(d) Per minimizzare il ritardo medio $o-d$ è necessario calcolare la configurazione dei flussi tale per cui il costo totale è il minimo possibile. Occorre quindi calcolare

$$\underset{z}{\operatorname{argmin}}\, z_1(z_1+z_3+1+5z_1+1)+z_2(5z_2+1+z_2+z_3+1)+z_3(z_1+z_3+1+1+z_2+z_3)$$
$$s.t. \quad z_1+z_2+z_3=1$$

che equivale a risolvere

$$\begin{gathered}\operatorname{argmin}_z 6z_1^2+6z_2^2-3z_1-3z_2+5\\ s.t. \quad z_3 = 1-z_2-z_1\end{gathered}$$

Da qui si deduce che, essendo $f''(z_1) = f''(z_2) = 12 > 0$ la funzione di costo è convessa e pertanto per trovare il minimo valore di z_1 e z_2 basta osservare dove si annulla la derivata prima. Si ottine quindi che $z_1 = z_2 = \frac{1}{4}$ e risolvendo il seguente sistema

$$\begin{cases} z_1 = z_2 = \frac{1}{4}; \\ z_1+z_2+z_3 = 1, \end{cases} \tag{2}$$

si trova $z_3 = \frac{1}{2}$ e che $z = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$.

Il corrispondente flusso sugli archi all'ottimo di sistema sarà dato da:

$$f^{(SO)} = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$$

.

Il ritardo medio all'ottimo di sistema è invece dato da:

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} f_e^* d(f_e^*) = \frac{1}{4}(6\frac{1}{4}+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(6\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+2)+\frac{1}{2}(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}+3) = \frac{17}{4}$$

(e) Il prezzo dell'anarchia (PoA) è dato dal rapporto fra il ritardo medio all'equilibrio di Wardrop e il costo totale all'ottimo di sistema, quindi:

$$PoA = \frac{\frac{13}{3}}{\frac{17}{4}} = \frac{52}{51}$$

(f) Per portare il PoA ad 1 bisogna far sì che il costo totale all'ottimo di sistema e quello all'equilibrio di Wardrop si eguaglino. Si deve pertanto trovare un vettore di pedaggi ω che vada a modificare l'equilibrio di Wardrop precedente, in modo che questo coincida con l'ottimo di sistema, cioè si abbia che $f^{(\omega^*)} = f^*$.
Il vettore dei pedaggi sarà perciò dato da

$$\omega_i = f_e^* d_e(f_e^*)$$

Si trova quindi che

$$\omega = (1\frac{3}{4}, 5\frac{1}{4}, 0\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}) = (\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 0, \frac{5}{4}, \frac{3}{4})$$

.

Esercizio 2.

(a) Sia $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, W)$ il grafo assegnato. La matrice dei pesi è data da:

$$W = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definendo come $w = diag(W) = (a, 0, 0, 0)$ il vettore della diagonale di W, la matrice dei pesi normalizzata P è:

$$P = D^{-1}W = \begin{bmatrix} \frac{a}{a+1} & \frac{1}{a+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il Laplaciano L è:

$$L = D - W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Osserviamo che $\mathcal{G}$ è fortemente connesso e aperiodico $\forall a \geq 0$, infatti se $a > 0$ il grafo contiene un self-loop e quindi è aperiodico, mentre se $a = 0$, quindi non è più presente il self-loop, rimane aperiodico perchè contiene, ad esempio, i cicli $2 \to 4 \to 1$ e $2 \to 4 \to 1 \to 2$ di lunghezza 2 e 3, che sono coprimi. Inoltre $\mathcal{G}$ è bilanciato, cioè ogni nodo ha grado entrante pari al grado uscente.

(c) Consideriamo la dinamica di opinione di French-De Groot sul grafo $\mathcal{G}$: $x(t+1) = Px(t)$. Dato che $\mathcal{G}$ è fortemente connesso e aperiodico per ogni $a \geq 0$, allora la dinamica converge al consenso per ogni $a \geq 0$:

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = \pi' x(0) = \sum_i \pi_i x_i(0), \forall x(0)$$

dove abbiamo indicato con π la distribuzione invariante di centralità, data da $\pi' = P'\pi$.

Dal fatto che G è fortemente connesso sappiamo che $\pi_i > 0 \quad \forall i$. In particolare, dal fatto che $\mathcal{G}$ è bilanciato, sappiamo che la misura invariante è proporzionale al vettore dei gradi w. Osservando che $w\mathbb{1} = a+1+2+1+2 = a+6$, otteniamo il vettore della distribuzione invariante di centralità:

$$\pi = (\frac{a+1}{a+6}, \frac{2}{a+6}, \frac{1}{a+6}, \frac{2}{a+6})'.$$

(d) Sia $x(0) = [-1, 1, -1, 1]'$ il vettore delle opinioni iniziali. Poichè il limite del profilo delle opinioni esiste per $a \geq 0$ possiamo affermare che la dinamica convergerà sicuramente al consenso per $a = 0$, che possiamo calcolare come

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = \sum_{i\in\mathcal{V}} \pi_i x_i(0) = \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{3}(1) + \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{3}(1) = \frac{1}{3}.$$

(e) Il valore minimo di a tale per cui $\lim_{t\to\infty} x_1(t) \leq 0$ con il vettore delle condizioni iniziali $x(0)$ del punto precedente si trova osservando che

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \frac{1}{a+6}((-1)(a+1) + 2 - 1 + 2) = \frac{2-a}{a+6} \leq 0 \Leftrightarrow a \geq 2$$

da cui si ottiene che il valore minimo di a è $a = 2$.

(f) Definiamo $f(a) := Var(\lim_{t\to\infty} x_1(t))$. Calcoliamo quindi $f(a)$ come

$$\begin{aligned} f(a) &= Var(\pi_1 x_1(0) + \pi_2 x_2(0) + \pi_3 x_3(0) + \pi_4 x_4(0)) = \\ &= \sum_{i=1}^{4} \pi_i^2 Var(x_i(0)) = \sum_{i=1}^{4} \pi_i^2 = \frac{1}{(a+6)^2}((a+2)^2 + 4 + 1 + 4) = \\ &= \frac{a^2 + 2a + 10}{(a+6)^2} \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le proprietà della varianza, il fatto che gli $x_i(0)$ fossero variabili aleatorie indipendenti fra loro (quindi con covarianza nulla) e varianza unitaria.
Osserviamo che tale funzione è convessa, quindi per calcolare il valore di a che la minimizzi è sufficiente calcolare il valore per il quale si annulla la derivata prima:

$$f'(a) = \frac{10a - 8}{(a+6)^3} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{5}$$

Quindi il valore che minimizza la varianza del limite del consenso è $a = \frac{4}{5}$.

Esercizio 3.

(a) Il grafo in questione è indiretto e aciclico. Il vettore dei vertici, ordinati in ordine alfabetico, risulta essere:

$$v = \{Acciaiuoli, Albizzi, Barbadori, Bischeri, Castellani,$$
$$Ginori, Guadagni, Lamberteschi, Pazzi, Peruzzi,$$
$$Ridolfi, Salviati, Tornabuoni, Strozzi, Medici\}$$

Si procede pertanto scrivendo la matrice di adiacenza W ed il vettore dei gradi w_i.

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_i = (1, 3, 2, 3, 3, 1, 4, 1, 1, 3, 2, 2, 2, 4, 6)$$

La misura di centralità invariante è unica e vale:

$$\pi_i = (\frac{1}{38}, \frac{3}{38}, \frac{1}{19}, \frac{3}{38}, \frac{3}{38}, \frac{1}{38}, \frac{2}{19}, \frac{1}{38}, \frac{1}{38}, \frac{3}{38}, \frac{1}{19}, \frac{1}{19}, \frac{1}{19}, \frac{2}{19}, \frac{3}{19}).$$

Essendo il grafo fortemente connesso e aperiodico si può concludere che la dinamica di averaging di French-De Groot converge al valore di consenso, come nell'esercizio precedente, dato dal limite:

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = \pi' x(0) = \sum_i \pi_i x_i(0), \forall x(0)$$

e pertanto, essendo $x(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1]'$ il vettore delle condizioni iniziali, si ottiene che il valore finale di consenso vale:

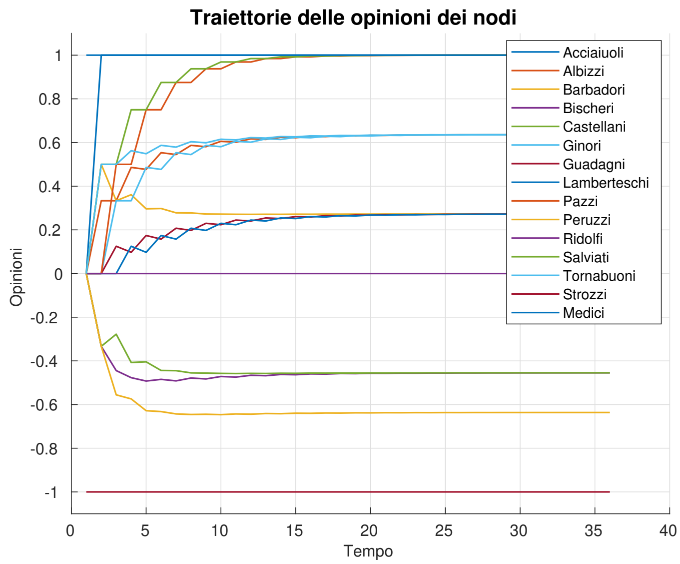
$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = (-1)\frac{2}{19} + (1)\frac{3}{19} = \frac{1}{19}$$

(b) Si riporta ora il codice Matlab sviluppato per visualizzare l'evoluzione della dinamica di opinione dei nodi del grafo, avendo assegnato ai due nodi stubborn $\{\text{Strozzi}, \text{Medici}\}$ rispettivamente i valori -1, +1.

```
Families={'Acciaiuoli', 'Albizzi', 'Barbadori', 'Bischeri',
'Castellani', 'Ginori', 'Guadagni', 'Lamberteschi','Pazzi',
'Peruzzi', 'Ridolfi', 'Salviati', 'Tornabuoni',
'Strozzi', 'Medici'}';

%Matrice di adiacenza W
W = zeros(15);

W(1,15) = 1;                        %Acciaiuoli
W(2,[6 7 15]) = 1;                  %Albizzi
W(3,[5 15]) = 1;                    %Barbadori
W(4,[7 10 14]) = 1;                 %Bischeri
W(5,[3 10 14]) = 1;                 %Castellani
W(6,2) = 1;                         %Ginori
W(7,[2 4 8 13]) = 1;                %Guadagni
W(8,7) = 1;                         %Lamberteschi
W(9,12) = 1;                        %Pazzi
W(10,[4 5 14]) = 1;                 %Peruzzi
W(11,[15 14]) = 1;                  %Ridolfi
W(12,[15 9]) = 1;                   %Salviati
W(13,[7 15]) = 1;                   %Tornabuoni
W(14,[4 5 10 11]) = 1;              %Strozzi
W(15,[1 2 3 11 12 13]) = 1;         %Medici

%vettore delle opinioni iniziali
x = zeros(15,1);
x(14) = -1;
x(15) = 1;

%calcolo matrice P
w = W*ones(15,1);
D = diag(w);
P = D\W;

nR=13;                              %regular nodes
nS=2;                               %stubborn nodes
u = [-1, 1]';                       %vettore degli ingressi stubborn

Q = P(1:nR, 1:nR);                  %matrice P ristretta a RxR
E = P(1:nR, (nR+1):(nR+nS));        %matrice P ristretta a RxS

%INIZIALIZZAZIONI
cont = 0;
cont_max = 50;
epsilon = 1e-4;                     %valore di tolleranza
```

```
i = 1;

x_new = zeros(nR,1);            %vettore delle opinioni
x_old = zeros(nR,1);
X_i = zeros(nR, cont_max);      %matrice dei risultati


%CALCOLO PASSI DELLA DINAMICA
while(i && cont<cont_max)

    cont = cont+1;

    %Salvo il vettore delle opinioni nella colonna di X_i corrispondente
    X_i(sub2ind(size(X_i),1:nR, repelem(cont, nR))) = x_new;

    x_new = Q*x_old + E*u;

    if(x_new-x_old <= epsilon)
        i = 0;
    else
        x_old = x_new;
    end

end

%PLOT DELLE TRAIETTORIE
X=zeros(nR+nS, cont);           %matrice X completa
X(1:nR, :) = X_i( : , 1:cont);
X(14, :) = u(1);
X(15, :) = u(2);

for k = 1:(nR+nS)
    figure(2)
    hold on
    plot(1:cont, X(k,:),  'LineWidth', 1)
    grid on
    ylim([-1.1 1.1])
end

xlabel('Tempo', 'FontSize', 10)
ylabel('Opinioni', 'FontSize', 10)
title('Traiettorie delle opinioni dei nodi', 'FontSize', 13, 'FontWeight', 'bold')
legend(Families(1:k))
```

Di seguito si riporta il grafico così prodotto, dal quale si evince che già dopo $n \approx 15$ iterazioni le opinioni dei singoli nodi si stabilizzano al loro valore finale.



Il vettore di equilibrio $x(t)$ vale:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.6363 \\ 0.2727 \\ -0.4546 \\ -0.4546 \\ 0.6362 \\ 0.2725 \\ 0.2726 \\ 1.0000 \\ -0.6364 \\ 0 \\ 1.0000 \\ 0.6363 \\ -1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

(c) L'insieme dei nodi stubborn $S = \{Castellani, Guadagni, Medici, Strozzi\}$ è globalmente raggiungibile. Sia $D = diag(\omega_i)$ e P la matrice dei pesi normalizzata.

$$P = D^{-1}W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Pertanto, il vettore di equilibrio della dinamica di averaging è dato dalla risoluzione del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_5 = x_7 = x_{14} = -1 \\ x_{15} = +1 \\ x_i = \sum_j P_{ij} x_j, \;\; j = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x_5 = x_7 = x_{14} = -1 \\ x_1 5 = +1 \\ x_1 = x_1 5 \\ x_2 = \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_1 5 \\ x_3 = \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{3}x_1 5 \\ x_4 = \frac{1}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_{10} + \frac{1}{3}x_{14} \\ x_6 = x_2 \\ x_8 = x_7 \\ x_9 = x_{12} \\ x_{10} = \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_{14} \\ x_{11} = \frac{1}{2}x_1 5 + \frac{1}{3}x_{14} \\ x_{12} = \frac{1}{2}x_1 5 + \frac{1}{2}x_9 \\ x_{13} = \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_1 5 \end{cases} \tag{4}$$

La soluzione del sistema è

$$x(t) = [1, 0, 0, -1, -1, 0, -1, -1, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1]' \tag{5}$$

da cui si deduce che Acciaiuoli, Pazzi e Salviati avranno la stessa opinione dei Medici pari a +1 mentre Bischeri, Castellani, Guadagni, Lamberteschi, Peruzzi e Strozzi condivideranno l'opinione −1 ed i restanti Albizzi, Barbadori, Ginori, Ridolfi e Tornabuoni manterranno l'opinione iniziale pari a 0.

(d) Il vettore di centralità Page-Rank z è la soluzione dell'equazione

$$z = (1-\beta)P'z + \beta\nu \tag{6}$$

che equivale a calcolare il limite per $t \to \infty$ della dinamica di rete

$$y(t+1) = (1-\beta)P'y(t) + \lambda \tag{7}$$

dove $\lambda = \beta\nu$.

Di seguito il codice Matlab utilizzato.

```
%y_new=Q'y_old+lambda
n = 15;
beta = 0.15;
nu = (1/n)*ones(n,1);        %entrata uniforme
Q = (1-beta)*P;
lambda = beta*nu;

%inizializzazioni
cont_max = 60;          %stima iterazioni necessarie
y_old = zeros(n,1);
y_new = zeros(n,1);
Y_i = zeros(n,cont_max);

eps = 1e-4;          %tolleranza
flag = 1;            %valuta se proseguire in base alla tolleranza
cont = 0;

while(flag && cont < cont_max)
    cont = cont+1;
    y_new = Q'*y_old + lambda;
    if(y_new - y_old <= epsilon)
        flag = 0;
    else
        y_old = y_new;
    end
end
```

Il vettore di centralità ottenuto è il seguente.

$$z(t) = \begin{pmatrix} 0.0317 \\ 0.0819 \\ 0.0519 \\ 0.0713 \\ 0.0714 \\ 0.0332 \\ 0.1033 \\ 0.0319 \\ 0.0367 \\ 0.0699 \\ 0.0513 \\ 0.0630 \\ 0.0537 \\ 0.0920 \\ 0.1535 \end{pmatrix}$$

.