

Homework 1

Ornella Elena Grassi (s290310@studenti.polito.it)

January 27, 2021

Realizzato in collaborazione con Andrea Sanna(s222975)

Esercizio 1.

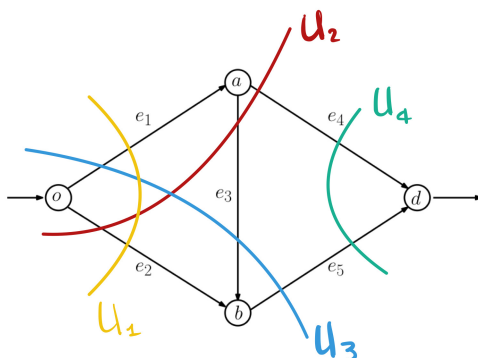
- (a) I cammini che uniscono il nodo o al nodo d sono i seguenti:

$$\begin{aligned}p^{(1)} &= o \rightarrow a \rightarrow d, \\p^{(2)} &= o \rightarrow b \rightarrow d, \\p^{(3)} &= o \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow d.\end{aligned}$$

Avendo ciascun arco una capacità maggiore di uno, tutti e 3 i cammini supportano flussi unitari. Per far sì che non ci siano più flussi unitari ammissibili, è necessario che la capacità di almeno un arco di ciascuno cammino sia portata a 0 oppure, al più, ad un valore $C < 1$.

Pertanto, sia ε tale che $0 < \varepsilon < 1$, basta rimuovere una quantità pari a $2 + \varepsilon$ dall'arco e_1 e $1 + \varepsilon$ dall'arco e_2 (oppure e_5) o, equivalentemente, si può pensare di rimuovere $2 + \varepsilon$ dall'arco e_4 e $1 + \varepsilon$ dall'arco e_5 . Entrambe le soluzioni apportano una riduzione minima di capacità pari a $3 + 2\varepsilon$ necessariamente distribuita come descritto.

- (b) Dal teorema del *Max Flow-Min Cut* il flusso massimo è pari alla somma delle capacità degli archi del taglio minimo. Nel grafo considerato i possibili tagli sono:



- u_1 associato alla partizione $\mathcal{U}_1 = \{o\}$, con capacità $C_1^* = 3 + 2 = 5$
- u_2 associato alla partizione $\mathcal{U}_2 = \{o, a\}$,
con capacità $C_2^* = 2 + 2 + 3 = 7$
- u_3 associato alla partizione $\mathcal{U}_3 = \{o, b\}$,
con capacità $C_3^* = 3 + 2 = 5$
- u_4 associato alla partizione $\mathcal{U}_4 = \{o, a, b\}$
con capacità $C_4^* = 3 + 2 = 5$

Avendo perciò 3 tagli di capacità identica, pari a 5, è opportuno aggiungere le 2 unità di capacità agli archi in comune tra i 3 tagli minimi così da massimizzare il flusso. Una possibile soluzione è la seguente:

$$C'(e_1) = C(e_1) + 1 = 4 \quad C'(e_5) = C(e_5) + 1 = 3$$

In questo modo si ottiene:

- $C_1^* = 4 + 2 = 6$
- $C_2^* = 2 + 2 + 3 = 7$
- $C_3^* = 4 + 3 = 7$
- $C_4^* = 3 + 3 = 6$

(c) Le funzioni di ritardo associate agli archi sono

$$d_1(x) = d_5(x) = x + 1; \quad d_3(x) = 1; \quad d_2(x) = d_4(x) = 5x + 1.$$

Essendo $z = \{z_1, z_2, z_3\}$ il vettore dei flussi sui cammini da o a d tali che $z_1 + z_2 + z_3 = 1$, le funzioni di ritardo ad essi associate sono date da:

- $\Delta_1 = 6z_1 + z_3 + 2$ associato al cammino $p^{(1)} : o \rightarrow a \rightarrow d$;
- $\Delta_2 = 6z_2 + z_3 + 2$ associato a $p^{(2)} : o \rightarrow b \rightarrow d$;
- $\Delta_3 = z_1 + z_2 + 2z_3 + 3$ associato a $p^{(3)} : o \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow d$.

L'equilibrio di Wardrop è la configurazione dei flussi che corrisponde all'ottimo per l'utente, quindi se il flusso sul percorso i con $i = 1, 2, 3$ è non nullo, cioè $z_i > 0$, il ritardo associato al percorso i deve soddisfare $\Delta_i \leq \Delta_j, \quad \forall j \neq i$. Sia $z_1 > 0$ e $z_2 > 0$. Da queste ipotesi deve risultare necessariamente

$$\begin{cases} \Delta_1 \leq \Delta_2 \Leftrightarrow 6z_1 + z_3 + 2 \leq 6z_2 + z_3 + 2 \Leftrightarrow z_1 \leq z_2 \\ \Delta_2 \leq \Delta_1 \Leftrightarrow 6z_2 + z_3 + 2 \leq 6z_1 + z_3 + 2 \Leftrightarrow z_1 \geq z_2 \end{cases}$$

Da cui si ottiene $z_1 = z_2$.

Si considera ora $z_3 > 0$, per cui deve valere

$$\begin{cases} \Delta_3 \leq \Delta_1 \Leftrightarrow z_1 + z_2 + 2z_3 \leq 6z_1 + z_3 + 2 \Leftrightarrow z_3 \leq 4z_1 - 1 \\ \Delta_1 \leq \Delta_3 \Leftrightarrow 6z_1 + z_3 + 2 \leq z_1 + z_2 + 2z_3 \Leftrightarrow z_3 \geq 4z_1 - 1 \end{cases}$$

Quindi $z_3 = 4z_1 - 1$.

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} z_1 = z_2; \\ z_3 = 4z_1 - 1 \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1, \end{cases} \quad (1)$$

si ottiene la configurazione dell'equilibrio di Wardrop pari a

$$z = (z_1, z_2, z_3) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}).$$

Il corrispondente vettore di flusso sugli archi $f^{(UO)}$ in cui ciascuna delle componenti è $f_{e_i}^{(UO)}$, ossia il flusso sull'arco e_i , sarà: $f^{(UO)} = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Il tempo totale di percorrenza (Total Travel Time) è dato dalla formula

$$\sum_{e \in \epsilon} C_e(f_e) = \sum_{e \in \epsilon} d_e(f) f_e$$

e pertanto vale

$$TTT = \frac{2}{3}(\frac{2}{3} + 1) + \frac{1}{3}(5\frac{1}{3} + 1) + 1(\frac{1}{3}) + \frac{1}{3}(5\frac{1}{3} + 1) + \frac{2}{3}(\frac{2}{3} + 1) = \frac{13}{3}$$

- (d) Per minimizzare il ritardo medio $o - d$ è necessario calcolare la configurazione dei flussi tale per cui il costo totale è il minimo possibile. Occorre quindi calcolare

$$\operatorname{argmin}_z z_1(z_1 + z_3 + 1 + 5z_1 + 1) + z_2(5z_2 + 1 + z_2 + z_3 + 1) + z_3(z_1 + z_3 + 1 + 1 + z_2 + z_3)$$

$$s.t. \quad z_1 + z_2 + z_3 = 1$$

che equivale a risolvere

$$\operatorname{argmin}_z 6z_1^2 + 6z_2^2 - 3z_1 - 3z_2 + 5$$

$$s.t. \quad z_3 = 1 - z_2 - z_1$$

Da qui si deduce che, essendo $f''(z_1) = f''(z_2) = 12 > 0$ la funzione di costo è convessa e pertanto per trovare il minimo valore di z_1 e z_2 basta osservare dove si annulla la derivata prima. Si ottiene quindi che $z_1 = z_2 = \frac{1}{4}$ e risolvendo il seguente sistema

$$\begin{cases} z_1 = z_2 = \frac{1}{4}; \\ z_1 + z_2 + z_3 = 1, \end{cases} \quad (2)$$

si trova $z_3 = \frac{1}{2}$ e che $z = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$.

Il corrispondente flusso sugli archi all'ottimo di sistema sarà dato da:

$$f^{(SO)} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Il ritardo medio all'ottimo di sistema è invece dato da:

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} f_e^* d(f_e^*) = \frac{1}{4}(6\frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}(6\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 2) + \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} + 3) = \frac{17}{4}$$

- (e) Il prezzo dell'anarchia (PoA) è dato dal rapporto fra il ritardo medio all'equilibrio di Wardrop e il costo totale all'ottimo di sistema, quindi:

$$PoA = \frac{\frac{13}{3}}{\frac{17}{4}} = \frac{52}{51}$$

- (f) Per portare il PoA ad 1 bisogna far sì che il costo totale all'ottimo di sistema e quello all'equilibrio di Wardrop si eguaglino. Si deve pertanto trovare un vettore di pedaggi ω che vada a modificare l'equilibrio di Wardrop precedente, in modo che questo coincida con l'ottimo di sistema, cioè si abbia che $f^{(\omega)} = f^*$.

Il vettore dei pedaggi sarà perciò dato da

$$\omega_i = f_e^* d_e(f_e^*)$$

Si trova quindi che

$$\omega = (1\frac{3}{4}, 5\frac{1}{4}, 0\frac{1}{2}, 5\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}) = (\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, 0, \frac{5}{4}, \frac{3}{4})$$

Esercizio 2.

- (a) Sia $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, W)$ il grafo assegnato. La matrice dei pesi è data da:

$$W = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definendo come $w = \text{diag}(W) = (a, 0, 0, 0)$ il vettore della diagonale di W , la matrice dei pesi normalizzata P è:

$$P = D^{-1}W = \begin{bmatrix} \frac{a}{a+1} & \frac{1}{a+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il Laplaciano L è:

$$L = D - W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (b) Osserviamo che \mathcal{G} è fortemente connesso e aperiodico $\forall a \geq 0$, infatti se $a > 0$ il grafo contiene un self-loop e quindi è aperiodico, mentre se $a = 0$, quindi non è più presente il self-loop, rimane aperiodico perché contiene, ad esempio, i cicli $2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ e $2 \rightarrow 4 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ di lunghezza 2 e 3, che sono coprimi. Inoltre \mathcal{G} è bilanciato, cioè ogni nodo ha grado entrante pari al grado uscente.
- (c) Consideriamo la dinamica di opinione di French-De Groot sul grafo \mathcal{G} : $x(t+1) = Px(t)$. Dato che \mathcal{G} è fortemente connesso e aperiodico per ogni $a \geq 0$, allora la dinamica converge al consenso per ogni $a \geq 0$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \pi' x(0) = \sum_i \pi_i x_i(0), \forall x(0)$$

dove abbiamo indicato con π la distribuzione invariante di centralità, data da $\pi' = P'\pi$.

Dal fatto che G è fortemente connesso sappiamo che $\pi_i > 0 \quad \forall i$. In particolare, dal fatto che \mathcal{G} è bilanciato, sappiamo che la misura invariante è proporzionale al vettore dei gradi w . Osservando che $w\mathbb{1} = a+1+2+1+2 = a+6$, otteniamo il vettore della distribuzione invariante di centralità:

$$\pi = \left(\frac{a+1}{a+6}, \frac{2}{a+6}, \frac{1}{a+6}, \frac{2}{a+6} \right)'.$$

- (d) Sia $x(0) = [-1, 1, -1, 1]'$ il vettore delle opinioni iniziali. Poichè il limite del profilo delle opinioni esiste per $a \geq 0$ possiamo affermare che la dinamica convergerà sicuramente al consenso per $a = 0$, che possiamo calcolare come

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \sum_{i \in \mathcal{V}} \pi_i x_i(0) = \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{3}(1) + \frac{1}{6}(-1) + \frac{1}{3}(1) = \frac{1}{3}.$$

- (e) Il valore minimo di a tale per cui $\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) \leq 0$ con il vettore delle condizioni iniziali $x(0)$ del punto precedente si trova osservando che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = \frac{1}{a+6}((-1)(a+1) + 2 - 1 + 2) = \frac{2-a}{a+6} \leq 0 \Leftrightarrow a \geq 2$$

da cui si ottiene che il valore minimo di a è $a = 2$.

- (f) Definiamo $f(a) := \text{Var}(\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t))$. Calcoliamo quindi $f(a)$ come

$$\begin{aligned} f(a) &= \text{Var}(\pi_1 x_1(0) + \pi_2 x_2(0) + \pi_3 x_3(0) + \pi_4 x_4(0)) = \\ &= \sum_{i=1}^4 \pi_i^2 \text{Var}(x_i(0)) = \sum_{i=1}^4 \pi_i^2 = \frac{1}{(a+6)^2}((a+2)^2 + 4 + 1 + 4) = \\ &= \frac{a^2 + 2a + 10}{(a+6)^2} \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le proprietà della varianza, il fatto che gli $x_i(0)$ fossero variabili aleatorie indipendenti fra loro (quindi con covarianza nulla) e varianza unitaria.

Osserviamo che tale funzione è convessa, quindi per calcolare il valore di a che la minimizzi è sufficiente calcolare il valore per il quale si annulla la derivata prima:

$$f'(a) = \frac{10a - 8}{(a+6)^3} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4}{5}$$

Quindi il valore che minimizza la varianza del limite del consenso è $a = \frac{4}{5}$.

Esercizio 3.

- (a) Il grafo in questione è indiretto e aciclico. Il vettore dei vertici, ordinati in ordine alfabetico, risulta essere:

$$v = \{Acciaiuoli, Albizzi, Barbadori, Bischeri, Castellani, \\ \text{Ginori, Guadagni, Lamberteschi, Pazzi, Peruzzi,} \\ \text{Ridolfi, Salviati, Tornabuoni, Strozzi, Medici}\}$$

Si procede pertanto scrivendo la matrice di adiacenza W ed il vettore dei gradi w_i .

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_i = (1, 3, 2, 3, 3, 1, 4, 1, 1, 3, 2, 2, 2, 4, 6)$$

La misura di centralità invariante è unica e vale:

$$\pi_i = \left(\frac{1}{38}, \frac{3}{38}, \frac{1}{19}, \frac{3}{38}, \frac{3}{38}, \frac{1}{38}, \frac{2}{19}, \frac{1}{38}, \frac{1}{38}, \frac{3}{38}, \frac{1}{19}, \frac{1}{19}, \frac{1}{19}, \frac{2}{19}, \frac{3}{19} \right).$$

Essendo il grafo fortemente connesso e aperiodico si può concludere che la dinamica di averaging di French-De Groot converge al valore di consenso, come nell'esercizio precedente, dato dal limite:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \pi' x(0) = \sum_i \pi_i x_i(0), \forall x(0)$$

e pertanto, essendo $x(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 1]'$ il vettore delle condizioni iniziali, si ottiene che il valore finale di consenso vale:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = (-1) \frac{2}{19} + (1) \frac{3}{19} = \frac{1}{19}$$

- (b) Si riporta ora il codice Matlab sviluppato per visualizzare l'evoluzione della dinamica di opinione dei nodi del grafo, avendo assegnato ai due nodi stubborn {Strozzi, Medici} rispettivamente i valori -1, +1.

```
1 Families={'Acciaiuoli', 'Albizzi', 'Barbadori', 'Bischeri',  
2 'Castellani', 'Ginori', 'Guadagni', 'Lamberteschi', 'Pazzi',  
3 'Peruzzi', 'Ridolfi', 'Salviati', 'Tornabuoni',  
4 'Strozzi', 'Medici'};  
5  
6 %Matrice di adiacenza W  
7 W = zeros(15);  
8  
9 W(1,15) = 1; %Acciaiuoli  
10 W(2,[6 7 15]) = 1; %Albizzi  
11 W(3,[5 15]) = 1; %Barbadori  
12 W(4,[7 10 14]) = 1; %Bischeri  
13 W(5,[3 10 14]) = 1; %Castellani  
14 W(6,2) = 1; %Ginori  
15 W(7,[2 4 8 13]) = 1; %Guadagni  
16 W(8,7) = 1; %Lamberteschi  
17 W(9,12) = 1; %Pazzi  
18 W(10,[4 5 14]) = 1; %Peruzzi  
19 W(11,[15 14]) = 1; %Ridolfi  
20 W(12,[15 9]) = 1; %Salviati  
21 W(13,[7 15]) = 1; %Tornabuoni  
22 W(14,[4 5 10 11]) = 1; %Strozzi  
23 W(15,[1 2 3 11 12 13]) = 1; %Medici  
24  
25 %vettore delle opinioni iniziali  
26 x = zeros(15,1);  
27 x(14) = -1;  
28 x(15) = 1;  
29  
30 %calcolo matrice P  
31 w = W*ones(15,1);  
32 D = diag(w);  
33 P = D\W;  
34  
35 nR=13; %regular nodes  
36 nS=2; %stubborn nodes  
37 u = [-1, 1]'; %vettore degli ingressi stubborn  
38  
39 Q = P(1:nR, 1:nR); %matrice P ristretta a RxR  
40 E = P(1:nR, (nR+1):(nR+nS)); %matrice P ristretta a RxS  
41  
42 %INIZIALIZZAZIONI  
43 cont = 0;  
44 cont_max = 50;  
45 epsilon = 1e-4; %valore di tolleranza
```



```
i = 1;
47
x_new = zeros(nR,1);           %vettore delle opinioni
49 x_old = zeros(nR,1);
X_i = zeros(nR, cont_max);     %matrice dei risultati
51

53 %CALCOLO PASSI DELLA DINAMICA
while(i && cont<cont_max)
55
    cont = cont+1;
57
    %Salvo il vettore delle opinioni nella colonna di X_i corrispondente
59 X_i(sub2ind(size(X_i),1:nR, repelem(cont, nR))) = x_new;

61 x_new = Q*x_old + E*u;

63 if(x_new-x_old <= epsilon)
    i = 0;
65 else
    x_old = x_new;
67 end

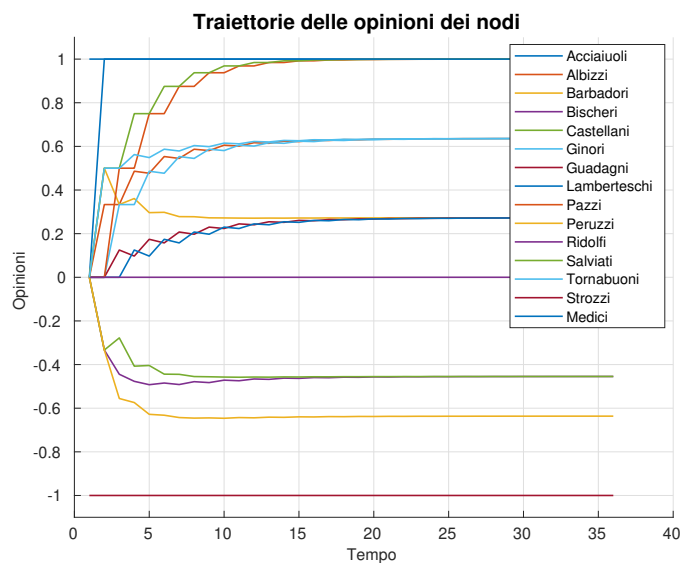
69 end

71 %PLOT DELLE TRAIETTORIE
X=zeros(nR+nS, cont);         %matrice X completa
73 X(1:nR, :) = X_i( : , 1:cont);
X(14, :) = u(1);
75 X(15, :) = u(2);

77 for k = 1:(nR+nS)
    figure(2)
79     hold on
    plot(1:cont, X(k,:), 'LineWidth', 1)
81     grid on
    ylim([-1.1 1.1])
83 end

85 xlabel('Tempo', 'FontSize', 10)
ylabel('Opinioni', 'FontSize', 10)
87 title('Traiettorie delle opinioni dei nodi', 'FontSize', 13, 'FontWeight', 'bold')
legend(Families(1:k))
```

Di seguito si riporta il grafico così prodotto, dal quale si evince che già dopo $n \approx 15$ iterazioni le opinioni dei singoli nodi si stabilizzano al loro valore finale.



Il vettore di equilibrio $x(t)$ vale:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.6363 \\ 0.2727 \\ -0.4546 \\ -0.4546 \\ 0.6362 \\ 0.2725 \\ 0.2726 \\ 1.0000 \\ -0.6364 \\ 0 \\ 1.0000 \\ 0.6363 \\ -1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

- (c) L'insieme dei nodi stubborn $S = \{Castellani, Guadagni, Medici, Strozzi\}$ è globalmente raggiungibile. Sia $D = \text{diag}(\omega_i)$ e P la matrice dei pesi nor-

malizzata.

$$P = D^{-1}W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto, il vettore di equilibrio della dinamica di averaging è dato dalla risoluzione del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_5 = x_7 = x_{14} = -1 \\ x_{15} = +1 \\ x_i = \sum_j P_{ij} x_j, \quad j = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x_5 = x_7 = x_{14} = -1 \\ x_{15} = +1 \\ x_1 = x_{15} \\ x_2 = \frac{1}{3}x_6 + \frac{1}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_{15} \\ x_3 = \frac{1}{2}x_5 + \frac{1}{3}x_{15} \\ x_4 = \frac{1}{3}x_7 + \frac{1}{3}x_{10} + \frac{1}{3}x_{14} \\ x_6 = x_2 \\ x_8 = x_7 \\ x_9 = x_{12} \\ x_{10} = \frac{1}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3}x_{14} \\ x_{11} = \frac{1}{2}x_{15} + \frac{1}{3}x_{14} \\ x_{12} = \frac{1}{2}x_{15} + \frac{1}{2}x_9 \\ x_{13} = \frac{1}{2}x_7 + \frac{1}{2}x_{15} \end{cases} \quad (4)$$

La soluzione del sistema è

$$x(t) = [1, 0, 0, -1, -1, 0, -1, -1, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1]' \quad (5)$$

da cui si deduce che Acciaiuoli, Pazzi e Salviati avranno la stessa opinione dei Medici pari a +1 mentre Bischeri, Castellani, Guadagni, Lamberteschi, Peruzzi e Strozzi condivideranno l'opinione -1 ed i restanti Albizzi, Barbadori, Ginori, Ridolfi e Tornabuoni manterranno l'opinione iniziale pari a 0.

- (d) Il vettore di centralità Page-Rank z è la soluzione dell'equazione

$$z = (1 - \beta)P'z + \beta\nu \quad (6)$$

che equivale a calcolare il limite per $t \rightarrow \infty$ della dinamica di rete

$$y(t+1) = (1 - \beta)P'y(t) + \lambda \quad (7)$$

dove $\lambda = \beta\nu$.

Di seguito il codice Matlab utilizzato.

```
%y_new=Q'y_old+lambda
2 n = 15;
  beta = 0.15;
4 nu = (1/n)*ones(n,1);      %entrata uniforme
  Q = (1-beta)*P;
6 lambda = beta*nu;

8 %inizializzazioni
  cont_max = 60;              %stima iterazioni necessarie
10 y_old = zeros(n,1);
  y_new = zeros(n,1);
12 Y_i = zeros(n,cont_max);

14 eps = 1e-4;                %tolleranza
  flag = 1;                   %valuta se proseguire in base alla tolleranza
16 cont = 0;

18 while(flag && cont < cont_max)
    cont = cont+1;
20    y_new = Q'*y_old + lambda;
    if(y_new - y_old <= epsilon)
22        flag = 0;
    else
24        y_old = y_new;
    end
26 end
```

Il vettore di centralità ottenuto è il seguente.

$$z(t) = \begin{pmatrix} 0.0317 \\ 0.0819 \\ 0.0519 \\ 0.0713 \\ 0.0714 \\ 0.0332 \\ 0.1033 \\ 0.0319 \\ 0.0367 \\ 0.0699 \\ 0.0513 \\ 0.0630 \\ 0.0537 \\ 0.0920 \\ 0.1535 \end{pmatrix}$$