Question 1.

(a) Il grafo in questione è indiretto e aciclico. Il vettore dei vertici, ordinati in ordine alfabetico, risulta essere:

$$v = \{Acciaiuoli, Albizzi, Barbadori, Bischeri, Castellani,\\ Ginori, Guadagni, Lamberteschi, Pazzi, Peruzzi,\\ Ridolfi, Salviati, Tornabuoni, Strozzi, Medici\}$$

Si procede pertanto scrivendo la matrice di adiacenza W ed il vettore dei gradi w_i.

$$W = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\omega_i = (1, 3, 2, 3, 3, 1, 4, 1, 1, 3, 2, 2, 2, 4, 6)$$

La misura di centralità invariante è unica e vale:

$$\pi_i = (\frac{1}{38}, \frac{3}{38}, \frac{1}{19}, \frac{3}{38}, \frac{3}{38}, \frac{1}{38}, \frac{2}{19}, \frac{1}{38}, \frac{1}{38}, \frac{3}{38}, \frac{1}{19}, \frac{1}{19}, \frac{1}{19}, \frac{2}{19}, \frac{3}{19}).$$

Essendo il grafo fortemente connesso e aperiodico si può concludere che la dinamica di averaging di French-De Groot converge al valore di consenso, come nell'esercizio precedente, dato dal limite:

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = \pi' x(0) = \sum_i \pi_i x_i(0), \forall x(0)$$

e pertanto, essendo $x(0) = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,1]'$ il vettore delle condizioni iniziali, si ottiene che il valore finale di consenso vale:

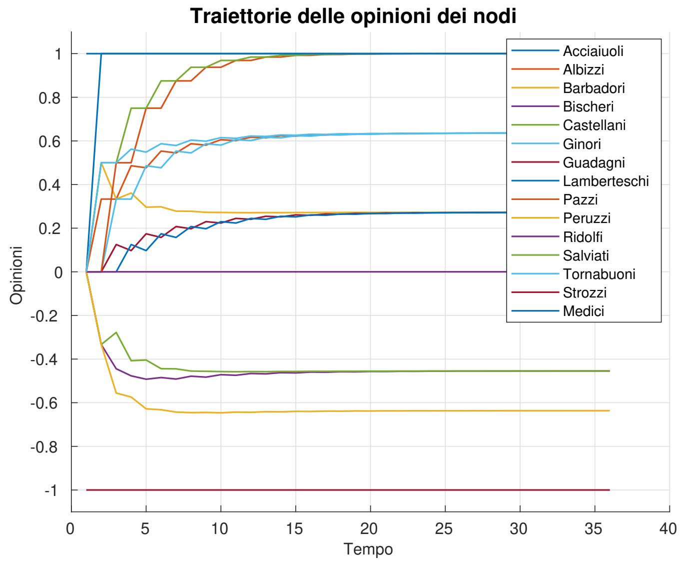
$$\lim_{t\to\infty} x_i(t) = (-1)\frac{2}{19} + (1)\frac{3}{19} = \frac{1}{19}$$

(b) Si riporta ora il codice Matlab sviluppato per visualizzare l'evoluzione della dinamica di opinione dei nodi del grafo, avendo assegnato ai due nodi stubborn $\{\text{Strozzi}, \text{Medici}\}$ rispettivamente i valori -1, +1.

```
Families={'Acciaiuoli', 'Albizzi', 'Barbadori', 'Bischeri',
'Castellani', 'Ginori', 'Guadagni', 'Lamberteschi','Pazzi',
'Peruzzi', 'Ridolfi', 'Salviati', 'Tornabuoni',
'Strozzi', 'Medici'}';

%Matrice di adiacenza W
W = zeros(15);

W(1,15) = 1;                        %Acciaiuoli
W(2,[6 7 15]) = 1;                  %Albizzi
W(3,[5 15]) = 1;                    %Barbadori
W(4,[7 10 14]) = 1;                 %Bischeri
W(5,[3 10 14]) = 1;                 %Castellani
W(6,2) = 1;                         %Ginori
W(7,[2 4 8 13]) = 1;                %Guadagni
W(8,7) = 1;                         %Lamberteschi
W(9,12) = 1;                        %Pazzi
W(10,[4 5 14]) = 1;                 %Peruzzi
W(11,[15 14]) = 1;                  %Ridolfi
W(12,[15 9]) = 1;                   %Salviati
W(13,[7 15]) = 1;                   %Tornabuoni
W(14,[4 5 10 11]) = 1;              %Strozzi
W(15,[1 2 3 11 12 13]) = 1;         %Medici

%vettore delle opinioni iniziali
x = zeros(15,1);
x(14) = -1;
x(15) = 1;

%calcolo matrice P
w=W*ones(15,1);
D=diag(w);
P = D\W;

nR=13;                              %regular nodes
nS=2;                               %stubborn nodes
u = [-1, 1]';                       %vettore degli ingressi stubborn

Q = P(1:nR, 1:nR);                  %matrice P ristretta a RxR
E = P(1:nR, (nR+1):(nR+nS));        %matrice P ristretta a RxS

%INIZIALIZZAZIONI
cont = 0;
cont_max = 50;
epsilon = 1e-4;                     %valore di tolleranza
```

```
i = 1;

x_new = zeros(nR,1);            %vettore delle opinioni
x_old = zeros(nR,1);
X_i = zeros(nR, cont_max);      %matrice dei risultati


%CALCOLO PASSI DELLA DINAMICA
while(i && cont<cont_max)

    cont=cont+1;

    %Salvo il vettore delle opinioni nella colonna di X_i corrispondente
    X_i(sub2ind(size(X_i),1:nR, repelem(cont, nR))) = x_new;

    x_new = Q*x_old + E*u;

    if(x_new-x_old <= epsilon)
        i = 0;
    else
        x_old = x_new;
    end

end

%PLOT DELLE TRAIETTORIE
X=zeros(nR+nS, cont);           %matrice X completa
X(1:nR, :) = X_i( : , 1:cont);
X(14, :) = u(1);
X(15, :) = u(2);

for k = 1:(nR+nS)
    figure(2)
    hold on
    plot(1:cont, X(k,:),  'LineWidth', 1)
    grid on
    ylim([-1.1 1.1])
end

xlabel('Tempo', 'FontSize', 10)
ylabel('Opinioni', 'FontSize', 10)
title('Traiettorie delle opinioni dei nodi', 'FontSize', 13, 'FontWeight', 'bold')
legend(Families(1:k))
```

Di seguito si riporta il grafico così prodotto, dal quale si evince che già dopo $n \approx 15$ iterazioni le opinioni dei singoli nodi si stabilizzano al loro valore finale.



Il vettore di equilibrio $x(t)$ vale:

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.6363 \\ 0.2727 \\ -0.4546 \\ -0.4546 \\ 0.6362 \\ 0.2725 \\ 0.2726 \\ 1.0000 \\ -0.6364 \\ 0 \\ 1.0000 \\ 0.6363 \\ -1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix}$$

(c) L'insieme dei nodi stubborn $S = \{Castellani, Guadagni, Medici, Strozzi\}$ è globalmente raggiungibile. Sia $D = diag(\omega_i)$ e P la matrice dei pesi normalizzata.

$$P = D^{-1}W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

Pertanto, il vettore di equilibrio della dinamica di averaging è dato dalla risoluzione del seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_5 = x_7 = x_{14} = -1 \\ x_{15} = +1 \\ x_i = \sum_j P_{ij} x_j, \ j = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13\} \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{cases} x_5 = x_7 = x_{14} = -1 \\ x_1 5 = +1 \\ x_1 = x_1 5 \\ x_2 = \frac{1}{3} x_6 + \frac{1}{3} x_7 + \frac{1}{3} x_1 5 \\ x_3 = \frac{1}{2} x_5 + \frac{1}{3} x_1 5 \\ x_4 = \frac{1}{3} x_7 + \frac{1}{3} x_{10} + \frac{1}{3} x_{14} \\ x_6 = x_2 \\ x_8 = x_7 \\ x_9 = x_{12} \\ x_{10} = \frac{1}{3} x_4 + \frac{1}{3} x_5 + \frac{1}{3} x_{14} \\ x_{11} = \frac{1}{2} x_1 5 + \frac{1}{3} x_{14} \\ x_{12} = \frac{1}{2} x_1 5 + \frac{1}{2} x_9 \\ x_{13} = \frac{1}{2} x_7 + \frac{1}{2} x_1 5 \end{cases} \tag{2}$$

La soluzione del sistema è

$$x(t) = [1, 0, 0, -1, -1, 0, -1, -1, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1]' \tag{3}$$

da cui si deduce che Acciaiuoli, Pazzi e Salviati avranno la stessa opinione dei Medici pari a +1 mentre Bischeri, Castellani, Guadagni, Lamberteschi, Peruzzi e Strozzi condivideranno l'opinione −1 ed i restanti Albizzi, Barbadori, Ginori, Ridolfi e Tornabuoni manterranno l'opinione iniziale pari a 0.

(d) Il vettore di centralità Page-Rank z è la soluzione dell'equazione

$$z = (1-\beta)P'z + \beta\nu \tag{4}$$

che equivale a calcolare il limite per $t \to \infty$ della dinamica di rete

$$y(t+1) = (1-\beta)P'y(t) + \lambda \tag{5}$$

dove $\lambda = \beta\nu$.

Di seguito il codice Matlab utilizzato.

```
%y_new=Q'y_old+lambda
beta=0.15;
nu=(1/n)*ones(n,1);        %entrata uniforme
Q=(1-beta)*P;
lambda=beta*nu;

%inizializzazioni
y_old = zeros(n,1);
y_new = zeros(n,1);
Y_i = zeros(n,cont_max);

eps = 1e-4;          %tolleranza
flag = 1;            %valuta se proseguire in base alla tolleranza
cont=0;
cont_max=60;         %stima iterazioni necessarie

while(flag && cont<cont_max)
    cont=cont+1;
    y_new = Q'*y_old + lambda;
    if(y_new - y_old <= epsilon)
        flag = 0;
    else
        y_old = y_new;
    end
end
```

Il vettore di centralità ottenuto è il seguente.

$$z(t) = \begin{pmatrix} 0.0317 \\ 0.0819 \\ 0.0519 \\ 0.0713 \\ 0.0714 \\ 0.0332 \\ 0.1033 \\ 0.0319 \\ 0.0367 \\ 0.0699 \\ 0.0513 \\ 0.0630 \\ 0.0537 \\ 0.0920 \\ 0.1535 \end{pmatrix}$$

.