

SYS865 Inférence statistique avec programmation R

Ornwipa Thamsuwan

31 janvier 2024

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Plan de la séance

- ▶ Récap
 - ▶ Échantillonnage
 - ▶ Théorème Central Limite
 - ▶ Intervalle de confiance
- ▶ Tests d'hypothèse
 - ▶ Types d'erreur
 - ▶ Test sur la moyenne d'un échantillon
 - ▶ Test sur la moyenne des deux échantillons
 - ▶ Test nonparamétrique

Plan de la séance

**Récap et matière
à réflexion**

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

**Test sur la
moyenne d'un
échantillon**

**Test sur la
moyenne des deux
échantillons**

**Test non
paramétrique**

**Résumé des
démarches**

Travaux pratiques

Récap et matière à réflexion

Réponses anonymes

Go to wooclap.com

Enter the event code FFBQSE



Figure 1: Lien à l'activité sur Wooclap

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Caractéristiques de l'échantillonnage probabilistique

- 1. Sélection aléatoire** : Les individus sont choisis de manière aléatoire, ce qui assure l'impartialité dans la sélection.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Caracteristiques de l'échantillonnage probabilistique

1. **Sélection aléatoire** : Les individus sont choisis de manière aléatoire, ce qui assure l'impartialité dans la sélection.
2. **Probabilité égale ou connue** : Chaque membre de la population a une chance égale ou connue d'être inclus dans l'échantillon. Ça permet d'avoir une représentation équitable de la population.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Caractéristiques de l'échantillonnage probabilistique

1. **Sélection aléatoire** : Les individus sont choisis de manière aléatoire, ce qui assure l'impartialité dans la sélection.
2. **Probabilité égale ou connue** : Chaque membre de la population a une chance égale ou connue d'être inclus dans l'échantillon. Ça permet d'avoir une représentation équitable de la population.
3. **Représentativité** : L'échantillon a de fortes chances d'être représentatif de la population globale. Cela rend possible de généraliser les résultats de l'échantillon à l'ensemble de la population.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Caracteristiques de l'échantillonnage probabilistique

- 4. Inférence statistique :** Ces méthodes permettent de calculer des erreurs d'échantillonnage, des intervalles de confiance et de réaliser des tests de significativité. Cela offre la possibilité de tirer des conclusions statistiques sur la population à partir de l'échantillon.

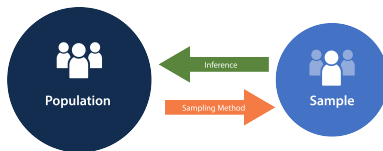


Figure 2: Inférence statistique

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Théorème Central Limite

À mesure que l'échantillon s'agrandit, la distribution de la moyenne de cet échantillon \bar{X}_n se rapproche d'une distribution normale, indépendamment de la forme de la distribution de la population.

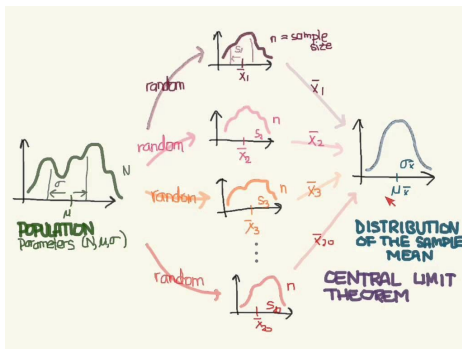


Figure 3: Théorème Central Limite

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Le Théorème Central Limite peut être résumé par l'équation suivante :

$$\bar{X}_n \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Où :

- ▶ \bar{X}_n est la moyenne de l'échantillon d'un ensemble de n variables aléatoires **indépendantes et identiquement distribuées**.
- ▶ $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ indique que \bar{X}_n suit approximativement une distribution normale avec une moyenne μ (la moyenne de la population) et une variance $\frac{\sigma^2}{n}$ (la variance de la population divisée par la taille de l'échantillon n).

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Un IC est une plage de valeurs statistiques utilisée pour estimer la fiabilité d'une estimation d'un paramètre de population, comme la moyenne. Il est exprimé avec un niveau de confiance, indiquant la probabilité que cet intervalle contienne le vrai paramètre de la population.

Lorsque σ est Connue

- ▶ Formule : $CI = \bar{x} \pm z \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- ▶ z : Score Z de la distribution normale, correspondant au niveau de confiance souhaité.

Lorsque σ est Inconnue

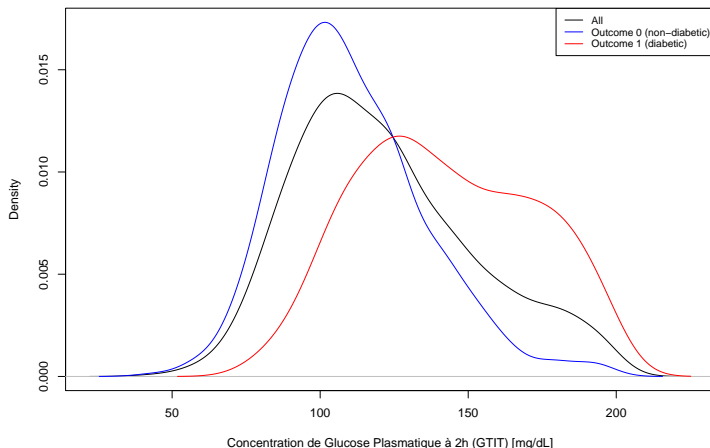
- ▶ Formule : $CI = \bar{x} \pm t \times \frac{s}{\sqrt{n}}$
- ▶ t : Score t de la distribution t, variant selon la taille de l'échantillon.

Intervalle de confiance (dernier TP)

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

Density Plot of Glucose



Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

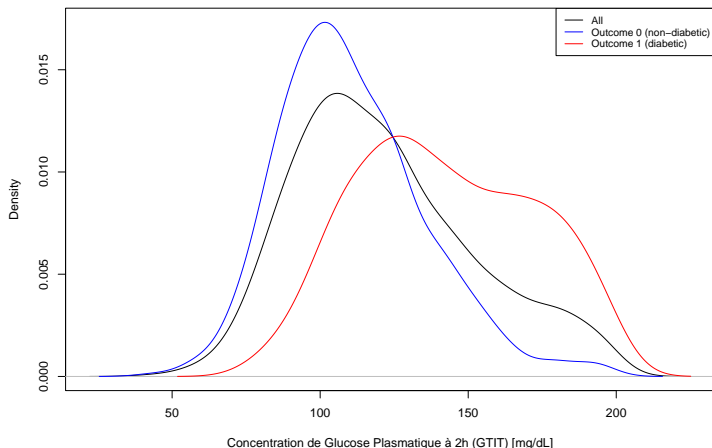
Travaux pratiques

Intervalle de confiance (dernier TP)

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

Density Plot of Glucose



Les personnes diabétiques et non diabétiques ont-elles des niveaux différents du glucose plasmatique ?

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

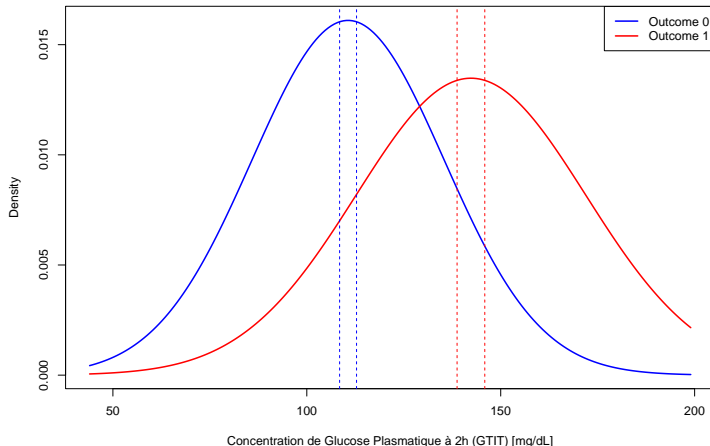
Intervalle de confiance (dernier TP)

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

En appliquant le Théorème Central Limite ...

Normal Probability Distributions of Glucose by Outcome with 95% Confidence Intervals of the Means



Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

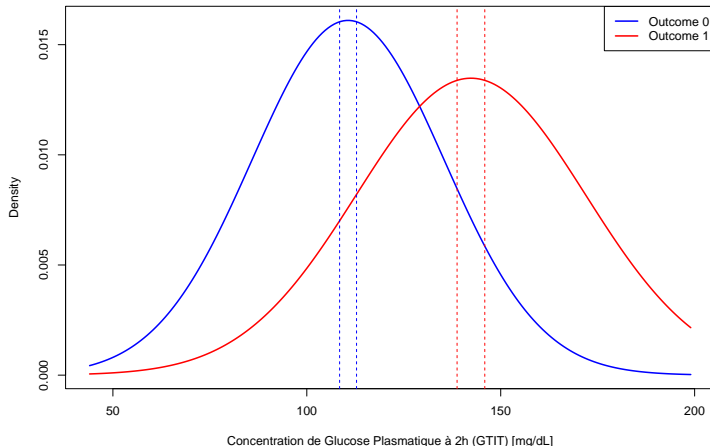
Intervalle de confiance (dernier TP)

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

En appliquant le Théorème Central Limite ...

Normal Probability Distributions of Glucose by Outcome with 95% Confidence Intervals of the Means



Les deux moyennes sont-elles différentes ?

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

- ▶ Récap
 - ▶ Échantillonnage
 - ▶ Théorème Central Limite
 - ▶ Intervalle de confiance
- ▶ Test d'hypothèse
 - ▶ Types d'erreur
 - ▶ Test sur la moyenne d'un échantillon
 - ▶ Test sur la moyenne des deux échantillons
 - ▶ Test nonparamétrique

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Types d'erreur

Erreur de type I (faux positif) : l'enquêteur rejette une *hypothèse nulle* qui est réellement vraie dans la population.

Erreur de type II (faux négatif) : l'investigateur ne parvient pas à rejeter une *hypothèse nulle* qui est en réalité fausse dans la population.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Erreur de type I (faux positif) : l'enquêteur rejette une *hypothèse nulle* qui est réellement vraie dans la population.

Erreur de type II (faux négatif) : l'investigateur ne parvient pas à rejeter une *hypothèse nulle* qui est en réalité fausse dans la population.

... mais quelle est l'hypothèse nulle ?

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Erreur de type I (faux positif) : l'enquêteur rejette une *hypothèse nulle* qui est réellement vraie dans la population.

Erreur de type II (faux négatif) : l'investigateur ne parvient pas à rejeter une *hypothèse nulle* qui est en réalité fausse dans la population.

... mais quelle est l'hypothèse nulle ?

Alors, voici un exemple ...



Figure 4: Erreur de type I et II

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Alpha α représente le seuil de probabilité de commettre une erreur de type I dans un test d'hypothèse. C'est la probabilité maximale acceptable de rejeter à tort l'hypothèse nulle.

Communément fixé à 0,05 (5 %), un α de 0,05 signifie qu'il y a 5 % de chances de rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est en réalité vraie.

Réduire α diminue les chances d'une erreur de type I, mais augmente le risque d'une erreur de type II.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Beta β représente la probabilité de commettre une erreur de type II dans un test d'hypothèse. C'est la probabilité de ne pas rejeter une hypothèse nulle fausse.

La puissance d'un test, qui est $1 - \beta$, indique la capacité du test à rejeter correctement une fausse hypothèse nulle.

Réduire β (augmentant ainsi la puissance) nécessite souvent d'augmenter la taille de l'échantillon ou la taille de l'effet.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

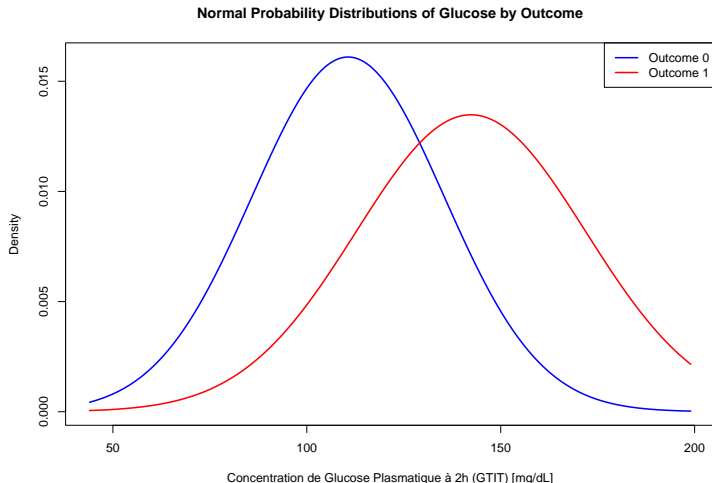
Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Types d'erreur : mise en application

En supposant que le paramètre “Glucose” est normalement distribué ...



Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

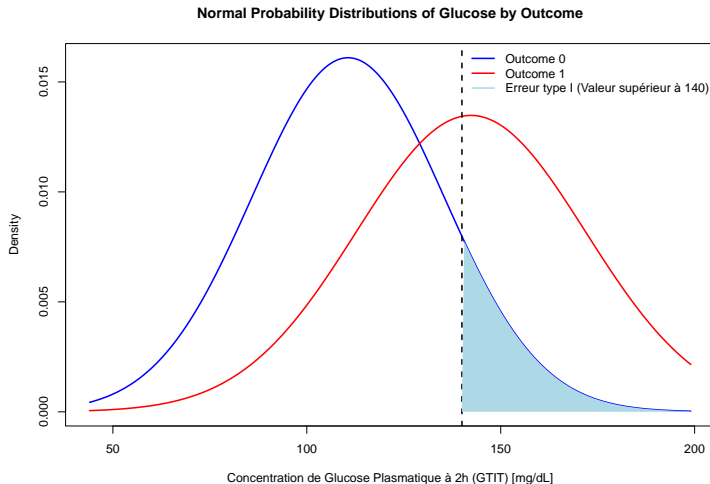
Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

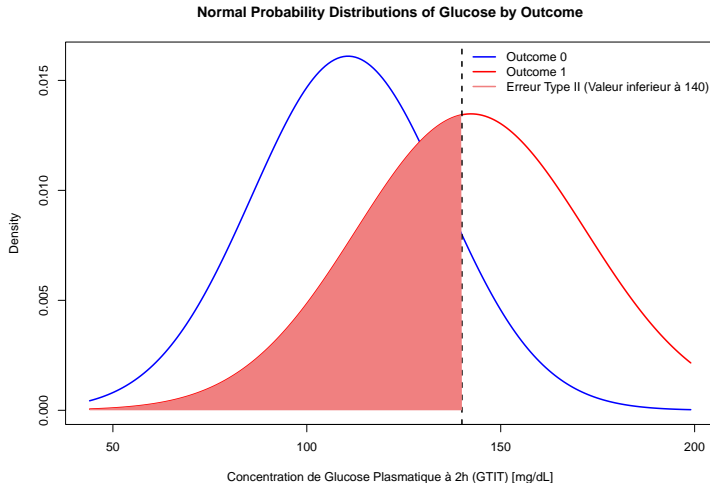
Erreur type I

Une concentration de glucose plasmatique (à 2h) est supérieure à 140 mg/dL quand la personne n'est pas diabétique.



Erreur type II

Une concentration de glucose plasmatique (à 2h) est inférieure à 140 mg/dL quand la personne est diabétique.



Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Ou en utilisant directement les décomptes de données . . .

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Tableau de contingence

Ou en utilisant directement les décomptes de données ...

Discrétiser la variable 'Glucose'

```
data$GlucoseCtgr <- ifelse(data$Glucose < 140,  
                           "Less than 140",  
                           "140 and above")
```

Tableau de contingence

Ou en utilisant directement les décomptes de données ...

Discrétiser la variable 'Glucose'

```
data$GlucoseCtgr <- ifelse(data$Glucose < 140,  
                           "Less than 140",  
                           "140 and above")
```

Créer un tableau de contingence avec les variables discrètes
'GlucoseCtgr' et 'Outcome'

```
contingency <- table(data$GlucoseCtgr, data$Outcome)  
print(contingency)
```

```
##  
##           0    1  
## 140 and above 62 135  
## Less than 140 438 133
```

Quels sont les valeurs de α et β ?

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Quels sont les valeurs de α et β ?

- ▶ Erreur type I : 'Glucose' est '140 and above' et 'Outcome' est 0.
- ▶ Erreur type II : 'Glucose' est 'Less than 140' et 'Outcome' est 1.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Tableau de contingence (suite)

Quels sont les valeurs de α et β ?

- Erreur type I : 'Glucose' est '140 and above' et 'Outcome' est 0.
- Erreur type II : 'Glucose' est 'Less than 140' et 'Outcome' est 1.

La mauvaise manière ... à éviter!

```
contingency_prb <- prop.table(contingency)
print(contingency_prb)
```

```
##
##              0              1
## 140 and above 0.08072917 0.17578125
## Less than 140 0.57031250 0.17317708
```

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Tableau de contingence (suite)

La bonne manière ...

```
total_negatives <- sum(contingency[, "0"])
false_positives <- contingency["140 and above", "0"]
alpha <- false_positives / total_negatives
cat("Alpha (Type I error rate):", alpha, "\n")
```

```
## Alpha (Type I error rate): 0.124
```

```
total_positives <- sum(contingency[, "1"])
false_negatives <- contingency["Less than 140", "1"]
beta <- false_negatives / total_positives
cat("Beta (Type II error rate):", beta, "\n")
```

```
## Beta (Type II error rate): 0.4962687
```

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Types d'erreur : conclusion

- ▶ α : Probabilité d'un faux positif (erreur de type I).
- ▶ β : Probabilité d'un faux négatif (erreur de type II).
- ▶ Équilibrer α et β est crucial dans les tests d'hypothèses, car la diminution de l'un augmente souvent l'autre. Le choix de α et β est influencé par le contexte de l'étude et l'importance relative des erreurs dans le scénario de recherche spécifique.

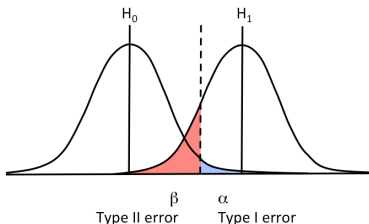


Figure 5: Équilibre entre α et β

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Tests d'hypothèse

Les tests d'hypothèses sont utilisés pour déterminer s'il existe suffisamment de preuves pour soutenir une croyance ou une théorie particulière sur un paramètre de population.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Les tests d'hypothèses sont utilisés pour déterminer s'il existe suffisamment de preuves pour soutenir une croyance ou une théorie particulière sur un paramètre de population.

Exemples dans le génie mécanique :

- ▶ Tester si un matériau composite possède une résistance à la traction supérieure à celle d'un matériau standard.
- ▶ Comparer l'efficacité thermique de deux liquides de refroidissement moteur différents.
- ▶ Analyser si une nouvelle technique d'amortissement des vibrations réduit plus efficacement les vibrations qu'une méthode actuelle.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Hypothèse nulle (H_0) et alternative (H_1)

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

L'**hypothèse nulle** est une déclaration indiquant qu'il n'y a aucun effet ou aucune différence dans un contexte particulier. C'est une position par défaut suggérant que toute différence ou signification observée dans un ensemble de données est purement due au hasard.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Hypothèse nulle (H_0) et alternative (H_1)

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Type d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

L'**hypothèse nulle** est une déclaration indiquant qu'il n'y a aucun effet ou aucune différence dans un contexte particulier. C'est une position par défaut suggérant que toute différence ou signification observée dans un ensemble de données est purement due au hasard.

L'**hypothèse alternative** est ce que l'on souhaite prouver. C'est une déclaration qui indique une différence ou un effet. Cette hypothèse est acceptée uniquement lorsque les données fournissent suffisamment de preuves pour rejeter l'hypothèse nulle.

Dans les tests d'hypothèses, on commence par supposer que l'hypothèse nulle est vraie. Ensuite, en fonction des données de l'échantillon, on teste cette hypothèse. Si les preuves sont suffisamment fortes contre H_0 , on la rejette en faveur de H_1 . La décision est souvent prise en utilisant les valeurs p et des niveaux de signification prédéfinis (comme $\alpha = 0,05$).

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

**Test sur la
moyenne d'un
échantillon**

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Test sur la moyenne d'un échantillon

1. Formulation des hypothèses

H_0 postule que la moyenne de la population (μ) est égale à une valeur spécifique (μ_0).

- Formellement, $H_0 : \mu = \mu_0$

H_1 ou H_a suggère que la moyenne de la population diffère de cette valeur.

- $H_0 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral), $H_0 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral droit), ou $H_0 : \mu < \mu_0$ (test unilatéral gauche)

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Test sur la moyenne d'un échantillon

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

1. Formulation des hypothèses

H_0 postule que la moyenne de la population (μ) est égale à une valeur spécifique (μ_0).

- Formellement, $H_0 : \mu = \mu_0$

H_1 ou H_a suggère que la moyenne de la population diffère de cette valeur.

- $H_0 : \mu \neq \mu_0$ (test bilatéral), $H_0 : \mu > \mu_0$ (test unilatéral droit), ou $H_0 : \mu < \mu_0$ (test unilatéral gauche)

2. Collecte de données et calculs statistiques

À partir des données collectées, calculer

- la moyenne de l'échantillon (\bar{x}),
- l'écart-type de l'échantillon (s) et
- la taille de l'échantillon (n).

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

3. Choix du test statistique et calculs

Utiliser un test (t) de Student pour comparer la moyenne de l'échantillon à la valeur spécifiée (μ_0).

$$\blacktriangleright t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}.$$

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Test sur la moyenne d'un échantillon

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

3. Choix du test statistique et calculs

Utiliser un test (t) de Student pour comparer la moyenne de l'échantillon à la valeur spécifiée (μ_0).

$$\blacktriangleright t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}.$$

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

4. Décision statistique et interprétation

Déterminer une **valeur critique** par le niveau de signification α (souvent 0,05).

Test sur la moyenne d'un échantillon

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

3. Choix du test statistique et calculs

Utiliser un test (t) de Student pour comparer la moyenne de l'échantillon à la valeur spécifiée (μ_0).

$$\blacktriangleright t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}.$$

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

4. Décision statistique et interprétation

Déterminer une **valeur critique** par le niveau de signification α (souvent 0,05).

Si la valeur t est *en dehors des limites* de la valeur critique, rejeter H_0 .

Rejeter H_0 indique que la moyenne de la population diffère significativement de μ_0 .

Test sur la moyenne d'un échantillon

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

3. Choix du test statistique et calculs

Utiliser un test (t) de Student pour comparer la moyenne de l'échantillon à la valeur spécifiée (μ_0).

$$\blacktriangleright t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}.$$

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

4. Décision statistique et interprétation

Déterminer une **valeur critique** par le niveau de signification α (souvent 0,05).

Si la valeur t est *en dehors des limites* de la valeur critique, rejeter H_0 .

Rejeter H_0 indique que la moyenne de la population diffère significativement de μ_0 .

Si H_0 n'est pas rejetée, il n'y a pas suffisamment de preuves pour affirmer que la moyenne de la population est différente de μ_0 .

La **valeur critique** est un seuil utilisé pour déterminer si la statistique de test calculée (comme une valeur t ou z) indique un résultat statistiquement significatif, à partir de laquelle on décide de rejeter ou non l'hypothèse nulle.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

La **valeur critique** est un seuil utilisé pour déterminer si la statistique de test calculée (comme une valeur t ou z) indique un résultat statistiquement significatif, à partir de laquelle on décide de rejeter ou non l'hypothèse nulle.

La valeur critique est déterminée en fonction du niveau de signification α (souvent 0,05) et, pour un test t , du nombre de degrés de liberté (df ou “degree of freedom” en anglais).

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

La **valeur critique** est un seuil utilisé pour déterminer si la statistique de test calculée (comme une valeur t ou z) indique un résultat statistiquement significatif, à partir de laquelle on décide de rejeter ou non l'hypothèse nulle.

La valeur critique est déterminée en fonction du niveau de signification α (souvent 0,05) et, pour un test t , du nombre de degrés de liberté (df ou “degree of freedom” en anglais).

```
qt(1 - 0.05/2, df = 29)
```

```
## [1] 2.04523
```

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

La **valeur critique** est un seuil utilisé pour déterminer si la statistique de test calculée (comme une valeur t ou z) indique un résultat statistiquement significatif, à partir de laquelle on décide de rejeter ou non l'hypothèse nulle.

La valeur critique est déterminée en fonction du niveau de signification α (souvent 0,05) et, pour un test t , du nombre de degrés de liberté (df ou "degree of freedom" en anglais).

```
qt(1 - 0.05/2, df = 29)
```

```
## [1] 2.04523
```

Pour un test z , la valeur critique dépend de la distribution normale standard, $N(0, 1)$.

La **valeur critique** est un seuil utilisé pour déterminer si la statistique de test calculée (comme une valeur t ou z) indique un résultat statistiquement significatif, à partir de laquelle on décide de rejeter ou non l'hypothèse nulle.

La valeur critique est déterminée en fonction du niveau de signification α (souvent 0,05) et, pour un test t , du nombre de degrés de liberté (df ou "degree of freedom" en anglais).

```
qt(1 - 0.05/2, df = 29)
```

```
## [1] 2.04523
```

Pour un test z , la valeur critique dépend de la distribution normale standard, $N(0, 1)$.

```
qnorm(0.975)
```

```
## [1] 1.959964
```

Tests d'hypothèse avec la distribution t

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

Test bilatéral (à deux queues)

- ▶ **Valeur critique** : $t_{\alpha/2,df}$ et $-t_{\alpha/2,df}$
- ▶ Rejeter de H_0 si $t_{\text{test}} > t_{\alpha/2,df}$ ou $t_{\text{test}} < -t_{\alpha/2,df}$

Test unilatéral gauche (à queue gauche)

- ▶ **Valeur critique** : $t_{\alpha,df}$
- ▶ Rejeter de H_0 si $t_{\text{test}} < -t_{\alpha,df}$

Test unilatéral droit (à queue droite)

- ▶ **Valeur critique** : $t_{\alpha,df}$
- ▶ Rejeter de H_0 si $t_{\text{test}} > t_{\alpha,df}$

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Tests d'hypothèse avec la distribution t

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

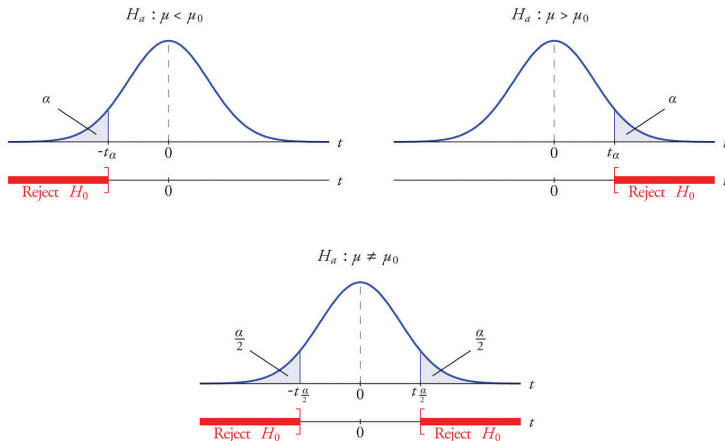


Figure 6: Rejeter H_0

À partir de la base des données “Pima Indian Diabetes” ...

Nous voulons tester si la population étudiée a un IMC moyen considéré comme normal, défini entre 18,5 et 24,9, avec un niveau de signification α de 0,05.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

À partir de la base des données “Pima Indian Diabetes” ...

Nous voulons tester si la population étudiée a un IMC moyen considéré comme normal, défini entre 18,5 et 24,9, avec un niveau de signification α de 0,05.

1. Formulation des hypothèses

H_0 : La moyenne de l'IMC de la population est normale (c'est-à-dire, située dans la plage 18.5 - 24.9).

► **Formellement:** $H_0 : 18.5 \leq \mu \leq 24.9$

H_1 : La moyenne de l'IMC de la population n'est pas normale (c'est-à-dire, en dehors de la plage 18.5 - 24.9).

► **Formellement:** $H_1 : \mu < 18.5 \text{ ou } \mu > 24.9$

2. Collecte de données et calculs statistiques

```
filtered_bmi <- data$BMI[data$BMI>0 & !is.na(data$BMI)]  
mean_bmi <- mean(filtered_bmi)  
sd_bmi <- sd(filtered_bmi)  
n <- length(filtered_bmi)
```

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Exemples avec R (suite)

2. Collecte de données et calculs statistiques

```
filtered_bmi <- data$BMI[data$BMI>0 & !is.na(data$BMI)]  
mean_bmi <- mean(filtered_bmi)  
sd_bmi <- sd(filtered_bmi)  
n <- length(filtered_bmi)
```

3. Choix du test statistique et calculs

```
mu_0_lower <- 18.5  
mu_0_upper <- 24.9  
tstat_upper <- (mean_bmi-mu_0_lower) / (sd_bmi/sqrt(n))  
tstat_lower <- (mean_bmi-mu_0_upper) / (sd_bmi/sqrt(n))  
cat(tstat_lower, tstat_upper)
```

```
## 30.02652 55.45432
```

4. Décision statistique et interprétation

Déterminer les valeurs critiques $t_{-\alpha/2}$ et $t_{\alpha/2}$

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

4. Décision statistique et interprétation

Déterminer les valeurs critiques $t_{-\alpha/2}$ et $t_{\alpha/2}$

```
alpha <- 0.05  
tcrit_lower <- qt(alpha/2, df = n-1)  
tcrit_upper <- qt(1 - alpha/2, df = n-1)  
cat(tcrit_lower, tcrit_upper)
```

```
## -1.963107 1.963107
```

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

4. Décision statistique et interprétation

Déterminer les valeurs critiques $t_{-\alpha/2}$ et $t_{\alpha/2}$

```
alpha <- 0.05  
tcrit_lower <- qt(alpha/2, df = n-1)  
tcrit_upper <- qt(1 - alpha/2, df = n-1)  
cat(tcrit_lower, tcrit_upper)
```

```
## -1.963107 1.963107
```

Les statistiques t sont supérieures aux valeurs critiques.
Donc, rejeter H_0 et conclure que l'IMC moyen n'est pas normal.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Test sur la moyenne des deux échantillons

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

**Test sur la
moyenne des deux
échantillons**

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Quelques exercices stimulants ...

Réponses anonymes

Go to wooclap.com

Enter the event code FFBQSE



Figure 7: Lien à l'activité sur Wooclap

1. Hypothèses

H_0 : La moyenne de la première population (μ_1) est égale à la moyenne de la seconde population (μ_2).

► Formellement, $H_0: \mu_1 = \mu_2$

H_1 : Les moyennes des deux populations sont différentes.

► Formellement, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Test t pour deux échantillons indépendants

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

1. Hypothèses

H_0 : La moyenne de la première population (μ_1) est égale à la moyenne de la seconde population (μ_2).

► Formellement, $H_0: \mu_1 = \mu_2$

H_1 : Les moyennes des deux populations sont différentes.

► Formellement, $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

2. Conditions du test – Important!

- Les échantillons sont indépendants.
- Les échantillons sont suffisamment grands ou proviennent de distributions normalement distribuées.
- Les variances des deux populations sont supposées égales.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Test t pour deux échantillons indépendants

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

3. Statistique de test

La statistique de test t est calculée comme suit :

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

où \bar{x}_1 et \bar{x}_2 sont les moyennes des échantillons, n_1 et n_2 les tailles des échantillons, et s_p^2 la variance combinée.

4. Décision et interprétation

Comparer la valeur de t calculée à une valeur critique de la distribution t .

- ▶ Les degrés de liberté sont $df = n_1 + n_2 - 2$.
- ▶ Le niveau de signification habituel : $\alpha = 0.05$.
- ▶ Rejeter H_0 si $|t| > t_{\text{critique}}$.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

4. Décision et interprétation

Comparer la valeur de t calculée à une valeur critique de la distribution t .

- ▶ Les degrés de liberté sont $df = n_1 + n_2 - 2$.
- ▶ Le niveau de signification habituel : $\alpha = 0.05$.
- ▶ Rejeter H_0 si $|t| > t_{\text{critique}}$.

Rejeter H_0 indique une différence statistiquement significative entre les moyennes des deux populations.

Si H_0 n'est pas rejetée, cela suggère l'absence de preuve suffisante d'une différence.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Test t pour deux échantillons appariés

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

Pour des échantillons appariés, la méthode est similaire mais basée sur les différences appariées entre les deux ensembles de données.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Pour des échantillons appariés, la méthode est similaire mais basée sur les différences appariées entre les deux ensembles de données.

Quelques exemples :

- ▶ Mesurer la capacité de charge d'une batterie *avant* et *après* un nombre de cycles de charge pour déterminer la perte de capacité au fil du temps
- ▶ Comparer la force d'un joint soudé *avant* et *après* un processus de vieillissement accéléré pour simuler l'effet à long terme de l'utilisation
- ▶ Évaluer la préférence ou le confort d'utilisateurs avec deux designs différents d'un produit pour déterminer lequel est ergonomiquement supérieur (A|B testing)

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Test t pour deux échantillons appariés

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

Hypothèse

$$H_0 : \mu_{\text{diff}} = 0$$

$$H_1 : \mu_{\text{diff}} \neq 0$$

où μ_{diff} est la moyenne des différences entre les paires.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Test t pour deux échantillons appariés

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

Hypothèse

$$H_0 : \mu_{\text{diff}} = 0$$

$$H_1 : \mu_{\text{diff}} \neq 0$$

où μ_{diff} est la moyenne des différences entre les paires.

Statistique de test

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}}$$

où \bar{d} est la moyenne des différences entre les deux mesures $d_i = x_{i1} - x_{i2}$ pour chaque paire i , s_d est l'écart-type des différences et n est le nombre de paires.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

À partir de la base des données “Pima Indian Diabetes” ...

Nous voulons tester si les IMC des deux groupes (diabétiques et non diabétiques) sont égaux.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

À partir de la base des données “Pima Indian Diabetes” ...

Nous voulons tester si les IMC des deux groupes (diabétiques et non diabétiques) sont égaux.

Les deux groupes sont-ils indépendants ou appariés ?

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

À partir de la base des données “Pima Indian Diabetes” ...

Nous voulons tester si les IMC des deux groupes (diabétiques et non diabétiques) sont égaux.

Les deux groupes sont-ils indépendants ou appariés ?

Séparer des données en deux groupes basés sur ‘Outcome’

```
filtered_data <- subset(data, BMI > 0)
bmi_non_diabetic <-
  filtered_data$BMI[filtered_data$Outcome == 0]
bmi_diabetic <-
  filtered_data$BMI[filtered_data$Outcome == 1]
```

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Exemples avec R (suite)

Vérifier la condition d'homogénéité des variances

```
var.test(bmi_non_diabetic, bmi_diabetic)
```

```
##  
## F test to compare two variances  
##  
## data:  bmi_non_diabetic and bmi_diabetic  
## F = 0.98367, num df = 490, denom df = 265, p-value = 0.870  
## alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1  
## 95 percent confidence interval:  
##  0.7932778 1.2115225  
## sample estimates:  
## ratio of variances  
##           0.9836665
```

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test des
paramétriques

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Exemples avec R (suite)

Effectuer le test t pour échantillons indépendants

```
t.test(bmi_non_diabetic, bmi_diabetic)
```

```
##  
##  Welch Two Sample t-test  
##  
## data:  bmi_non_diabetic and bmi_diabetic  
## t = -9.055, df = 539.79, p-value < 2.2e-16  
## alternative hypothesis: true difference in means is not eq  
## 95 percent confidence interval:  
##  -5.533527 -3.560659  
## sample estimates:  
## mean of x mean of y  
##  30.85967  35.40677
```

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Attention!

Les données ne sont pas normalement distribuées. Alors, il faut utiliser un test non paramétrique.

```
shapiro.test(bmi_non_diabetic)
```

```
##  
##  Shapiro-Wilk normality test  
##  
## data:  bmi_non_diabetic  
## W = 0.98054, p-value = 3.858e-06
```

```
shapiro.test(bmi_diabetic)
```

```
##  
##  Shapiro-Wilk normality test  
##  
## data:  bmi_diabetic  
## W = 0.94938, p-value = 5.738e-08
```

Test non paramétrique

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

**Test non
paramétrique**

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Le test de Wilcoxon est un test **non paramétrique** utilisé pour comparer les moyennes des deux échantillons. Il est utilisé lorsque les conditions pour un test paramétrique (test t) ne sont pas remplies.

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Le test de Wilcoxon est un test **non paramétrique** utilisé pour comparer les moyennes des deux échantillons. Il est utilisé lorsque les conditions pour un test paramétrique (test t) ne sont pas remplies.

- ▶ **Test de Rang Somme de Wilcoxon** : Utilisé pour comparer deux échantillons indépendants. Ce test est également connu sous le nom de test de Mann-Whitney.
- ▶ **Test de Wilcoxon pour Échantillons Appariés** : Utilisé pour comparer deux échantillons appariés ou mesures répétées sur un même groupe (par exemple, avant et après un traitement).

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Avec les mêmes données ...

```
wilcox.test(bmi_non_diabetic, bmi_diabetic)
```

```
##  
## Wilcoxon rank sum test with continuity correction  
##  
## data:  bmi_non_diabetic and bmi_diabetic  
## W = 40875, p-value < 2.2e-16  
## alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
demandes

Travaux pratiques

Résumé des démarches

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

**Résumé des
démarches**

Travaux pratiques

Réponses anonymes

Go to wooclap.com

Enter the event code FFBQSE



Figure 8: Lien à l'activité sur Wooclap

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Formulation des hypothèses

Collecte de données

Calculs de la moyenne, de l'écart type et de la taille de l'échantillon

Choix du test statistique et calculs

Détermination des valeurs critiques par le niveau de signification

Décision statistique de rejeter l'hypothèse nulle ou non

Interprétation

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Figure 9: Démarches de test d'hypothèse

Travaux pratiques

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques

Pour chacun des huit variables (Pregnancies, Glucose, BloodPressure, SkinThickness, Insulin, BMI, DiabetesPedigreeFunction et Age) dans la base de données sur les diabètes ...

1. Vérifier les conditions pour utiliser un test paramétrique
2. Effectuer le test t ou Wilcoxon pour comparer les moyennes entre les deux groupes : non diabétique (Outcome=0) et diabétique (Outcome=1)
3. Interpréter les résultats

Plan de la séance

Récap et matière
à réflexion

Types d'erreur

Tests d'hypothèse

Test sur la
moyenne d'un
échantillon

Test sur la
moyenne des deux
échantillons

Test non
paramétrique

Résumé des
démarches

Travaux pratiques