

SYS865 Inférence statistique avec programmation R

Ornwipa Thamsuwan

21 février 2024

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

Recap

**Puissance
statistique**

**Détermination de
la taille
d'échantillon**

**D'autre option du
logiciel : G*Power**

Travaux pratiques

Recap

- ▶ Objectifs de l'étude
- ▶ Formulation d'hypothèse
- ▶ Collecte des données : plan d'échantillonnage
- ▶ Analyse des données : **choix du test statistique**
- ▶ Décision et interprétation

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

- ▶ Objectifs de l'étude
- ▶ Formulation d'hypothèse
- ▶ Collecte des données : plan d'échantillonnage
- ▶ Analyse des données : **choix du test statistique**
- ▶ Décision et interprétation

Comment choisir le test statistique ?

Les conditions pour les choix du test

- ▶ Test de normalité (Shapiro-Wilk)

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

Les conditions pour les choix du test

- ▶ Test de normalité (Shapiro-Wilk)
- ▶ Test de homogénéité des variances
 - ▶ Test F pour les données **normalement distribuées**
 - ▶ Test de Levene

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

Les conditions pour les choix du test

- ▶ Test de normalité (Shapiro-Wilk)
- ▶ Test de homogénéité des variances
 - ▶ Test F pour les données **normalement distribuées**
 - ▶ Test de Levene

Les paramètres à étudier

- ▶ La moyenne d'un échantillon ou la différence entre deux échantillons appariés
 - ▶ Test t avec paired=TRUE pour les données **normalement distribuées**
 - ▶ Test de Wilcoxon pour échantillons appariés

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

Les conditions pour les choix du test

- ▶ Test de normalité (Shapiro-Wilk)
- ▶ Test de homogénéité des variances
 - ▶ Test F pour les données **normalement distribuées**
 - ▶ Test de Levene

Les paramètres à étudier

- ▶ La moyenne d'un échantillon ou la différence entre deux échantillons appariés
 - ▶ Test t avec paired=TRUE pour les données **normalement distribuées**
 - ▶ Test de Wilcoxon pour échantillons appariés
- ▶ Les moyennes des deux échantillons indépendants
 - ▶ Test t par défaut pour les données **normalement distribuées**
 - ▶ Test de rang somme de Wilcoxon

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

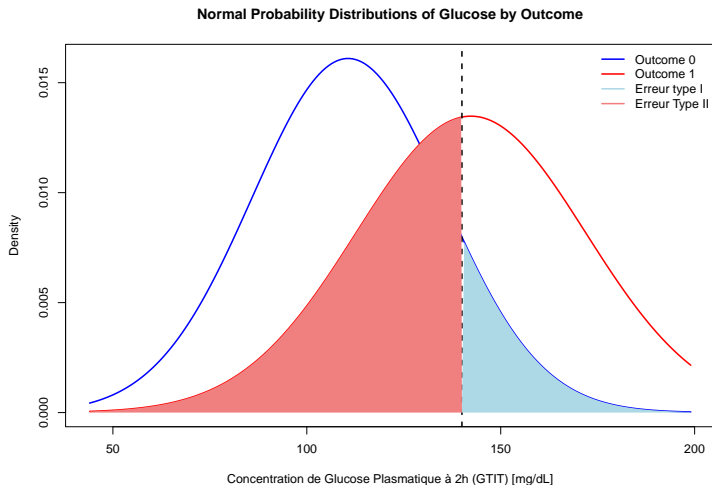
D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

Erreur statistique (retour)

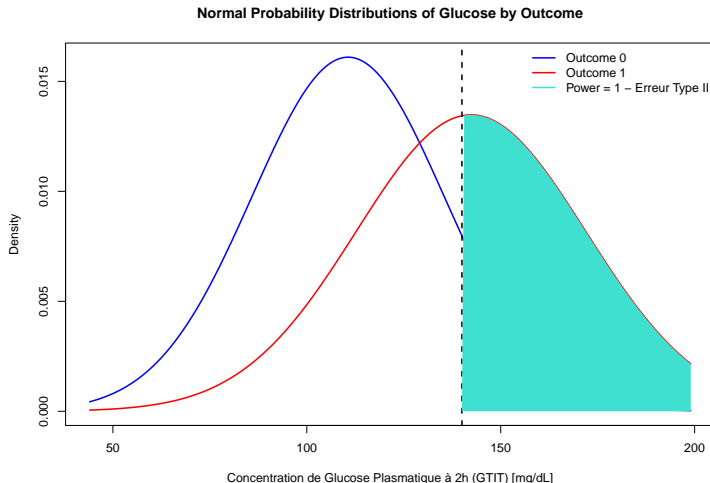
Erreur type I (α) : Rejeter H_0 quand H_0 est vraie.

Erreur type II (β) : Ne pas rejeter H_0 quand H_0 est fausse.



Erreur statistique (retour)

“Power” ($1 - \beta$) : Correctement rejeter H_0 quand H_0 est fausse, ou quand H_1 est vraie.



Recap

**Puissance
statistique**

**Détermination de
la taille
d'échantillon**

**D'autre option du
logiciel : G*Power**

Travaux pratiques

Puissance statistique

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

		Reality	
		Positive	Negative
Study findings	Positive	True positive (Power) $(1 - \beta)$	False positive Type I error (α)
	Negative	False negative Type II error (β)	True negative

Figure 1: Tableau de contingence

1. Définir les hypothèses et décider du type de test t
 - ▶ **Hypothèse nulle (H_0)**: Il n'existe aucune différence entre les groupes que vous comparez.
 - ▶ **Hypothèse alternative (H_1)**: Il existe une différence significative.
 - ▶ Décidez si l'on réalise un test t unilatéral (si l'on attend une différence dans une direction spécifique) ou bilatéral (en cas où les différences dans les deux directions sont pertinentes).

1. Définir les hypothèses et décider du type de test t
 - ▶ **Hypothèse nulle (H_0)**: Il n'existe aucune différence entre les groupes que vous comparez.
 - ▶ **Hypothèse alternative (H_1)**: Il existe une différence significative.
 - ▶ Décidez si l'on réalise un test t unilatéral (si l'on attend une différence dans une direction spécifique) ou bilatéral (en cas où les différences dans les deux directions sont pertinentes).
2. Choisir un niveau de signification ($1 - \alpha$).
Typiquement, $\alpha = 0,05$.

1. Définir les hypothèses et décider du type de test t
 - ▶ **Hypothèse nulle (H_0)**: Il n'existe aucune différence entre les groupes que vous comparez.
 - ▶ **Hypothèse alternative (H_1)**: Il existe une différence significative.
 - ▶ Décidez si l'on réalise un test t unilatéral (si l'on attend une différence dans une direction spécifique) ou bilatéral (en cas où les différences dans les deux directions sont pertinentes).
2. Choisir un niveau de signification ($1 - \alpha$).
Typiquement, $\alpha = 0,05$.
3. Supposer que la taille de l'échantillon (n) pour chaque groupe est donnée.

4. Déterminer la taille de l'effet

La taille de l'effet de Cohen's d est définie comme:

$$d = \frac{\mu_1 - \mu_2}{SD_{\text{poolisée}}}$$

Où μ_1 et μ_2 sont les moyennes des deux groupes, et $SD_{\text{poolisée}}$ est l'écart-type poolisé, calculé en fonction des écarts-types des deux groupes.

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

4. Déterminer la taille de l'effet

La taille de l'effet de Cohen's d est définie comme:

$$d = \frac{\mu_1 - \mu_2}{SD_{\text{poolisée}}}$$

Où μ_1 et μ_2 sont les moyennes des deux groupes, et $SD_{\text{poolisée}}$ est l'écart-type poolisé, calculé en fonction des écarts-types des deux groupes.

$$SD_{\text{poolisée}} = \sqrt{\frac{(n_1 - 1) \times SD_1^2 + (n_2 - 1) \times SD_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Où n_1 et n_2 sont les tailles d'échantillon des deux groupes, et SD_1 et SD_2 sont les écarts-types des deux groupes.

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

5. Calculer ou estimer la puissance $(1 - \beta)$ avec R

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

5. Calculer ou estimer la puissance $(1 - \beta)$ avec R

Paramètres

```
effect_size <- 0.5 # taille d'effet  
n1 <- 30  
n2 <- 40  
alpha <- 0.05
```

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

5. Calculer ou estimer la puissance $(1 - \beta)$ avec R

Paramètres

```
effect_size <- 0.5 # taille d'effet  
n1 <- 30  
n2 <- 40  
alpha <- 0.05
```

Calcul des degrés de liberté

```
df <- n1 + n2 - 2  
df
```

```
## [1] 68
```

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

Calcul de la valeur t critique

```
t_critical <- qt(1 - alpha / 2, df)
t_critical
```

```
## [1] 1.995469
```

La fonction `qt()` fournit le quantile de la distribution t.

Calcul du paramètre de non-centralité

```
ncp <- effect_size * sqrt((n1 * n2) / (n1 + n2))  
ncp
```

```
## [1] 2.070197
```

Le paramètre de non-centralité **ncp** représente à quel point l'effet réel est éloigné de l'hypothèse nulle dans le contexte d'une hypothèse alternative spécifique.

Le **ncp** est ajusté pour les tailles d'échantillon inégales en utilisant la formule suivante :

$$ncp = \text{effect size} \times \sqrt{\frac{n_1 \times n_2}{n_1 + n_2}}$$

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

Calcul de la puissance

```
power <- 1 - pt(t_critical, df, ncp)
power
```

```
## [1] 0.5322582
```

La fonction `pt()` donne la fonction de répartition
(c'est-à-dire, la probabilité cumulée) pour la distribution `t`.

Taille d'échantillon

```
n1 <- 120 # augmenté de 30  
n2 <- 120 # augmenté de 40
```

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

Taille d'échantillon

```
n1 <- 120 # augmenté de 30  
n2 <- 120 # augmenté de 40
```

Tout en fixant d'autres paramètres, la puissance augmente à

```
## [1] 0.9711088
```

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

Taille d'échantillon

```
n1 <- 120 # augmenté de 30  
n2 <- 120 # augmenté de 40
```

Tout en fixant d'autres paramètres, la puissance augmente à

```
## [1] 0.9711088
```

Taille d'effet

```
effect_size <- 1 # augmenté de 0.5
```

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

Taille d'échantillon

```
n1 <- 120 # augmenté de 30  
n2 <- 120 # augmenté de 40
```

Tout en fixant d'autres paramètres, la puissance augmente à

```
## [1] 0.9711088
```

Taille d'effet

```
effect_size <- 1 # augmenté de 0.5
```

Tout en fixant d'autres paramètres, la puissance augmente à

```
## [1] 0.9830511
```

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

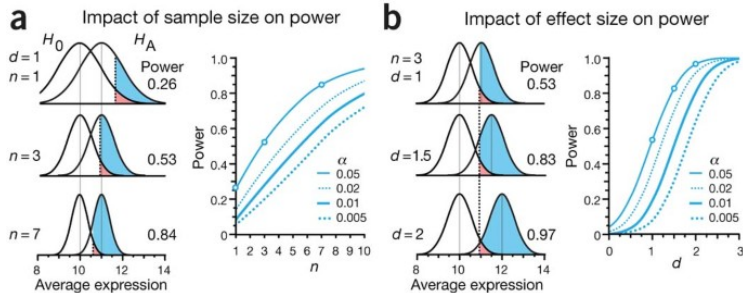


Figure 2: Puissances statistiques sous différentes tailles d'effet et tailles d'échantillon

- **Référence :** Krzywinski, M., Altman, N. Power and sample size. *Nat Methods* **10**, 1139–1140 (2013).
<https://doi.org/10.1038/nmeth.2738>

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

Si nous n'avons pas encore collecté de données ...

Et nous voulons connaître la taille de l'échantillon pour
atteindre une puissance statistique prédéfinie ...

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

Détermination de la taille d'échantillon

Fixer les paramètres suivants :

- Taille de l'effet (d de Cohen) : il s'agit de la différence anticipée entre les moyennes de deux groupes divisée par l'écart type.
- Niveau de signification = 0,95, ou $\alpha = 0,05$.
- Puissance souhaitée $1 - \beta = 0,80$.

```
effect_size <- 0.5 # par ex. (mu1 - mu2) / sigma  
alpha <- 0.05  
power <- 0.80
```

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

Fixer les paramètres suivants :

- Taille de l'effet (d de Cohen) : il s'agit de la différence anticipée entre les moyennes de deux groupes divisée par l'écart type.
- Niveau de signification = 0,95, ou $\alpha = 0,05$.
- Puissance souhaitée $1 - \beta = 0,80$.

```
effect_size <- 0.5 # par ex. (mu1 - mu2) / sigma  
alpha <- 0.05  
power <- 0.80
```

Trouver la **valeur t critique** pour le niveau de signification, puis utiliser la **distribution t non centrale** pour calculer la puissance.

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques


```
calculate_sample_size <- function(d, power, alpha) {  
  n <- 2  # petit n sera incrémenté  
  while(TRUE) {  
    t_crit <- qt(1 - alpha/2, df = 2*n - 2)  
    ncp <- sqrt(n) * d  
    beta <- pt(t_crit, df = 2*n - 2, ncp = ncp) -  
            pt(-t_crit, df = 2*n - 2, ncp = ncp)  
    current_power <- 1 - beta  
    if (current_power >= power) {  
      return(n)  
    }  
    n <- n + 1  
  }  
}
```

L'expression `pt(t_crit, df = 2*n - 2, ncp = ncp)` calcule la probabilité (sous la distribution t non-centrale) d'observer une valeur t inférieure ou égale à `t_crit`.

De même, `pt(-t_crit, df = 2*n - 2, ncp = ncp)` calcule la probabilité d'observer une valeur t inférieure ou égale à `-t_crit`.

La différence entre ces deux probabilités (`pt(t_crit, df = 2*n - 2, ncp = ncp) - pt(-t_crit, df = 2*n - 2, ncp = ncp)`) donne essentiellement la probabilité d'une erreur de Type II (β), qui est la probabilité de ne pas rejeter l'hypothèse nulle lorsque l'hypothèse alternative est vraie.

L'expression `pt(t_crit, df = 2*n - 2, ncp = ncp)` calcule la probabilité (sous la distribution t non-centrale) d'observer une valeur t inférieure ou égale à `t_crit`.

De même, `pt(-t_crit, df = 2*n - 2, ncp = ncp)` calcule la probabilité d'observer une valeur t inférieure ou égale à `-t_crit`.

La différence entre ces deux probabilités (`pt(t_crit, df = 2*n - 2, ncp = ncp) - pt(-t_crit, df = 2*n - 2, ncp = ncp)`) donne essentiellement la probabilité d'une erreur de Type II (β), qui est la probabilité de ne pas rejeter l'hypothèse nulle lorsque l'hypothèse alternative est vraie.

```
calculate_sample_size(effect_size, power, alpha)
```

```
## [1] 33
```

Plus d'exemples

Comparant la largeur de sépale des espèces versicolor et virginica.

```
versicolor <-  
  subset(iris, Species=="versicolor")$Sepal.Width  
virginica <-  
  subset(iris, Species=="virginica")$Sepal.Width
```



Figure 3: Iris dans une peinture de Vincent van Gogh

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

Prendre aléatoirement 5 points de données pour chacune des deux espèces (versicolor et virginica) dans la variable Sepal.Width.

```
sample_versicolor <- sample(versicolor, 5)  
sample_versicolor
```

```
## [1] 2.4 2.9 2.9 3.1 3.0
```

```
sample_virginica <- sample(virginica, 5)  
sample_virginica
```

```
## [1] 3.0 2.7 3.4 2.5 3.3
```

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

```
# Calculate means and standard deviations
mean_versicolor <- mean(sample_versicolor)
mean_virginica <- mean(sample_virginica)
sd_versicolor <- sd(sample_versicolor)
sd_virginica <- sd(sample_virginica)

# Calculate pooled standard deviation
n <- 5 # sample size for each group
pooled_sd <-
  sqrt(((n-1)*sd_versicolor^2 +
        (n-1)*sd_virginica^2) / (n+n-2))

# Calculate effect size (Cohen's d)
effect_size <- (mean_versicolor-mean_virginica)/pooled_sd
effect_size

## [1] -0.3618136
```

Calcul de la puissance statistique (suite)

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

```
# Calculate power using the effect size
alpha <- 0.05
t_critical <- qt(1 - alpha/2, df = 2*n - 2)
ncp <- effect_size * sqrt(n*n/(n+n)) # ou sqrt(n/2)
power <- 1 -
  pt(t_critical, df = 2*n - 2, ncp = ncp) +
  pt(-t_critical, df = 2*n - 2, ncp = ncp)
power

## [1] 0.0798854
```

Calcul de la puissance statistique (suite)

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

```
# Calculate power using the effect size
alpha <- 0.05
t_critical <- qt(1 - alpha/2, df = 2*n - 2)
ncp <- effect_size * sqrt(n*n/(n+n)) # ou sqrt(n/2)
power <- 1 -
  pt(t_critical, df = 2*n - 2, ncp = ncp) +
  pt(-t_critical, df = 2*n - 2, ncp = ncp)
power
```

```
## [1] 0.0798854
```

Quelle serait la taille minimale de l'échantillon afin d'avoir une puissance d'au moins 0,80 ?

Calcul de la puissance statistique (suite)

SYS865 Inférence
statistique avec
programmation R

Ornwipa
Thamsuwan

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

```
# Calculate power using the effect size
alpha <- 0.05
t_critical <- qt(1 - alpha/2, df = 2*n - 2)
ncp <- effect_size * sqrt(n*n/(n+n)) # ou sqrt(n/2)
power <- 1 -
  pt(t_critical, df = 2*n - 2, ncp = ncp) +
  pt(-t_critical, df = 2*n - 2, ncp = ncp)
power
```

```
## [1] 0.0798854
```

Quelle serait la taille minimale de l'échantillon afin d'avoir une puissance d'au moins 0,80 ?

```
desired_power <- 0.80
calculate_sample_size(effect_size, desired_power, alpha)
```

```
## [1] 61
```

“The larger sample size, the more confidence you can be that your sample mean is a good representation of your population mean.

In other words, the N justifies the means.”

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

D'autre option du logiciel : G*Power

D'autre option du logiciel : G*Power

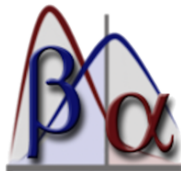


Figure 4: G*Power

Lien pour le télécharger :

<https://www.psychologie.hhu.de/arbeitsgruppen/allgemeine-psychologie-und-arbeitspsychologie/gpower>

En tous cas, en utilisant G*Power, il faut comprendre et précalculer le paramètre de noncentralité 'ncp' (ou la notion de taille d'effet).

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques

Recap

**Puissance
statistique**

**Détermination de
la taille
d'échantillon**

**D'autre option du
logiciel : G*Power**

Travaux pratiques

Travaux pratiques

À partir de la base de données “Pima Indian Diabetes”,
supposant que $\alpha = 0.05$ pour chacun des huit paramètres
(Pregnancies, Glucose, BloodPressure,
SkinThickness, Insulin, BMI,
DiabetesPedigreeFunction et Age) ...

1. Calculer la puissance statistique $(1 - \beta)$ pour détecter la différence entre les deux groupes de Outcome
2. Calculer la taille minimale de l'échantillon afin d'avoir une puissance statistique d'au moins 0,80

Essayez d'utiliser à la fois R et G*Power.

Recap

Puissance
statistique

Détermination de
la taille
d'échantillon

D'autre option du
logiciel : G*Power

Travaux pratiques