Primer Parcial S y S

Omar Andrés Rodriguez Quireno

1) señal: $x(t) = 20\sin(7t - \frac{\pi}{2}) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$

Primero simplificamos la señal

$\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\theta)$

entonces

$20\sin(7t - \frac{\pi}{2}) = -20\cos(7t)$

y queda

$x(t) = -20\cos(7t) - 3\cos(5t) + 2\cos(10t)$

segundo determinar el periodo fundamental de la señal

las tres frecuencias angulares presentes son:

- $w_1 = 7$, Periodo $T_1 = \frac{2\pi}{7}$
- $w_2 = 5$, periodo $T_2 = \frac{2\pi}{5}$
- $w_3 = 10$, periodo $T_3 = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

El periodo fundamental de la señal es el minimo comun multiplo de los tres periodos

se puede usar minimo comun multiplo de los periodos individuales

$T_i = \frac{2\pi}{w_i} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{7}, T_2 = \frac{2\pi}{5}, T_3 = \frac{2\pi}{10}$

$T = mcm\left(\frac{2\pi}{7}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{10}\right) = 2\pi$

Tercero encontrar los valores maximo y minimo posibles. Como cada coseno tiene amplitud 1:

- $-20\cos(7t) \in [-20, 20]$
- $-3\cos(5t) \in [-3, 3]$
- $2\cos(10t) \in [-2, 2]$

Por lo tanto el rango posible de la señal es:

$x_{min} = -20 - 3 - 2 = -25$

$x_{max} = 20 + 3 + 2 = 25$

entonces

$x(t) \in [-25, 25]$. (amplitud total 50 V)

Cuarto acondicionamos la señal

$x_{acond}(t) = a \cdot x(t) + b$

planteamos el sistema

1. $a \cdot (-25) + b = -3{,}3$
2. $a \cdot (25) + b = 5$

$(25a + b) - (-25a + b) = 5 - (3.3) \Rightarrow 50a = 8.3 \Rightarrow a = \frac{8.3}{50} = 0{,}166$

sustituyendo

$25a + b = 5 \Rightarrow 4{,}15 + b = 5 \Rightarrow b = 0.85$

$x_{acond}(t) = 0.166 \cdot x(t) + 0{,}85$

Quinto Digitalizacion

con 5 bits, se tienen:

$$N = 2^5 = 32 \text{ niveles}$$

Rango total del ADC es:

$$R = V_{max} - V_{min} = 5 - (-3.3) = 8.3V$$

Entonces el tamaño del paso (resolucion del cuantizador) es:

$$\Delta = \frac{8.3}{32-1} = \frac{8.3}{31} \approx 0.2677 \, V$$

La cuantizacion se realiza redondeando la señal acondicionada a su valor mas cercano multiplo de Δ:

$$x_q(t) = \text{round}\left(\frac{x_{acond}(t) - (-3.3)}{\Delta}\right) \cdot \Delta - 3.3$$

2)

Primero señal continua dada

la señal analógica es:

$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(2000\pi t) + 10\cos(11000\pi t)$

- Convertimos cada termino a su forma con frecuencia expresada en Hz

$\cos(2\pi f t) \Rightarrow f = \text{frecuencia en Hz}$

entonces

- $\cos(1000\pi t) = \cos(2\pi \cdot 500t) \Rightarrow f_1 = 500 \text{ Hz}$
- $\sin(2000\pi t) = \sin(2\pi \cdot 1000t) \Rightarrow f_2 = 1000 \text{ Hz}$
- $\cos(11000\pi t) = \cos(2\pi \cdot 5500t) \Rightarrow f_3 = 5500 \text{ Hz}$

segundo condicion de Nyquist

El teorema de muestreo de Nyquist dice que para evitar aliasing:

$$f_s > 2 f_{max}$$

Donde:

- $f_s = 5000$ Hz (frecuencia de muestreo)
- $f_{max} = 5500$ Hz

$5000 < 2 \cdot 5500 = 11000 \Rightarrow$ ✗ No se cumple Nyquist

habrá aliasing y necesitamos hallar como se verá la señal muestrada.

Tercero: efecto del muestreo: aliasing

el muestreo en tiempo discreto de una señal se representa como:

$$x[n] = x(nT_s) \quad \text{con } T_s = \frac{1}{f_s}$$

Para cada componente

componente 1:

$$3\cos(2\pi \cdot 500 \cdot nT_s) = 3\cos(2\pi \cdot 500 \cdot n/5000) = 3\cos\left(\frac{2\pi n}{10}\right)$$

$\Rightarrow$ frecuencia discreta $w_1 = \frac{2\pi}{10}$

no hay aliasing aquí porque $500 < \frac{f_s}{2} = 2500$ Hz

Componente 2:

$$5\sin(2\pi \cdot 1000 \cdot nT_s) = 5\sin(2\pi \cdot 1000 \cdot n/5000) = 5\sin\left(\frac{4\pi n}{10}\right)$$

$\Rightarrow w_2 = \frac{4\pi}{10}$

Tampoco hay aliasing, ya que $1000 < 2500$ Hz

Componente 3:

$$10\cos(2\pi \cdot 5500 \cdot nT_s) = 10\cos(2\pi \cdot 5500 \cdot n/5000) = 10\cos\left(\frac{22\pi n}{10}\right)$$

$\Rightarrow w_3 = \frac{22\pi}{10}$

$w_3 = \frac{22\pi}{10} = 2.2\pi \Rightarrow w_a = w_3 \bmod 2\pi = (2.2\pi - 2\pi) = 0.2\pi$

significa que la componente de 5500 Hz aparece como si fuera de 500 Hz despues de muestrear

Quinta señal: discreta obtenida.

Despues del muestreo, la señal discreta será:

$$X[n] = 3\cos\left(\frac{2\pi n}{10}\right) + 5\sin\left(\frac{4\pi n}{10}\right) + 10\cos\left(\frac{2\pi n}{10}\right)$$

Agrupamos terminos:

$$X[n] = (3+10)\cos\left(\frac{2\pi n}{10}\right) + 5\sin\left(\frac{4\pi n}{10}\right)$$

$$X[n] = 13\cos\left(\frac{2\pi n}{10}\right) + 5\sin\left(\frac{4\pi n}{10}\right)$$

3) Primero: expresamos la distancia media

Dado que las señales son periódicas de periodo T, podemos calcular la distancia media con:

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{T}\int_0^T |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt$$

con:

- $x_1(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$
- $x_2(t)$ definido por tramos

$$x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t < \frac{T}{4} \\ -1 & \text{si } \frac{T}{4} \le t < \frac{3T}{4} \\ 1 & \text{si } \frac{3T}{4} \le t < T \end{cases}$$

segundo: Partimos la integral en tres tramos ya que $x_2(t)$ es a trozos, también lo hacemos con la integral:

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{4}} |x_1(t) - 1|^2 dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} |x_1(t) + 1|^2 dt \int_{\frac{3T}{4}}^{T} |x_1(t) - 1|^2 dt\right]$$

observa que los tramos 1 y 3 son iguales (ambos tienen $x_2(t) = 1$) así que podemos agruparlos:

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{T}\left[2\int_0^{\frac{T}{4}} |x_1(t) - 1|^2 dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} |x_1(t) + 1|^2 dt\right]$$

Tercero: expandimos los cuadrados

recordando que:

$$|x_1(t) \pm 1|^2 = (A\cos(w_0 t) \pm 1)^2 = A^2\cos^2(w_0 t) \pm 2A\cos(w_0 t) + 1$$

entonces:

- $|x_1(t) - 1|^2 = A^2\cos^2(w_0 t) - 2A\cos(w_0 t) + 1$
- $|x_1(t) + 1|^2 = A^2\cos^2(w_0 t) + 2A\cos(w_0 t) + 1$

Cuarto: Sustituimos en la integral

sean $w_0 = \frac{2\pi}{T}$, entonces:

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{T}\left[2\int_0^{\frac{T}{4}} (A^2\cos^2(w_0 t) - 2A\cos(w_0 t) + 1)\,dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} (A^2\cos^2(w_0 t) + 2A\cos(w_0 t) + 1)\,dt\right]$$

Quinto: usamos identidades trigonometricas

- $\cos^2(w_0 t) = \frac{1 + \cos(2w_0 t)}{2}$

Así que: $\int \cos^2(w_0 t)\,dt = \int \frac{1 + \cos(2w_0 t)}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2w_0 t)}{4w_0}$

y: $\int \cos(w_0 t)\,dt = \frac{\sin(w_0 t)}{w_0}$

sexto: calcular la integral

$$I_1 = \int_0^{\frac{T}{4}} \left(A^2\cos^2(w_0 t) - 2A\cos(w_0 t) + 1\right) dt$$

Recordando que:

- $\cos^2(w_0 t) = \dfrac{1 + \cos(2w_0 t)}{2}$
- $w_0 = \dfrac{2\pi}{T}$

entonces:

$$\int_0^{\frac{T}{4}} A^2\cos^2(w_0 t)\,dt = A^2 \int_0^{\frac{T}{4}} \frac{1 + \cos(2w_0 t)}{2}\,dt = A^2\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2w_0 t)}{4w_0}\right]_0^{\frac{T}{4}}$$

sustituimos:

- $\left.\dfrac{t}{2}\right|_0^{T/4} = \dfrac{T}{8}$
- $\left.\dfrac{\sin(2w_0 t)}{4w_0}\right|_0^{T/4} = \dfrac{\sin\left(2w_0 \cdot \frac{T}{4}\right)}{4w_0} = \dfrac{\sin(\pi)}{4w_0} = 0$

entonces

$$\int_0^{\frac{T}{4}} A^2\cos^2(w_0 t)\,dt = A^2 \cdot \frac{T}{8}$$

Ahora $\displaystyle\int_0^{\frac{T}{4}} \cos(w_0 t)\,dt = \left.\frac{\sin(w_0 t)}{w_0}\right|_0^{\frac{T}{4}} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)}{w_0} = \frac{1}{w_0}$

entonces

$$I_1 = A^2 \cdot \frac{T}{8} - 2A \cdot \frac{1}{w_0} + \frac{T}{4}$$

$$I_2 = \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \left(A^2\cos^2(w_0 t) + 2A\cos(w_0 t) + 1 \right) dt$$

$$\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} A^2\cos^2(w_0 t)\,dt = A^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2w_0 t)}{4w_0} \right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}$$

- $\left.\frac{t}{2}\right|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} = \frac{3T}{8} - \frac{T}{8} = \frac{T}{4}$

- $\left.\frac{\sin(2w_0 t)}{4w_0}\right|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} = \frac{\sin(3\pi) - \sin(\pi)}{4w_0} = 0$

entonces

$$\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} A^2\cos^2(w_0 t)\,dt = A^2 \cdot \frac{T}{4}$$

Ahora:

$$\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \cos(w_0 t)\,dt = \left.\frac{\sin(w_0 t)}{w_0}\right|_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{w_0} = \frac{-1-1}{w_0} = \frac{-2}{w_0}$$

$$I_2 = A^2 \cdot \frac{T}{4} + 2A \cdot \left(\frac{-2}{w_0}\right) + \frac{T}{2} = A^2 \cdot \frac{T}{4} - \frac{4A}{w_0} + \frac{T}{2}$$

juntar todo

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{T}(2I_1 + I_2)$$

sustituimos:

$$I_1 = A^2 \cdot \frac{T}{8} - \frac{2A}{w_0} + \frac{T}{4} \Rightarrow 2I_1 = A^2 \frac{T}{4} - \frac{4A}{w_0} + \frac{T}{2}$$

entonces

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{T}\left[A^2 \cdot \frac{T}{4} - \frac{4A}{w_0} + \frac{T}{2} + A^2 \frac{T}{4} - \frac{4A}{w_0} + \frac{T}{2}\right]$$

Sumando:

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{T}\left[A^2 \cdot \frac{T}{2} - \frac{8A}{w_0} + T\right] = A^2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{8A}{Tw_0} + 1$$

con

$$w_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow Tw_0 = 2\pi \quad \text{entonces}$$

$$\boxed{d(x_1, x_2) = \frac{A^2}{2} - \frac{4A}{\pi} + 1}$$

4) Primero: Demostración de los coeficientes exponenciales

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{ti}^{tf} x(t)e^{-jnw_0 t}dt \quad \text{donde } w_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Segunda derivada $x''(t)$, y demostrar que:

$$C_n = \frac{1}{(t_i - t_f)n^2 w_0^2}\int_{ti}^{tf} x''(t)e^{-jnw_0 t}dt$$

$$x''(t) \leftrightarrow -(nw_0)^2 c_n$$

$$c_n^{(x'')} = \frac{1}{T}\int_{ti}^{tf} x''(t)e^{-jnw_0 t}dt = -(nw_0)^2 c_n$$

despejo

$$C_n = \frac{-1}{(nw_0)^2}\cdot\frac{1}{T}\int_{ti}^{tf} x''(t)e^{-jnw_0 t}dt$$

$T = t_f - t_i$ así que:

$$C_n = \frac{-1}{n^2 w_0^2 (t_f - t_i)}\int_{ti}^{tf} x''(t)e^{-jnw_0 t}dt$$

segundo ¿como se obtienen an y bn desde $x''(t)$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n w_0 t) + b_n \sin(n w_0 t) \right)$$

$$x''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n n^2 w_0^2 \cos(n w_0 t) - b_n n^2 w_0^2 \sin(n w_0 t) \right)$$

$$a_n = -\frac{1}{n^2 w_0^2} \cdot \frac{2}{T} \int_{t_i}^{t_i} x''(t) \cos(n w_0 t)\, dt$$

$$b_n = -\frac{1}{n^2 w_0^2} \cdot \frac{2}{T} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \sin(n w_0 t)\, dt$$