Taller 2 S y S

Omar Andrés Rodriguez Quiceno

- sistema $y[n] = \frac{x[n]}{3} + 2x[n-1] - y[n-1]$.

• Linealidad

La Ecuacion

$$y[n] + y[n-1] = \frac{x[n]}{3} + 2x[n-1]$$

Cumple superposicion y homogenidad (los coeficientes son constantes), por lo que es lineal

• invarianza en el tiempo

Todos los retardos $(n-1)$ aparecen con coeficientes constantes. si desplazo la entrada $x'n = x[n-k]$, la salida se desplaza exactamente igual. Por tanto es invariante en el tiempo

el sistema es SLIT

• sistema

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} (x[k])^2$$

Linealidad

Aparece el termino $x[k]^2$

$$H\{ax[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{n} (ax[k])^2 = a^2 \sum x[k]^2 \neq a\,y[n]$$

no es lineal

Invarianza en el tiempo

si $x'[n] = x[n-n_0]$

$$y'[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k-n_0]^2 = \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} x[m]^2 = y[n-n_0]$$

invariante en el tiempo

• Sistema
$$y[n] = \text{median}\{x[n], x[n-1], x[n-2]\},$$

filtro de mediana de longitud 3.

linealidad

la operación "mediana" es no lineal (no cumple superposición).

Invarianza en el tiempo

"Ventana tamaño 3" siempre se aplica con los mismos retrasos.

• Sistema
$$y(t) = Ax(t) + B \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

Linealidad

Por la costante aditiva B
$$H\{x_1 + x_2\} = A(x_1 + x_2) + B \neq (Ax_1 + B) + (Ax_2 + B)$$

$\Rightarrow$ no es lineal

Invarianza en el tiempo

si $x'(t) = x(t - t_0)$
$$y'(t) = Ax(t - t_0) + B = y(t - t_0)$$

invariante en el tiemp

1) • Convolucion discreta con respuesta impulso

entrada

$x[n] = \{-15, 5, -3^{\uparrow}, 0, 5, 7, -1\}$, $n_x \in \{2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$(\uparrow \Rightarrow n = 0)$

Respuesta impulso

$h[n] = \{1, -2, 0^{\uparrow}, 1, -2\}$, $n_h \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Metodo grafico

$n\ min = (-2) + (-2) = -4$

$n\ max = 4 + 2 = 6$

• Respuesta al escalon

entrada

$g[n] = \{-1, 6, -10, 3^{\uparrow}, 1, -10, 2, 5\}$, $n_g \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

respuesta impulso

$h_2[n] = g[n] - g[n-1]$, $g[n < -3] = 0$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g[n]$	-1	6	-10	3	1	-10	2	5
$h_2[n]$	-1	7	-16	13	-2	-11	12	3

$n\ min = (-2) + (-3) = -5$ $\quad$ $n\ max = 4 + 4 = 8$

5)

- Señal de entrada

$x(t) = e^{-at^2}, \quad a>0$

- sistema A (no lineal)

$y_A(t) = (x(t))^2 = e^{-2at^2}$

- Sistema B (LTI) con

$h_B(t) = B e^{-bt^2}, \quad b>0, \quad B \in \mathbb{R}$

- Convolución de dos gausianas

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p\tau^2} e^{-q(t-\tau)^2} d\tau = \sqrt{\frac{\pi}{p+q}} \exp\left(-\frac{pq}{p+q} t^2\right).$$

orden $x \to B \to A$

LTI B:

$$y_B(t) = (h_B * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} B e^{-b\tau^2} e^{-a(t-\tau)^2} dT =$$

$$B\sqrt{\frac{\pi}{a+b}} \exp\left(-\frac{ab}{a+b} t^2\right).$$

no lineal A:

$$Y(t) = (y_B(t))^2 = \left[B\sqrt{\frac{\pi}{a+b}}\right]^2 \exp\left(-2\frac{ab}{a+b} t^2\right) =$$

$$B^2 \frac{\pi}{a+b} \exp\left(-2\frac{ab}{a+b} t^2\right)$$

Orden $X \to A \to B$

no lineal A

$$y_A(t) = x^2(t) = e^{-2at^2}$$

LTI B:

$$y(t) = (h_B * y_A)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} B e^{-b\tau^2} e^{-2a(t-\tau)^2} d\tau =$$

$$B\sqrt{\frac{\pi}{2a+b}} \exp\left(-\frac{2ab}{2a+b}t^2\right)$$

como A es no lineal, el orden de cascada altera el resultado

$X \to B \to A \neq X \to A \to B$

7

$$x(t) = u(t)\sin(w_0 t)$$

a) $X(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\sin(w_0 t)\,dt = \frac{w_0}{s^2 + w_0^2}$

$\mathcal{R}\{s\} > 0$

b) Polos: Raices del denominador

$s^2 + w_0^2 = 0 \Rightarrow s = +jw_0 \,;\, -jw_0$

c) Ceros infinitos

d) ROC para una señal causal, $\mathcal{R}\{s\} > 0$

8) i) Desplazamiento en el tiempo

$$\mathcal{L}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) e^{-st}\, dt$$

cambio de variable $u = t - t_0$, de modo que $t = u + t_0$

$dt = du$ entonces

$$\mathcal{L}\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-s(u+t_0)}\, du$$

$$e^{-st_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-su}\, du = e^{-st_0} X(s).$$

ii) Escalamiento en el tiempo

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)\, e^{-st}\, dt$$

Definimos $u = at \Rightarrow t = u/a$, $dt = \frac{du}{a}$

si $a > 0$, los limites siguen $\pm\infty$; si $a < 0$, cambian de orden pero aparece $|a|$ al tomar el signo. En ambos casos

$$\mathcal{L}\{x(at)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-s\frac{u}{a}} \frac{du}{|a|} = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} x(u) e^{-(s/a)u}\, du = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

ii i) Derivada respecto de t

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x'(t) e^{-st}\, dt$$

integrando por partes

$$\begin{cases} u = e^{-st} & dv = x'(t)\, dt \\ du = -s e^{-st}\, dt, & v = x(t) \end{cases}$$

queda

$$\int x'(t) e^{-st}\, dt = x(t) e^{-st} \Big|_{-\infty}^{\infty} + s\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st}\, dt.$$

$x(t) e^{-st} \to 0$ en los extremos de la ROC, el termino de frontera es cero y

$$\mathcal{L}\{x'(t)\} = s\,X(s).$$

iv) Convolución en el tiempo

Definimos $(x*y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$ entonces

$$\mathcal{L}\{x*y\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau \right] e^{-st}\, dt$$

intercambiamos integrales (por Fubini) y en la interna hacemos el cambio $u = t - \tau$:

$$\mathcal{L}\{x*y\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t-\tau)\, e^{-st}\, dt \right] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[e^{-s\tau} \int_{-\infty}^{\infty} y(u)\, e^{-su}\, du \right] d\tau$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(u)\, e^{-su}\, du \right]$$

$$= X(s)\, Y(s)$$

a) i) $x_1(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-3t}u(t)$

Transformada:

$$X_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-2t} e^{-st}\, dt + \int_0^{\infty} e^{-3t} e^{-st}\, dt =$$

$$\frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} = \frac{2s+5}{(s+2)(s+3)}$$

Polos y ceros

- polos simples en $s = -2$ y $s = -3$
- cero simple en $2s + 5 = 0 \Rightarrow s = -\frac{5}{2}$.

ROC

$\Re\{s\} > -2$

Pues el polo de mayor parte real es -2, la señal es causal.

ii) $x_2(t) = e^{2t}u(t) + e^{-3t}u(-t)$

transformado

$$\mathcal{L}\{e^{2t}u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-(s-2)t}\,dt = \frac{1}{s-2}, \quad R(s) > 2$$

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}u(-t)\} = \int_{-\infty}^{0} e^{-(s+3)t}\,dt = -\frac{1}{s+3}, \quad R(s) < -3$$

Sumando

$$X_2(s) = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+3} = \frac{5}{(s-2)(s+3)}$$

Polos y ceros

polos simples en $s = 2$ y $s = -3$

no hay ceros

ROC

$-3 < R\{s\} < 2$

(intersección de $R(s) > 2$ y $R(s) < -3$ vacía

señal bidireccional $\Rightarrow$ ROC entre polos

iii) $x_3(t) = e^{-a|t|}$ (quad ($a>0$)

se descompone

$$x_3(t) = \begin{cases} e^{-at} , & t \geq 0 \\ e^{+at} , & t < 0 \end{cases}$$

Transformada

$$X_3(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-(s-a)t} dt =$$

$$\frac{1}{s+a} + \frac{1}{a-s} = \frac{2a}{a^2-s^2}$$

Polos y ceros

polos simples en $s = +a$ y $s = -a$

no hay ceros infinitos

ROC

$-a < R\{s\} < a$

señal bilateral, ROC "entre" los polos)

iv) $x_4(t) = e^{-2t}\,[u(t) - u(t-5)]$

transformada

$$X_4(s) = \int_0^5 e^{-2t} e^{-st}\,dt = \int_0^5 e^{-(s+2)t}\,dt =$$

$$= \frac{1 - e^{-5(s+2)}}{s+2}$$

Polos y ceros

Polo simple en $s = -2$

ceros infinitos

$1 - e^{-5(s+2)} = 0 \Rightarrow s = -2 - j\frac{2\pi k}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$

(forman una linea vertical $\mathcal{R}\{s\} = -2$ periodica en $\mathcal{I}\{s\}$)

ROC

la integral es finita para todo $s \in \mathbb{C}$ (no hay divergencia en $t \to \infty$) de modo que

ROC: todo el plano s ($\mathcal{R}\{s\} > -\infty$ y $< +\infty$)

10) Descomposición en fracciones parciales

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}$$

multiplicamos por $(s+1)(s+2)^2$:

$$1 = A(s+2)^2 + B(s+1)(s+2) + C(s+1)$$

para hallar A, B, C:

$s = -1$:

$$1 = A((-1)+2)^2 = A \cdot 1^2 \Rightarrow A = 1$$

$s = -2$:

$$1 = C((-2)+1) = -C \Rightarrow C = -1$$

Para B $s = 0$:

$$1 = A \cdot (2)^2 + B(1)(2) + C(1) = 1 \cdot 4 + 2B + (-1) \cdot 1$$

$$= 3 + 2B \Rightarrow 2B = -2 \Rightarrow B = -1$$

Por tanto:

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2}$$

Transformada inversa de Laplace

$t \geq 0$

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} te^{-2t}$

Así

$$x(t) = e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t} = e^{-t} - (1+t)e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

La ROC dad $\Re\{s\} > -1$

señal causal de decaimiento dominada por e^{-t}