LINEÁRIS ALGEBRA ÉS NUMERIKUS MÓDSZEREI

2023/24/1

Tartalomjegyzék

1. Előadás I.

1.1. Hibaszámítás

1.1.1. Modellhiba:

A valóságnak csak egy közelítését használjuk a feladat matematikai alakjának a felírásához.

1.1.2. Mérési, öröklött hiba:

A modell adatai csak közelítő értékek a pontos adatokhoz képest.

1.1.3. Műveleti, input hiba:

A racionális számok csak egy részhalmaza ábrázolható lebegőpontos, aritmetikus környezetben Alul-, túlcsordulás.

1.1.4. Képlethiba:

Egy végtelen eljárást véges lépés után leállítunk. Közelítő algoritmusokat alkalmazunk.

1.2. Számábrázolás

1.2.1. A nem nulla lebegőpontos számok általános alakja:

$$\pm a^k \left(\frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \cdot + \frac{m_t}{a^t}\right) \tag{1}$$

$a > 1$ (számábrázolás alapja)
$t > 1$ (számjegyek száma)
$k \in \mathbb{Z}$
$1 \leq m_1 \leq a - 1$
$0 \leq m_i \leq a - 1$
Megjegyzés 1: A nullánál minden 0 és +.
Megjegyzés 2: $t = 8$ egyszeres, $t = 16$ dupla pontosság.

1.2.2. Lebegőpontos számok tárolási alakja:

$$[\pm, k, m_1, m_2, \ldots, m_t] \tag{2}$$

1.2.3. Legnagyobb ábrázolható szám:

$$M^\infty = a^U(1 - a^{-t}) \tag{3}$$

1.2.4. Legkisebb ábrázolható szám:

$$-M^\infty \tag{4}$$

1.2.5. A nullához legközelebb eső pozitív lebegőpontos szám:

$$\varepsilon_0 = a^{L-1} \tag{5}$$

1.2.6. Relatív pontosság:

$$\varepsilon_1 = a^{1-t} \tag{6}$$

1.2.7. Kerekítés:

$$fl(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{ha } |x| < \varepsilon_0 \\ \text{Az x-hez legközelebbi lebegőpontos szám} & ,\text{ha } \varepsilon_0 \leq |x| \leq M^\infty \end{cases} \tag{7}$$

$$|fl(x) - x| \leq \begin{cases} \varepsilon_0 & ,\text{ha } |x| < \varepsilon_0 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_1 |x| & ,\text{ha } |x| \geq \varepsilon_0 \end{cases} \tag{8}$$

1.3. Klasszikus Hibaanalízis:

A - A pontos érték.
a - A pontos érték közelítése.
$\Delta a = A - a$ - Az a közelitési hibája.
$|\Delta a| = |A - a|$ - Az abszolút hiba.
$|\Delta a| \leq \delta a$ - Az abszolút hibakorlát.
$A = a \pm \delta a$
$A \in [a - \delta a, a + \delta a]$
$\frac{\delta a}{|a|}$ - A relatív hiba.

1.4. Abszolút hiba:

$$\delta(a \pm b) \leq \delta a + \delta b \tag{9}$$

$$\delta(ab) \approx |a|\delta b + |b|\delta a \tag{10}$$

$$\delta\left(\frac{a}{b}\right) \approx \frac{|a|\delta b + |b|\delta a}{|b|^2} \tag{11}$$

1.4.1. Példa:

$a = 3 \pm 0.1$
$b = 4 \pm 0.2$
$c = 5 \pm 0.3$
$d = \frac{a+c}{b} = \frac{8}{4} = 2\pm?$

$$\delta d = \frac{|a + c|\delta b + |b|\delta(a + c)}{|b|^2} = \frac{8 \cdot 0.2 + 4 \cdot 0.4}{16} = \frac{3.2}{16} = 0.2 \tag{12}$$

Tehát $d = 2 \pm 0.2$

A relatív hiba pedig

$$\frac{\delta d}{|d|} = \frac{0.2}{2} = 0.1 \tag{13}$$

1.5. Relatív hiba:

$$\frac{\delta(a+b)}{|a+b|} = \max\left\{\frac{\delta a}{|a|}, \frac{\delta b}{|b|}\right\} \tag{14}$$

$$\frac{\delta(a-b)}{|a-b|} = \frac{\delta a - \delta b}{|a-b|} \tag{15}$$

$$\frac{\delta(ab)}{|ab|} \approx \frac{\delta a}{|a|} + \frac{\delta b}{|b|} \tag{16}$$

$$\frac{\delta\left(\frac{a}{b}\right)}{\frac{a}{b}} \approx \frac{\delta a}{|a|} + \frac{\delta b}{|b|} \tag{17}$$

1.5.1. Példa:

$a = 3 \pm 0.1$
$b = 4 \pm 0.2$
$c = 5 \pm 0.3$
$d = \frac{a+c}{b} = 2\pm?$

$$\frac{\delta\left(\frac{a+c}{b}\right)}{\frac{a+c}{b}} \approx \frac{\delta(a+c)}{|a+c|} + \frac{\delta b}{|b|} \tag{18}$$

$$\frac{\delta(a+c)}{|a+c|} = \max\left\{\frac{\delta a}{|a|}, \frac{\delta c}{|c|}\right\} = \max\left\{\frac{0.1}{3}, \frac{0.3}{5}\right\} = 0.06 \tag{19}$$

$$\frac{\delta\left(\frac{a+c}{b}\right)}{\frac{a+c}{b}} \approx 0.06 + \frac{0.2}{4} = 0.11 \tag{20}$$

Tehát
$\frac{\delta d}{d} = 0.11 \Rightarrow \delta d = 2 \cdot 0.11 = 0.22$