1 Bevezető

(a) Az $\frac{1}{n^2}$ sor összege

$$\sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(b) Az $n!$ (n faktoriális) a számok szorzata 1-től n-ig, azaz

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n \tag{1}$$

Konvenció szeirnt $0! = 1$

(c) Legyen $0 \leq k \leq n$. A binominális együtható

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Ahol a faktoriálist (1) szerint defeiniáljuk:

(d) Az előjel- azaz szignum függvényt a következ®képpen definiáljuk:

$$sgn(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 1 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

2 Determináns

(a) Legyen

$$[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$$

a természetes számok halmaza 1-től n-ig.

(b) Egy n-edrendű *permutáció* σ egy bijekció $[n]$-ből $[n]$-be. Az $[n]$-edrendű permutációk halmazát, az ún. szimetrikus csoportot, S_n-el jelöljük.

(c) Egy $\sigma \in S_n$ permutációban inverziónak nevezzük egy (i, j) párt, ha $i < j$, de $\sigma_i > \sigma_j$.

(d) $\sigma \in S_n$ permutáció paritásának az inverziók számát nevezzük:

$$\mathcal{I}(\sigma) := \left|\left\{(i,j)|(i,j) \in [n], i < j, \sigma_i > \sigma_j\right\}\right|$$

(e) Legyen $a \in \mathbb{R}^{n \times n}$, egy $n \times n$ (négyzetes) valós mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Az A mátrix determinánsát a következőképpen definiáljuk:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\sigma \in S_n} (-1^{\mathcal{I}(\sigma)}) \prod_{i_1}^{n} a_{i\sigma_i} \tag{2}$$

3 Logikai azonosság

Tekintsük az $L = 0, 1$ halmazt, és rajta a következő igazságtáblával definiált műveleteket:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \to y$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Legyenek $a, b, c, d \in L$. Belátjuk a következő azonosságot:

$$(a \wedge b \wedge c) \to d = a \to (b \to (c \to d)) \tag{3}$$

A következő azonosságot bizonyítás nélkül használjuk:

$$x \to y = \bar{x} \vee y \tag{4a}$$

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \qquad \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \tag{4b}$$

A (3) bal oldala, (4) felhasználásával

$$(a \wedge b \wedge c) \to d \underset{4a}{=} \overline{a \wedge b \wedge c} \vee d \underset{4b}{=} (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \vee d \tag{5}$$

A (3) jobb oldala, (4a) ismételt felhasználásával

$$a \to (b \to (c \to d)) = \bar{a} \vee (b \to (c \to d)) = \bar{a} \vee (\bar{b} \vee (c \to d)) = \bar{a} \vee (\bar{b} \vee (\bar{c} \vee d)), \tag{6}$$

ami a $\vee$ asszociavitása miatt egyenlő (5) egyenlettel.

4 Binomiális tétel

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k}\right) && \text{(7a)}\\
&= \cdots && \text{(7b)}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{(n+1)-k}b^{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{(n+1)-k}b^{k} && \text{(7c)}\\
&= \cdots && \text{(7d)}\\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1-0}b^{0}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{(n+1)-k}b^{k} && \text{(7e)}\\
&+ \binom{n+1}{n+1}a^{n+1-(n+1)}b^{n+1} && \text{(7f)}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{(n+1)-k}b^{k} && \text{(7g)}
\end{aligned}
$$