Guerriglia Matematica

L'irrazionalità di $\sqrt{2}$ piegando un foglio

Riccardo Giannitrapani

Udine - 14 dicembre 2022

... perciò in realtà considero voi il poeta
e voi il cantante perchè voi leggerete queste
righe con una voce che ha più musica della mia.
Woody Guthrie

Non esiste in tutto il panorama della matematica teorema o proposizione più nota e inflazionata dell'irrazionalità della radice quadrata di 2. Aggiungo alla lunghissima lista di dimostrazioni questa versione, simile (ma non identica) a quella contenuta nel bel libro di Conway e Guy[1]. Si tratta di una goccia abbastanza irrilevante in un mare già vasto, ma ha il vantaggio di poter essere illustrata in termini molto semplici con un banale foglio di carta in formato A4 (o qualsiasi altro formato dello standard ISO 216). In tale foglio, infatti, il rapporto tra il lato lungo e il lato corto è pari, per costruzione, a $\sqrt{2}$. Ovviamente tale proprietà vale solo in teoria, nel mondo reale dei fogli di carta il rapporto ha un valore solo approssimativamente vicino a $\sqrt{2}$.

Questo fatto può essere usato per ottenere alcuni risultati interessanti visivamente e senza usare particolari formalismi matematici; per esempio dividendo in due parti uguali un foglio A4 con una linea parallela al lato corto, si ottengono due fogli A5 che hanno lo stesso rapporto di $\sqrt{2}$.

Consideriamo dunque un foglio A4 ideale (Fig. 1).

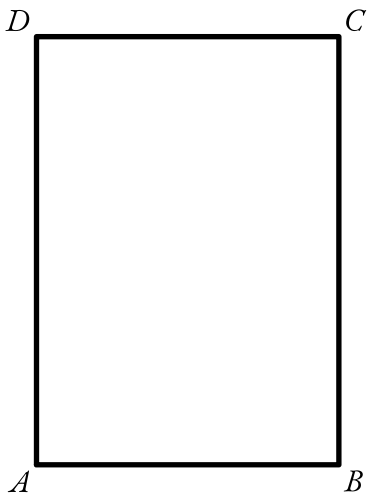

Fig. 1

[1] J.H.Conway e R.K.Guy, *Il libro dei numeri*, Hoepli

Per comodità chiamiamo a la lunghezza dei lati corti AB e DC e b la lunghezza dei due lati lunghi AD e BC. Per quanto premesso abbiamo idealmente

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2}$$

che è possibile verificare (approssimativamente) con un righello ed una calcolatrice.

Sul lato BC consideriamo il punto F tale che FC sia congruente a CD e similmente sul lato AB consideriamo il punto E tale che EB sia congruente a FB (Fig. 2). Dunque i due triangoli DCF e EBF sono rettangoli e isosceli.

Immaginiamo quindi di piegare il foglio lungo le due linee tratteggiate DF e EF (Fig. 3).

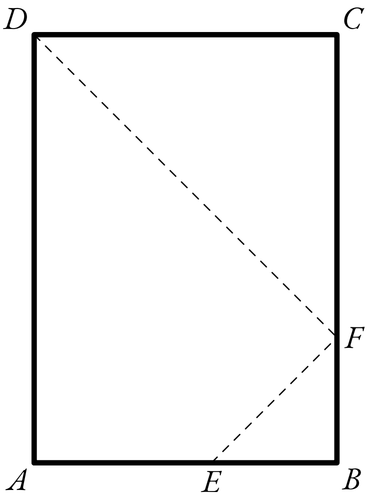

Fig. 2

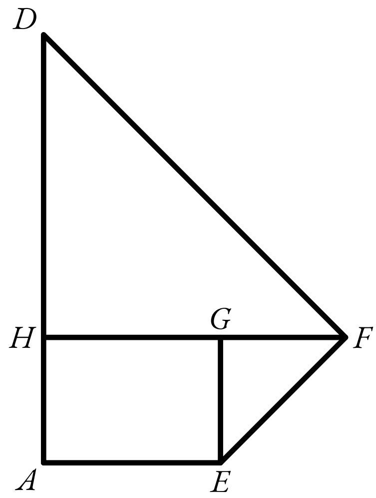

Fig. 3

Si vede facilmente che il lato DF è congruente a DA e dunque è lungo b. Inoltre il rapporto tra la lunghezza di EF e la lunghezza di GE (e quindi HA) è nuovamente $\sqrt{2}$. Chiamiamo con c e d le lunghezze rispettivamente di GE e AE; allora $c = b - a$ e $d = 2a - b$.

Proposizione 1

Il rettangolo $AHGE$ ha lo stesso rapporto tra lato lungo e lato corto del rettangolo di partenza. Dunque

$$\frac{d}{c} = \sqrt{2}$$

Dim

Infatti se piego lungo la linea tratteggiata DE (Fig. 4) i due triangoli AED e FED si sovrappongono.

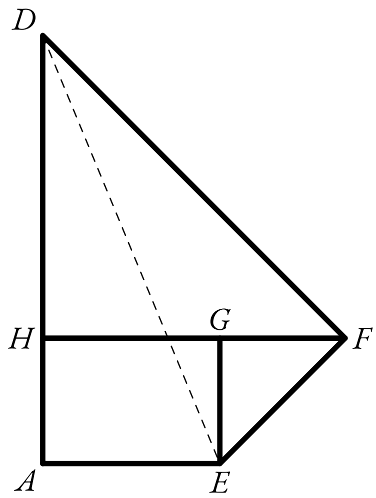

Fig. 4

Più formalmente i due triangoli sono congruenti in quanto entrambi sono rettangoli, hanno la stessa ipotenusa e i lati DF e DA sono congruenti, come notato precedentemente. Dunque EF è congruente a AE. Ma abbiamo già notato che il rapporto tra le lunghezze di EF e GE è $\sqrt{2}$.

QED

Possiamo quindi ottenere il seguente risultato.

Proposizione 2

$\sqrt{2}$ è irrazionale.

Dim

Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, quindi sia esprimibile come rapporto tra due interi e consideriamo tale rapporto ai minimi termini; con una opportuna scelta della scala di misura, possiamo allora utilizzare come interi le lunghezze a e b del nostro foglio. Poichè il rapporto è ai minimi termini, a e b sono i due più piccoli interi tali che

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2}$$

Ma se a e b sono interi, lo sono anche c e d e sono inoltre più piccoli di a e b e hanno lo stesso rapporto (per la proposizione 1), contraddicendo l'affermazione precedente.

QED

Come risultato secondario di questo piccolo divertimento è possibile notare come questa costruzione possa essere ripetuta all'infinito ottenendo una sequenza di rettangoli tutti simili via via più piccoli ottenendo una via geometrica alla rappresentazione in frazione continua infinita di $\sqrt{2}$.

Dalle relazioni trovate precedentemente è infatti facile dimostrare che

$$a = c + d$$
$$b = 2c + d$$

da cui

$$\sqrt{2} = \frac{b}{a} = \frac{2c + d}{c + d} = 1 + \frac{c}{c + d} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{d}{c}}$$

Abbiamo dimostrato che il rettangolo di lati d e c è simile al foglio di partenza e questo significa che possiamo immaginare di piegarlo in maniera analoga a quanto abbiamo fatto precedentemente trovando un nuovo rettangolo più piccolo di lati e ed f tali che

$$\frac{d}{c} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{f}{e}}$$

Sostituendo nella precedente frazione e iterando ad ogni nuovo rettangolo possiamo costruire la nota rappresentazione come frazione continua infinita di $\sqrt{2}$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$