Distrazione Aritmetica

L'irrazionalità di $\sqrt{2}$ per altra via

Riccardo Giannitrapani

Udine - 27 gennaio 2022

"O è banale, o è già stato fatto, o è sbagliato .."
Anonimo

Nelle poche righe che seguono cercherò di dimostrare in modo semplice[1] alcune proprietà dei numeri razionali che portano ad un risultato piuttosto noto. L'intento è pedagogico e non di ricerca e l'epigrafe riportata ne rappresenta lo spirito; esistono in letteratura e sui libri scolastici dimostrazioni dello stesso fatto molto più brevi. L'idea è però che alle volte una passeggiata su strade non battute possa distrarre dal quotidiano (come ci insegna Robert Frost). Non vi è pretesa di originalità, l'unico valore di questa minuscola fatica è proporre spunti di possibile approfondimento e di esercizio personale a studenti e studentesse.

Definiamo due particolari funzioni su $\mathbb{R}$, nel seguente modo

$$D(x) = x + 1$$

$$S(x) = \frac{x}{x+1}$$

Se le restringiamo ai numeri razionali positivi non nulli[2] p/q assumeranno questa forma:

$$D\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{q}$$

$$S\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{p+q}$$

Si vede facilmente che entrambe le funzioni sono chiuse su $\mathbb{Q}_0^+$, ovvero il loro risultato se calcolate su un numero razionale positivo non nullo è ancora un numero razionale positivo non nullo.

Valgono allora le seguenti proposizioni[3]:

[1] Ho già parlato in modo più esteso di questa idea usando l'albero di Calkin-Wilf in un post del mio blog in cui sono presenti alcuni spunti bibliografici; in questa nota ho cercato di asciugare quel discorso all'essenziale. Il post del blog si trova qui:
http://orporick.github.io/lettere/2021/07/23/lettera-sull-irrazionalita/

[2] Vale forse la pena ricordare che se $p/q \in \mathbb{Q}_0^+$ allora p e q sono entrambi numeri naturali diversi da 0.

[3] Teorema sembrava una parola eccessiva.

Proposizione 1

Se $x \in \mathbb{Q}_0^+$ è ai minimi termini, allora anche $D(x)$ e $S(x)$ lo sono.

Dim

Il numero razionale positivo non nullo p/q è ai minimi termini se p e q sono primi tra loro, ovvero 1 è l'unico divisore comune. Si vede subito che se p e q sono primi tra loro allora lo sono anche con la loro somma. Infatti supponiamo che $p+q$ e q, per esempio, abbiano un divisore comune b diverso da 1; allora $p+q=bk$ e $q=bh$ e dunque $p+bh=bk$ da cui segue $p=b(k-h)$. Ma allora b è anche divisore di p, contraddicendo l'ipotesi che p e q sono primi tra loro. Da questo risultato ne discende che $D(p/q)$ e $S(p/q)$ sono ridotti ai minimi termini se lo è p/q. QED

Immaginiamo adesso di comporre le funzioni D e S tra di loro in una sequenza arbitraria; per esempio $D(S(S(x)))$ è una sequenza in cui si calcola S sul numero x, il risultato lo si usa come argomento di S e il risultato di quest'ultima si usa come argomento di D. Si possono immaginare sequenze arbitrariamente lunghe.

Proposizione 2

Se $x \in \mathbb{Q}_0^+$ e T è una qualsiasi sequenza di D e S, allora $T(x) \neq x$.

Dim

Intanto è facile verificare che la somma di numeratore e denominatore di un numero razionale positivo non nullo aumenta se applichiamo D o S. Infatti, per esempio,

$$D\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{q}$$

e $p+q+q > p+q$. Analogamente per S. Quindi se applichiamo a x una sequenza T di D e S avremo che la somma di numeratore e denominatore di $T(x)$ sarà strettamente maggiore della somma di numeratore e denominatore di x. Ma allora $T(x)$ non può essere uguale a x in quanto essendo entrambi razionali positivi non nulli ai minimi termini (per la Proposizione 1), se fossero uguali dovrebbero avere numeratori e denominatori uguali ma con somme differenti, cosa impossibile. QED

Per inciso questo significa che se applichiamo una sequenza arbitrariamente lunga di S e D a partire da un numero razionale positivo non nullo x, la sequenza di risultati non è periodica, ovvero non passa mai due volte sullo stesso valore.

Proposizione 3

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}_0^+$

Dim

Supponiamo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale positivo non nullo. Si vede da calcolo diretto che $D(S(S(D(\sqrt{2})))) = \sqrt{2}$, ma questo contraddice la Proposizione 2. Dunque $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

QED

Analoga dimostrazione vale probabilmente per ogni irrazionale algebrico.