# Guerriglia Matematica

## L'irrazionalità di $\sqrt{2}$ piegando un foglio

*Riccardo Giannitrapani*

Udine - 13 dicembre 2022

*... perciò in realtà considero voi il poeta*
*e voi il cantante perchè voi leggerete queste*
*righe con una voce che ha più musica della mia.*
**Woody Guthrie**

NON ESISTE in tutto il panorama della matematica teorema o proposizione più nota e inflazionata dell'irrazionalità della radice quadrata di 2. Aggiungo alla lunghissima lista di dimostrazioni questa versione, simile (ma non identica) a quella contenuta nel bel libro di Conway e Guy[1]. Si tratta di una goccia abbastanza irrilevante in un mare già vasto, ma ha il vantaggio di poter essere illustrata in termini molto semplici con un banale foglio di carta in formato A4 (o qualsiasi altro formato dello standard ISO 216). In tale foglio, infatti, il rapporto tra il lato lungo e il lato corto è pari, per costruzione, a $\sqrt{2}$. Ovviamente tale proprietà vale solo in teoria, nel mondo reale dei fogli di carta il rapporto ha un valore solo approssimativamente vicino a $\sqrt{2}$.

Questo fatto può essere usato per ottenere alcuni risultati interessanti visivamente e senza usare particolari formalismi matematici; per esempio dividendo in due parti uguali un foglio A4 con una linea parallela al lato corto, si ottengono due fogli A5 che hanno lo stesso rapporto di $\sqrt{2}$.

Consideriamo dunque un foglio A4 ideale (Fig.1).

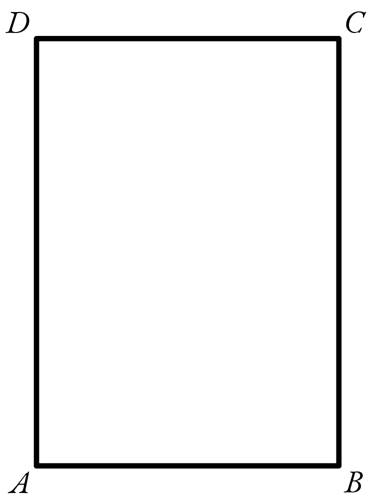


**Fig. 1**

[1] J.H.Conway e R.K.Guy, *Il libro dei numeri*, Hoepli

Per comodità chiamiamo $a$ la lunghezza dei lati corti $AB$ e $DC$ e $b$ la lunghezza dei due lati lunghi $AD$ e $BC$. Per quanto premesso abbiamo idealmente

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2}$$

che è possibile verificare (approssimativamente) con un righello ed una calcolatrice.

Sul lato $BC$ consideriamo il punto $F$ tale che $FC$ sia congruente a $CD$ e similmente sul lato $AB$ consideriamo il punto $E$ tale che $EB$ sia congruente a $FB$ (Fig. 2). Dunque i due triangoli $DCF$ e $EBF$ sono rettangoli e isosceli.

Immaginiamo quindi di piegare il foglio lungo le due linee tratteggiate $DF$ e $EF$ (Fig. 3).

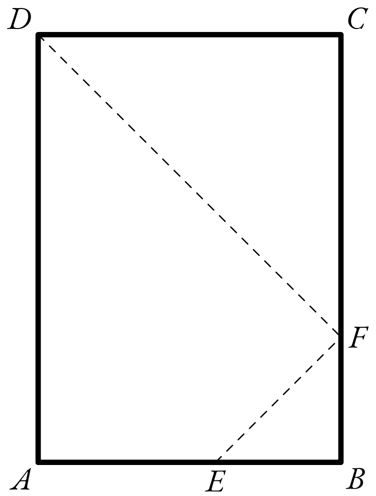


**Fig. 2**

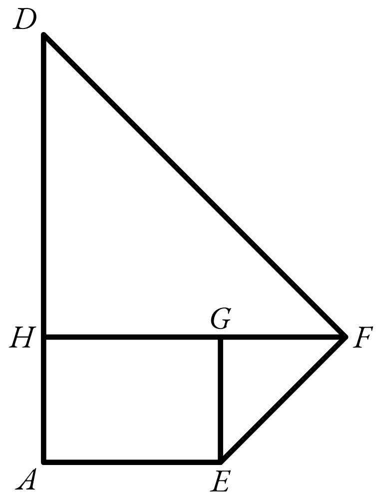


**Fig. 3**

Si vede facilmente che il lato $DF$ è congruente a $DA$ e dunque è lungo $b$. Inoltre il rapporto tra la lunghezza di $EF$ e la lunghezza di $GE$ (e quindi $HA$) è nuovamente $\sqrt{2}$. Chiamiamo con $c$ e $d$ le lunghezze rispettivamente di $GE$ e $AE$; allora $c = b - a$ e $d = 2a - b$.

### Proposizione 1

Il rettangolo $AHGE$ ha lo stesso rapporto tra lato lungo e lato corto del rettangolo di partenza. Dunque

$$\frac{d}{c} = \sqrt{2}$$

*Dim*

Infatti se piego lungo la linea tratteggiata $DE$ (Fig. 4) i due triangoli $AED$ e $FED$ si sovrappongono.

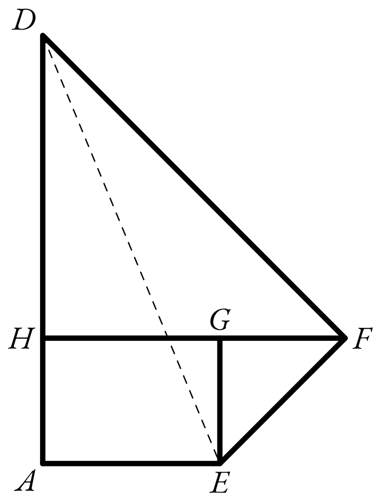


**Fig. 4**

Più formalmente i due triangoli sono congruenti in quanto entrambi sono rettangoli, hanno la stessa ipotenusa e i lati $DF$ e $DA$ sono congruenti, come notato precedentemente. Dunque $EF$ è congruente a $AE$. Ma abbiamo già notato che il rapporto tra le lunghezze di $EF$ e $GE$ è $\sqrt{2}$.

QED

Possiamo quindi concludere con il seguente risultato.

**Proposizione 2**

$\sqrt{2}$ è irrazionale.

*Dim*

Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2}$ sia razionale, quindi sia esprimibile come rapporto tra due interi e consideriamo tale rapporto ai minimi termini; con una opportuna scelta della scala di misura, possiamo allora utilizzare come interi le lunghezze $a$ e $b$ del nostro foglio. Poichè il rapporto è ai minimi termini, $a$ e $b$ sono i due più piccoli interi tali che

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2}$$

Ma se $a$ e $b$ sono interi, lo sono anche $c$ e $d$ e sono inoltre più piccoli di $a$ e $b$ e hanno lo stesso rapporto (per la proposizione 1), contraddicendo l'affermazione precedente.

QED

Questa costruzione può essere iterata ottenendo una sequenza di rettangoli tutti simili via via più piccoli. Con tale sequenza è possibile quindi ottenere $\sqrt{2}$ come una opportuna frazione continua infinita, ma questo è un divertimento per un'altra serata.