L'elettromagnetismo spiegato al mio gatto

Appunti semiseri per i miei studenti e le mie studentesse

R.Giannitrapani

8 giugno 2017

riccardo.giannitrapani@gmail.com

Prefazione

... per i minuti che precedono il sonno,
per il sonno e la morte,
per due tesori occulti,
per gli intimi doni che non elenco,
per la musica, misteriosa forma del tempo.
J.L.Borges

Hic sunt leones, diciamo spesso in classe. Muovere passi leggeri e sicuri in un campo così complesso e variegato come la fisica non è impresa facile. Se poi lo devi fare in previsione di un esame allucinante in cui la fisica è solo una delle tante materie, il risultato sarà quasi sicuramente una disaffezione (per non dire odio) verso Maxwell ed i suoi amici. Non tutti, non sempre, ovvio. Ma quando capita è un peccato, credetemi. Ho deciso di provare ad aiutarvi, cari studenti e care studenesse, con questi pochi appunti, sicuramente incompleti e poco chiari, ma almeno concisi. Non è una dispensa, un libro, un formulario; direi piuttosto un tentativo di scrivere il minimo indispensabile per poter parlare di elettromagnetismo a livello di una quinta superiore. Non ci sono esercizi ed il formalismo è ridotto al minimo non perché ritenga inutile affrontare problemi e calcoli (anzi), ma perché con delle basi solide concettuali il resto, secondo me, viene quasi in automatico.
Qui di seguito troverete tutte le idee di cui abbiamo parlato in classe durante la quinta, saranno dati per scontati concetti ed argomenti degli anni precedenti (che non avete fatto con me); i vostri appunti dovrebbero essere molto più dettagliati (uso il condizionale perché lo so che alle volte non è facile prendere appunti con me), qui troverete solo i concetti essenziali, integrate eventualmente con il libro, gli appunti, la vita.
Ho deciso inoltre di saltare completamente tutti gli aspetti storici ed epistemologici che tanto mi sono cari e su cui tanto ho insistito in classe (lo so, sono una palla di insegnante). Vi lascio veramente il minimo indispensabile[1] perché possiate non fare lo sguardo della mucca che guarda

[1]Questa prima versione è priva di schemi e disegni e questo la rende ovviamente di difficile lettura. Di nuovo, il problema non si pone se userete queste pagine come schema concettuale integrativo dei vostri appunti. In futuro la forma grafica magari cambierà, chi può dirlo?

il treno passare nel caso che qualcuno un giorno vi chieda qualcosa sull'elettromagnetismo. Ovviamente cosa sia indispensabile e cosa non lo sia è una questione di gusti e sensibilità personali, qui emergono le scelte di chi scrive.
Come tutte le opere umane (le mie in particolare), è probabile che queste poche righe buttate giù di getto siano piene di imprecisioni, errori od orrori. Sarò grato a chiunque mi voglia segnalare inciampi da correggere o suggerire altre strade.
Scrivo prevalentemente di notte in compagnia del mio gatto Leonard (Penny, la mia gatta, mi schifa se le parlo di fisica). Ho provato a spiegare a lui quel che avrei tanto voluto insegnare a voi. Questi appunti sono in parte anche merito suo che mi è stato ad ascoltare. Ve li regalo, so che non è granché, ma un domani potremo dire di averci provato.

1 Cos'è un campo?

L'idea di campo nasce dall'esigenza di eliminare, o almeno mitigare, il concetto di *azione a distanza* che, dai tempi di Newton in poi, ha creato non poche perplessità a fisici e filosofi. In sostanza dati due corpi A e B a distanza r l'uno dall'altro, anziché dire che A esercita una forza a distanza su B si preferisce immaginare che A generi un campo nello spazio intorno a se, un campo che può interagire con B esercitando una forza. In questa visione non vi è dunque alcuna forza diretta a distanza tra A e B, ma la forza sui corpi è dovuta al campo a sua volta generato dai corpi. Dunque abbiamo due aspetti importanti

- Un campo è generato dai corpi
- Un campo agisce con una forza sui corpi

Inizialmente l'idea era di introdurre un semplice strumento matematico, oggi sappiamo (o meglio pensiamo) che i campi siano reali esattamente come sono reali i corpi (qualsiasi significato vogliamo dare all'idea di realtà di un corpo).
Possiamo concludere che un campo è un *ente fisico* generato dai corpi e che interagisce con i corpi. Nella nuova fisica ottocentesca dei campi si viene così a delineare il seguente scenario: l'universo (il mondo, la realtà, date il nome che preferite) contiene sia corpi (materia) sia campi con le interazioni reciproche delineate sopra. Nella fisica moderna la distinzione tra materia e campi diventerà molto labile (ma non ne parliamo qui).

2 Descrizione e proprietà di un campo

La descrizione matematica di un campo fisico dipende dall'interazione che vogliamo descrivere. Per i campi che ci interessano (elettrico, magnetico, gravitazionale) la descrizione è **vettoriale**, ossia descriviamo un campo assegnando ad ogni punto dello spazio un vettore (eventualmente nullo laddove il campo non ci sia). A seconda del campo vedremo poi come interpretare e calcolare eventualmente tale vettore. Per avere un'idea di come il campo si sviluppi nello spazio è utile il concetto di **linea di campo**, ovvero una linea in cui in ogni punto la tangente è lungo la

direzione del campo. Le linee di campo sono quindi una rappresentazione grafica utile per capire la disposizione spaziale del campo. Non vanno confuse con le linee di forza, ovvero le linee in cui in ogni punto la tangente è lungo la forza esercitata dal campo sulla materia (cariche, masse etc). Per alcuni campi le linee di forza e le linee di campo coincidono, ma non per tutti, quindi è meglio tener separati i concetti (attenzione, un errore comune è pensare che le linee di campo rappresentino le traiettorie seguite sotto l'effetto del campo dai corpi; questo non é in generale vero).
Una volta stabilito che il campo è vettoriale ci servono due ingredienti per poterlo usare:

1. Una legge che mi dica la forza che il campo esercita sui corpi in ogni punto dello spazio; come vedremo dopo tale forza dipenderà dal campo (elettrico, magnetico, gravitazionale) e dalla natura dei corpi su cui agisce (masse, cariche etc).

2. Delle equazioni (dette equazioni di campo) che ci permettano di determinare il campo in ogni punto dello spazio sapendo come è distribuita la materia che lo genera (di nuovo a seconda del campo saranno le masse, le cariche, le correnti etc).

Per poter scrivere equazioni di campo interessanti sono necessari alcuni strumenti matematici. Cercherò di semplificare al massimo perché l'argomento, come discusso in classe, è abbastanza complesso e variegato. Ci sono molti modi (anche complicati) per scrivere delle equazioni di campo a seconda delle esigenze e dei metodi a disposizione. Una versione semplificata delle equazioni necessita essenzialmente di due concetti applicabili ad un campo vettoriale, ovvero il **flusso del campo attraverso una superficie** e la **circuitazione del campo lungo una linea chiusa**. L'uso di questi due concetti non permette di risolvere le equazioni di campo nei casi più generali ed è quindi limitato da un punto di vista applicativo; ha però il grande vantaggio di racchiudere in pochi semplici passaggi le caratteristiche salienti di un campo, che è quanto ci basta.
Provo ad essere sintetico (e quindi inesatto) nel definirle, vedremo in seguito come si usano per caratterizzare un campo.

Flusso di un campo

Dato un campo vettoriale uniforme $\mathbf{V}$ definito in una certa regione dello spazio (uniforme significa che in ogni punto il campo è lo stesso come modulo, direzione e verso) e considerata una superficie piana di area S perpendicolare alla direzione del campo, definiamo il flusso del campo attraverso la superficie come

$$\Phi_S(\mathbf{V}) = SV$$

(quando scrivo il vettore non in grassetto intendo indicare il suo modulo). Molto semplice. Se la superficie piana è parallela al campo il flusso invece viene definito come nullo. E nei casi intermedi? Sia θ l'angolo che la normale alla superficie fa con la direzione positiva del campo, allora il flusso è dato da

$$\Phi_S(\mathbf{V}) = SV\cos(\theta)$$

Come si vede con $\theta = 0$ e $\theta = 90^\circ$ si riottengono i due casi particolari. C'è un piccolo dettaglio: devo decidere un'orientamento della superficie, ovvero devo decidere in quale dei due semispazi definiti dalla superficie si trova il suo vettore normale. Una volta stabilito questo il calcolo del flusso di un campo uniforme attraverso una superficie piana è molto semplice.
Da un punto di vista grafico si può immaginare il flusso legato al modo in cui le linee di campo attraversano una data superficie. Se le linee la attraversano perpendicolarmente e tutte concordi nella stessa direzione, avremo un grande flusso. Se viceversa le linee non la attraversano (sono tangenti) o la attraversano una parte in un verso ed una parte in un altro, allora il flusso sarà piccolo (o nullo).
E se la superficie non è piana? Si pensi ad esempio alla superficie di un cubo. In questo caso il flusso attraverso la superficie del cubo è definito come la somma dei sei flussi attraverso le sue sei facce (orientate tutte nello stesso modo, ovvero o tutte uscenti o tutte entranti). E se la superficie non è piana e non è riconducibile all'unione di un certo numero di facce piane, come nel caso del cubo? Allora la cosa diventa un po' complicata. A lezione di solito mostro come sia sempre possibile suddividere una superficie curva con tante piccole facce piane che la approssimano, un po'

come le facce di un pallone da calcio approssimano una sfera. Con un processo di limite si può definire anche in questo caso il concetto di flusso, ma la cosa normalmente è molto complicata e non intendo trattatarla nei dettagli.
E se il campo non è uniforme? Il problema è simile al precedente, una definizione rigorosa e formale diventa complicata, ma intuitivamente posso dividere la superficie in tante piccole facce piane così piccole che su ciascuna io possa considerare il campo come approssimativamente uniforme. Calcolo tutti i flussi su tutte le facce e poi sommo (è solo in linea teorica, nella pratica non si fa se non in casi semplici come quello del cubo a sei facce di cui abbiamo parlato prima).
Riassumo, il flusso di un campo attraverso una superficie è un numero (scalare) che riflette il modo in cui le linee di campo la attraversano (o meno).
In particolare vedremo l'importanza del flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie chiusa. Semplificando molto, se il flusso attraverso una superficie chiusa è nullo significa che, grosso modo, tante linee di campo entrano quante ne escono dalla superficie stessa. Viceversa un flusso diverso da zero attraverso una superficie chiusa sarà legato ad un maggior numero di linee di campo entranti (o uscenti). Ne parleremo in seguito.

La circuitazione di un campo

Passiamo alla circuitazione. In questo caso invece di una superficie si consideri un segmento AB di lunghezza l e si prenda di nuovo il caso di un campo vettoriale uniforme $\mathbf{V}$. Si supponga che AB sia parallelo a $\mathbf{V}$; definiamo allora (nome di fantasia)

$$C_{AB}(\mathbf{V}) = V \cdot l$$

Viceversa, se AB è perpendicolare a $\mathbf{V}$ si ha

$$C_{AB}(\mathbf{V}) = 0$$

E nei casi intermedi? Sia θ l'angolo tra AB e $\mathbf{V}$, allora

$$C_{AB}(\mathbf{V}) = V \cdot l \cdot \cos\theta$$

Da notare che come per la superficie del flusso, il segmento AB deve essere orientato. Se anzichè prendere un singolo segmento considero una spezzata, posso definire la grandezza C come somma delle grandezze C associabili a ciascun segmento della spezzata. E se invece di un segmento, o di una spezzata, ho una linea curva? Come nel caso del flusso si procede con una approssimazione; qualsiasi curva continua può essere approssimata con una spezzata. La grandezza C per una linea curva può dunque essere approssimata usando un'opportuna spezzata. Stessa cosa nel caso che il campo non sia uniforme, posso scegliere la spezzata in modo tale che ciascun segmento che la costituisce sia così piccolo che il campo su quel segmento sia approsimativamente uniforme.
Bene, se la grandezza C definita sopra la calcoliamo su una linea chiusa su se stessa, quello che in matematica è un *circuito*, allora si ha la definizione di circuitazione. La circuitazione di $\mathbf{V}$ rispetto ad un circuito γ si indica con $\mathrm{circ}_\gamma(\mathbf{V})$.
Cosa rappresenta la circuitazione? Essenzialmente mi dice quanto il mio campo $\mathbf{V}$ segue la curva γ su cui calcolo la circuitazione. Si può far vedere che se il campo possiede linee di campo chiuse allora avrà circuitazione lungo tali linee diversa da zero. Viceversa se tutte le linee di campo di un campo sono aperte (quindi illimitate) allora la circuitazione sarà nulla. Dunque è uno strumento utile per capire se un dato campo possiede linee di campo che si chiudono su se stesse.

3 Campo elettrico e magnetico

Veniamo ai due campi che ci interessano qui, quello elettrico e quello magnetico (parleremo sempre, nel seguito, di campi nel vuoto). Diamo per scontato il concetto di carica elettrica (non è una cosa banale, ma sorvolo: i miei studenti e le mie studentesse affrontano il problema in quarta, tu in quanto gatto affronti il problema di procurarti croccantini, per ora accontentati che si possa definire un concetto rigoroso di carica elettrica) definiamo i campi elettrici e magnetici come due campi fisici $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ che agiscono con la seguente forza su una carica elettrica q

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$$

dove $\mathbf{v}$ è la velocità della carica ed il simbolo $\wedge$ indica il prodotto vettoriale.
Alcuni commenti

- il campo elettrico agisce su cariche elettriche indipendentemente dal loro stato di moto, quello magnetico solo su cariche in moto; da qui poi tutto il discorso di cui parlo in classe sulla "stranezza" di una forza che dipenda da una grandezza relativa come il moto, discorso che qui non affrontiamo.
- Il campo elettrico risulta parallelo (o antiparallelo) alla direzione della forza che imprime alle cariche, il campo magnetico invece risulta perpendicolare.

In che senso l'equazione vista sopra determina i campi elettrici e magnetici? Immaginiamo di mettere in un punto dello spazio una carica elettrica molto piccola (in modo che non vada a perturbare con la sua presenza il sistema fisico in esame). Se la pongo in quiete e misuro la forza su di essa, escludendo altre forze (gravitazionale, per esempio), posso determinare il campo elettrico come

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$$

(notate come la carica q può anche essere negativa, il verso di $\mathbf{E}$ può dunque essere opposto al verso di $\mathbf{F}$). Mettere la carica in quiete esclude effetti del campo magnetico eventualmente presente in quel punto e quindi possiamo, dalla misura della forza, definire il campo elettrico. Una volta fatto, possiamo mettere nello stesso punto una carica elettrica in moto con una velocità che abbia varie direzioni; quando misuriamo su tale carica la forza massima, togliendo l'eventuale forza elettrica, possiamo determinare il campo magnetico (i dettagli di solito li mostro a lezionie).
Con l'equazione della forza vista sopra siamo quindi in grado di determinare in modo esatto l'effetto di un campo elettrico e di un campo magnetico su cariche elettriche ferme o in moto. E se ho tante cariche elettriche in moto collettivo, ovvero una corrente elettrica i, dall'equazione possiamo anche determinare l'effetto di un campo magnetico sulle correnti elettriche.
Stabilito l'effetto dei campi sulla materia, dobbiamo adesso analizzare come la materia genera i campi.

4 Le equazioni di Maxwell

Le equazioni di campo per **E** e **B** sono chiamate, come sicuramente sai, equazioni di Maxwell. Riassumiamole nella forma che uso spesso in classe (che non è la migliore, ma è la più semplice):

$$\Phi_S(\mathbf{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} Q \tag{1}$$

$$\Phi_S(\mathbf{B}) = 0 \tag{2}$$

$$\mathrm{circ}_\gamma(\mathbf{E}) = -\frac{d}{dt}\Phi_\sigma(\mathbf{B}) \tag{3}$$

$$\mathrm{circ}_\gamma(\mathbf{B}) = \mu_0 \left(i_{conc} + \epsilon_0 \frac{d}{dt}\Phi_\sigma(\mathbf{E}) \right) \tag{4}$$

dove

- nelle prime due equazioni il flusso è calcolato attraverso una superficie chiusa S mentre nelle altre due la superficie σ è il bordo del circuito γ su cui si calcola la circuitazione. Dunque S è una superficie chiusa, mentre σ è una superficie aperta (per questo le ho chiamate con nomi diversi);

- ϵ_0 e μ_0 sono due costanti (nel vuoto);

- la carica Q nella prima equazione è la carica totale contenuta all'interno della superficie chiusa S;

- la corrente i_{conc} è la corrente totale concatenata con il circuito γ.

Ricordiamo brevemente il significato fisico delle quattro equazioni.

1. La prima equazione (teorema di Gauss per il campo elettrico) dice essenzialmente che se circondiamo con una superificie S una carica Q, il flusso totale uscente (o entrante se Q è negativa) è proporzionale alla carica. Essenzialmente ci dice che dalle cariche elettriche positive escono linee di campo elettrico, su quelle negative entrano.

2. La seconda equazione (teorema di Gauss per il campo magnetico) dice che il flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa del campo magnetico è nulla, ovvero non vi sono punti da cui le linee di campo magnetico escono e basta o entrano e basta. Con i miei studenti e le mie studentesse abbiamo legato a questo semplice fatto la non esistenza in natura di un monopolo magnetico.

3. La terza equazione (legge di Faraday) dice che la circuitazione di un campo elettrico lungo un cammino γ dipende dalla variazione nel tempo del flusso di campo magnetico che attraversa tale cammino. In particolare si può verificare che se non vi sono variazioni temporali (caso di campi statici), tale equazioni equivale ad affermare che il campo elettrico è un campo di tipo conservativo (ovvero la forza che esso genera è conservativa). I dettagli sono negli appunti di quarta dei miei studenti e delle mie studentesse (credo, perché io non c'ero, semmai chiedi a loro). Viceversa se vi è una variazione nel tempo del flusso di **B**, variazione che può dipendere o da una variazione del campo magnetico nel tempo o da una variazione del circuito γ, allora la circuitazione del campo elettrico non è più nulla; questo equivale a dire che nasce una differenza di potenziale (forza elettromotrice nei testi polverosi) che, nel caso γ sia effettivamente un circuito fisico (un filo conduttore, per intenderci), può generare una corrente elettrica. Il segno meno (grazie Lenz) indica che la eventuale corrente elettrica che si forma tenderà a creare un campo magnetico indotto che si oppone alla variazione di flusso di **B**.

4. La quarta equazione (legge di Ampere più corrente di spostamento) mi dice che la circuitazione di un campo magnetico dipende dalla corrente concatenata con il cammino che sto valutando a cui si aggiunge un secondo termine, detto corrente di spostamento (anche se non è una corrente vera e propria) che dipende dalla variazione nel tempo del flusso del campo elettrico che attraversa il cammino.

Alcune considerazioni di carattere generale:

- In assenza di variazioni temporali le due derivate spariscono e le equazioni di Maxwell sono disaccoppiate, ovvero abbiamo due equazioni per il campo elettrico e due equazioni per il campo magnetico totalmente separate ed indipendenti.

- In tal caso i campi elettrici sono generati esclusivamente da cariche elettriche ed i campi magnetici da correnti elettriche (cariche elettriche in movimento): ovvero i campi sono generati esclusivamente dalla materia.
- La presenza delle due derivate nella circuitazione mostra invece che in presenza di variazioni temporali, le equazioni di Maxwell risultano accoppiate, ovvero le equazioni per **E** dipendono anche da **B** e viceversa. Campi elettrici e magnetici non sono quindi fenomeni separati.
- In particolare in questo caso si vede subito che un campo elettrico può essere generato non solo dalle cariche (materia), ma anche da un campo magnetico variabile nel tempo. Simmetricamente un campo magnetico può essere generato non solo dalle correnti (materia), ma anche da un campo elettrico variabile nel tempo.

Riassumo con il fatto secondo me più importante di tutta questa lunga discussione sull'elettromagnetismo. Le equazioni di Maxwell dipendenti dal tempo mostrano chiaramente che i campi possono essere generati non solo dalla materia (cariche e correnti), ma anche dai campi stessi. Questo apre, per la prima volta, la strada all'idea che i campi possono disaccoppiarsi dalla materia e diventarne indipendenti. Se un campo elettrico variabile nel tempo può generare un campo magnetico variabile nel tempo e viceversa, allora i campi possono autogenerarsi l'un l'altro senza bisogno di materia. Nasce l'idea delle onde elettromagnetiche. Ma a parte questo importante (e ultimo per quanto ci riguarda) sviluppo, sottolineo nuovamente la cosa secondo me fondamentale: i campi possono generare altri campi, la materia non è piu' indispensabile.

5 Le onde elettromagnetiche

Dunque un campo elettrico variabile nel tempo può generare un campo magnetico variabile nel tempo che può generare un campo elettrico variabile nel tempo etc etc. Abbiamo visto questa enorme conseguenza delle equazioni di campo per **E** e **B**, i campi possono autosostenersi a vicenda e slegarsi dalla materia. Qui è l'idea fondamentale di Maxwell, la sua scoperta delle onde elettromagnetiche. La deduzione non è semplicissima (ma nemmeno impossibile), la salto per concentrarmi sugli aspetti essenziali. Un'onda elettromagnetica non è altro che un campo elettrico e magnetico che oscillano in fase e si propagano nello spazio. Maxwell mostra come nell'onda il vettore **E** è sempre perpendicolare a **B** ed entrambi sono perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda; si tratta dunque di onde trasversali. Dalle equazioni Maxwell deduce teoricamente la velocità di queste onde che risulta pari a $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. Il valore di questa costante risulta identico alla velocità della luce nel vuoto c (ben conosciuta ai tempi di Maxwell). Da qui l'ulteriore deduzione: la luce non è altro che una particolare onda elettromagnetica. In un colpo solo Maxwell unifica così in un unico schema concettuale i fenomeni elettrici, quelli magnetici, l'ottica (la luce). Come per tutte le onde vale la relazione

$$\lambda \nu = c$$

che lega tra loro la lunghezza d'onda λ, la frequenza ν e la velocità dell'onda c. Maxwell prosegue considerando l'energia trasportata dall'onda. Come forse saprai ad un campo elettrico è possibile associare una densità di energia, ovvero un'energia per unità di volume (joule su metro cubo) data, nel vuoto, dall'espressione

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Similmente si può associare una densità di energia ad un campo magnetico

$$u_E = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

In un'onda elettromagnetica i due campi contribuiscono allo stesso modo all'energia trasportata dall'onda, ovvero

$$u_E = u_B$$

da cui

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c$$

Dunque la densità di energia totale sarà

$$u = u_E + u_B = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0}$$

Se moltiplichiamo tale densità di energia trasportata dall'onda per la sua velocità c otteniamo il flusso di potenza, ovvero la quantità di energia che ogni secondo attraversa un metro quadro di superficie perpendicolarmente all'onda elettromagnetica. Tale grandezza, denominata storicamente con la lettera S, sarà dunque data da

$$S = cu = c\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0}$$

Riassumiamo. Un campo elettrico ed uno magnetico possono propagarsi autonomamente nel vuoto oscillando in fase su un piano perpendicolare alla propagazione del moto. I due vettori in ogni istante sono perpendicolari ed il rapporto dei loro moduli è pari a c. Tale onda elettromagnetica trasporta un'energia che dipende dal quadrato dell'ampiezza del campo. In realtà la questione è leggermente più complicata perché per poter parlare correttamente di energia si dovrebbe mediare le grandezze ottenute su un periodo dell'oscillazione (sia $\mathbf{E}$ che $\mathbf{B}$ variano nel tempo, per avere l'energia media trasportata bisogna fare una media). Il discorso formalmente è dunque leggermente più complesso, ma non cambia la sostanza (compare semplicemente un fattore $\sqrt{2}$ in alcune delle formule viste prima): un'onda elettromagnetica trasporta energia in modo proporzionale al quadrato del campo elettrico (o magnetico).

6 Le domande del gatto

Elenco qui di seguito una serie di domande che Leonard mi ha posto dopo ogni chiaccherata; non costituiscono argomenti fondanti, ma sono comunque pertinenti alla discussione. Questa sezione, inizialmente scarna, andrà crescendo sicuramente nel tempo.

Ho sentito dai tuoi studenti che ritieni importanti i curcuiti LC. Cosa sono?

Ottima domanda. Di solito i circuiti elettrici mi interessano veramente poco, ne parlo (quasi obbligato) in quarta, ma senza grande trasporto. Invece ritengo i cosiddetti circuiti LC davvero importanti per vari aspetti. Immagina quindi un circuito elettrico (ideale) che presenta in serie un'induttore con induttanza L ed un condensatore di capacità C. Il circuito è chiuso e non vi sono generatori. Per le leggi sui circuiti, la caduta di potenziale complessiva attraverso i due elementi deve essere nulla; ricordando che ai capi di un'induttanza si crea una differenza di potenziale proporzionale alla derivata della corrente elettrica I ed ai capi di un condensatore una differenza di potenziale proporzionale alla carica depositata Q, si otiene la seguente equazione

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}Q = 0$$

Inoltre la corrente I nel circuito, essendo chiuso, sarà pari a

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

In definitiva otteniamo la seguente equazione differenziale per Q

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

A parte la soluzione banale $Q = 0$ (circuito scarico che rimane scarico), l'equazione si può risolvere con tecniche standard: si consideri infatti l'equazione caratteristica associata

$$\lambda^2 + \frac{1}{LC} = 0$$

si vede subito che il Δ è minore di zero e le due soluzioni sono immaginarie coniugate (niente parte reale)

$$\lambda_{1,2} = \pm i\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Dunque la soluzione generica è data da

$$Q(t) = A \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right) + B \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right)$$

Superata la soddisfazione di aver risolto il circuito, perché lo trovo interessante? Quello che qui abbiamo dimostrato è che la carica Q depositata sul condensatore oscilla, ovvero il condensatore si carica e si scarica nel tempo. Siccome il condensatore possiede una certa energia quando è carico, dovuta alla presenza di un campo elettrico, dove finisce tale energia quando la carica diminuisce? Finisce nel campo magnetico che si crea nell'induttore, campo magnetico che risulta massimo quando il campo elettrico del condensatore va a zero, e viceversa. Assistiamo dunque ad una oscillazione armonica in cui il campo elettrico del condensatore ed il campo magnetico dell'induttore si scambiano periodicamente. Ovviamente la presenza (inevitabile) di una resistenza nel circuito produrrà nel tempo una dissipazione (effetto Joule) per cui l'oscillazione sarà smorzata (circuito RLC, esercizio per casa). In ogni caso trovo questo un magnifico esempio di come i concetti di campo elettrico e di campo magnetico siano intimamente legati tra loro, preludio al legame ben più profondo che abbiamo visto nella nascita del concetto di onda elettromagnetica.