Teoremi vari

RG[*]

<2015-11-06 23:05:13>

Cari studenti e studentesse di 5G, come promesso ecco i teoremi con dimostrazione che abbiamo visto quest'anno. Per ogni teorema ho cercato di riassumere in modo chiaro le ipotesi, la tesi, la dimostrazione ed eventuali interpretazioni geometriche o applicazioni. Come sempre per ogni orrore od errore potete scrivermi.

Teorema di Rolle

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione

- continua in un intervallo reale $[a, b]$
- derivabile in $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$.

Tesi

Esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$.

Dimostrazione

La dimostrazione si basa sul teorema di Weierstrass che dice che una funzione continua su un intervallo $[a, b]$ ammette massimo M e minimo m assoluti nell'intervallo.
Ci sono due casi

1. Il massimo ed il minimo si hanno in corrispondenza degli estremi a e b. Ma per l'ipotesi $f(a) = f(b)$ questo implica che $M = m$. Dunque la funzione è costante nell'intervallo $[a, b]$ e quindi la sua derivata è identicamente nulla.
2. O il massimo o il minimo non si trova in uno dei due estremi; ma allora si trova in un punto interno all'intervallo ed in tal caso la derivata della funzione ha valore nullo in tale punto.

CVD

Intepretazione geometrica

Il teorema dice, sostanzialmente, che se il grafico di una funzione deve avere la stessa y in due punti diversi a e b e se la funzione è continua, allora il grafico in almeno un punto dovrà avere la retta tangente orizzontale.

[*] riccardo.giannitrapani@gmail.com

Applicazione

Il teorema può essere usato, per esempio, per dimostrare l'univocità degli zeri di particolari funzioni. Si pensi ad esempio ad una funzione con derivata strettamente positiva (crescente) di cui si sa che ha almeno uno zero. Il teorema di Rolle permette di dimostrare che ne ha esattamente uno; infatti, se per assurdo ne avesse due, allora avremmo due punti distinti in cui la funzione assume lo stesso valore (zero) e per il teorema di Rolle questo implicherebbe che la funzione deve avere almeno un punto a derivata nulla, che è un assurdo in quanto la funzione di cui stiamo parlando è per ipotesi a derivata strettamente positiva.
Ad esempio la funzione $x^3 + x$ è continua ed ha derivata strettamente positiva e sicuramente si annulla almeno in un punto in quanto i limiti a $-\infty$ e a $+\infty$ sono di segno opposto. Per quanto detto sopra tale funzione ha dunque un solo zero (che in questo caso coincide con l'origine, come è facile verificare direttamente).

Teorema di Cauchy

Ipotesi

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni

- continue in un intervallo reale $[a, b]$
- derivabili in $]a, b[$
- $g(a) \neq g(b)$
- $g'(x) \neq 0$ per ogni x in $]a, b[$.

Tesi

Esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Dimostrazione

Per la dimostrazione ci si appoggia al teorema di Rolle. Infatti si consideri la seguente funzione

$$F(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

È facile verificare che tale funzione soddisfa il teorema di Rolle

- è continua in quanto combinazione lineare di funzioni continue (per ipotesi)
- è per lo stesso motivo derivabile
- per calcolo diretto si verifica subito che $F(a) = F(b)$

Duqnue la funzione $F(x)$ soddisfa il teorema di Rolle; allora esisterà almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che $F'(c) = 0$. Ma svolgendo la derivata questo significa

$$f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)) = 0$$

che porta con semlici passaggi algebrici alla tesi del teorema.
CVD

Teorema di Lagrange

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione

- continua in un intervallo reale $[a, b]$
- derivabile in $]a, b[$.

Tesi

Esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione

La dimostrazione si basa sul teorema di Cauchy. Basta infatti prendere la funzione $f(x)$ e la funzione $g(x) = x$; si vede subito che queste due funzioni soddisfano il teorema di Cauchy. Poiché in questo caso $g'(x) = 1$, $g(b) = b$ e $g(a) = a$, si vede che il teorema di Cauchy per queste due funzioni porta alla tesi del teorema di Lagrange.

Interpretazione geometrica

Il teorema dice che esiste almeno un punto c in cui la funzione ha una retta tangente parallela al segmento che unisce i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ (corda).

Teorema della media integrale

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione continua (e dunque integrabile) in un intervallo reale $[a, b]$

Tesi

Esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dimostrazione

Per il teorema di Weierstrass $f(x)$ ammette massimo M e minimo m nell'intervallo assegnato; dunque

$$m \leq f(x) \leq M$$

Integrando sull'intervallo

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b M\,\mathrm{d}x$$

da cui

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b - a)$$

dividendo per $(b-a)$

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M$$

Siccome la funzione $f(x)$ in quanto continua prende tutti i valori compresi tra m ed M, ci sarà almeno un punto c in cui

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Teorema di Torricelli-Barrow

Ipotesi

Sia $f(x)$ una funzione continua sulla retta reale e sia

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Tesi

- $F(a) = 0$
- $F'(x) = f(x)$ ovvero $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$

Dimostrazione

Il primo punto della tesi è immediato in quanto

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

ed un integrale definito da a ad a è nullo.
Per la seconda parte consideriamo la definizione di derivata con il limite del rapporto incrementale

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

da cui

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{h}$$

Usando le proprietà degli integrali definiti (usiamo qui l'ipotesi che h sia positivo, ma analogo discorso si può fare con h negativo)

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{h}$$

e quindi

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t}{h}$$

Per il teorema della media esisterà almeno un punto c nell'intervallo $[x, x+h]$ per cui

$$\int_{x}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = hf(c)$$

Quindi

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} f(c)$$

Quando h tende a zero il punto c, dovendo appartenere all'intevallo $]x, x+h[$ dovrà tendere a x, da cui (per la continuità di $f(x)$)

$$F'(x) = f(x)$$

Quello che abbiamo dimostrato è in realtà il limite destro per h che tende a zero. Con analogo ragionamento si ottiene lo stesso risultato per il limite sinistro e quindi in definitiva per il limite tout court del rapporto incrementale.
CVD