Un'Altra Distrazione Aritmetica

Ancora sull'irrazionalità di $\sqrt{2}$

Riccardo Giannitrapani

Udine - 2 settembre 2022

"You can't always get what you want"
Rolling Stones

Non contento della precedente[1] dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, propongo qui di seguito una ulteriore strada usando sempre l'albero di Calkin-Wilf[2] a cui sono sentimentalmente legato[3].

Sia dunque dato l'albero di Calkin-Wilf, Γ; chiamiamo *sequenza di Calkin-Wilf* la sequenza di numeri razionali positivi ottenuta attraversando Γ per ordine di livello

$$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, 3\ldots$$

Si dimostrano facilmente le seguenti proposizioni.

Proposizione 1

Se x appartiene alla sequenza di Calkin-Wilf, allora il successivo elemento nella sequenza è dato dalla seguente funzione[4]

$$S(x) = \frac{1}{2\lfloor x \rfloor + 1 - x}$$

dove $\lfloor x \rfloor$ indica la parte intera di x (la funzione *floor*).

Proposizione 2

Se x appartiene alla sequenza di Calkin-Wilf, allora tutti gli elementi $x + n$ con $n \in \mathbb{N}$ e $n > 0$ compaiono nella sequenza in ordine.

Dim

Infatti, per costruzione dell'albero Γ, l'elemento $x + n$ si trova n livelli al di sotto di x. QED

[1] https://orporick.github.io/documents/divertimento1.pdf
[2] Calkin, Neil; Wilf, Herbert (2000), "Recounting the rationals", American Mathematical Monthly, Mathematical Association of America, 107 (4): 360–363, doi:10.2307/2589182
[3] https://www.doppiozero.com/lalbero-di-calkin-wilf
[4] Per una dimostrazione si veda *Proofs from the BOOK* di M.Aigner e G.M.Ziegler, sesta edizione, Springer.

Proposizione 3

$\sqrt{2}$ non appartiene alla sequenza di Calkin-Wilf.

Dim

Ipotizziamo per assurdo che appartenga alla sequenza; è facile verificare per calcolo diretto che

$$S^6(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + 4$$

dove con S^6 indichiamo la funzione S applicata 6 volte. Si vede anche, sempre con calcolo diretto, che non ci sono altri numeri nella forma $\sqrt{2} + n$ tra $\sqrt{2}$ e $S^6(\sqrt{2})$. Ma questo contraddice la precedente proposizione. Quindi $\sqrt{2}$ non appartiene alla sequenza di Calkin-Wilf. QED

Dall'ultima proposizione si evince, ancora una volta, che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.