אווה הפ

311250708

חלק שני - שאלות תאורטיות

שאלה 1

נתון: $T_1(n)=6n^2, \quad T_2(n)=n^2\log n$

a)

$$T_1(n) \overset{?}{=} O(T_2(n))$$
$$\Downarrow$$
$$T_1(n) \le c \cdot T_2(n)$$
$$\Downarrow$$
$$6n^2 \le c \cdot n^2 \log n$$

מתקיים עבור c כלשהו לדוגמא $c=6$

ולכן מתקיים $T_1(n)=O(T_2(n))$

b)

$$T_1(n) \overset{?}{=} \Omega(T_2(n))$$
$$\Downarrow$$
$$T_1(n) \ge T_2(n)/c$$
$$6n^2 \overset{?}{\ge} n^2\log n/c$$
$$6n^2 \cdot c \ge n^2 \log n$$

$\log n$ גדל בקצב מהיר יותר מקבוע ולכן אי שוויון זה לא מתקיים

ולכן $T_1 \neq \Omega(T_2(n))$

c) לא נכון כיוון שלא מתקיים סעיף b

3) היינו מעדיפים את T_1 מכיוון ש T_2 הוא חסם עליון ל- T_1 ולכן בהכרח T_1 יותר מהיר.

נתון: $T_1(n)=\frac{3}{2}n^2+7n-4, \quad T_2(n)=8n^2$

a)

$$T_1(n) = O(T_2(n))$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{3}{2}n^2+7n-4 \overset{?}{=} O(8n^2)$$
$$\frac{3}{2}n^2+7n-4 \overset{?}{\le} 8n^2 \cdot c$$

מתקיים עבור c כלשהו לדוגמא $c=1$ כיוון ש $7n-4$ הוא רכיב לינארי שולי ביחס למדרגה שניה לכן $T_1(n)=O(T_2(n))$

b)

$$T_1(n) \overset{?}{=} \Omega(T_2(n))$$
$$\frac{3}{2}n^2 \ge 8n^2/8$$
$$\frac{3}{2}n^2 > n^2$$

ולכן מתקיים $T_1(n)=\Omega(T_2(n))$

c) מכיוון שמתקיים $T_1=O(T_2(n))$ וגם $T_1=\Omega(T_2(n))$ אזי מתקיים

$$T_1(n)=\Theta(T_2(n))$$

ⓓ הזמני ריצה של התוכניות שוים ולכן אין הבדל בינהם ולא משנה מה נבחר

$\boxed{T_1(n)=n^4,\ T_2(n)=n^3\log n}$:נתון

ⓐ $T_1 \overset{?}{=} O(T_2(n))$

כלומר צריך שיתקיים $T_1 \le c\cdot T_2(n)$

$n^4 \le c\cdot n^3\log n$

$n^3\cdot n \le n^3\cdot c\log n$

$n \le c\log n$ $\boxed{T_1 \neq O(T_2(n))\ \text{לא מתקיים ולכן}}$

כי לכל c: $n^4 > cn^3\log n$

ⓑ $T_1 = \Omega(T_2(n))$

$T_1 \ge T_2/c$

$\Leftarrow\ n^4 \ge \frac{n^3\cdot\log n}{c}$

$c\,n^3 n \ge n^3\log n$

$\Downarrow$

$\boxed{T_1 = \Omega(T_2(n))\ \text{ולכן מתקיים}}$

כיון ש $\log n < n$ ובפרט $cn > \log n$,

ⓒ מתקיים $T_1(n)=\Omega(T_2(n))$ אך לא $T_1=O(T_2(n))$ ולכן

$T_1 \neq \Theta(T_2(n))$

ⓓ היינו בוחרים את A_2 כיון ש- T_2 הוא חסם תחתון לגבי T_1 ולכן עדיף

יותר מבחינת זמן ריצה

שאלה 2

$T(n)=T(n-2)+\frac{n}{2}$

נפתור בשיטת האיטרציה: נציב $n=n-2$

$T(n-2)=T(n-4)+\frac{n-2}{2}+\frac{n}{2}$

$T(n-4)=T(n-6)+\frac{n-4}{2}+\frac{n-2}{2}+\frac{n}{2}=T(n-6)+\frac{n-4+n-2+n}{2}=T(n-6)+\frac{3n-6}{2}$ נציב $n=4$

$T(n)=\dots=T(n-i)+\frac{n-i+2}{2}+\dots+\frac{n-2}{2}+\frac{n}{2}$

$=T(2)+2+4+6+8\dots\frac{n-2}{2}+\frac{n}{2}$

נציב $n=i+2$

$\frac{n(2+\frac{n}{2})}{2}=\frac{2n+\frac{n^2}{2}}{2}=\boxed{n+\frac{n^2}{4}}$ $\Leftarrow\ d=2$ קיבלנו סדרה חשבונית

$=\frac{1}{4}n^2+n=\boxed{\Theta(n^2)}$

שאלה 3

$T(n) = 2\left(\frac{T}{2}\right) + \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)$

$= 2\left(\frac{T}{2}\right) + \frac{n^2}{4} - n + 2 + 2T\left(\frac{n}{2}\right) = \boxed{2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n^2-4n+8}{4}}$

$a=2 \quad b=2 \quad f(n): \frac{n^2-4n+8}{4} \qquad n^{\log_2 2} = n$

לפי משפט המאסטר:

$\underbrace{\frac{n^2-4n+8}{4}}_{n^2} = \Omega\left(n^{\log_2 2+\varepsilon}\right)$ מקרה III מתקיים ולכן

$\Downarrow$

$\boxed{\Theta\left(n^2\right)}$ לכן הריצה הינה:

שאלה 4

א)

$T(n) = T(n-1) + c\cdot\log n \qquad T(1) = d$

שיטת האיטרציה: $n = n-1$

$T(n-1) = T(n-2) + c\log(n-1) + c\log n$

$T(n) = T(n-2) + c\log(n-1) + c\log n$

$= T(n-3) + c\log(n-2) + c\log(n-2) + c\log n$

$= T_1 + c\log 1 + c\log 2 + \dots + c\log(n-1) + c\log n$

$= T_1 + c(\log 1 + \log 2 + \dots \log(n-1) + \log n)$

$= T_1 + c(\log(1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots n-1\cdot n) = T_1 + c(\log(n!)) = T_1 + c\log n!$

$n! = \Theta\left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}\right) = \log n^{n+\frac{1}{2}} - \log e^n$ לפי נוסחת סטירלינג

$= n + \frac{1}{2}\log n - n\log e = \boxed{\Theta(n\log n)}$

2

$T(n) = 6T\left(\frac{n}{2}\right) + n^3 \quad , T_1 = T_2 = T_3 = 6$

$a=6,\ b=2,\ f(n)=n^3$

מקרה I: $f(n) < n^{\log_2 6 - \epsilon}$

$n^3 < n^{\log_2 6 - \epsilon}$ X לא מתקיים.

מקרה II $f(n) = n^{\log_2 6 - \epsilon}$

$n^3 \neq n^{\log_2 6 - \epsilon}$ לכן לא מתקיים.

מקרה III: $f_n > n^{\log_2 6 + \epsilon}$

$n^3 > n^{\log_2 6 + \epsilon}$ מתקיים לכן: $\boxed{\Theta(n^3)}$

3

$T(n) = T(n-2) + \log(n)$

$T(n-2) = T(n-4) + \log(n-2) + \log n$

$T(n-4) = T(n-6) + \log(n-4) + \log(n-2) + \log n$

$T(n-6) = T(n-8) + \log(n-6) + \log(n-4) + \log(n-2) + \log n$

$\Downarrow$

$T(n) = \dots T(n-6) + T(n-4) + T(n-2) + \log(n-4) + \log(n-2) + \log n$

$T(n) = T(3) + \log 2 + \log 4 + \log 6 + \dots \log(n-2) + \log n$

$= T_3 + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \log 2\cdot i$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{זמן הריצה הוא } \Theta(n\log n)}$

<u>משימה 1</u>

מה הפונקציה עושה:

מקבלת 2 מספרים, הראשון הוא מספר כלשהו והמספר השני הוא הבסיס שבו רוצים להציג את המספר (בסיס בינארי, אוקטלי, דצימלי וכו')

<u>זמן הריצה של הפונקציה</u> הוא $\Theta(\log a)$

$T(n) = T\left(\frac{a}{n}\right) + 1$

$a=1\ b=n\ f(n)=1 \Rightarrow n^{\log_b a} = n^{\log_n 1} = n^0 = 1 \Rightarrow \Theta(1) = 1 = f(n)$

זה מקרה שני של משפט המאסטר ולכן

$\Theta(n^{\log_b a}\cdot\log a) = \Theta(n^{\log_n 1}\cdot\log a) = \Theta(1\cdot\log a) = \boxed{\Theta(\log a)}$