פרויקט סיום עיבוד ספרתי של אותות

חלק ב'-

מטרת התרגיל: לתכנן מסנן ספרתי ע"י תכנון מסנן Butterworth אנלוגי והמרתו למסנן ספרתי באמצעות התמרה בי לינארית.

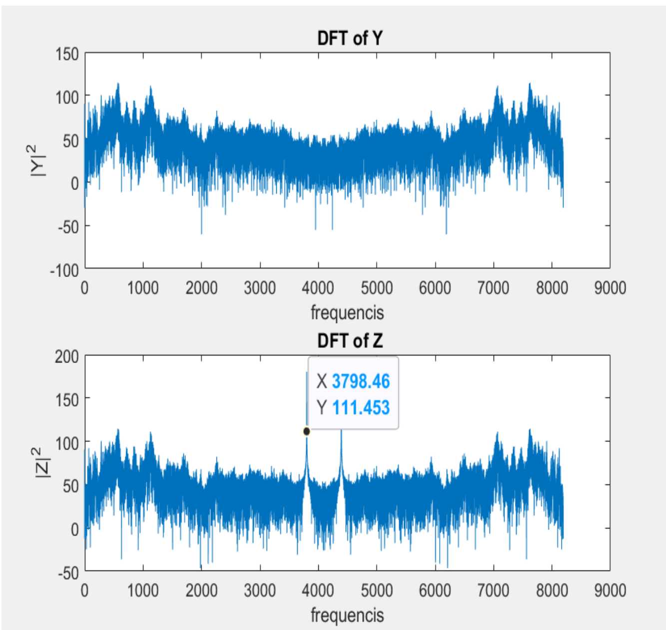
מגישים:
יובל פרץ 315053421
דניאל ברוקר 315015594
אור שחר 206582017

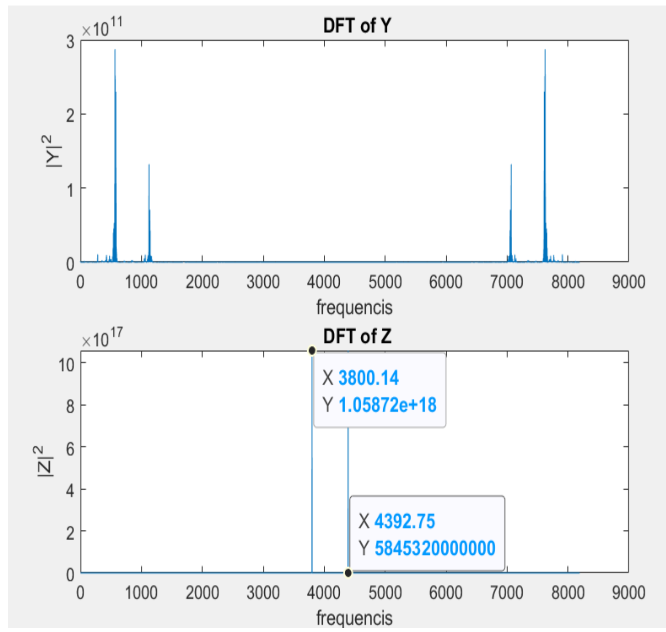
שאלה 1

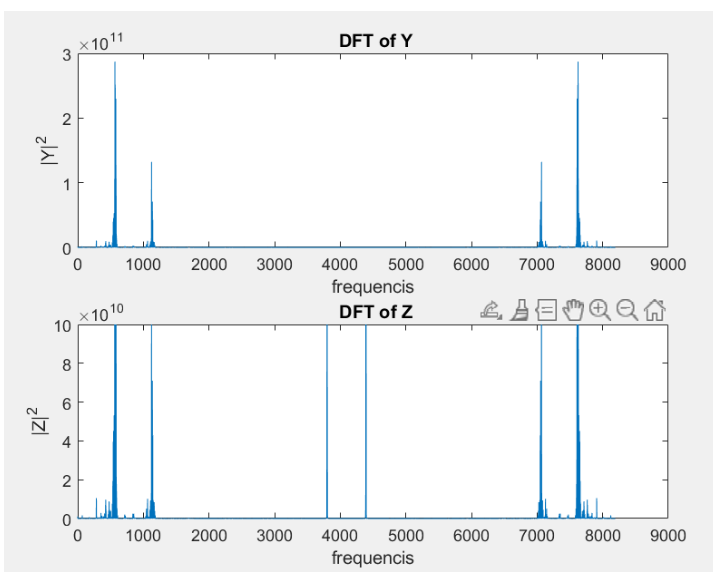
חלק ראשון:

נתונים אותות $z(t)$ ו- $y(t)$ הדגומים בתדר $\mathrm{Fs} = 8192\ \mathrm{Hz}$ (יש לפתוח את הקובץ sig_2.mat במטלב או כל תוכנה אחרת).

א. **שרטט/י את הערך המוחלט בריבוע של התמרת פורייה האנלוגית של כל אחד מהאותות באמצעות מחשב ע״י שימוש ב-DFT .**







ב. מה ההבדל בין שני האותות?

- בגרף של y(t) ניתן לראות כי הוא מורכב משני תדרים מרכזיים גבוהים והשיקוף שלהם, התדרים הם בערכים : $f_1 = 567Hz \;\&\; f_2 = 1125Hz$.
- בגרף של z(t) ניתן לראות בנוסף לערכים הקיימים בע y שני ערכים גבוהים ומאוד ממוקדים לערכים ספציפים ב $3800HZ$ והשיקוף שלו.
- בדציבלים אנחנו יכולים לראות שהאותות נראים יותר זהים מלבד כמובן שני הפיקים שאנחנו צופים לקבל.

בגרף השני של הערך המוחלט בריבוע ניתן לראות כי אם מסתכלים בקנה המידה של y על האות z מקבלים בעצם בדיוק את אותו אות עם שני פיקים נוספים.

ג. האזן/י לאותות y ו- z. אם עובדים במטלב, אפשר להשתמש בשורות הבאות

```
playerObj = audioplayer(y,Fs);
```

```
start = 1;
stop = playerObj.SampleRate * 3;
play(playerObj,[start,stop]);
```

תאר/י את ההבדל בין האותות.

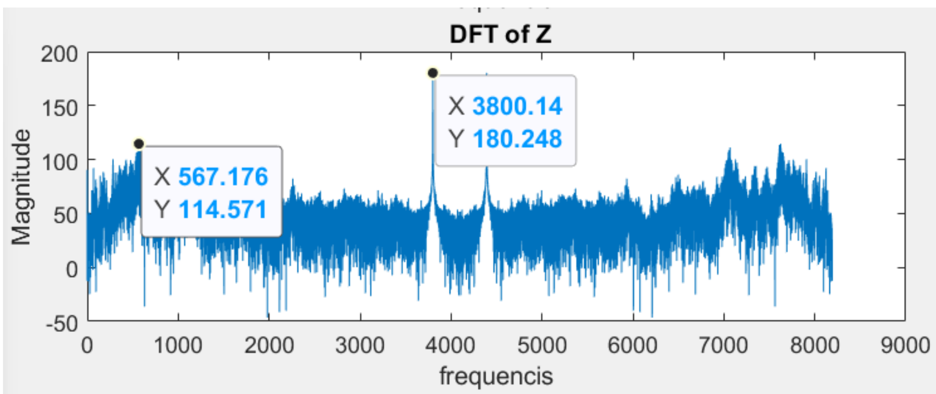
- האות y(t) הוא השיר הללויה נקי.
- האות z(t) הוא השיר הללויה עם רעש רקע של צפצוף ארוך, זה נובע מהפיק המרכזי (שעובר שכפול ובכך נוצרים שניים בעצם) שאותו נרצה לסנן בהמשך.

<u>חלק שני:</u>

מעוניינים לסנן את אחד מהאותות ($z(t)$ או $y(t)$) כך שהאותות ישמעו דומה זה לזה ככל שניתן. את זאת יש לעשות ע"י מסנן ספרתי $H(z)$ השקול למסנן אנלוגי $H_c(s)$ (אנלוגי אמיתי)מעביר נמוכים (low-pass) בעל המאפיינים הבאים

$$A_s = 20\ dB$$
$$A_p = -20log_{10}(1-\delta_p) < 5\ d$$
$$\Omega_p = 3600\ \times 2\pi\ \mathrm{K\ rad/sec}$$
$$\Omega_s = 3800\ \times 2\pi\ \mathrm{K\ rad/sec}$$

ערכים אלה מתאימים לנו כיוון שהאות שנרצה לסנן, כלומר הצפצוף, נמצא בתדירות Ω_s כלומר אחרי האות הנל נצפה לקבל הנחתה של לפחות 20db, נבדוק האם זה הנחתה מספקת.



נשים לב שאנחנו רוצים לקבל הנחתם של לפחות DB60.

- מסנן אנלוגי מטפל באותות רציפים בזמן, כלומר אותות שאינם בדגימות ומתוארים על פני טווח רציף של זמן. פונקציית התמסורת של המסנן האנלוגי מתוארת בעזרת המשתנה s במישור המרוכב.
- מסנן ספרתי מטפל באותות בדגימות, כלומר, אותות המיוצגים על ידי סדרה סופית של ערכים בזמן דיסקרטי. האות הספרתי מתקבל לאחר תהליך דגימה של אות אנלוגי. פונקציית התמסורת של המסנן הספרתי מתוארת בעזרת המשתנה z במישור z במערכת הזמן.

א. מה הם המאפיינים של המסנן הספרתי (תדר מעבר, עצירה, ניחות וגליות) כך שהמערכת האנלוגית השקולה $H_c(s)$ תעמוד בדרישות המפורטות מעלה?

למדנו בתרגול 9 את השלבים למציאת המאפיינים:

1. נמצא את δ_p, δ_s:

(δ_sמקדם ההנחתה בתחום העצירה וδ_p מקדם הגליות בתחום העובר)

נשתמש בנתונים שלנו עבור הגבר בתחום ההעברה A_p וניחות בתחום הקטעון A_s:

מידת הגליות בתחום ההעברה:

$$A_p = -20\log_{10}(1-\delta_p) < 5 \rightarrow \ \delta_p < 1 - 10^{-\frac{5}{20}} = 0.437$$

מידת הגליות בתחום הקיטעון:

$$A_s = -20\log_{10}\delta_s = 20 \rightarrow \delta_s = 10^{-\frac{20}{20}} = 0.1$$

- **הגליות** מתארת את חוסר האחידות בעוצמת ההגבר או ההנחתה בתחום המעבר או בתחום העצירה.
- **גליות בתחום המעבר-** במקרים מסוימים, המסנן עשוי לא להיות חלק לחלוטין, כלומר הוא יכול להראות שינויים קלים (תנודות) בהגבר שלו בתחום המעבר. זה נמדד על ידי כמה האות משתנה במסגרת תחום המעבר, בדרך כלל בערכים קטנים של דציבלים.
- **גליות בתחום העצירה-** מייצגת את השינויים בהנחתה בתחום שבו המסנן אמור לדכא את האותות לחלוטין. מסננים אידיאליים יפחיתו את האות לחלוטין, אך במציאות תיתכן גליות קטנה בתחום העצירה, שמשפיעה על מידת הניחות.

2. מציאת התדרים ω_p, ω_s:

לפי תורת הדגימה אנחנו יודעת שתדר הדגימה F_S צריך להיות לפחות פי 2 מהתדר המקסימלי, כלומר:

$$8192[Hz] = Fs \ \geq \ 2F_{MAX}$$

לכן:

$$\omega_s = \frac{\Omega_s}{F_S} = \frac{3800 * 2 * \pi}{8192} = 2.914\frac{rad}{sec}$$
$$\omega_P = \frac{\Omega_p}{F_S} = \frac{3600 * 2 * \pi}{8192} = 2.761\frac{rad}{sec}$$

- **<u>תדר מעבר</u>** הוא תחום התדרים שהמסנן מעביר כמעט ללא שינוי.
בLPF -תדרי המעבר הם תדרים הנמוכים מתדר החיתוך, ולכן הם יעברו במסנן בצורה כמעט זהה לאות המקורי.
במסנן ספרתי המטרה היא לשמר את תדרי המעבר כך שהאות לא ייפגע בתחומים אלו.

- **<u>תדר עצירה</u>** הוא תחום התדרים שהמסנן צריך להנחית בצורה משמעותית.
במסנן מעביר-נמוכים, תדר העצירה הוא התחום שמעל תדר החיתוך. התדרים בתחומים אלו צריכים להיעלם או להיחלש בצורה משמעותית כך שלא יעברו למוצא של המסנן.

מעוניינים לתכנן מסנן ספרתי IIR בעל פונקציית תמסורת $\mathrm{H}(z)$ באמצעות המרה של מסנן Butterworth $\widetilde{H}(s)$ (אנלוגי לא פיזיקלי) ע״י ההתמרה הבי-לינארית:

$$\mathbf{H}(z) = \widetilde{\mathbf{H}}(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{z+1}}$$

- מסנן ספרתי IIR הוא מסנן עם תגובת תהודה אינסופית. כלומר, כאשר מופעל עליו אות כניסה התגובה שלו נמשכת לזמן אינסופי או כמעט אינסופי.
למסנן יש גם קטבים וגם אפסים, כך שהפונקציה מתארת משוואה שבה הערכים הקודמים של הפלט משפיעים על הפלט הנוכחי. לכן, המסנן כולל משוב, דבר שגורם לתגובה אינסופית.
- מסנן Butterworth הוא סוג של מסנן אנלוגי או ספרתי שנועד להעביר תדרים בתחום המעבר עם התגובה החלקה ביותר. כלומר, המסנן מעביר תדרים בצורה חלקה ללא גלים (ripple)בתחום המעבר.
למסנן יש תגובה מונוטונית בתחום המעבר ובתחום העצירה, כלומר אין "שבירות" או תנודות, מה שהופך אותו לשימושי במיוחד כאשר נדרש לעבד אותות בצורה חלקה. לכן זה מתאים במצב שלנו של סינון אודיו ללא שבירת האות.
- ההמרה הבי-לינארית היא טכניקה להמרת מסננים אנלוגיים (המבוססים על s) למסננים ספרתיים (המבוססים על z).
ההמרה ממירה את המשתנה האנלוגי s במשתנה ספרתי z בצורה שתשמר את מאפייני התדר של המסנן. השיטה מונעת את תופעת קיפול התדרים (aliasing) שקורית כאשר תדרים גבוהים "מתקפלים" לתדרים נמוכים בעת הדגימה.

ב. חשב/י תדרים אנלוגיים מתאימים למסנן Butterworth $\widetilde{\mathrm{H}}(j\Omega)$ המבוקש. האם תדרים אלה צריכים להיות זהים לתדרים האנלוגיים הנדרשים ל- $H_c(j\Omega)$ (אנלוגי פיזקלי)?

בעת נחשב את התדרים אנלוגיים, נשתמש בתוצאות מהסעיף הקודם.

- נחפש את הקשר בין התדרים:

קשר בין מישר לפלס למישור Z:

$$s = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \rightarrow z = \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}$$

בנוסף מתקיים $H(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$

נציב $s = j\Omega, z = e^{j\omega}$ ונקבל את הקשר הבא:

$$\Omega = \frac{2}{T} * tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

- עבור T=2, *w_p=2.761,w_s=2.914* נקבל:

$$\Omega_s = tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 8.771\frac{rad}{sec}$$

$$\Omega_p = tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) = 5.193\frac{rad}{sec}$$

ניתן לראות שהתדרים האנלוגים למסנן $\widetilde{H}(j\Omega)$ אינם זהים לתדרים האנלוגים עבור $H_c(j\Omega)$. כיוון שלא מדובר באותו המישור, עבור מסנן H_C אנחנו נמצאים במישור הפיזיקלי, כלומר האמיתי, לעומת זאת עבור מסנן $\widetilde{H}(j\Omega)$ אנחנו ממירים את הדרישות המקוריות ומתכננים בעזרתם את המסנן, כלומר המישור אינו פיזיקלי.

ג. תכנן/י מסנן אנלוגי מסוג Butterworth כתוב/י ביטוי כללי לאפסים של המסנן Butterworth ושרטט במחשב את מגניטודת תגובת התדר $\widetilde{H}(j\Omega)$ במחשב.

למדנו בתרגול שעל מנת לתכנת מסנן מסוג זה נבצע את השלבים הבאים:

1. בשלב הראשון מתוך $\Omega_p, \Omega_s, \delta_p, \delta_s$ מחשבים את k,d. (s-stop, p-pass)
   כאשר:
   $\boldsymbol{\delta_s}$ מקדם ההנחתה בתחום העצירה, שמתארת את ההנחתה המינימלית הנדרשת בתחום העצירה.

   $\boldsymbol{\delta_p}$ מקדם הגליות בתחום העובר, שמתארת את ההנחתה המקסימלית המותרת בתחום המעבר.

   $\boldsymbol{\Omega_s}$ הוא תדר העצירה האנלוגי.

   $\boldsymbol{\Omega_p}$הוא תדר המעבר האנלוגי.

הפרמטר d מתאר את מידת הבחנה (גודל ההנחתה) בין תחום המעבר (Passband) לבין תחום העצירה (Stopband)

- חישוב גורם ההבחנה d (Discrimination Factor):

$$d=\sqrt{\frac{\left(1-\delta_p\right)^{-2}-1}{\delta_s^{-2}-1}}=\sqrt{\frac{(1-0.437)^{-2}-1}{0.1^{-2}-1}}=0.1475$$

k הוא פרמטר שמגדיר את היחס בין תדר המעבר Ω_p לתדר העצירה Ω_s ככל שהיחס קטן יותר, המסנן נדרש להיות מסדר גבוה יותר (מורכב יותר) כדי לעמוד בדרישות ההנחתה.

- חישוב גורם הסלקטיביות k:

$$k=\frac{\Omega_p}{\Omega_s}<1\rightarrow k=\frac{5.193}{8.771}=0.5921$$

2. שלב שני בחירת סדר המסנן:

$$N\geq\frac{\log\left(\frac{1}{d}\right)}{\log\left(\frac{1}{k}\right)}=\frac{\log\left(\frac{1}{0.1475}\right)}{\log\left(\frac{1}{0.5921}\right)}=3.6515\rightarrow N=4$$

סדר המסנן הוא 4 לכן המסנן יהיה בעל ארבעה קטבים.

3. שלב שלישי בוחרים Ω_0 באופן הבא:

Ω_0 הוא מושג חשוב בתכנון מסננים והוא מתייחס לתדר הקריטי, כלומר הוא מתאר את התדר שבו מתרחש שינוי משמעותי בתגובת המסנן קובע את נקודת ההפרדה בין תדרי המעבר לתדרי העצירה.

$$\Omega_p\left[\left(1-\delta_p\right)^{-2}-1\right]^{\frac{-1}{2N}}\leq\Omega_0\leq\Omega_s\left[\delta_s^{-2}-1\right]^{\frac{-1}{2N}}$$

נציב את הנתונים שלנו ונקבל את האי שיוון הבא:

$$4.7164\ \leq\ \Omega_0\ \leq\ 4.9388$$

בנוסף עבור מסנן מסוג *butterworth* מתקיים:

תדר הקטעון Ω_{3dB} הינו $\Omega_0 \leftarrow |H(j\Omega_0)|^2=\frac{1}{2}$

לכן נבחר Ω_0 בהתאם בצורה הבאה:

$$\Omega_0=\frac{4.7164\ +\ 4.9388}{2}=4.8276\frac{rad}{sec}$$

4. שלב רביעי חישוב s_k ולאחר מכן את $H(s)$.

- נחשב את הקטבים:

$$s_k = \Omega_0 \cdot \exp\left(j\left[\frac{(N+2k+1)\pi}{2N}\right]\right), 0 \le k \le N-1$$

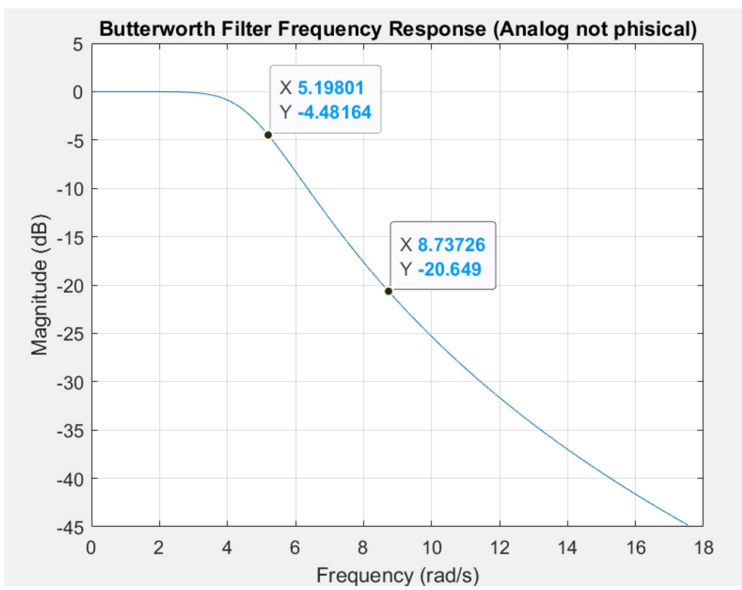
<u>ונקבל:</u>

$$\begin{aligned} s_0 &= -1.8474 + 4.4601i \\ s_1 &= -4.4601 + 1.8474i \\ s_2 &= -4.4601 - 1.8474i \\ s_3 &= -1.8474 - 4.4601i \end{aligned}$$

כל הקטבים נמצאים במישור השמאלי בלבד- כלומר המערכת יציבה. הקטבים צמודים בזוגות כמו שלמדנו שנדרש.

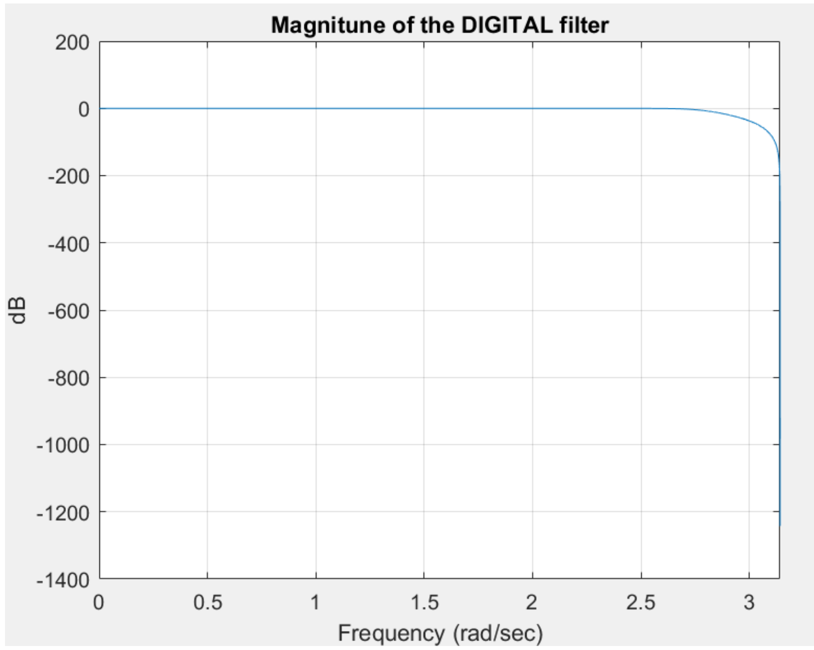
- הביטוי הסופי למסנן:

$$\widetilde{H}(s) = \prod_{k=0}^{N-1=3} \frac{-s_k}{s - s_k}$$



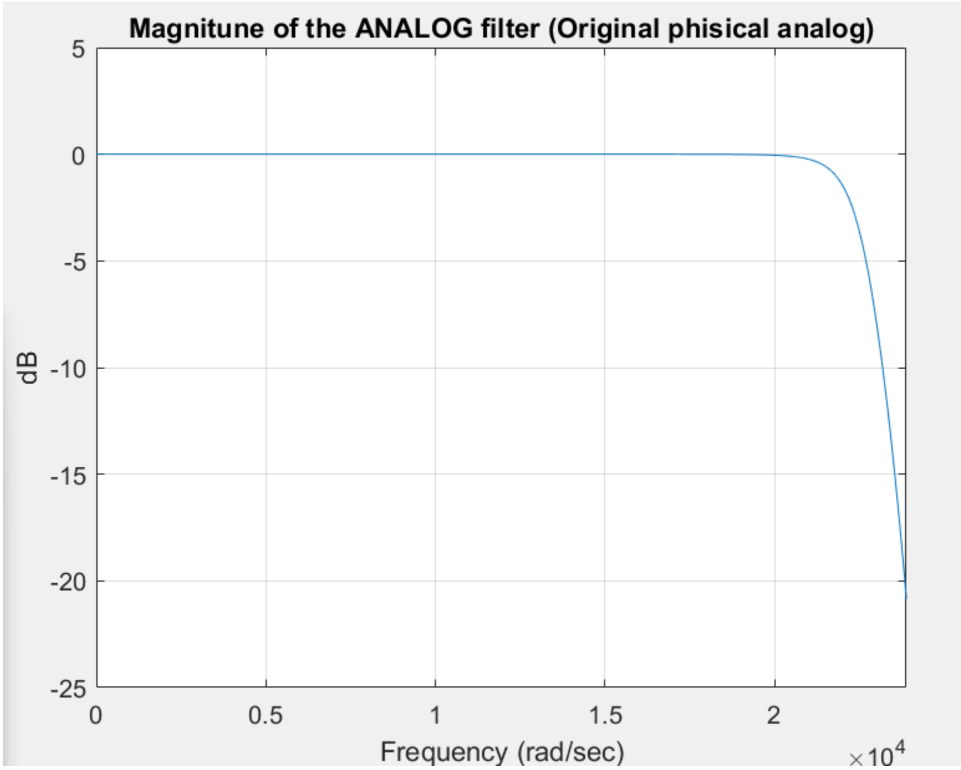
ניתן לראות כי אנחנו מקבלים את מה שציפינו, עד התדר $\widetilde{\Omega_p}$ קיבלנו הנחתה של עד DB5 ועד התדר $\widetilde{\Omega_s}$ נקבל הנחתה של DB20

ד. שרטט/י את מגניטודת תגובת התדר של המסנן הספרתי $H(e^{j\omega})$.



הגרף מציג את תגובת התדר של המסנן הספרתי ניתן לראות שמתקבל מסנן מסוג low-pass, ניתן לראות שהמסנן מעביר בצורה כמעט מושלמת את התדרים הנמוכים, עם הנחתה נמוכה בתדרים אלו ובסופו של דבר ההנחתה מגיעה לערכים נמוכים מאוד מה שמראה על חסימה מלאה של התדרים הגבוהים.

ה. שרטט/י את תגובת התדר של המסנן הספרתי השקול $H_c(j\Omega)$.



הגרף הזה מציג את תגובת התדר של המסנן האנלוגי (הפיזיקלי המקורי), שהוא מסנן מעביר נמוכים המקביל למסנן הספרתי. ניתן לראות שגם במסנן האנלוגי, התגובה דומה תדרים נמוכים מועברים ללא הנחתה משמעותית עד לנקודת חיתוך מסוימת, שלאחריה מתחילה ירידה חדה במגניטודה.
אך ההנחתה בתדרים גבוהים יותר נראית מתונה יותר בהשוואה למסנן הדיגיטלי.

**המסנן הדיגיטלי משתמש בדגימות, ולכן תגובת התדר שלו מדויקת יותר לתדרים נמוכים אך נופלת בצורה חדה יותר ככל שהתדר עולה, מה שעוזר בחסימת תדרים לא רצויים.
המסנן האנלוגי עדין יותר בנפילה שלו לאחר תדר החיתוך, מה שגורם לכך שתדרים גבוהים מדוכאים בצורה מתונה יותר בהשוואה למסנן הדיגיטלי.

ו. סנן את אחד מהאותות ($y(t)$ או $z(t)$) כך שישמעו קרוב זה לזה ככל שניתן.

נבחר לסנן את Z.

ניתן לראות בקוד את הפתרון.

שאלה 2

בתרגיל זה נתבונן ב- $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$ כאשר:

$$x_0(t) = A_0 \sin(\Omega_0 t)$$
$$x_1(t) = A_1 \sin(\Omega_1 t)$$

כאשר Ω_0 ו- Ω_1 הינם תדרים לא ידועים למעט $\Omega_0, \Omega_1 < 3200 \times 2\pi$. האות $x(t)$ נדגם בתדר $\Omega_s = 6720 \times 2\pi$ וממור לסידרה $x[n], n = 0, \ldots, N-1$.

נתון לנו אות בזמן x(t) שנדגם בתדר F_S, למדנו שלפי תורת הדגימה נקבל שחזור לפי תדר ניקוויסט:

$$6720 * 2\pi = F_S \geq 3200 * 2\pi * 2 \geq 2 * \max(\Omega_0, \Omega_1)$$

וניתן לראות שלא נקבל דריכות של האותות אחד על השני.

נרצה לבצע הכפלה של N הדגימות בחלון בזמן, כלומר לבצע קונבלוציה עם גרעין דיריכלה:

לאחר הדגימה נקבל תדרים מרכזיים כאלה:

$$\left\{\pm\frac{\Omega_0}{\Omega S} + 2\pi k, \pm\frac{\Omega_1}{\Omega_s} + 2\pi k \middle| k \in Z\right\}$$

הביטוי של האות x(t) לפי הדגימה:

$$X_{0(\omega)} = \frac{A_0}{2j}\left(\delta(\omega - \Omega_0) - \delta(\omega + \Omega_0)\right)$$
$$X_{1(\omega)} = \frac{A_1}{2j}\left(\delta(\omega - \Omega_1) - \delta(\omega + \Omega_1)\right)$$

בהינתן $A_0 = A_1$:

$$X(\omega) = \frac{1}{2j}\left(A_0\delta(\omega - \Omega_0) + A_1\delta(\omega - \Omega_1) - A_0\delta(\omega + \Omega_0) - A_1\,\delta(\omega - \Omega_1)\right)$$

לאחר הדגימה נקבל:

$$x_w[n] = x_s \cdot w[n]$$

כאשר x_s זה האות שדגמנו.

במישור התדר נקבל קונבולוציה ציקלית: $X_W(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_S(\omega) \oplus W(\omega)$

כאשר התמרת החלון המלבני היא בתדרים $\pm 2\pi f_0, \pm 2\pi f_1$.

כעת התנאים על רוחב האונה המרכזית ישתנו בהתאם לכל סעיף ובהתאם ליחס בין A_1, A_0.

נאמר ששני תדרים כעת ברי הפרדה אם אונות הצד של הספקטרום באורך N נמוכות מהאונה הראשית של כל תדר.

א. עבור $A_0 = A_1$ מהו הפרש התדרים $\Delta\Omega = |\Omega_1 - \Omega_0|$ המינימאלי המאפשר להבחין בין התדרים Ω_0 ו- Ω_1 עבור $N = 16, 32, 64, 128, 256$. יש להציג את הספקטרום לכל N ולהדגים את ההפרדה.

בסעיף הזה נשתמש בחלון ריבועי שמוגדר בצורה הבאה:

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & else \end{cases}$$

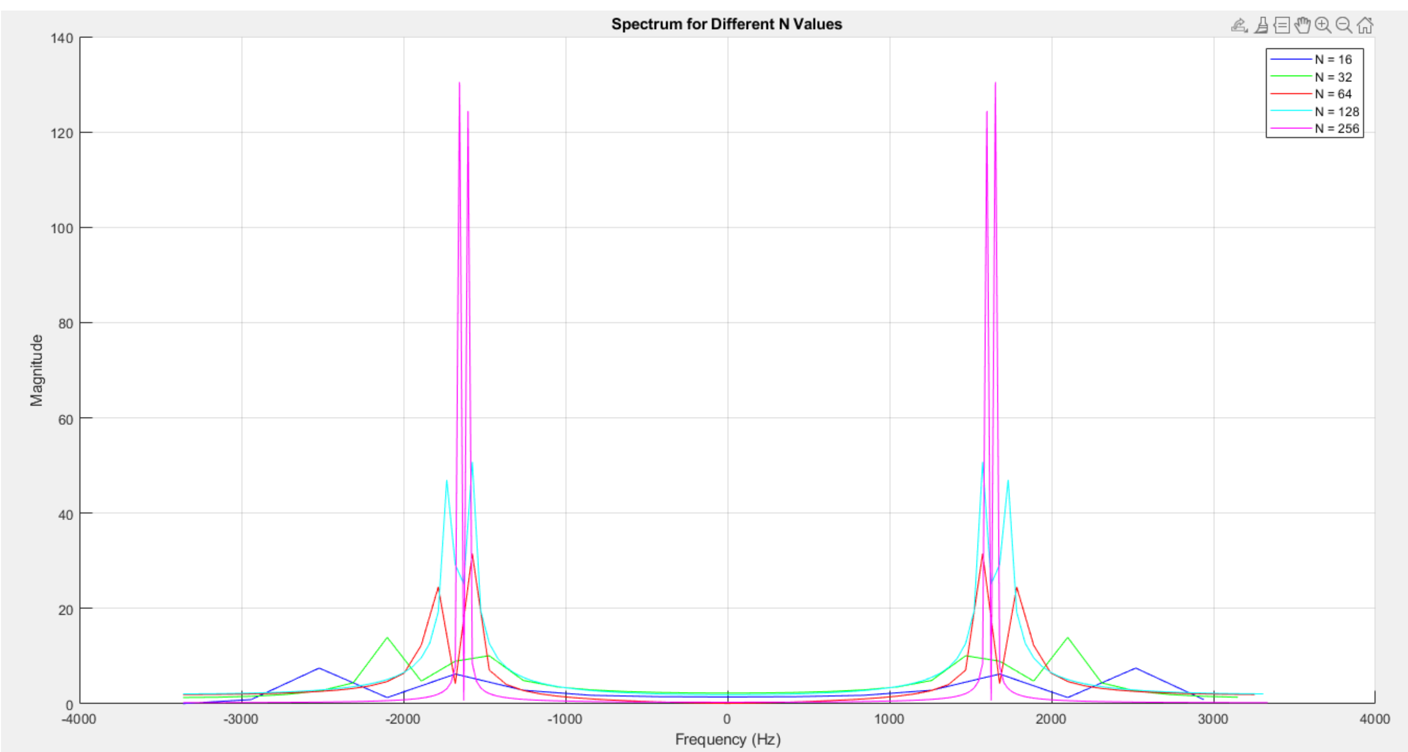
ראינו בתרגול כי עבור חלון ריבועי נדרש שהאונה הראשית בתדר של $2\pi f_0$ לא "תעלה" על האונה הראשית שנמצאת בתדר $2\pi f_1$ ולכן נדרוש מרחק בין התדרים שיקיים: $\Delta\Omega > \frac{4\pi}{N}$

כאשר N זה אורך החלון.

נגדיר:

$$\begin{cases} \Delta\Omega = \frac{4\pi}{N} * F_S \\ \Omega_0 = 1600 * 2 * \pi \\ \Omega_1 = \Delta\Omega - \Omega_0 \end{cases}$$

נקבל את הגרפים הבאים:



עבור N קטן ניתן לראות שהאונה הראשית רחבה יותר. כלומר כאשר N קטן, ההפרדה בין התדרים קשה יותר מכיוון שהאונות של התדרים דורסות אחת את השנייה ולא ניתן להבחין בצורה טובה בין שני התדרים.
תוצאה זו הגיונית לפי הנוסחה, מכיוון שכאשר N קטן, המרחק בין התדרים הנדרש להפרדה גדול יותר. ככל ש N גדל, האונה הראשית נעשית צרה יותר והמגניטודה גדלה, והאונות הצדדיות נמוכות יותר מה שעוזר להבחין בהפרדה בין התדרים וכאשר הוא גדול מספיק אפשר להבחין בקלות בין Ω_0 ו- Ω_1.
המטרה הייתה למצוא את הערך המינימלי של N כך שהאונות הראשיות לא יעלו אחת על השנייה.
בנוסף כמו שציפינו ניתן לראות שהאות סימטרי ויש שני פיקים בכל חלק.

ב. עבור $A_1 = 1$, $A_0 = 0.05$, משתמשים בחלון Hann. מהו $\Delta\Omega = |\Omega_1 - \Omega_0|$ המינימאלי המאפשר להבחין בין התדרים Ω_0 ו- Ω_1 עבור $N = 16, 32, 64, 128, 256$. יש להציג את הספקטרום לכל N ולהדגים את ההפרדה.

כעת נשתמש בחלון hann לצורך הכפלת הדגימות לפני ניתוח התדרים.

$$w[n] = \begin{cases} 0.5 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi}{N-1}\pi\right) & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & else \end{cases}$$

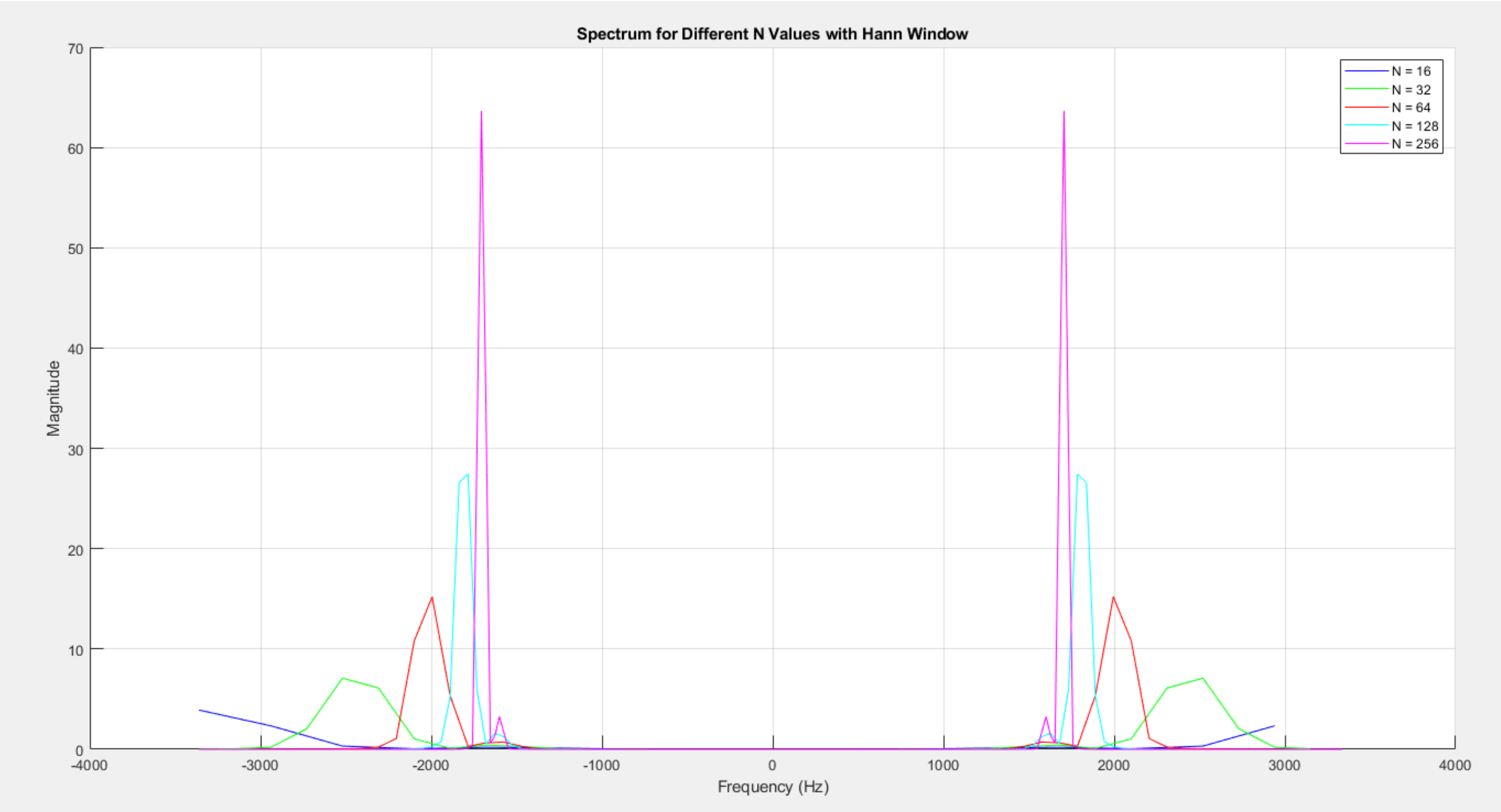
עבור חלון Hann נדרש שהאונה הראשית בתדר של $2\pi f_0$ לא "תעלה" על האונה הראשית שנמצאת בתדר $2\pi f_1$ ולכן נדרוש מרחק בין התדרים שיקיים: $\Delta\Omega > \frac{8\pi}{N}$

כאשר N זה אורך החלון.

נגדיר:

$$\begin{cases} \Delta\Omega = \frac{8\pi}{N} * F_S \\ \Omega_0 = 1600 * 2 * \pi \\ \Omega_1 = \Delta\Omega - \Omega_0 \end{cases}$$

נקבל את התוצאה הבאה:



$A_0 = 0.05,\ A_1 = 1$ מתארים את ההבדל בעוצמות של שני התדרים Ω_0 ו- Ω_1 כלומר, התדר Ω_1 חזק יותר בהרבה מΩ_0 ורואים בגרף שהפיק של התדר Ω_1 גדול הרבה יותר.

ניתן לראות בגרף שכמו בסעיף הקודם, שככל שהערך של N גדול יותר, ההפרדה בין התדרים נעשית ברורה יותר והאונה הראשית הופכת צרה יותר, מה שמאפשר הפרדה טובה יותר בין התדרים Ω_0 ו- Ω_1. חלון Hann מספק יכולת טובה יותר להפרדה בין תדרים מאשר חלון ריבועי, אך כאשר$A_1 = A_0$ עדיין תידרש הגדלת N כדי להבטיח הפרדה מיטבית בין התדרים.

ג. $A_0 = 0.001,\ A_1 = 1$. האם ניתן להבחין בין התדרים השונים? אם כן, איזה חלון דרוש ומהו $\Delta\Omega = |\Omega_1 - \Omega_0|$ המינימאלי המאפשר להבחין בין התדרים Ω_0 ו- Ω_1 עבור $N = 16, 32, 64, 128, 256$. יש להציג את הספקטרום לכל N ולהדגים את ההפרדה.

מתרגול 6 ראינו שכאשר האמפליטודות$A_1 > A_0$ ייתכן כי אונת הצד של החלון המלבני שנמצא בתדר Ω_1 תאפיל על האונה הראשית בתדר Ω_0 ואז לא נוכל לזהות כי קיים תדר נוסף.

לכן נדרוש שהיחס בין האונה המרכזית לאונת הצד יהיה נמוך מהיחס בין רכיבי התדר.

נשתמש בנוסחה הבאה:

$$A_{side} * A_1 < A_{main} * A_2 \rightarrow \frac{A_{SIDE}}{A_{MAIN}} < \frac{A_2}{A_1}$$

$$20\log\left(\frac{\mathrm{A1}}{\mathrm{A0}}\right) = -60$$

נחפש משהו שיותר קטן מ 60-, כלומר נבחר בחלון kaiser שמוגדר בצורה הבאה:

$$W_{kaiser[n]} = \begin{cases} \dfrac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(\frac{(n-\gamma)}{\gamma}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)} & 0 \le n \le N \\ 0 & else \end{cases}$$

כאשר $I_0, \gamma = \frac{N}{2}$ היא פונקציית בסל מהסוג הראשון.

פרמטר β קובע את צורת החלון, ניתן לשלוט על רמת זליגת הספקטרום באמצעות פרמטר זה כלומר לקבוע את רוחב האונה הראשית ואת עוצמת האונות הצדדיות.
(β גדולה יותר תקטין את האונות הצדדיות אך תגדיל את האונה הראשית)

נרצה לבחור β כך שנקבל

$$20\log\left(\frac{\mathrm{A1}}{\mathrm{A0}}\right) < -60$$

לפי התרגול והנתונים שנלמדו נבחר $\beta = 8$. שהוא ערך יחסית גבוה, כך נוודא שההפרדה בין התדרים תהיה מספקת ושאונת הצד לא "תפריע" לזיהוי של התדר החלש יותר Ω_0.

נחשב את המרווח המינימלי $\Delta\Omega$ כך:

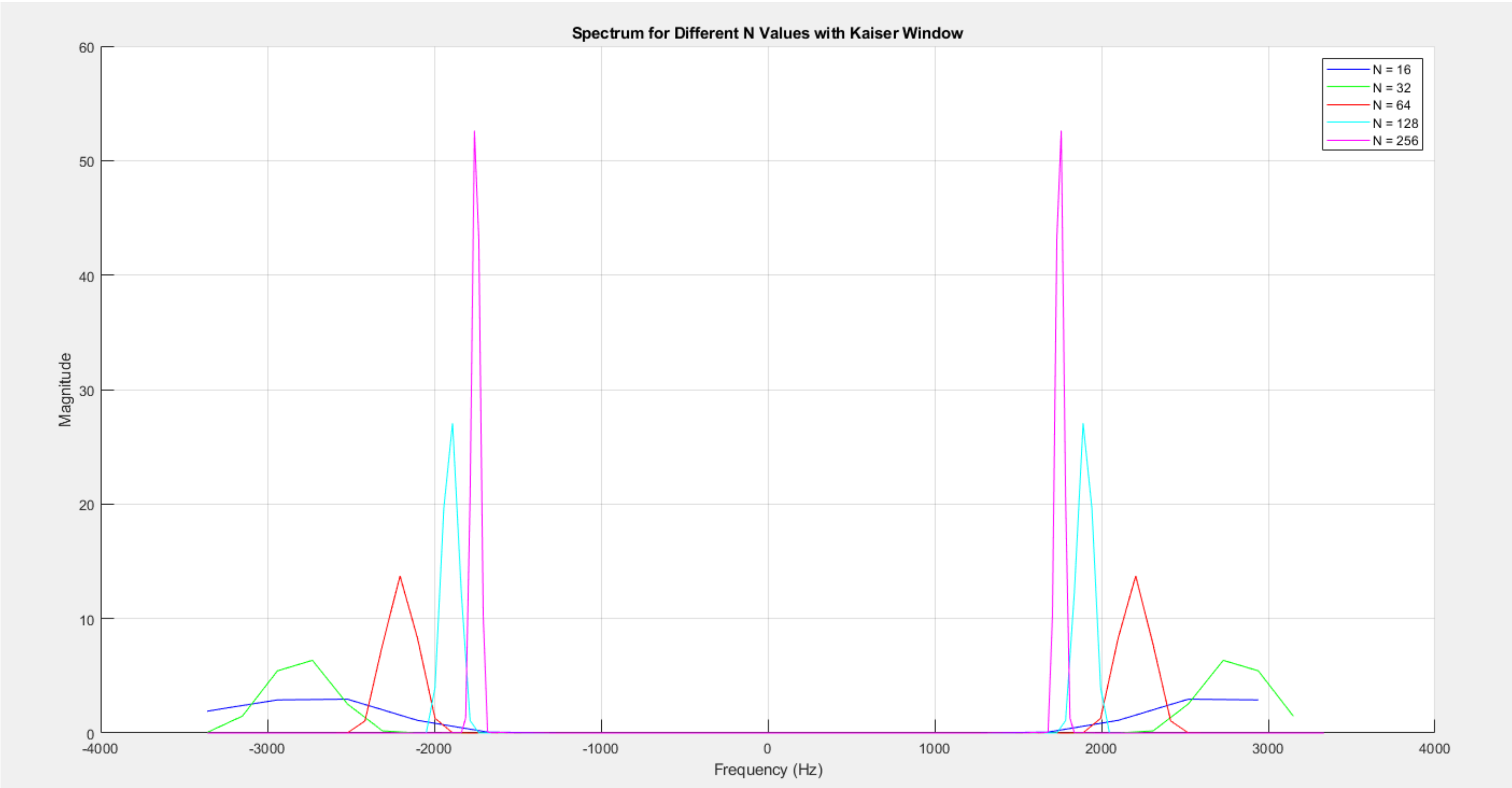
$$\Delta\Omega = \frac{F_S}{2\pi} * \left(\frac{\beta+1}{N}\right) * 4$$

הנוסחה מבוססת על רוחב האונה הראשית של חלון kaiser ולכן זה מבטיח שהמרווח בין התדרים יאפשר הפרדה ברורה בספקטרום.

ונקבל

$$\Delta\Omega = \left(\frac{F_S * 36}{N}\right)$$

ונקבל את הגרפים הבאים:



כשהערך של N קטן ניתן לראות שאונת הצד של התדר החזק יותר Ω_1 מתחילה לגלוש אל התחום שבו נמצא התדר החלש Ω_0 וקשה יותר להפריד ביניהם. זה נובע מהפרש העוצמות הגדול בין שני התדרים.

ככול ש N גדל האונה הראשית הופכת צרה יותר, ואונות הצד נמוכות יותר, כך שניתן להבחין בין שני התדרים בצורה ברורה יותר וזאת הסיבה שהשתמשנו בחלון Kaiser וערך גבוה של β החלון מאפשר הבחנה בין תדרים גם כאשר יש הבדל גדול בעוצמות שלהם.