שדות אלקטרומגנטיים - תרגול הכנה לפרויקט מחשב

בתרגול זה נלמד כיצד לפתור את פונקצית פילוג המטען על גופים גיאומטריים מורכבים באמצעות ניסוח ופתרון של משוואה אינטגרלית. כאשר מדובר בפילוג מטענים המונח במרחב החופשי (ללא תנאי שפה נוספים) הפוטנציאל החשמלי בכל מקום במרחב נתון ע"י

$$\Phi(x,y,z)=\iiint_V \frac{\rho(x',y',z')}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dx'dy'dz' \qquad (1)$$

ניתן להתייחס למשוואה זו בשני אופנים שונים:

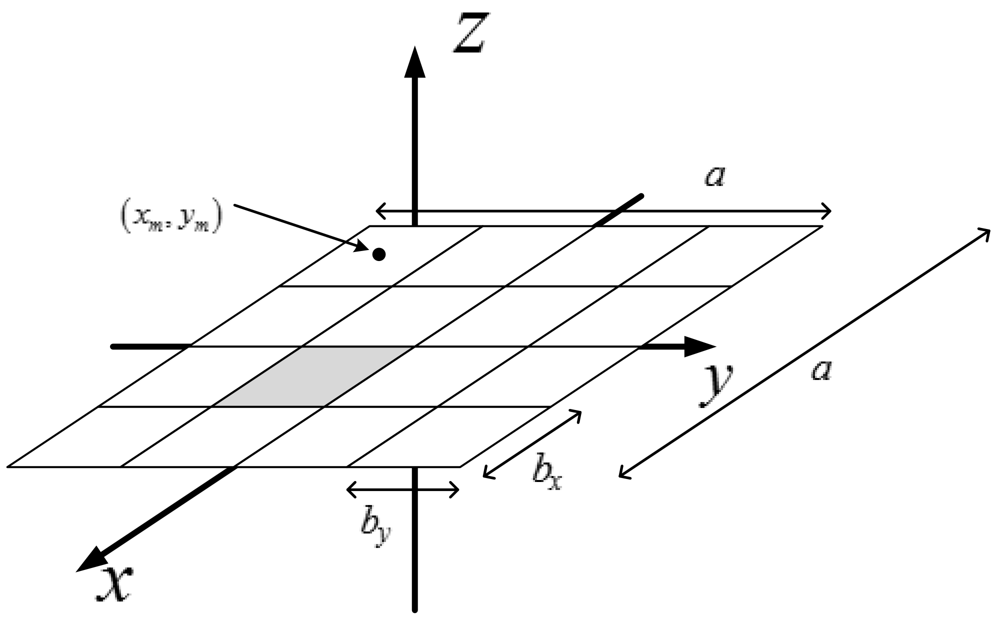
1) אם נתונה באופן מפורש צפיפות המטען המשטחית, ניתן באמצעותה לחשב את הפוטנציאל בכל נקודה במרחב.

2) אם ידועים ערכי הפוטנציאל בנקודות שונות במרחב, ניתן באמצעות המשוואה לחשב את פונקצית הפילוג של המטען.

אנו נתמקד באופן השני. מאחר ואנו רוצים לחשב את פונקצית פילוג המטען, ופונקציה זו נמצאת תחת אינטגרציה במשוואה, משוואה זו נקראת **משוואה אינטגרלית**.

דרך דוגמה נבין כיצד ניתן לפתור משוואות כאלו באופן נומרי, תחת קירובים מסוימים.

נתון לוח בעל מימדים $a\times a$, הנושא צפיפות מטען משטחית $\sigma(x,y)$. הלוח מונח על גבי מישור xy.



את הפוטנציאל בכל נקודה במרחב ניתן לחשב ע"י האינטגרל

$$\Phi(x,y,z)=\int_{-a/2}^{a/2}dx'\int_{-a/2}^{a/2}dy'\,\frac{\sigma(x',y')}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \qquad (2)$$

כאשר במקרה זה

$$\boldsymbol{r} = x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}} \ \ , \ \ r' = x'\hat{\boldsymbol{x}} + y'\hat{\boldsymbol{y}} \tag{3}$$

ולכן

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} \tag{4}$$

כעת נניח כי הלוח מחובר למקור אשר יוצר על פניו פוטנציאל קבוע V . תנאי זה מאפשר לנו לרשום משוואה האינטגרלית עבור הפוטנציאל על פני הלוח, כאשר הפונקציה הנעלמת במשוואה זו, היא פונקציית צפיפות המטען המשטחית

$$\Phi(x,y,0) = \int_{-a/2}^{a/2} dx' \int_{-a/2}^{-a/2} dy' \frac{\sigma(x',y')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = V \ \ ; |x|,|y| < \frac{a}{2} \tag{5}$$

נחלק את הלוח ל- N אלמנטים מלבניים שמידותיהם נתונות בתרשים. ניתן להניח כי האלמנטים הם ריבועיים, אך לא חובה לעשות זאת. בנוסף, נניח כי נקודות המרכז של האלמנטים מסומנות ע"י הסדרה

$$(x_m, y_m) \ , \ 1 \le m \le N \tag{6}$$

כעת, נניח כי פונקצית פילוג המטען על פני כל אחד מהאלמנטים היא קבועה, כלומר משתנה רק כאשר עוברים מאלמנט אחד לאחר. כעת ניתן להביע את הפוטנציאל בנקודה מסוימת ע"י

$$\Phi(x,y,0) \approx \sum_{n=1}^{N} l_n(x,y)\sigma_n \tag{7}$$

כאשר σ_n הוא ערכה של פונקצית הפילוג על גבי האלמנט ה-n. $l_n(x,y)$ היא פונקציה המייצגת את הגיאומטריה. אם נתון אלמנט מלבני שמידותיו $b_x \times b_y$ הממורכז בראשית הצירים, וצפיפות המטען המשטחית על פניו היא קבועה, ניתן לחשב את הפוטנציאל שאלמנט זה תורם בנקודה (x,y) ע"י

$$\begin{aligned} \Phi_{element}(x,y) &= \int_{-b_x/2}^{b_x/2} dx' \int_{-b_y/2}^{b_y/2} dy' \frac{\sigma_n}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = \\ &= \left(\int_{-b_x/2}^{b_x/2} dx' \int_{-b_y/2}^{b_y/2} dy' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \right) \sigma_n \end{aligned} \tag{8}$$

וכעת ברור כי הפונקציה שבסוגריים היא למעשה $l(x,y)$. על מנת לחשב את תרומתו של אלמנט שאינו ממורכז בראשית, פשוט נתאים את גבולות האינטגרציה למיקום

האלמנט. כעת, אם נניח שהפוטנציאל על פני כל אלמנט מיוצג ע"י חישוב הערך במרכז האלמנט, המשוואה האינטגרלית (4) תהיה

$$\Phi_{element}\left(x_m, y_m\right) = V =$$

(9)
$$= \sum_{n=1}^{N}\left(\int_{x_n-b_x/2}^{x_n+b_x/2} dx' \int_{y_n-b_y/2}^{y_n+b_y/2} dy' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\left(x_m-x'\right)^2+\left(y_m-y'\right)^2}}\right)\sigma_n$$

כאשר כאן שינינו את גבולות האינטגרציה כדי שיתאימו לאלמנט שאינו ממורכז בראשית.

ואם ננסח את משוואה (8) בצורה מעט שונה

(10)
$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{N} l_{mn}\sigma_n = V \\ l_{mn} = \left(\int_{x_n-b_x/2}^{x_n+b_x/2} dx' \int_{y_n-b_y/2}^{y_n+b_y/2} dy' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{\left(x_m-x'\right)^2+\left(y_m-y'\right)^2}}\right) \end{cases}$$

נשים לב כי עבור N אלמנטים, נוכל לנסח N משוואות, כך של- N משוואות אלה יש למעשה צורה של משוואה מטריצית, ממימד $N\times N$. הנעלמים במשוואה זו הם ערכי פונקצית פילוג המטען על פני האלמנטים - σ_n.

באופן מטריצי משוואה זו תכתב כך

(11)
$$\left[l\right]\left[\sigma\right] = \begin{bmatrix} V \\ \vdots \\ V \end{bmatrix}$$

כעת עלינו לחשב את האיברים במטריצה $\left[l_{mn}\right]$, להציבם במשוואה (10), והפתרון יהיה נתון ע"י

(12)
$$\left[\sigma\right] = \left[l\right]^{-1}\begin{bmatrix} V \\ \vdots \\ V \end{bmatrix}$$

חישוב איברי המטריצה l

משמעות האיברים שנמצאים מחוץ לאלכסון במטריצה זו היא הפוטנציאל שתורם אלמנט n בנקודת המרכז של אלמנט m. האיברים על האלכסון מגדירים לנו את התרומה של כל אלמנט לפוטנציאל בנקודת המרכז שלו עצמו. על מנת לפשט את החישוב, נניח כי כאשר מדובר על התרומה ההדדית לפוטנציאל בין אלמנטים שונים ניתן לקרב את אלמנט המטען למטען נקודתי, ולכן ניתן יהיה לרשום

$$\Phi_{n-element}\left(x_m, y_m\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\overbrace{b_x b_y \sigma_n}^{Q_n}}{\sqrt{\left(x_n - x_m\right)^2 + \left(y_n - y_m\right)^2}} \tag{13}$$

ואז האיברים במטריצה $\left[l\right]$ מחוץ לאלכסון יהיו

$$l_{mn} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{b_x b_y}{\sqrt{\left(x_n - x_m\right)^2 + \left(y_n - y_m\right)^2}} \tag{14}$$

התנאי לקירוב זה הוא שהמרחק בין האלמנטים לא יהיה קטן ביחס למימדי האלמנט עצמו, ולכן אין לבחור אלמנטים מאוד "מאורכים" כאשר אנו משתמשים בקירוב זה אלא לבחור אלמנטים שיהיו ריבועיים או בקירוב ריבועיים. כאשר מדובר באלמנטים ריבועיים, הקירוב המתואר במשוואות (12),(13) מכניס שגיאה של כ-3.8% עבור אלמנטים סמוכים זה לזה לעומת חישוב מלא של האינטגרל (9), ושגיאה זו קטנה ככל שהאלמנטים מתרחקים.

נעבור כעת לחישוב אברי האלכסון המתארים את תרומת אלמנט המטען לפוטנציאל על האלמנט עצמו. נחשב כעת באופן מדויק יותר ע"י ביצוע האינטגרציה ממש.

עבור איברי האלכסון נניח, ללא הגבלת כלליות התוצאה, כי כל אלמנט ממורכז בראשית הצירים, ואז נחשב

$$\begin{aligned}
l_{nn} &= \int_{-b_x/2}^{b_x/2} dx' \int_{-b_y/2}^{b_y/2} dy' \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-b_x/2}^{b_x/2} dx' \left[\ln\left(y' + \sqrt{x'^2 + y'^2}\right)\right]_{-b_y/2}^{b_y/2} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-b_x/2}^{b_x/2} dx' \ln\left(\frac{\frac{b_y}{2} + \sqrt{x'^2 + \frac{b_y^2}{4}}}{-\frac{b_y}{2} + \sqrt{x'^2 + \frac{b_y^2}{4}}}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[y'\ln\left(\frac{\frac{b_y}{2} + \sqrt{x'^2 + \frac{b_y^2}{4}}}{-\frac{b_y}{2} + \sqrt{x'^2 + \frac{b_y^2}{4}}}\right) + b_y \ln\left(x' + \sqrt{x'^2 + \frac{b_y^2}{4}}\right)\right]_{-b_x/2}^{b_x/2} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} b_x \ln\left[\frac{\sqrt{b_x^2 + b_y^2} + b_y}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2} - b_y}\right] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} b_y \ln\left[\frac{\sqrt{b_x^2 + b_y^2} + b_x}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2} - b_x}\right]
\end{aligned} \tag{15}$$

האינטגרלים הדרושים לביצוע חישוב זה - בנספח.

אם נגדיר $\alpha = \frac{b_y}{b_x}$ נקבל דרך נוחה יותר לייצוג יחס זה

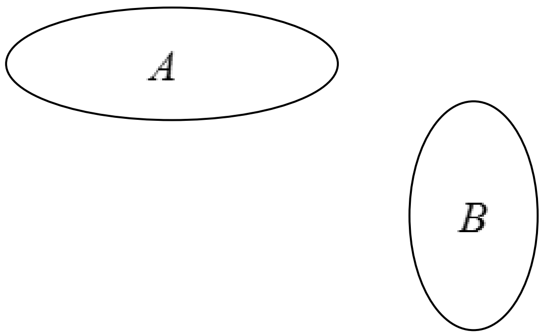
$$l_{nn} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} b_x \ln\left[\frac{\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}-\alpha}\right] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} b_y \ln\left[\frac{\sqrt{\alpha^2+1}+1}{\sqrt{\alpha^2+1}-1}\right] \qquad \textbf{(16)}$$

ובמקרה שבו האלמנטים הינם ריבועיים - $b_x = b_y = b$

$$l_{nn} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} b \ln\left[\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right] = \frac{b}{\pi\varepsilon_0}\cdot 0.8814 \qquad \textbf{(17)}$$

בעיות רב גופיות

אם נתון יותר ממוליך אחד, ועבור כל אחד מהם מוגדר תנאי שפה נתון לפוטנציאל, שיטת הפעולה היא זהה. ננסח את המטריצה $\left[l_{mn}\right]$ כאשר נשים לב כי כעת למטריצה ישנם איברים שתפקידם לתאר את האינטראקציה בין גוף מסוים לעצמו (איברים המקשרים בין אלמנטים שונים על פני אותו גוף, וגם איברי האלכסון המתארים את ההשפעה של אלמנט מסוים על הפוטנציאל באותו האלמנט), וגם איברים המתארים את ההשפעה בין אלמנטים הנמצאים על פני גופים שונים. באופן איכותי



ניתן לתאר את המטריצה באופן הבא

$$\left[l\right] = \begin{bmatrix} l^{AA} & l^{AB} \\ l^{BA} & l^{BB} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(18)}$$

כאשר l^{AA}, l^{BB} הן מטריצות ריבועיות זהות למטריצה $\left[l\right]$ שנוסחה עבור בעיית גוף בודד. עלינו להתאים את מספר האלמנטים על כל גוף, ומספר זה לא חייב להיות זהה

עבור הגופים השונים בבעיה. l^{AB}, l^{BA} הן מטריצות המתארות את ההשפעה של אחד הגופים על הפוטנציאל על פני הגוף השני, וברור כי חייב להתקיים $l^{AB} = \left(l^{BA}\right)^T$.
ניסוח הבעיה באופן מטריצי יהיה

$$\begin{bmatrix} l^{AA} & l^{AB} \\ l^{BA} & l^{BB} \end{bmatrix} [\sigma_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_A \\ \mathbf{V}_B \end{bmatrix} \quad (19)$$

כאשר אם גוף A מחולק ל-N_A אלמנטים וגוף B ל-N_B אלמנטים (מתקיים כמובן $N_A + N_B = N$) אזי וקטור $\mathbf{V}_A$ הוא וקטור עמודה בעל N_A איברים שכולם שווים לפוטנציאל הנתון על גביו - V_A , ובאופן זהה לווקטור $\mathbf{V}_B$.

אפשרויות נוספות לתנאים נתונים

עד כה עסקנו בבעיות בהן נתון באופן מפורש הפוטנציאל על כל אחד מהגופים. אך יתכנו גם מצבים אחרים. לדוגמא: אם קיים נתון לגבי סכום המטענים על כל אחד מהגופים, אך לא לגבי הפוטנציאל. נניח בעיית שני גופים כמתואר בתרשים, רק הפעם ידוע כי סה"כ המטען על גוף A הוא Q_A , ועל גוף B הוא Q_B. נוסיף לבעיה שלנו שני משתנים אשר יתארו את הפוטנציאל (הלא ידוע) על פני כל אחד מהגופים. עבור נקודות על גוף A מתקיים

$$\Phi = \sum_{n=1}^{N} l_{mn}\sigma_n = V_A \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{N} l_{mn}\sigma_n - V_A = 0 \quad ;\left\{1 < m < N_A\right\} \quad (20)$$

ועל גוף B

$$\sum_{n=1}^{N} l_{mn}\sigma_n = V_B \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{N} l_{mn}\sigma_n - V_B = 0 \quad ;\left\{N_A + 1 < m < N_A + N_B\right\} \quad (21)$$

ברור כי עבור כל ערך של m המשוואות (19) ו-(20) מתארות שורה אחת מתוך המערכת המטריצית שאנו בונים. אם נכתוב שורה זו באופן מפורש נקבל

$$\begin{aligned} &l_{m1}\sigma_1 + l_{m2}\sigma_2 + \ldots + l_{mN}\sigma_n + (-1)V_A + 0\cdot V_B = 0 \quad ;\left\{1 < m < N_A\right\} \\ &l_{m1}\sigma_1 + l_{m2}\sigma_2 + \ldots + l_{mN}\sigma_n + 0\cdot V_A + (-1)V_B = 0 \quad ;\left\{N_A + 1 < m < N_A + N_B\right\} \end{aligned}$$

(22)

גם וקטור המשתנים שלנו משנה את צורתו ונקבל שהוא יהיה

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_n \\ V_A \\ V_B \end{bmatrix} \quad (23)$$

כאשר $\boldsymbol{\sigma}_n$ ברישום זה הוא וקטור עמודה בעל N איברים $\sigma_1,...,\sigma_N$. מאחר והוספנו שני נעלמים נצטרך להוסיף גם שתי משוואות שיגיעו מהנתונים על סה"כ המטענים. אם נסמן את שטחו של אלמנט n ב-Δ_n נקבל כי צריך להתקיים

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N_A} \sigma_n \Delta_n &= Q_A \\ \sum_{n=N_A+1}^{N_B} \sigma_n \Delta_n &= Q_B \end{aligned} \tag{24}$$

כאשר Q_A, Q_B נתונים וידועים.

כעת המערכת המטריצית תראה באופן הבא

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left(l^{AA}\right)_{N_A\times N_A} & \left(l^{AB}\right)_{N_A\times N_B} & (-1)_{N_A\times 1} & (0)_{N_A\times 1} \\ \left(l^{BA}\right)_{N_B\times N_A} & \left(l^{BB}\right)_{N_B\times N_B} & (0)_{N_B\times 1} & (-1)_{N_B\times 1} \\ \left(\Delta_{n,A}\right)_{1\times N_A} & (0)_{1\times N_B} & (0)_{1\times 1} & (0)_{1\times 1} \\ (0)_{1\times N_A} & \left(\Delta_{n,B}\right)_{1\times N_B} & (0)_{1\times 1} & (0)_{1\times 1} \end{bmatrix}}_{(N+2)\times(N+2)\ matrix} \underbrace{\begin{bmatrix} (\boldsymbol{\sigma}_n)_{N_A+N_B} \\ (V_A)_1 \\ (V_B)_1 \end{bmatrix}}_{N+2\ vector} = \underbrace{\begin{bmatrix} (0)_{N_A+N_B} \\ (Q_A)_1 \\ (Q_B)_1 \end{bmatrix}}_{N+2\ vector} \tag{25}$$

וליד כל בלוק במטריצה רשום גודלו. האיבר $\Delta_{n,A}$ מתאר את שטחם של האלמנטים המשויכים לגוף A , ובאופן דומה לגוף B .

נספח - האינטגרלים הדרושים להערכת l_{nn}

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) \tag{26}$$

$$\int \ln\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{\sqrt{x^2+a^2}-a}\right)dx = x\ln\left(\frac{\sqrt{x^2+a^2}+a}{\sqrt{x^2+a^2}-a}\right) + 2a\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) \tag{27}$$