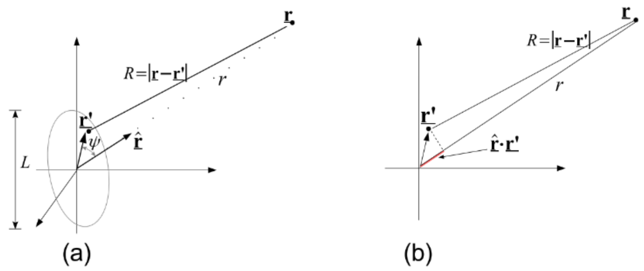
פרויקט MATLAB 4

שאלות נוספות לפרויקט-

1) דיפול הרץ מורכב משני מטענים הפוכים בסימן המשתנים בזמן בצורה הרמונית, ומחוברים בחוט באורך d. מכיוון שהמטען משתנה בזמן, בחוט זורם זרם. כאשר המרחק בין המטענים קטן מאוד מאורך הגל, ניתן לקרב את הדיפול למקור זרם נקודתי. הקרוב למקור זרם נקודתי מפשט את אינטגרל הקרינה. ניתן לחשב באופן פשוט יותר את הקרינה במרחב.

2) בקרוב השדה הרחוק נשתמש בקרוב הגיאומטרי: $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\sim r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'$



האיור לעיל מציג את הגיאומטריה של הבעיה. תחום התקפות של הקרוב מקיים:

$r \gg \lambda$ – מצדיק את תיאור השדה הרחוק של דיפול.

$r \gg \frac{L^2}{\lambda}$, $r \gg L$ - מהווה בסיס לקרוב הגיאומטרי.

3) בכל עקומי הקרינה שקיבלנו בסעיפים B.2 ו- D.1 ניתן לראות כי ככל שהיחס $\frac{l}{\lambda}$ גדל, כמות האוסצילציות בתחום גדלה. כלומר, כמות האונות גדלה ורוחבן קטן.

4) בסעיף *B.2* למעשה התקבלו שני עקומי קרינה שונים עבור שני המישורים השונים.

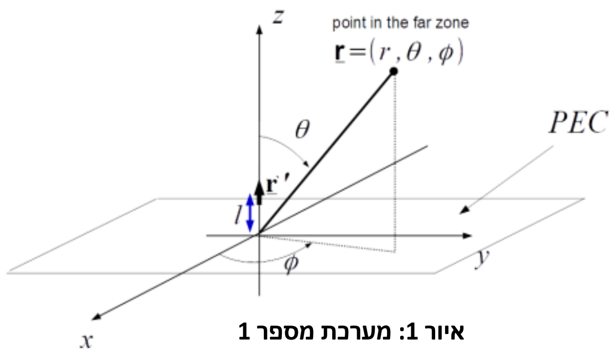
במישור *Y-Z*: $F=|\sin(\theta)\sin(kl sin\theta)|$

במישור *X-Y*: $F=|\sin(kl sin\varphi)|$

ניתן לראות כי עבור התחום $0<\theta,\varphi<180°$ ההבדל בין העקומים מתבטא בגורם האלמנט, כאשר במישור X-Y גורם האלמנט קבוע, ובמישור Z-Y גורם האלמנט משתנה לפי תטא. באיורים 6 ו-7 ניתן לראות כי עבור l מסוים, מספר האונות בשני המישורים זהה, אך השוני מתבטא באמפליטודה.

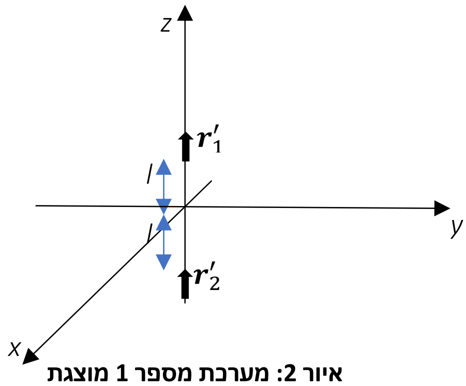
שאלה 1-

A) המערכת מוצגת באיור 1:



איור 1: מערכת מספר 1

בעזרת שיטת השיקופים, ניתן לייצג את המערכת בצורה הבאה:



איור 2: מערכת מספר 1 מוצגת בשיטת השיקופים

כעת מתקיים:

$$\boldsymbol{r}_1' = l\hat{z}\ ,\ \boldsymbol{r}_2' = -l\hat{z}$$

$$R_1 = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1'|\ \ , R_2 = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2'|$$

$$A_1 = A_2 = I_0 d$$

$$\boldsymbol{A} = \sum_n \hat{z}\ \mu \mathrm{A_n} \frac{e^{-jkR_n}}{4\pi R_n} = \hat{z}\ \mu \mathrm{I_0} d \left[\frac{e^{-jkR_1}}{4\pi R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{4\pi R_2}\right]$$

בקואורדינטות כדוריות עבור כל דיפול:

$$\boldsymbol{A_n} = \left[-\hat{\theta}\sin\theta + \hat{r}\cos\theta\right]\mu \mathrm{I_0} d g(r_n)$$

כאשר: $r_n = \sqrt{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 + (z - z_n)^2}$

ומכאן נוכל למצוא את השדות: (בהשמטת איברים שמתאפסים ברוטור)

$$\boldsymbol{H_n} = \frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{1}{\mu}\Big[\hat{\varphi}\left(\frac{1}{r}\partial_r(rA_\theta) - \frac{1}{r}\partial_\theta A_r\right) + \hat{\theta}\big(\partial_r(rA_\varphi); \partial_\varphi A_r\big) + \hat{r}(\partial_\varphi A_\theta; \partial_\theta A_\varphi)\Big] = \hat{\varphi} I_0 d\left(jk + \frac{1}{r}\right) g(r)\sin(\theta)$$

$$\boldsymbol{E_n} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{j\omega\epsilon}\left[\hat{r}\frac{1}{rsin\theta}\partial_\theta\big(sin\theta H_\phi\big) - \hat{\theta}\frac{1}{r}\partial_r(rH_\phi)\right] = -j\omega\mu I_0 d g(r)\left[\hat{r}cos\theta\left(\frac{2j}{kr} + \frac{2}{(kr)^2}\right) - \hat{\theta}sin\theta(1 - \frac{j}{kr} - \frac{1}{(kr)^2})\right]$$

לבסוף נעבור לקואורדינטות קרטזיות משותפות עבור שני הדיפולים והשדה הכולל יתקבל ע"י סכימה של השדות של שני הדיפולים עבור $z > 0$.

B) בקרוב השדה הרחוק נשתמש בקרוב הגיאומטרי:

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| \sim r - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'$$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{A} = \hat{z}\,\mu I_0 d\frac{e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \sim \hat{z}\,\mu I_0 d\frac{e^{-jk(r-\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')}}{4\pi r} = \hat{z}\,\mu I_0 d\frac{e^{-jkr}}{4\pi r}e^{jk\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\prime}$$

כאשר: $g(r) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$ פונקציית גרין של חלל חופשי ביחס לראשית.

תחום התקפות של הקרוב מקיים:

$r \gg \lambda$ – מצדיק את תיאור השדה הרחוק של דיפול.

$r \gg \frac{L^2}{\lambda}$, $r \gg L$ - מהווה בסיס לקרוב הגיאומטרי.

בקואורדינטות כדוריות:

$$\hat{\boldsymbol{r}} = sin\theta cos\varphi\hat{x} + sin\theta sin\varphi\hat{y} + cos\theta\hat{z}$$

$$\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}_1' = (sin\theta cos\varphi\hat{x} + sin\theta sin\varphi\hat{y} + cos\theta\hat{z})\cdot(l\hat{z}) = lcos\theta$$

$$\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}_2' = (sin\theta cos\varphi\hat{x} + sin\theta sin\varphi\hat{y} + cos\theta\hat{z})\cdot(-l\hat{z}) = -lcos\theta$$

בקרוב השדה הרחוק נקבל:

$$\boldsymbol{A} = \hat{z}\,\mu g(r) I_0 d\left[e^{jk\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}_1'} + e^{jk\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}_2'}\right] = \hat{z}\,\mu g(r) I_0 d\left[e^{jklcos\theta} + e^{-jklcos\theta}\right] = \hat{z}\,\mu g(r) I_0 d 2\cos(klcos\theta)$$

והשדות:

$$\boldsymbol{E} \cong \widehat{\boldsymbol{\theta}} j2k\eta g(r) I_0 d sin(\theta)\cos(klcos\theta)$$

$$\boldsymbol{H} \cong \widehat{\boldsymbol{\varphi}} j2kg(r) I_0 d sin(\theta)\cos(klcos\theta)$$

כאשר: $g(r) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$

C)

- בגלל התלות ב-$g(r)$, לשדה יש מבנה גלובלי של גל כדורי. משטחי שווי הפאזה הם מעטפות כדוריות ברדיוס r מהראשית, והשדה דועך לפי $\frac{1}{r}$. נשים לב גם כי לשדה הרחוק יש מבנה לוקאלי של גל מישורי, שכן בכל נקודה השדה E ניצב לשדה H ולכיוון ההתקדמות.
- עקום הקרינה המתקבל:

$$F = \frac{|\boldsymbol{E}|}{\max\ |\boldsymbol{E}|} = |\sin(\theta)\cos(kl\cos\theta)|$$

ניתן לראות כי עקום הקרינה תלוי רק ב- θ. זה מתיישב עם העובדה שלבעיה יש סימטריה גלילית.

- לשם פשטות נתייחס רק לעקום המערך לצורך חישוב המקסימום והאפסים.

מכיוון שהשתמשנו בשיטת השיקופים, הפתרונות הרלוונטיים הם רק בתחום $0 < \theta < 90°$.

אפסי עקום הקרינה מתקבלים כאשר:

$$\cos(kl\cos\theta) = 0 \implies kl\cos\theta = \frac{\pi}{2} + \pi n \ \ , n \in \mathbb{Z}$$

$$\implies \cos\theta = \frac{\pi(2n+1)}{2kl} \ \ , n \in \mathbb{Z}$$

כאשר ערכי *n* האפשריים חייבים לקיים $|\cos\theta| \leq 1$.

המקסימום של עקום הקרינה מתקבלים כאשר:

$$\cos(kl\cos\theta) = \pm 1 \implies kl\cos\theta = \pi n \ \ , n \in \mathbb{Z}$$

$$\implies \cos\theta = \frac{\pi n}{kl} \ \ , n \in \mathbb{Z}$$

כאשר ערכי *n* האפשריים חייבים לקיים $|\cos\theta| \leq 1$.

נחשב עבור ערכי *l* השונים:

עבור $\boldsymbol{l = \frac{\lambda}{4}}$:

נציב $kl = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$

אפסים-

$$\cos\theta = \frac{\pi(2n+1)}{2kl} = \frac{\pi(2n+1)}{2 \cdot \frac{\pi}{2}} = 2n+1 \implies \theta = \cos^{-1}(2n+1)$$

ערך ה-*n* היחיד המקיים את התנאים הוא *n=0*, לכן נקבל אפס עבור $\theta = \cos^{-1}(1) = 0$

מקסימום-

$$\cos\theta = \frac{\pi n}{kl} = \frac{\pi n}{\frac{\pi}{2}} = 2n \implies \theta = \cos^{-1}(2n)$$

ערך ה-*n* היחיד המקיים את התנאים הוא *n=0*, לכן נקבל מקסימום עבור $\theta = \cos^{-1}(0) = 90°$

עבור $\boldsymbol{l = \frac{\lambda}{2}}$:

נציב $kl = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi$

אפסים-

$$cos\theta = \frac{\pi(2n+1)}{2kl} = \frac{\pi(2n+1)}{2\cdot\pi} = n + \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

ערך ה-*n* היחיד המקיים את התנאים הוא *n=0*, לכן נקבל אפס עבור

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$$

מקסימום-

$$cos\theta = \frac{\pi n}{kl} = \frac{\pi n}{\pi} = n \Longrightarrow \theta = \cos^{-1}(n)$$

ערכי ה-*n* היחידים המקיימים את התנאים הם

n=0, עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \cos^{-1}(0) = 90°$

ו- *n=1* עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \cos^{-1}(1) = 0°$

עבור $l = \lambda$:

נציב $kl = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\lambda = 2\pi$

אפסים-

$$cos\theta = \frac{\pi(2n+1)}{2kl} = \frac{\pi(2n+1)}{2\cdot 2\pi} = \frac{2n+1}{4} \Longrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2n+1}{4}\right)$$

ערכי ה-*n* היחידים המקיימים את התנאים הם

n=0 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 75.5°$

ו- *n=1* עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 41.41°$

מקסימום-

$$cos\theta = \frac{\pi n}{kl} = \frac{\pi n}{2\pi} = \frac{n}{2} \Longrightarrow \theta = \cos^{-1}(\frac{n}{2})$$

ערכי ה-*n* היחידים המקיימים את התנאים הם

n=0, עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \cos^{-1}(0) = 90°$

n=1 עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$

n=2 עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \cos^{-1}(1) = 0°$

עבור $l = 2\lambda$:

נציב $kl = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2\lambda = 4\pi$

אפסים-

$$cos\theta = \frac{\pi(2n+1)}{2kl} = \frac{\pi(2n+1)}{2\cdot 4\pi} = \frac{2n+1}{8} \Longrightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2n+1}{8}\right)$$

ערכי ה-*n* היחידים המקיימים את התנאים הם

n=0 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) \approx 82.82°$

n=1 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{8}\right) \approx 67.98°$

n=2 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) \approx 51.32°$

n=3 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right) \approx 28.95°$

מקסימום-

$$cos\theta = \frac{\pi n}{kl} = \frac{\pi n}{4\pi} = \frac{n}{4} \Longrightarrow \theta = \cos^{-1}(\frac{n}{4})$$

ערכי ה-*n* היחידים המקיימים את התנאים הם

n=0, עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \cos^{-1}(0) = 90°$

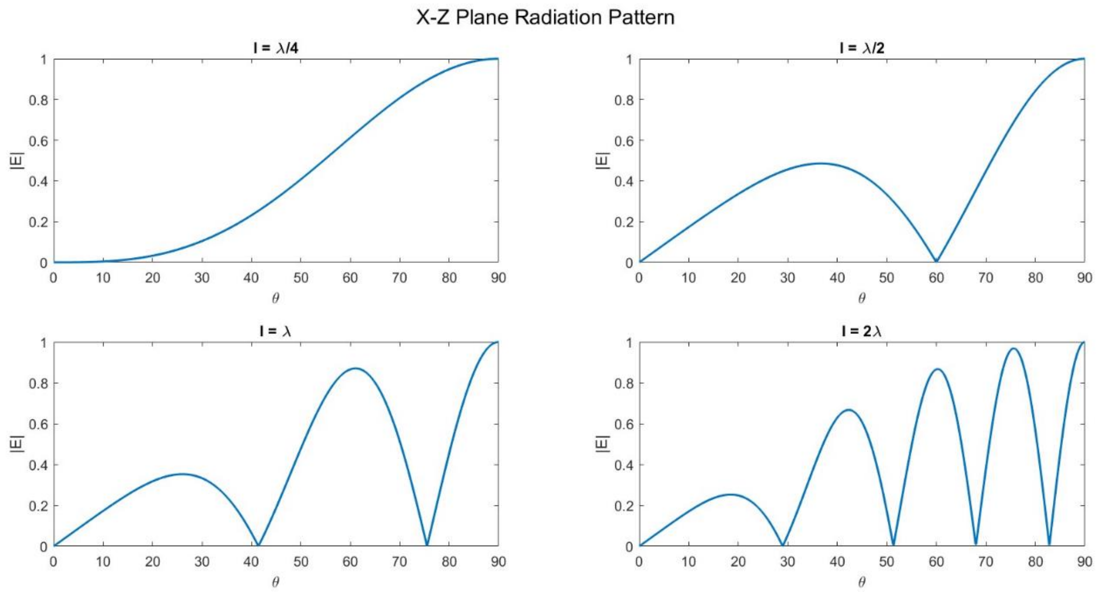
n=1 עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = 75.52°$

n=2 עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$

n=3 עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 41.41°$

n=4 עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \cos^{-1}(1) = 0°$

(*D*

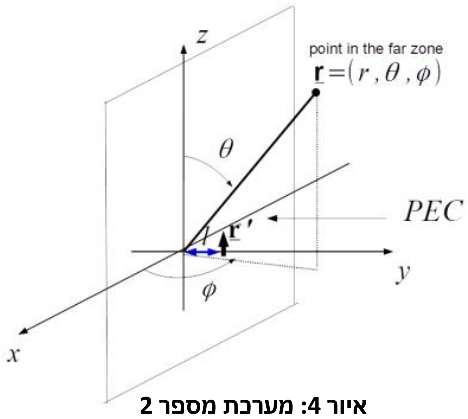


איור 3: תרשים עקום הקרינה במישור Z-X עבור ערכי l שונים

בתרשים מוצג עקום הקרינה: $F = |\sin(\theta)\cos(klcos\theta)|$ עבור ערכי *l* שונים. נשים לב שיש שוני באפסים ובמקסימום של חלק מהגרפים לעומת מה שחישבנו בסעיף הקודם. זאת מכיוון שבסעיף *C* חישבנו את האפסים והמקסימום רק עבור עקום המערך, בעוד שבסעיף זה לקחנו בחשבון גם את עקום האלמנט כחלק מעקום הקרינה.

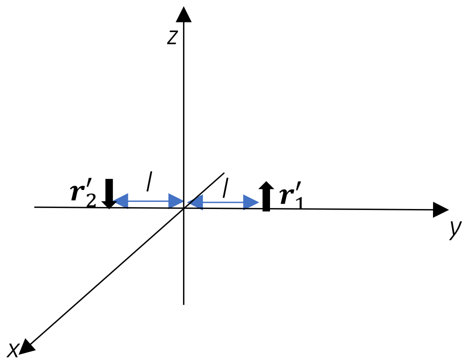
שאלה 2-

A) המערכת החדשה מוצגת באיור 4:



איור 4: מערכת מספר 2

בעזרת שיטת השיקופים ניתן להציג את המערכת בצורה הבאה:



איור 5: מערכת מספר 2 מוצגת בשיטת השיקופים

$$\boldsymbol{r}'_1 = l\hat{y}\ ,\ \boldsymbol{r}'_2 = -l\hat{y}$$

$$R_1 = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'_1|\ ,R_2 = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'_2|$$

$$A_1 = I_0 d\ ,A_2 = -I_0 d$$

$$\boldsymbol{A} = \sum_n \hat{z}\,\mu A_n \frac{e^{-jkR_n}}{4\pi R_n} = \hat{z}\,\mu I_0 d\left[\frac{e^{-jkR_1}}{4\pi R_1} - \frac{e^{-jkR_2}}{4\pi R_2}\right]$$

בקואורדינטות כדוריות:

$$\hat{\boldsymbol{r}} = sin\theta cos\varphi\hat{x} + sin\theta sin\varphi\hat{y} + cos\theta\hat{z}$$

$$\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}'_1 = (sin\theta cos\varphi\hat{x} + sin\theta sin\varphi\hat{y} + cos\theta\hat{z}) \cdot (l\hat{y}) = lsin\theta sin\varphi$$

$$\hat{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{r}'_2 = (sin\theta cos\varphi\hat{x} + sin\theta sin\varphi\hat{y} + cos\theta\hat{z}) \cdot (-l\hat{y}) = -lsin\theta sin\varphi$$

בקרוב השדה הרחוק נקבל:

$$\boldsymbol{A} = \hat{z}\,\mu g(r)\mathrm{I}_0 d\left[e^{jk\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}'_1} - e^{jk\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}'_2}\right] = \hat{z}\,\mu g(r)\mathrm{I}_0 d\left[e^{jklsin\theta sin\varphi} - e^{-jklsin\theta sin\varphi}\right] = \hat{z}\,\mu g(r)\mathrm{I}_0 d2j\sin\left(ksin\theta sin\varphi\right)$$

והשדות:

$$\boldsymbol{E} \cong -\widehat{\boldsymbol{\theta}}2k\eta g(r)I_0 dsin(\theta)\sin\left(klsin\theta sin\varphi\right)$$

$$\boldsymbol{H} \cong -\widehat{\boldsymbol{\varphi}}j2kg(r)I_0 dsin(\theta)\sin\left(klsin\theta sin\varphi\right)$$

כאשר: $g(r) = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$

- בגלל התלות ב-$g(r)$, לשדה יש מבנה גלובלי של גל כדורי. משטחי שווי הפאזה הם מעטפות כדוריות ברדיוס r מהראשית, והשדה דועך לפי $\frac{1}{r}$.
- עקום הקרינה המתקבל:

$$F = \frac{|\boldsymbol{E}|}{\max\ |\boldsymbol{E}|} = \left|\sin\left(\theta\right)\sin\left(klsin\theta sin\varphi\right)\right|$$

ניתן לראות כי עקום הקרינה תלוי כעת גם ב-θ וגם ב-φ. כעת תהיה סימטריה סביב $\theta = \frac{\pi}{2}$.

- לשם פשטות נתייחס רק לעקום המערך לצורך חישוב המקסימום והאפסים.

במישור *Y-Z* מתקיים:

$\varphi = 90°\ ,\ 0 < \theta < 180°$.

אפסי עקום הקרינה מתקבלים כאשר:

$$\sin\left(klsin\theta\sin 90\right) = 0 \implies klsin\theta = \pi n\ \ ,n \in \mathbb{Z}$$

$$\implies sin\theta = \frac{\pi n}{kl}\ \ ,n \in \mathbb{Z}$$

כאשר ערכי *n* האפשריים חייבים לקיים $|sin\theta| \leq 1$.

המקסימום של עקום הקרינה מתקבלים כאשר:

$$\sin(klsin\theta\sin 90) = \pm 1 \implies klsin\theta = \frac{\pi}{2} + \pi n\ \ ,n \in \mathbb{Z}$$

$$\implies sin\theta = \frac{\pi(2n+1)}{2kl}\ \ ,n \in \mathbb{Z}$$

כאשר ערכי *n* האפשריים חייבים לקיים $|sin\theta| \leq 1$.

נחשב עבור ערכי *l* השונים:

עבור $\boldsymbol{l = \frac{\lambda}{4}}$:

נציב $kl = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$

אפסים-

$$sin\theta = \frac{\pi n}{kl} = \frac{\pi n}{\frac{\pi}{2}} = 2n \implies \theta = \sin^{-1}(2n)$$

ערך ה-*n* היחיד המקיים את התנאים הוא *n=0*, לכן נקבל אפס עבור $\theta = \sin^{-1}(0) = 0$

מקסימום-

$$sin\theta = \frac{\pi(2n+1)}{2kl} = \frac{\pi(2n+1)}{2\cdot\frac{\pi}{2}} = 2n+1 \implies \theta = \sin^{-1}(2n+1)$$

ערך ה-*n* היחיד המקיים את התנאים הוא *n=0*, לכן נקבל מקסימום עבור
$\theta = \sin^{-1}(1) = 90°$

עבור $l = \frac{\lambda}{2}$:

נציב $kl = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{2} = \pi$

אפסים-

$$sin\theta = \frac{\pi n}{kl} = \frac{\pi n}{\pi} = n \implies \theta = \sin^{-1}(n)$$

ערכי ה-*n* היחידים המקיימים את התנאים הם

n=-1, עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}(-1) = 180°$

n=0 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}(0) = 0$

n=1 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}(1) = 90°$

מקסימום-

$$sin\theta = \frac{\pi(2n+1)}{2kl} = \frac{\pi(2n+1)}{2\cdot\pi} = n+\frac{1}{2} \implies \theta = \sin^{-1}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

ערכי ה-*n* היחידים המקיימים את התנאים הם

n=0, עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$

ו- *n=-1* עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 150°$

עבור $l = \lambda$:

נציב $kl = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\lambda = 2\pi$

אפסים-

$$sin\theta = \frac{\pi n}{kl} = \frac{\pi n}{2\pi} = \frac{n}{2} \implies \theta = \sin^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)$$

ערכי ה-*n* היחידים המקיימים את התנאים הם

n=-2 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}(-1) = 180°$

n=-1, עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 150°$

n=0 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}(0) = 0$

n=1 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$

n=2 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}(1) = 90°$

מקסימום-

$$sin\theta = \frac{\pi(2n+1)}{2kl} = \frac{\pi(2n+1)}{2\cdot 2\pi} = \frac{2n+1}{4} \implies \theta = \sin^{-1}\left(\frac{2n+1}{4}\right)$$

ערכי ה-*n* היחידים המקיימים את התנאים הם

n=-2 עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \sin^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) \approx 131.41°$

n=-1, עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 165.52°$

n=0 עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 14.48°$

n=1 עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 48.6°$

עבור $l = 2\lambda$:

נציב $kl = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2\lambda = 4\pi$

אפסים-

$$sin\theta = \frac{\pi n}{kl} = \frac{\pi n}{4\pi} = \frac{n}{4} \Longrightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{n}{4}\right)$$

ערכי ה-*n* היחידים המקיימים את התנאים הם

n=-4 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}(-1) = 180°$

n=-3, עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}\left(-\frac{3}{4}\right) \approx 131.41°$

n=-2 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 150°$

n=-1, עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right) \approx 165.52°$

n=0 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}(0) = 0$

n=1 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \approx 14.48°$

n=2 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30°$

n=3 עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 48.6°$

n=4, עבורו נקבל אפס ב- $\theta = \sin^{-1}(1) = 90°$

מקסימום-

$$sin\theta = \frac{\pi(2n+1)}{2kl} = \frac{\pi(2n+1)}{2 \cdot 4\pi} = \frac{2n+1}{8} \Longrightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{2n+1}{8}\right)$$

ערכי ה-*n* היחידים המקיימים את התנאים הם

n=-4 עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \sin^{-1}\left(-\frac{7}{8}\right) \approx 118.95°$

n=-3, עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \sin^{-1}\left(-\frac{5}{8}\right) \approx 141.32°$

n=-2 עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \sin^{-1}\left(-\frac{3}{8}\right) \approx 157.98°$

n=-1, עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \sin^{-1}\left(-\frac{1}{8}\right) \approx 172.82°$

n=0 עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{8}\right) \approx 7.18°$

n=1 עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{8}\right) \approx 22.02°$

n=2 עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) \approx 38.68°$

n=3 עבורו נקבל מקסימום ב- $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{7}{8}\right) \approx 61.04°$

במישור *X-Y* מתקיים עם התחשבות בשיקוף:

$\theta = 90°$, $0 < \varphi < 180°$.

אפסי עקום הקרינה מתקבלים כאשר:

$$\sin\left(klsin90 \sin\varphi\right) = 0 \Longrightarrow klsin\varphi = \pi n \quad, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow sin\varphi = \frac{\pi n}{kl} \ \ , n \in \mathbb{Z}$$

כאשר ערכי n האפשריים חייבים לקיים $|sin\theta| \leq 1$.

המקסימום של עקום הקרינה מתקבלים כאשר:

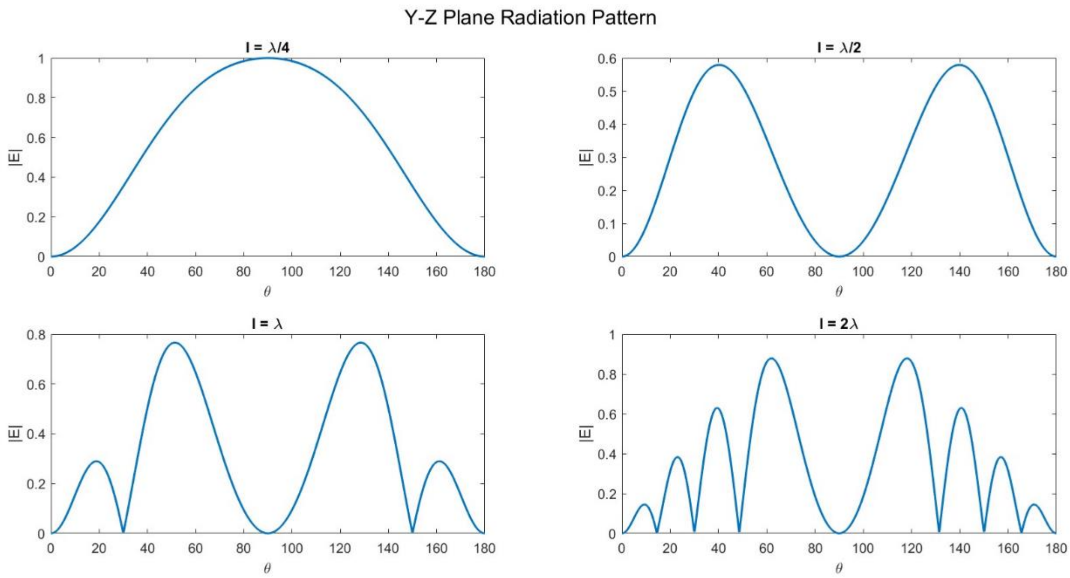
$$\sin(klsin90 \sin\varphi) = \pm 1 \ \Longrightarrow klsin\varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n \ \ , n \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow sin\varphi = \frac{\pi(2n+1)}{2kl} \ \ , n \in \mathbb{Z}$$

כאשר ערכי n האפשריים חייבים לקיים $|sin\theta| \leq 1$.

למעשה נקבל בדיוק אותם ערכים רק עבור הזווית φ.

***B*)**

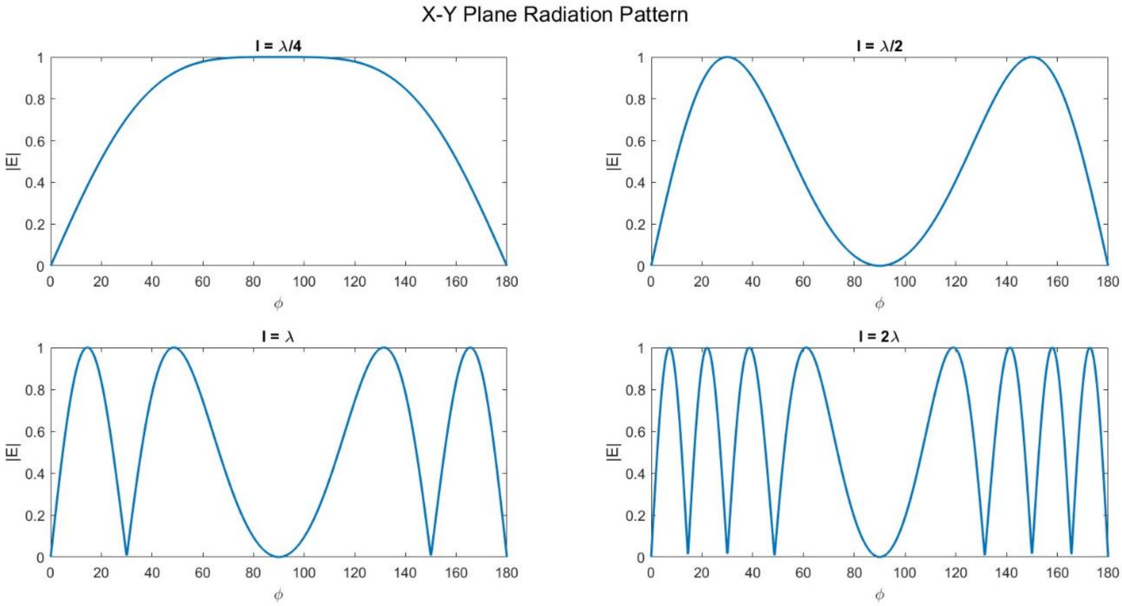


איור 6: תרשים עקום הקרינה במישור Z-Y עבור ערכי l שונים

בתרשים מוצג עקום הקרינה: $F = |\sin(\theta)\sin(klsin\theta sin\varphi)|$

במישור *Y-Z* מתקיים: $\varphi = 90°$, $0 < \theta < 180°$. לכן קיבלנו תרשים עבור:

$$F = |\sin(\theta)\sin(klsin\theta)|$$



איור 7: תרשים עקום הקרינה במישור X-Y עבור ערכי l שונים

בתרשים מוצג עקום הקרינה: $F = |\sin(\theta)\sin(klsin\theta sin\varphi)|$.

במישור *X-Y* מתקיים (עבור החלק החיובי של ציר *Y*): $0 < \varphi < 180°$, $\theta = 90°$. לכן קיבלנו תרשים עבור:

$$F = |\sin(klsin\varphi)|$$

נספח-

1) הקוד:

```
%% Q.1

lambda0 = 1;
l = [lambda0./4 lambda0./2 lambda0 2.*lambda0];
title_vec = ["l = \lambda/4" "l = \lambda/2" "l = \lambda" "l = 2\lambda"];
k = 2.*pi./lambda0;
theta_vec = linspace(0,pi./2,1000);
for i = 1:4
    subplot(2,2,i)
    l_cur = l(i);
    F = abs(sin(theta_vec).*cos(k.*l_cur.*cos(theta_vec)));
    plot(theta_vec./pi.*180,F,'LineWidth',1.5)
    title(title_vec(i))
    xlabel('\theta')
    ylabel('|E|')
end
sgtitle("X-Z Plane Radiation Pattern")

%% Q.2

lambda0 = 1;
l = [lambda0./4 lambda0./2 lambda0 2.*lambda0];
title_vec = ["l = \lambda/4" "l = \lambda/2" "l = \lambda" "l = 2\lambda"];
k = 2.*pi./lambda0;
theta_vec = linspace(0,pi,1000);
phi = pi./2;

for i = 1:4
    subplot(2,2,i)
    l_cur = l(i);
    F = abs(sin(theta_vec).*sin(k.*l_cur.*sin(theta_vec).*sin(phi)));
    plot(theta_vec./pi.*180,F,'LineWidth',1.5)
    title(title_vec(i))
    xlabel('\theta')
    ylabel('|E|')
end
sgtitle("Y-Z Plane Radiation Pattern")

%%

phi_vec = linspace(0,pi,1000);
theta = pi./2;
for i = 1:4
    subplot(2,2,i)
    l_cur = l(i);
    F = abs(sin(theta).*sin(k.*l_cur.*sin(theta).*sin(phi_vec)));
    plot(phi_vec./pi.*180,F,'LineWidth',1.5)
    title(title_vec(i))
    xlabel('\phi')
    ylabel('|E|')
end
sgtitle("X-Y Plane Radiation Pattern")
```