פרויקט בשדות

שאלה 1 :

סעיף א : כמות המטען הכוללת על פני הדסקה-חישוב אנליטי

$$Q = \iint_{disk} \eta(r)dv = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{4\varepsilon_0 V}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}} r dr d\varphi = 2\pi\cdot\frac{4\varepsilon_0 V}{\pi}\int_0^R \frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}dr =$$
$$-8\varepsilon_0 V\sqrt{R^2-r^2}\Big|_0^R = 8\varepsilon_0 VR$$

סעיף ב :

1. הסבר על אופן ביצוע הדיסקרטיזציה :

אנחנו מחלקים את הדסקה לריבועים קטנים בגודל d על d עם ערך מספרי לפי נתוני השאלה כאשר מרכז כל אלמנט הינו $(x_m\ , y_m)$. אנחנו זורקים את כל הריבועים שהמרכז שלהם יוצא מחוץ למעגל. בעצם כל ריבוע אנו מגדירים את הצפיפות שלו כצפיפות קבועה לפי הצפיפות שיש במרכז הריבוע וזה אומר שכל ריבוע שמרכזו מחוץ לדסקה הוא ללא צפיפות ולכן אנו למעשה לא מחשיבים אותו. אנו יודעים שהמטען על כל ריבוע שמרכזו בתוך הדסקה מתנהג כמו $\sigma\cdot dxdy$. נסכום את המטען על כל הריבועים וכך נקבל את סך המטען.

לפי ה tutorial : הפוטנציאל שריבוע n כלשהו שמרכזו נמצא ב - $(x_n\ , y_n)$ עושה בנקודה $(x_m\ , y_m)$ הינו :

$$\varphi(x_m\ , y_m) = \eta_n \int_{x_n-\frac{d}{2}}^{x_n+\frac{d}{2}} \int_{y_n-\frac{d}{2}}^{y_n+\frac{d}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dx'dy'}{\sqrt{(x_m-x')^2+(y_m-y')^2}}$$

ולכן נקבל שהפוטנציאל באלמנט ריבועי שמרכזו נמצא ב$(x_m\ , y_m)$ הינו :

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{N} l_{mn}\sigma_n = V \\ l_{mn} = \int_{x_n-\frac{d}{2}}^{x_n+\frac{d}{2}} \int_{y_n-\frac{d}{2}}^{y_n+\frac{d}{2}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dx'dy'}{\sqrt{(x_m-x')^2+(y_m-y')^2}} \end{cases}$$

לפי השאלה נקבל כי : $x_j = \frac{\sigma_j b_x b_y}{4\pi\varepsilon_0}$.

ולכן מערכת המשוואות תהיה : $[l]^{NxN} \cdot [x]^{Nx1} = [V]^{Nx1} = [1]^{Nx1}$.

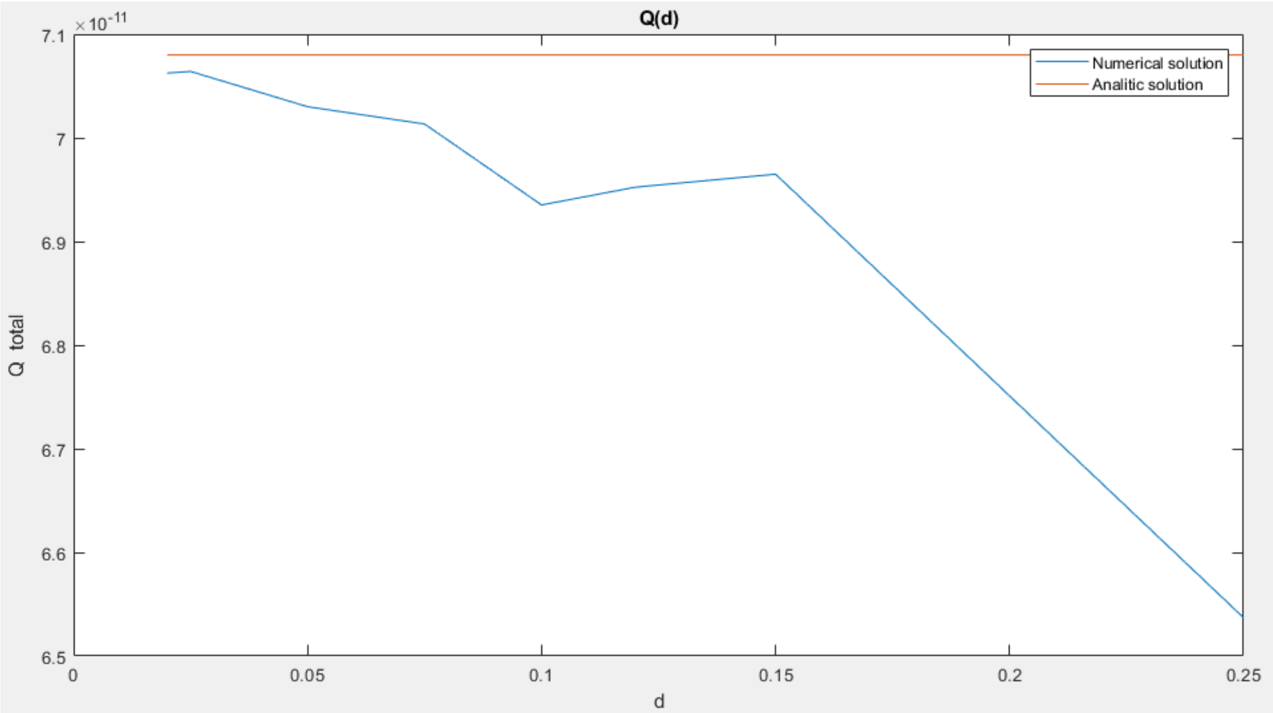
כאשר אברי המטריצה l יחושבו כך :

$$\begin{cases} l_{mn} = \frac{1}{\sqrt{(x_n-x_m)^2+(y_n-y_m)^2}}\ , \forall m \neq j \\ l_{nn} = \frac{2}{d}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right), \text{על האלכסון} \end{cases}$$

.2

0.02	0.05	0.075	0.1	0.12	0.15	0.25	d
7.06251	7.03004	7.01334	6.93522	6.95237	6.96493	6.53692	$Q\cdot e^{-11}$

.3



ניתן לראות למעשה שככל ש -d קטן (כלומר ככל שמתקרבים לאפס מהצד החיובי של ציר ה-x) הפתרון הנומרי מתכנס לפתרון האנליטי. התוצאה הזו הגיונית כיוון שככל ש-d קטן יותר, כך למעשה יש לי חלוקה גדולה יותר כלומר מתקבלים יותר ריבועים על הדסקה כך שלמעשה אנו מקבלים דיסקרטיזציה טובה יותר. לכן, ככל ש-d יקטן כך אנו מקבלים קירוב טוב יותר לפתרון האנליטי.

שאלה 2:

הבעיה מורכבת משני גופים ולכן צריך לקחת בחשבון גם את ההשפעה של שני הגופים אחד על השני.

המערכת המטריציונית תיהיה:

$$\begin{bmatrix} l^{AA} & l^{AB} \\ l^{BA} & l^{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix}$$

כאשר l^{AB} ו- l^{BA} מבטאים את ההשפעה של דיסק אחד על השני ובשל הסימטריה הגאומטרית בבעיה מתקיים: $l^{BA} = l^{AB}$ וגם $l^{BB} = l^{AA}$ אשר זהות למטריצה $[l]$ בשאלה הקודמת.
l^{AB} ו- l^{BA} יחושבו כך ש:

$$\begin{cases} l_{mn} = \dfrac{1}{\sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2 + D^2}} & , \forall m \neq j \\ l_{nn} = \dfrac{2}{d} \ln\left(\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) & \text{, על האלכסון} \end{cases}$$

כאשר D זה המרחק בין הדיסקות.

סעיף א:

אנו מקבלים שהמטען על הלוח העליון עבור D=R/2 הוא: $9.46576 \cdot e^{-11}[c]$.

בקוד שכתבנו השוונו את ערך זה לערך התאורטי על ידי חישוב שגיאה יחסית

וקיבלנו שגיאה יחסית של כ- 70.2285%.

הסבר:

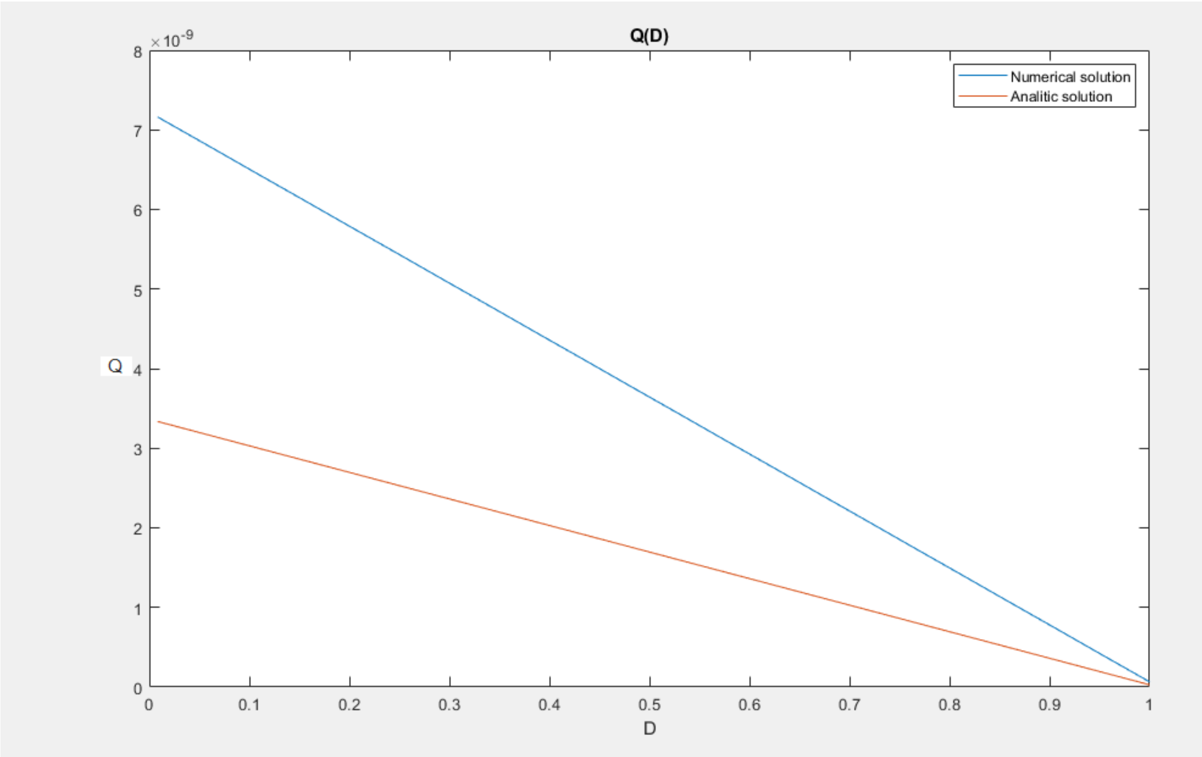
יש הבדל בין הערך שחישבנו לערך התאורטי כיוון שהחישוב הנומרי מוגבל בדיוק שלו עקב הדיסקרטיזציה. בדיסקרטיזציה למעשה הדסקה מתחלקת לריבועים קטנים כך שחלק מהריבועים על הדסקה (בקצוות) לא יכללו בחישוב כי מרכזיהם יימצאו מחוץ לדסקה ולכן, אנו למעשה "מאבדים מידע" (מאבדים מטען) ולכן נוצר הבדל.

סעיף ב:

כעת אנו מקבלים שהמטען על הלוח העליון עבור D=R/5 הוא: $8.86925 \cdot e^{-11}[c]$.

כעת מתקבלת שגיאה יחסית קטנה יותר של כ-32% בערך. ההסבר לכך הוא שהמרחק בין הלוחות כעת קטן יותר מאשר בסעיף הקודם וזה מוביל לקירוב טוב יותר של קבל לוחות אינסופיים (כאשר המרחק בין לוחות אינסופיים קטן מאוד ביחס לגודלם). ולכן התוצאה אכן עקבית.

סעיף ג:



הסיבות האפשריות לשגיאה הן:

- החישוב הנומרי מוגבל בדיוק שלו עקב הדיסקרטיזציה. בדיסקרטיזציה למעשה הדסקה מתחלקת לריבועים קטנים כך שחלק מהריבועים על הדסקה (בקצוות) לא יכללו בחישוב כי מרכזיהם ימצאו מחוץ לדסקה ולכן, אנו למעשה "מאבדים מידע" (מאבדים מטען).

- קיבלנו גרף לינארי עם שיפוע שלילי כך שככל ש-D גדל, הקיבול קטן. ניתן להסביר זאת באמצעות הטענה שפיקטיבית שני קבלים הם אינסופיים אם המרחק ביניהם מאוד קטן ביחס לגודלם ולכן אם אני מרחיק את הלוחות אני מקבל קירוב פחות טוב ללוחות אינסופיים כפי שנתון בשאלה (נתון קבל לוחות אינסופיים).

סעיף ד:

- בסעיף א' ניתן לראות מהערכים שהתוכנה מדפיסה שסך המטען על הדסקה העליונה שווה למטען בדסקה התחתונה בסימן הפוך. לעומת זאת בסעיף ד' אני מאבד מהסימטריה שיש לי בגלל שכעת יש לי דסקה אחת מוארקת ולכן אני אמנם מקבל סך מטען בסימן הפוך בין שתי הדסקות אבל לא באותו גודל, כלומר אין חלוקה שווה במטענים.

- כמו כן, החישוב הוא בסופו של דבר חישוב נומרי לכן יכול להיות שעקב ערכי הדיסקרטיזציה הנתונים הייתה כאן דיסקרטיזציה גסה מידי. כלומר, אולי בגלל הערכים המספריים בנתוני השאלה (הערכים המספריים של d,D,R) לא חילקנו לריבועים מספיק קטנים וזה גורר איבוד גדול של מידע (כלומר, הסתכלנו על מספר נקודות בודד לעומת מורכבות הבעיה) ואז נקבל שגיאה גדולה.