Valós függvények határértéke

Elméleti áttekintés

1. Definíció. *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$. Azt mondjuk, hogy*

– *az f függvénynek **az x_0 pontban a határértéke** α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.*

– *az f függvénynek **az x_0 pontban a határértéke** $+\infty$, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) > K$. Erre a $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

– *az f függvénynek **az x_0 pontban a határértéke** $-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| < \delta$, akkor $f(x) < k$. Erre a $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

– *az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \geqslant K$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.*

– *az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** α, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leqslant k$, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha$ jelölést alkalmazzuk.*

– *az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** $+\infty$, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $K^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \geqslant K^*$, akkor $f(x) \geqslant K$. Erre a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

– *az f függvénynek **a $+\infty$–ben a határértéke** $-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $K^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \geqslant K^*$, akkor $f(x) \leqslant k$. Erre a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

– *az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** $+\infty$, ha tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $k^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leqslant k^*$, akkor $f(x) \geqslant K$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

– *az f függvénynek **a $-\infty$–ben a határértéke** $-\infty$, ha tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $k^* \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in D$ és $x \leqslant k^*$, akkor $f(x) \leqslant k$. Erre a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ jelölést alkalmazzuk.*

1. Tétel (Átviteli-elv). *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, illetve $x_0 \in D'$ és $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Ekkor $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ pontosan akkor teljesül, ha tetszőleges $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D-beli, x_0-hoz konvergáló sorozat esetén $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$ teljesül.*

2. Tétel (Folytonosság és függvényhatárérték kapcsolata). *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ és $x_0 \in D$. Ekkor az f függvény pontosan akkor folytonos az x_0 pontban, ha létezik a $\lim_{x\to x_0} f(x)$ határérték, és*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

2. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, $f\colon D \to \mathbb{R}$ pedig egy függvény. Az $x = a$ egyenletű egyenest az f függvény **vízszintes aszimptotá**jának nevezzük, ha*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \quad \textit{vagy} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

teljesül.

*Az $y = b$ egyenletű egyenest az f függvény **függőleges aszimptotá**jának mondjuk, ha*

$$\lim_{x\to b-} f(x) \in \{-\infty, +\infty\} \quad \textit{vagy} \quad \lim_{x\to b+} f(x) \in \{-\infty, +\infty\}$$

*Azt mondjuk, hogy az $y = ax + b$ egyenletű egyenes az f függvénynek **ferde aszimptotá**ja, ha*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \textit{vagy} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

teljesül.

Nevezetes függvényhatárértékek

1. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$ és
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$
Ekkor
$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha} \quad a_n > 0 \\ -\infty, & \text{ha} \quad a_n < 0 \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha} \quad a_n > 0 \text{ és } n \text{ páros} \\ -\infty, & \text{ha} \quad a_n < 0 \text{ és } n \text{ páros} \\ -\infty, & \text{ha} \quad a_n > 0 \text{ és } n \text{ páratlan} \\ +\infty, & \text{ha} \quad a_n < 0 \text{ és } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

2. Legyen $a > 0$, ekkor
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{ha} \quad a > 1 \\ 0, & \text{ha} \quad a < 1 \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad a > 1 \\ +\infty, & \text{ha} \quad a < 1 \end{cases}$$

3. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

4. $$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+} x^x = 1.$$

5. $$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

6. Legyen $1 \neq a > 0$, ekkor
$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a).$$

7. Legyenek $\alpha > 0$ és $a \in \mathbb{R}$, ekkor
$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha^x - \alpha^a}{x - a} = \alpha^a \ln(a).$$

Feladatok

1. Feladat. *Az Átviteli elv felhasználásával igazoljuk az alábbiakat.*

(a)
$$\lim_{x\to 4}(3x - 5) = 7,$$

(b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{25x^3 + 2}{75x^7 - 2} = -1,$$

(c)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{3}{2},$$

(d)
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6,$$

(e)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x+2} - 2} = 4,$$

(f)
$$\lim_{x\to 0} x \left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$

2. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e az alábbi határértékek.*

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

(b)
$$\lim_{x\to \alpha} \frac{1}{(x-\alpha)^2} \quad (\alpha > 0)$$

(c)
$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(d)
$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(e)
$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

(f)
$$\lim_{x\to 1} 2^{\frac{1}{x-1}}.$$

3. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a*

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & ha \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & ha \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

módon értelmezett $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ún. ***Dirichlet-függvény****nek egyetlen pontban sem létezik a határértéke.*

4. Feladat. *Legyenek $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, igazoljuk, hogy*

(a)

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^2 - \alpha^2}{x - \alpha} = 2\alpha$$

(b)

$$\lim_{x\to\beta} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\beta}}{x - \beta} = \frac{1}{2\sqrt{\beta}}.$$

5. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket.*

(a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^5 + 8x^4 - 3x^3 + 10x^2 + 2x - 15}{x^3 + 16x^2 + 49x - 270}$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2 + 7x + 6}{9x^3 + 8x^2 + 7x + 6}$$

(c)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 + 6x + 12}{9x^2 - 10x + 26}$$

(d)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3 + 17x^2 + 111}{2x^2 + 26x - 17}$$

(e)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2 - 13x + 28}{8x^3 + 56x^2 + 13x - 4}$$

(f)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 + 5x - 46}{-9x^2 + 81x + 27}$$

(g)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$$

(h)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

6. Feladat. *Határozzuk meg a következő függvényhatárértékeket.*

(a)

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$$

(b)

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - x - 2}$$

(c)

$$\lim_{x\to3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$$

(d)

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 12}$$

(e)

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 8x + 7}$$

(f)

$$\lim_{x\to-1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3}$$

(g)

$$\lim_{x\to4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 2x - 8}$$

(h)

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x^2 - \pi x + x - \pi}{x^2 - \pi x - x + \pi}$$

(i)

$$\lim_{x\to1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$$

7. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e az alábbi határértékek.*

(a)

$$\lim_{x\to2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$$

(b)

$$\lim_{x\to1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

8. Feladat. *Számítsuk ki a következő határértékeket.*

(a)

$$\lim_{x\to1} \frac{1-x}{\sqrt{x}-1}$$

(b)

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

(c)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

(d)
$$\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{\alpha x}-\sqrt{x}}{x-\alpha}\quad (\alpha>0 \text{ rögzített})$$

9. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e az alábbi határértékek.*

(a)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$$

(b)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$$

(c)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x}-\sqrt{2x^2-x}\right)$$

(d)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+5x+9}-\sqrt{3x^2+4x+8}\right)$$

(e)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)$$

(f)
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\right)$$

10. Feladat. *Határozzuk meg a következő függvényhatárértékeket.*

(a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$$

(b)
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x)}{x}$$

(c)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x}$$

(d)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\beta x}$$

(e)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$$

(f)
$$\lim_{x\to 0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(g)
$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(nx)}{\sin(mx)}$$

(h)
$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

11. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket.*

(a)
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^{x}$$

(b)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$$

(c)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$$

(d)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$$

(e)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+5}\right)^{2x-3}$$

(f)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)^{x}.$$

12. Feladat. *Határozzuk meg a következő függvények aszimptotáit.*

(a)
$$f(x)=\frac{4x-5}{3x+2}\quad\left(x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}\right)$$

(b)
$$f(x)=x+\frac{1}{x}\ (x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}).$$

13. Feladat. *Legyenek $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Vizsgáljuk meg, hogy mi történik az $ax^2+bx+c=0$ másodfokú egyenlet gyökeivel, ha rögzített b és c paraméterek esetén a-val nullához tartunk.*

14. Feladat. *Határozzuk meg az α,β valós számokat, ha tudjuk, hogy*

(a)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\alpha x+\beta-\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)=0$$

(b)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\alpha x-\beta\right)=0$$

teljesül.