Kalkulus gyakorlat **Kalkulus** **Első zárthelyi dolgozat** **2022. január 10.**

Név, Neptun-kód: ....

1. Számítsuk ki az alábbi sorozatok határértékét.

(a)

$$x_n = \frac{n^5 - 25n^3}{7n^9 - 2n^7} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Megoldás.

$$\frac{n^5 - 25n^3}{7n^9 - 2n^7} = \frac{n^9}{n^9} \cdot \frac{\frac{1}{n^4} - 25\frac{1}{n^6}}{7\frac{1}{n^2} - 2} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

hiszen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} -25\frac{1}{n^6} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} 7\frac{1}{n^2} = 0 \quad \lim_{n\to\infty} -2 = -2.$$

□

(b)

$$x_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Megoldás.

$$\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} = \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}}$$
$$= \frac{n^2+1-(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

mivel

$$\lim_{n\to\infty} 2 = 2 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1} = +\infty.$$

□

(c)

$$x_n = \frac{2n + \sin(2n)}{3n + \sin(3n)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Megoldás. Mivel tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$-1 \le \sin(x) \le 1$$

teljesül, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén is fennállnak az

$$-1 \le \sin(2n) \le 1 \qquad -1 \le \sin(3n) \le 1$$

egyenlőtlenségek.

Így,

$$\frac{2n-1}{3n+1} \leq \frac{2n+\sin(2n)}{3n+\sin(3n)} \leq \frac{2n+1}{3n-1}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \frac{2}{3},$$

ezért a Rendőr-elv miatt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+\sin(2n)}{3n+\sin(3n)} = \frac{2}{3}.$$

□

(d)

$$x_n = \left(\frac{n-5}{n+5}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Megoldás.

$$\left(\frac{n-5}{n+5}\right)^n = \left(\frac{n+5-10}{n+5}\right)^n = \left(1+\frac{1}{-\frac{n+5}{10}}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n+5}{10}}\right)^{-\frac{n+5}{10}}\right]^{-10} \cdot \left(1+\frac{1}{-\frac{n+5}{10}}\right)^{-5} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-10},$$

hiszen

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n+5}{10}}\right)^{-\frac{n+5}{10}} = e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-\frac{n+5}{10}}\right)^{-5} = 1.$$

□

(e)

$$x_n = \frac{2^n+3^{n+1}}{2^{n+1}+3^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Megoldás.

$$\frac{2^n+3^{n+1}}{2^{n+1}+3^n} = \frac{3^n}{3^n} \cdot \frac{\frac{2^n}{3^n}+3}{2\cdot\frac{2^n}{3^n}+1} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{2\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 3,$$

mert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

□

(5 – 5 pont)

2. Döntsük el, hogy konvergens-e a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$$

sor.

Megoldás. A Cauchy féle-gyökkritérium szerint,

- ha $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor abszolút konvergens.
- ha $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens.

Ebben az esetben,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{3^n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2}\,\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$

hiszen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Mivel

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{3^n}} < 1,$$

ezért a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$ sor abszolút konvergens. □

(5 pont)

3. Számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$$

határértéket.

Megoldás. Mivel

$$x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1) \qquad \text{és} \qquad x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1),$$

ezért

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-3)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x-3} = \frac{1}{2},$$

hiszen

$$\lim_{x\to 1}(x-2) = -1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 1}(x-3) = -2.$$

□

(5 pont)

4. Számítsuk ki az alábbi függvények differenciálhányadosfüggvényeit.

(a)

$$f(x) = 12x^{12} + 3\sin(x) - 5\cos(x) + 10e^x + 28\ln(x) - 2$$

Megoldás.

$$f'(x) = 12 \cdot 12x^{11} + 3\cos(x) + 5\sin(x) + 10e^x + \frac{28}{x}.$$

□

(b)

$$f(x) = \left(1 - 2x + \frac{1}{x^3}\right)\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$

Megoldás. Legyenek

$$f_1(x) = 1 - 2x + \frac{1}{x^3} \quad \text{és} \quad f_2(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Ekkor

$$f_1'(x) = -2 - 3\frac{1}{x^4} \quad \text{és} \quad f_2'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}.$$

Ezért

$$f'(x) = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x) = \left(-2 - 3\frac{1}{x^4}\right)\left(\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) + \left(1 - 2x + \frac{1}{x^3}\right)\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}\right).$$

$\square$

(c)

$$f(x) = \frac{\sin(x) - x\cos(x)}{\sinh(x) - x\cosh(x)}$$

Megoldás. Legyen

$$f_1(x) = \sin(x) - x\cos(x)$$

és

$$f_2 = \sinh(x) - x\cosh(x).$$

Ekkor

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)},$$

és

$$f_1'(x) = \cos(x) - \cos(x) + x\sin(x) = x\sin(x),$$

illetve,

$$f_2'(x) = \cosh(x) - \cosh(x) - x\sinh(x) = -x\sinh(x).$$

Így a hányados differenciálási szabályát alkalmazva,

$$f'(x) = \frac{f_1'(x)f_2(x) - f_1(x)f_2'(x)}{f_2^2(x)} = \frac{x\sin(x)\left(\sinh(x) - x\cosh(x)\right) - \left(\sin(x) - x\cos(x)\right)\left(-x\sinh(x)\right)}{\left(\sinh(x) - x\cosh(x)\right)^2}$$

$\square$

(d)

$$f(x) = \ln\left(\frac{\sqrt{2x+1}}{\sin^2(x)}\right)$$

Megoldás. A logaritmus függvény addíciós tételét alkalmazva,

$$\ln\left(\frac{\sqrt{2x+1}}{\sin^2(x)}\right) = \frac{1}{2}\ln(2x+1) - 2\ln\left(\sin(x)\right),$$

ezért

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{2x+1} \cdot 2 - 2\frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) = \frac{1}{2x+1} - \frac{2\cos(x)}{\sin(x)}.$$

$\square$

(5 – 5 pont)