Igaz-hamis kérdések

1. $\int \frac{4}{3x-5}\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}\ln(|3x-5|) + C.$

2. $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{tg}(x) + C$

3. Ha az $f, g\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak $]a,b[$-n, és létezik $\int f' \cdot g$, akkor létezik $\int f \cdot g'$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ konstans, hogy $\int f(x) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = f'(x) \cdot g'(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x + C. \quad (x \in]a,b[)$

4. Legyen $F(x) = |x| \ (x \in \mathbb{R})$. Ekkor minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén $F'(x) = \mathrm{sign}(x)$. Ezért az F függvény a sign függvény primitív függvénye $\mathbb{R}$-en.

5. Legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ tetszőlegesek. Ha létezik $\int f$, akkor létezik $\int f(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ konstans, hogy $\int f(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x = \dfrac{F(\alpha x + \beta)}{\beta} + C \quad (x \in \mathbb{R})$, ahol F jelöli az f függvény egy primitív függvényét.

6. $\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x} + C$

7. $\int \frac{7}{3x+4}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{3}\ln(|3x+4|) + C.$

8. $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\,\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + \dfrac{3}{4}x^{\frac{3}{4}} + \dfrac{4}{5}x^{\frac{4}{5}} + C$

9. Ha $f, F\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ és $F' = f$, akkor $G\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ pontosan akkor primitív függvénye f-nek, ha létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy $F(x) - G(x) = C \quad (x \in]a,b[)$.

10. $\int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{x^3}{3}} + \frac{1}{\frac{x^5}{5}} + C$

11. $\int_0^1 x + 1\,\mathrm{d}x = 1.$

12. $\int_{-1}^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C.$

13. Legyenek $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvények. Ha minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) \leq g(x)$ teljesül, akkor $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

14. Legyen $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény és forgassuk meg az x tengely körül az $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq \varphi(x)$ tartományt. A forgás során súrolt pontok egy S forgástestet alkotnak, melynek térfogata $V(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(x)\mathrm{d}x$.

15. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Ekkor az f függvény felsőhatárfüggvénye folytonos az $[a,b]$ intervallumon.

C csoport

Igaz - hamis:

1.) Igaz, hiszen $\int \frac{4}{3x-5}dx = 4\cdot\int\frac{1}{3x-5}dx = 4\cdot\ln(|3x-5|)\cdot\frac{1}{3}+C$

$= \frac{4}{3}\ln(|3x-5|)+C$ (lineáris helyettesítés $3x-5$-tel, $\frac{1}{y}$-ba)

2.) Hamis, hiszen $\int\frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg}x + C$

3.) Hamis, mert a parciális integrálás tétele helyesen:

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx + C$$

4.) Hamis, mivel $|x|$ nem differenciálható 0-ban, így nem lehet $\operatorname{sign}(x)$ primitív fgv-e az egész $\mathbb{R}$-en.

5.) Hamis, mivel $\int f(\alpha x+\beta)dx = F(\alpha x+\beta)\cdot\frac{1}{\alpha}+C = \frac{F(\alpha x+\beta)}{\alpha}+C$

6.) Hamis, hiszen $\int \ln x\,dx = x\cdot\ln x - x + C$. Abból is látszik, hogy hamis, hogy $\left(\frac{1}{x}+C\right)' = \left(x^{-1}+C\right)' = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2} \neq \ln x$.

7.) Igaz, hiszen $\int\frac{7}{3x+4}dx = 7\cdot\int\frac{1}{3x+4}dx = 7\cdot\ln(|3x+4|)\cdot\frac{1}{3}+C =$

$= \frac{7}{3}\ln(|3x+4|)+C$

8.) Hamis, hiszen $\int\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\,dx = \int x^{1/2}+x^{1/3}+x^{1/4}\,dx =$

$= \frac{x^{3/2}}{3/2}+\frac{x^{4/3}}{4/3}+\frac{x^{5/4}}{5/4}+C = \frac{2}{3}x^{3/2}+\frac{3}{4}x^{4/3}+\frac{4}{5}x^{5/4}+C$

9.) Igaz

10.) Hamis, mivel $\int\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}dx = \int x^{-2}+x^{-4}dx = \frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-3}}{-3}+C =$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^3} + C$$

11.) Hamis, mert $\int_0^1 x+1\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+x\right]_{x=0}^{1} = \left(\frac{1^2}{2}+1\right)-\left(\frac{0^2}{2}+0\right) = \frac{3}{2}$

12.) Hamis, mert $\int_{-1}^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{1} = \frac{1^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2} = 0$

13.) Igaz

14.) Igaz

15.) Igaz

C csoport | Feladatok

1.) $f(x)=\ln(x^2+x+1)$ $(x\in\mathbb{R})$ monotonitása

- $f'(x) = \left(\ln(x^2+x+1)\right)' = \underbrace{\frac{1}{x^2+x+1}}_{\text{a külső deriváltja a belső helyen}} \cdot \overbrace{(2x+1)}^{\text{belső deriváltja}} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

  ↳ összetett függvény
  belső fgv. x^2+x+1, ennek deriváltja $(x^2+x+1)'=2x+1$
  külső fgv. $\ln(y)$, ennek deriváltja $(\ln(y))'=\frac{1}{y}$

- f' zérushelyei: $\frac{2x+1}{x^2+x+1} = 0$ | Egy tört pontosan akkor 0, ha számlálója 0.

$$2x+1=0$$
$$2x=-1$$
$$x=\frac{-1}{2}$$

- Ebből f monotonitása:

x	$]-\infty,-1/2[$	$-1/2$	$]-1/2,+\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	szig. mon. csökken	MIN	szig. mon. nő

2.) $f(x) = \ln(1+x^2)$ $(x \in \mathbb{R})$ konvexitása

- $f'(x) = \left(\underbrace{\ln(1+x^2)}_{\text{összetett fgv}}\right)' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}$

belső: $1+x^2$ → belső deriváltja $(1+x^2)' = 2x$

külső: $\ln(y)$ → külső deriváltja $(\ln(y))' = \frac{1}{y}$

- $f''(x) = \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{(2x)' \cdot (1+x^2) - 2x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$

↳ hányados, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f \cdot g'}{g^2}$

$$= \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

- f'' zérushelyei: $\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = 0$ | Egy tört pontosan akkor 0, ha számlálója 0

$$2-2x^2 = 0$$
$$2 = 2x^2$$
$$1 = x^2 \quad /\sqrt{\ }$$
$$1 = |x|$$

$\boxed{x_1 = -1}$ $\boxed{x_2 = 1}$

- Ebből f konvexitása:

x	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, 1[$	1	$]1, +\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	konkáv	I.P.	konvex	I.P.	konkáv.

← $\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$ előjele egy $2-2x^2$ előjele mert a nevező pozitív

3.) $f(x)=(x^2-4x+1)e^x$ stacionárius pontjai osztályozása

- $f'(x)=\left((x^2-4x+1)e^x\right)'=(x^2-4x+1)'\cdot e^x+(x^2-4x+1)(e^x)'=$

  ↳ szorzat, $(f\cdot g)'=f'g+fg'$

  $=(2x-4)e^x+(x^2-4x+1)e^x=e^x(x^2-2x-3)$

- f' zérushelyei (stac. pontok):

$$e^x(x^2-2x-3)=0 \quad \Big/ :e^x, \text{ mert } e^x\neq 0$$

$$x^2-2x-3=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2} \begin{cases} \frac{2+4}{2}=\boxed{3} \\ \frac{2-4}{2}=\boxed{-1} \end{cases}$$

- A -1 és 3 stac. pontok osztályozása

x	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,3[$	3	$]3,+\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	szig. mon. nő	MAX.	szig. mon. csökk.	MIN	szig. mon. nő

← e^x pozitív, így x^2-2x-3 előjele határozza meg f' előjelét

4.) a) $\int -4^x-5e^x+5\sinh x-4\cos x+\underbrace{\frac{2}{x}}_{=2\cdot x^{-1}}+x^3\,dx=$

$$-\frac{4^x}{\ln 4}-5e^x+5\cosh x-4\sin x+2\ln|x|+\frac{x^4}{4}+C$$

b) $\int \underbrace{(7x-4)}_{f}\underbrace{\sin x}_{g'}\,dx=\underbrace{(7x-4)}_{f}\underbrace{(-\cos x)}_{g=\int g'}-\int \underbrace{7}_{f'}\cdot\underbrace{(-\cos x)}_{g}\,dx=$

$=(7x-4)(-\cos x)+\int 7\cos x\,dx=(7x-4)(-\cos x)+7\sin x+C$

c) $\displaystyle\int \frac{10x + \frac{2}{\sqrt{x}}}{5x^2 + 4\sqrt{x} - 99}\, dx = \ln| 5x^2 + 4\sqrt{x} - 99| + C$

↳ nevező deriváltja: $(5x^2 + 4x^{\frac{1}{2}} - 99)' = 10x + 4\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 10x + \frac{2}{\sqrt{x}}$

$\Rightarrow \int \frac{g'}{g}$ alak

d) $\displaystyle\int (5e^x - 7\cosh x)\underbrace{(-7\sinh x + 5e^x + 9)^9}\, dx = \frac{(-7\sinh x + 5e^x + 9)^{10}}{10} + C$

a belső fgv deriváltja:

$(-7\sinh x + 5e^x + 9)' = -7\cosh x + 5e^x$

$\Rightarrow \int g^\alpha \cdot g'$ alak

e) $\displaystyle\int \frac{-4x + 11}{x^2 - x - 20}\, dx = ⓐ$

↳ nevező diszkriminánsa: $(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-20) = 81 > 0 \Rightarrow 2$ valós gyök

gyökök: $\dfrac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-20)}}{2\cdot 1} = \dfrac{1 \pm \sqrt{81}}{2}$ $\rightarrow \frac{1+9}{2} = 5$, $\rightarrow \frac{1-9}{2} = -4$

$\Rightarrow$ parciális törtekre bontás:

$$\frac{-4x + 11}{x^2 - x - 20} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4) + B(x-5)}{(x-5)(x+4)} =$$

$$= \frac{x(A+B) + (4A - 5B)}{(x-5)(x+4)}$$ $\Rightarrow$ egyenletrendszer az együtthatókra

$$\left.\begin{aligned} -4 &= A + B \\ 11 &= 4A - 5B \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5(-4) + 11 = 5(A+B) + 4A - 5B$$

$-9 = 9A$

$\boxed{A = -1} \Rightarrow \boxed{B = -4 - A = -3}$

$\circledast = \int \frac{-1}{x-5} + \frac{-3}{x+4}\,dx = (-1)\cdot \ln|x-5| - 3\cdot\ln|x+4| + C$

4) $\int \sqrt{5-2x}\,(x+6)\,dx = \int t\left(\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}t^2\right)+6\right)(-t)\,dt =$

$\boxed{t=\sqrt{5-2x}}$

$t^2 = 5-2x$

$2x = 5-t^2$

$\boxed{x = \frac{5}{2}-\frac{1}{2}t^2}\ \Big)\frac{d}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = 0 - \frac{1}{2}\cdot 2t = -t$

$\boxed{dx = (-t)\,dt}$

$= \int -t^2\left(\frac{17}{2}-\frac{1}{2}t^2\right)dt =$

$= \int \frac{1}{2}t^4 - \frac{17}{2}t^2\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^5}{5} - \frac{17}{2}\cdot\frac{t^3}{3} + C$

$= \frac{1}{10}\left(\sqrt{5-2x}\right)^5 - \frac{17}{6}\left(\sqrt{5-2x}\right)^3 + C$