Valós függvények

1. Feladat. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ rögzítettek. Vizsgáljuk meg korlátosság és monotonitás szempontjából az*

$$f(x) = ax + b \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon értelmezett függvényt.

Megoldás. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ rögzítettek és

$$f(x) = ax + b \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Korlátosság. Azt fogjuk meg mutatni, hogy az f függvény sem alulról, sem felülről nem korlátos. Először tegyük fel, hogy $a > 0$. Legyenek k és K *tetszőleges* valós számok. Mivel a valós számok halmaza felülről *nem* korlátos, ezért $\frac{K-b}{a}$ sem lehet felső korlátja, azaz van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned} x &> \frac{K-b}{a} \\ f(x) &> K, \end{aligned}$$

ami mutatja, hogy f felülről nem korlátos. Hasonlóan, a valós számok halmaza alulról *sem* korlátos, ezért $\frac{k-b}{a}$ sem lehet alsó korlátja, azaz van olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy

$$\begin{aligned} x &< \frac{K-b}{a} \\ f(x) &< K, \end{aligned}$$

azaz, f alulról nem korlátos.

Ha $a < 0$, akkor egy a fentihez hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy f sem alulról, sem felüről nem korlátos.

Monotonitás. Azt fogjuk megmutatni, hogy ha $a > 0$, akkor f szigorúan monoton növekedő, míg ha $a < 0$, akkor f szigorúan monoton csökkenő. Először tegyük fel, hogy $a > 0$ és legyenek $x, y \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $x < y$, ekkor

$$\begin{aligned} x &< y \\ ax &< ay \\ ax + b &< ay + b \\ f(x) &< f(y), \end{aligned}$$

vagyis f szigorúan monoton növekedő.

Végül tegyük fel, hogy $a < 0$ és legyenek $x, y \in \mathbb{R}$ olyanok, hogy $x < y$, ekkor

$$\begin{aligned} x &< y \\ ax &> ay \\ ax + b &> ay + b \\ f(x) &> f(y), \end{aligned}$$

azaz, f szigorúan monoton csökkenő.

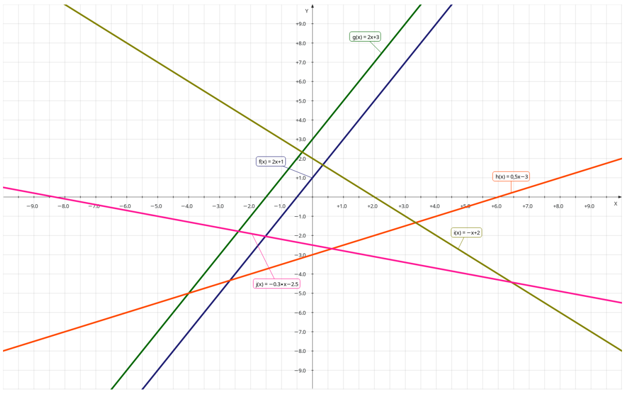
□

2. Feladat. *Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Vizsgáljuk meg az*

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt korlátosság szempontjából.

3. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket korlátosság szempontjából.*



(a) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad (x \in]0, +\infty[)$

(b) $f(x) = x^2 - 4x + 6 \quad (x \in \mathbb{R})$

(c) $f(x) = 5 - x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$

(d) $f(x) = -\dfrac{2x+3}{x-1} \quad (x \in]1, +\infty[)$.

4. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket monotonitás szempontjából.*

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad (x \in]0, +\infty[)$

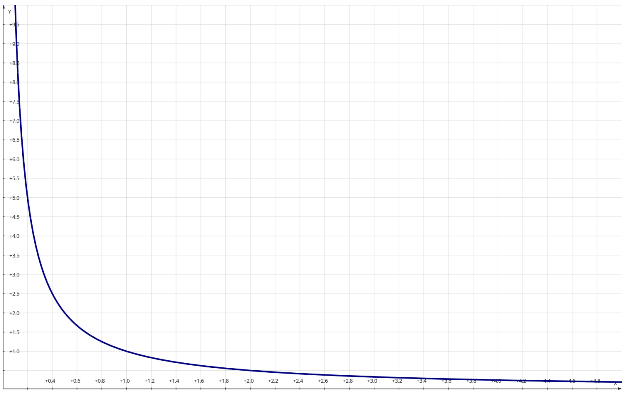
Megoldás. *Legyen*

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in]0, +\infty[)$$

és legyenek $x, y \in]0, +\infty[$ *olyanok, hogy* $x < y$*, ekkor*

$$\begin{aligned} x &< y \\ \frac{1}{x} &> \frac{1}{y} \\ f(x) &> f(y), \end{aligned}$$

vagyis az f *függvény szigorúan monoton csökkenő.*



$\square$

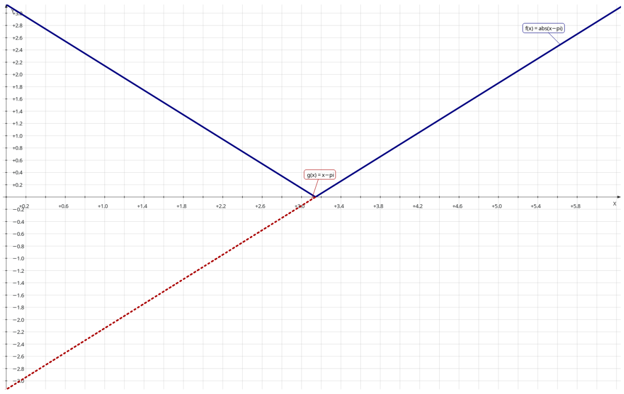
(b) $f(x) = |x - \pi| \quad (x \in \mathbb{R})$

Útmutatás. *Legyen*

$$f(x) = |x - \pi| \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

Használjuk azt, hogy

$$f(x) = |x - \pi| \quad (x \in \mathbb{R}) = \begin{cases} x - \pi, & \text{ha } x \geq \pi \\ \pi - x, & \text{ha } x \leq \pi \end{cases} \qquad (x \in \mathbb{R})$$



és mutatssuk meg, hogy f szigorúan monoton növekedő a $[\pi, +\infty[$ intervallumon, míg a $]-\infty, \pi[$ intervallumon szigorúan monoton csökkenő.

$\square$

5. Feladat. *Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, de rögzített. Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából az*

$$f(x) = x^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt.

6. Feladat. *Adjunk példát olyan $f, g : D \to \mathbb{R}$ függvényekre, melyekre az alábbiak egyidejűleg teljesülnek.*

(a) f, g nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban és $f + g$ folytonos x_0-ban.

Megoldás. *Legyenek*

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

és

$$g(x) = -\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Ekkor az f és g függvények nem folytonosak az $x_0 = 0$ pontban. Azonban

$$(f + g)(x_0) = \operatorname{sign}(x) + (-\operatorname{sign}(x)) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ami az azonosan zéró függvény, ami minden pontban, így az $x_0 = 0$ pontban is folytonos. $\square$

(b) f, g nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban és $f + g$ nem folytonos x_0-ban.

Megoldás. *Legyenek*

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

és

$$g(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Ekkor az f és g függvények nem folytonosak az $x_0 = 0$ pontban. Azonban

$$(f + g)(x_0) = \operatorname{sign}(x) + \operatorname{sign}(x) = 2 \cdot \operatorname{sign}(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ami nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban. $\square$

(c) f, g *nem folytonos az* $x_0 \in D$ *pontban és* $f \cdot g$ *folytonos* x_0*-ban.*

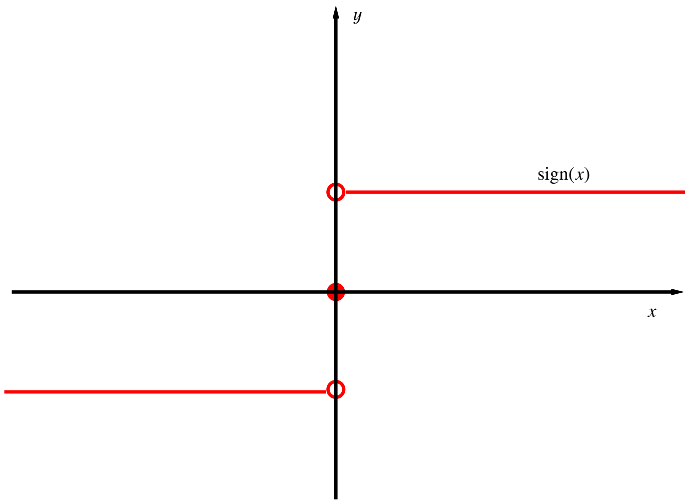
(d) f, g *nem folytonos az* $x_0 \in D$ *pontban és* $f \cdot g$ *nem folytonos* x_0*-ban.*

(e) f *a* D *halmaz egyetlen pontjában sem folytonos, és az* $|f|$ *függvény a* D *minden pontjában folytonos.*

(f) f *a* D *halmaz egyetlen pontjában sem folytonos, és az* f^2 *függvény a* D *minden pontjában folytonos.*

Megoldás. (a) Legyenek

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad g(x) = -\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ 1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$



Ekkor az f és g függvények nem folytonosak az $x_0 = 0$ pontban. Azonban

$$(f + g)(x_0) = \operatorname{sign}(x) + (-\operatorname{sign}(x)) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ami az azonosan zéró függvény, ami minden pontban, így az $x_0 = 0$ pontban is folytonos.

(b) Legyenek

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases} \quad \text{és} \quad g(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

Ekkor az f és g függvények nem folytonosak az $x_0 = 0$ pontban. Azonban

$$(f + g)(x_0) = \operatorname{sign}(x) + \operatorname{sign}(x) = 2 \cdot \operatorname{sign}(x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ami nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban.

□

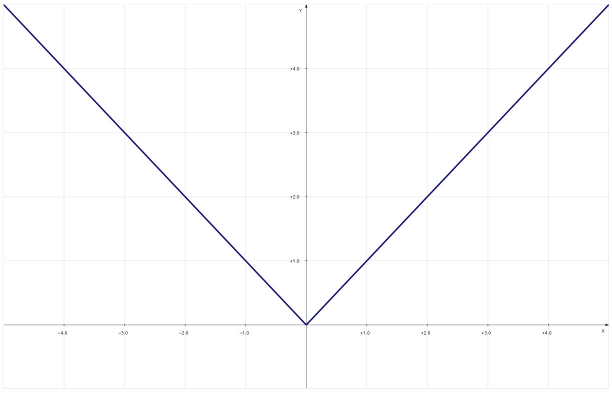
7. Feladat. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ *és* $f, g \colon D \to \mathbb{R}$ *függvények,* $x_0 \in D$*.*

(a) Igaz-e, hogy az $f + g$ *függvénynek az* x_0 *szakadási helye, ha* f *folytonos az* x_0 *pontban,* g *azonban nem?*

(b) Igaz-e, hogy az $f + g$ *függvénynek az* x_0 *szakadási helye, ha az* x_0 *pont szakadási helye mind az* f*, mind a* g *függvénynek?*

(c) Igaz-e, hogy az $f \cdot g$ *függvénynek az* x_0 *szakadási helye, ha* f *folytonos az* x_0 *pontban,* g *azonban nem?*

(d) Igaz-e, hogy az $f \cdot g$ *függvénynek az* x_0 *szakadási helye, ha az* x_0 *pont szakadási helye mind az* f*, mind a* g *függvénynek?*



1. ábra. Az $|x|$ függvény

(e) Igaz-e, hogy az $f \circ g$ függvénynek az x_0 szakadási helye, ha f folytonos az x_0 pontban, g azonban nem?

(f) Igaz-e, hogy az $f \circ g$ függvénynek az x_0 szakadási helye, ha az x_0 pont szakadási helye mind az f, mind a g függvénynek?

8. Feladat. *Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ és $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény. Igazoljuk, hogy ekkor az*

(a)

$$m(x) = \inf \{f(\xi) \,|\, a \leq \xi \leq x\} \qquad (x \in [a, b])$$

(b)

$$M(x) = \sup \{f(\xi) \,|\, a \leq \xi \leq x\} \qquad (x \in [a, b])$$

módon megadott $m, M : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények is folytonosak.

9. Feladat. *Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ és $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Igazoljuk, hogy ekkor az*

(a)

$$\phi(x) = \min \{f(x), g(x)\} \qquad (x \in [a, b])$$

(b)

$$\psi(x) = \max \{f(x), g(x)\} \qquad (x \in [a, b])$$

módon megadott $\phi, \psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények is folytonosak.

10. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a) $f(x) = |x| \quad (x \in \mathbb{R})$

(b) $f(x) = ax + b \quad (x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$ *rögzítettek*$)$

(c) $f(x) = ax^2+bx+c \quad (x \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R}$ *rögzítettek*$)$

(d) $f(x) = \left|x^2 - 4\right| \quad (x \in \mathbb{R})$

(e) $f(x) = x^r \quad (x \in]0, +\infty[, r \in \mathbb{Q}$ *rögzített*$)$

Megoldás. (a)

$$f(x) = |x| \quad (x \in \mathbb{R})$$

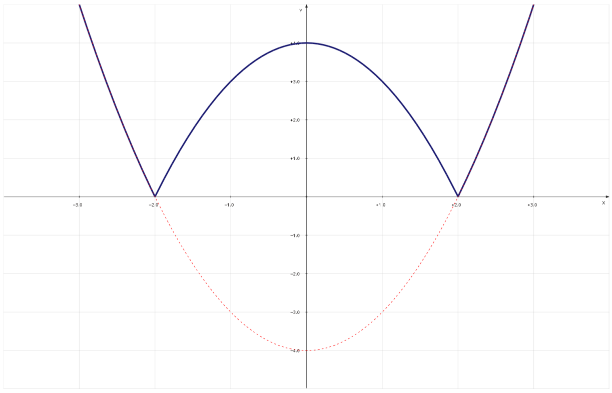
Azt fogjuk megmutatni, hogy a feladatban szereplő f függvény az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos. Ehhez az Átviteli elvet fogjuk használni. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy tetszőleges olyan valós számsorozat, ami az x_0 ponthoz konvergál. Ekkor a Valós számsorozatok témakörében tanult konvergencia és műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel szerint

$$f(x_n) = |x_n| \xrightarrow{n\to\infty} |x_0| = f(x_0).$$

Így, az Átviteli elv miatt az f függvény folytonos az x_0 pontban. Mivel az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont tetszőleges volt, ezért az f függvény minden pontban folytonos.

(b)

$$f(x) = ax + b \quad (x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R} \text{ rögzítettek})$$



2. ábra. Az $|x^2 - 4|$ függvény

(c)

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R} \text{ rögzítettek})$$

Legyenek a, b, c adott valós számok. Azt fogjuk megmutatni, hogy a feladatban szereplő f függvény az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos. Ehhez az Átviteli elvet fogjuk használni. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy tetszőleges olyan valós számsorozat, ami az x_0 ponthoz konvergál. Ekkor a Valós számsorozatok témakörében tanult konvergencia és műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel szerint

$$f(x_n) = a \cdot x_n^2 + b \cdot x_n + c \xrightarrow{n\to\infty} a \cdot x_0^2 + b \cdot x_0 + c = f(x_0).$$

Így, az Átviteli elv miatt az f függvény folytonos az x_0 pontban. Mivel az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont tetszőleges volt, ezért az f függvény minden pontban folytonos.

(d)

$$f(x) = \left|x^2 - 4\right| \quad (x \in \mathbb{R})$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy a feladatban szereplő f függvény az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos. Ehhez az Átviteli elvet fogjuk használni. Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy tetszőleges olyan valós számsorozat, ami az x_0 ponthoz konvergál. Ekkor a Valós számsorozatok témakörében tanult konvergencia és műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel szerint

$$f(x_n) = \left|x_n^2 - 4\right| \xrightarrow{n\to\infty} \left|x_0^2 - 4\right| = f(x_0).$$

Így, az Átviteli elv miatt az f függvény folytonos az x_0 pontban. Mivel az $x_0 \in \mathbb{R}$ pont tetszőleges volt, ezért az f függvény minden pontban folytonos.

(e) $f(x) = x^r \quad (x \in]0, +\infty[, r \in \mathbb{Q}$ rögzített)

□

11. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{ha } x \neq -2 \\ 0 & \text{ha } x = -2 \end{cases}$$

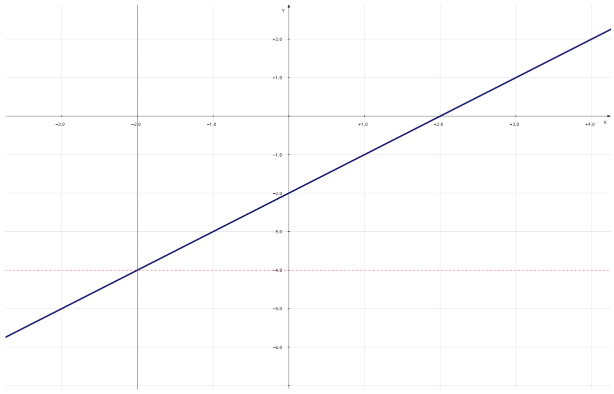
(b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{ha } x \neq -2 \\ -4 & \text{ha } x = -2 \end{cases}$$

Megoldás. (a)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{ha } x \neq -2 \\ 0 & \text{ha } x = -2 \end{cases}$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy



3. ábra. Az $x-2$ függvény

(i) az f függvény nem folytonos az $x_0 = 2$ pontban,

(ii) az f függvény minden $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ pontban folytonos.

(i) Először vegyük észre, hogy ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, akkor

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x+2} = x-2.$$

Mivel most azt szeretnénk megmutatni, hogy a szóban forgó függvény nem folytonos az $x_0 = -2$ pontban, ehhez elegendő azt igazolni, hogy van **legalább egy** olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} x_n = -2$ és

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(-2) = 0.$$

Ehhez legyen

$$x_n = -2 + \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ebben az esetben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \left(-2 + \frac{1}{n}\right) = -2,$$

és mivel $x_n \neq -2$ $(n \in \mathbb{N})$, ezért

$$f(x_n) = f\left(-2 + \frac{1}{n}\right) = (x_n - 2) = \left(-2 + \frac{1}{n}\right) = -4 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} -4 \neq 0 = f(-2).$$

Így az f függvény nem folytonos az $x_0 = -2$ pontban.

(ii) Ebben az esetben is az Átviteli elvet fogjuk használni. Ehhez legyen $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-2,\}$ tetszőleges, valamint $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy tetszőleges olyan sorozat, ami az x_0 ponthoz konvergál.

Mivel az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak most tetszőlegesnek kell lennie, ezért a konkrét sorozatelemeket nem ismerjük, azt viszont tudjuk, hogy

$$x_n \neq -2$$

legfeljebb **véges** sok kivétellel. Így egyfelől

$$f(x_n) = x_n - 2$$

legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével, ezért

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - 2 = x_0 - 2 = f(x_0),$$

ami azt mutatja, hogy az f függvény folytonos az x_0 pontban. Mivel az $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ pont tetszőleges volt, azért az f függvény folytonos az $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ halmazon.

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{ha } x \neq -2 \\ -4 & \text{ha } x = -2 \end{cases}$$

Azt fogjuk megmutatni, hogy a feladatban szereplő f függvény az értelmezési tartománya minden pontjában folytonos. Annak igazolása, hogy az f függvény tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ pontban folytonos, szó szerint ugyanaz, mint az (a) részben (hiszen az $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ halmazon a két függvény megegyezik). Így elegendő csak az $x_0 = -2$ ponttal foglalkozni. Legyen most $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy tetszőleges, $x_0 = -2$-höz konvergáló sorozat. Ekkor

$$f(x_n) = \begin{cases} x_n - 2, & \text{ha } x_n \neq -2 \\ -4, & \text{ha } x_n = -2 \end{cases}$$

és

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -4 = f(-2) = f(x_0),$$

vagyis az f függvény folytonos az $x_0 = -2$ pontban.

□

12. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & ha \quad x \geq 0 \\ x^2 - 2x, & ha \quad x < 0 \end{cases}$$

Megoldás. *Tekintsük az*

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1, & ha \quad x \geq 0 \\ x^2 - 2x, & ha \quad x < 0 \end{cases}$$

módon megadott $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt. Azt fogjuk megmutatni, hogy f nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban, minden más pontban azonban folytonos.

f **nem folytonos az** $x_0 = 0$ **pontban.** *Tekintsük az*

$$x_n = -\frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot, melyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 = 0$ teljesül. Másfelől, mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n < 0$, ezért

$$f(x_n) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 - 2\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \neq -1 = f(0) = f(x_0),$$

így az f függvény nem folytonos az $x_0 = 0$ pontban.

f **folytonos az** $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ **halmazon.** *Legyen most $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Először tegyük fel, hogy $x_0 > 0$ és legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy tetszőleges, x_0-hoz konvergáló sorozat. Ekkor a Jeltartás tétele szerint $x_n > 0$ teljesül legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével, így*

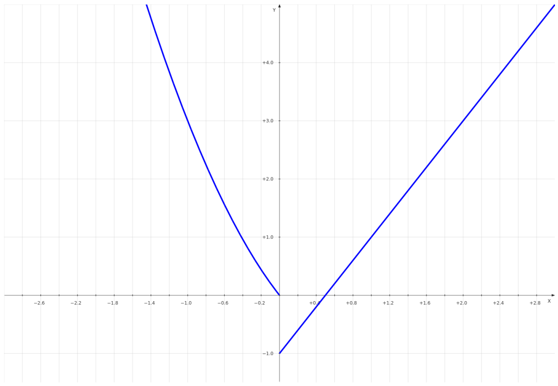
$$f(x_n) = 2x_n - 1 \xrightarrow{n\to\infty} 2x_0 - 1 = f(x_0),$$

ami mutatja, hogy f folytonos x_0-ban.

Hasonlóan, ha $x_0 < 0$, akkor legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy tetszőleges, x_0-hoz konvergáló sorozat. Ekkor a Jeltartás tétele szerint $x_n < 0$ teljesül legfeljebb véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével, így

$$f(x_n) = x_n^2 - 2x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0^2 - 2x_0 - 1 = f(x_0),$$

ami mutatja, hogy f folytonos x_0-ban.



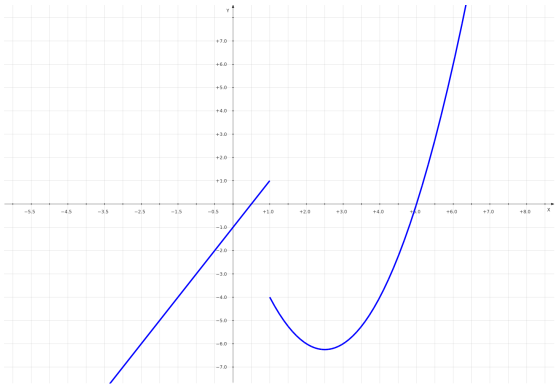
4. ábra. A 12. Feladat (a) részében szereplő függvény

$\square$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ha\ x \leq 1 \\ x^2 - 5x & ha\ x > 1 \end{cases}$$

Útmutatás. *Egy, a 12. Feladat (a) részéhez hasonló gondolatmenettel mutatssuk meg, hogy a példában szereplő f függvény nem folytonos az $x_0 = 1$ pontban, minden más pontban azonban folytonos.* $\square$



5. ábra. A 12. Feladat (b) részében szereplő függvény

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & ha\ x < 4 \\ 2 & ha\ x = 4 \\ x^2 - 12x + 39 & ha\ x > 4 \end{cases}$$

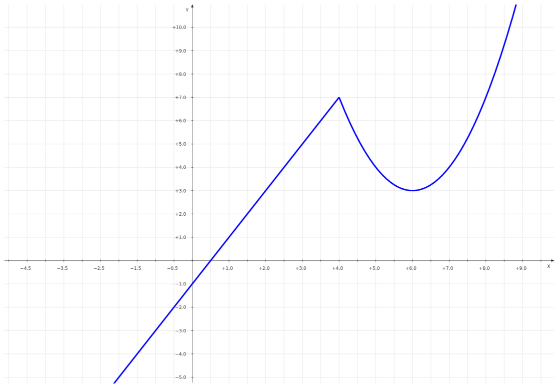
(d)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & ha\ x > 2 \\ 2 & ha\ x = 2 \\ \dfrac{1}{x - 2} & ha\ x < 2 \end{cases}$$

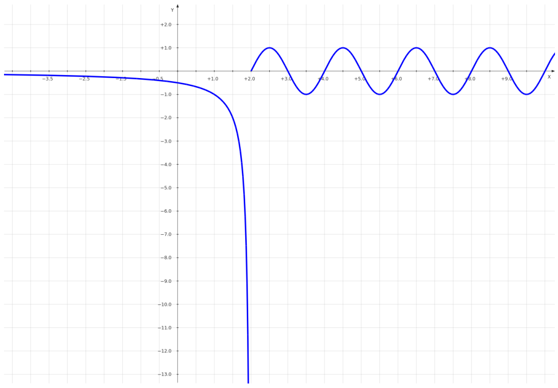
13. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ha\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ha\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



6. ábra. A 12. Feladat (c) részében szereplő függvény



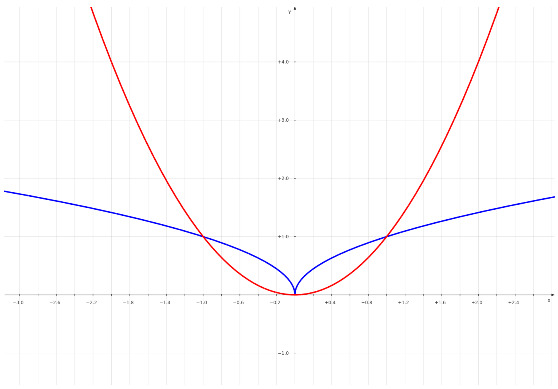
7. ábra. A 12. Feladat (d) részében szereplő függvény

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ha\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0 & ha\ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & ha \quad x \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{|x|}, & ha \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$



8. ábra. A 13. Feladat (c) részében szereplő függvény

14. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(b)

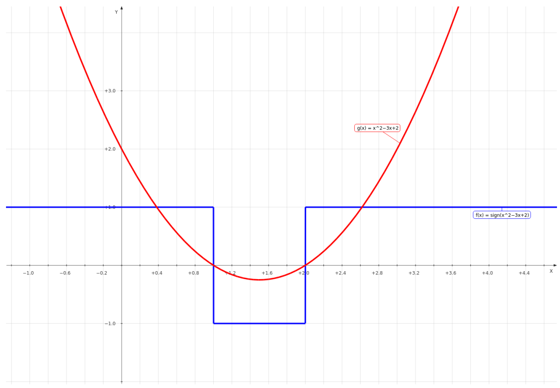
$$f(x) = [x] \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(c)

$$f(x) = \{x\} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

(d)

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 3x + 2) \quad (x \in \mathbb{R})$$



9. ábra. A 14. Feladat (d) részében szereplő függvény

ahol $[x]$ *az* x *valós szám egészrészét, míg* $\{x\}$ *az* x *valós szám törtrészét jelöli.*

15. Feladat. *Vizsgájuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

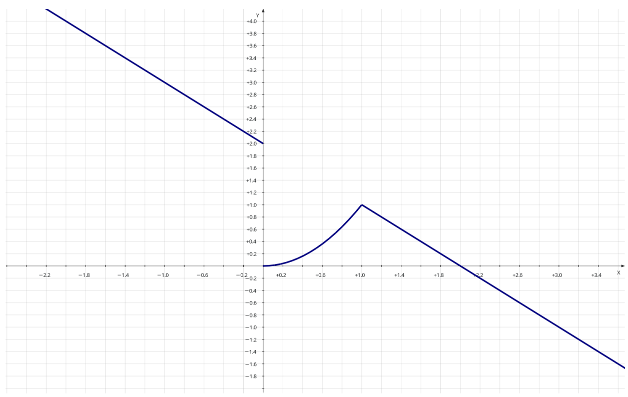
$$f(x) = \operatorname{sgn}(3x^2 - x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(b)

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x(1 - x^2)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(c)

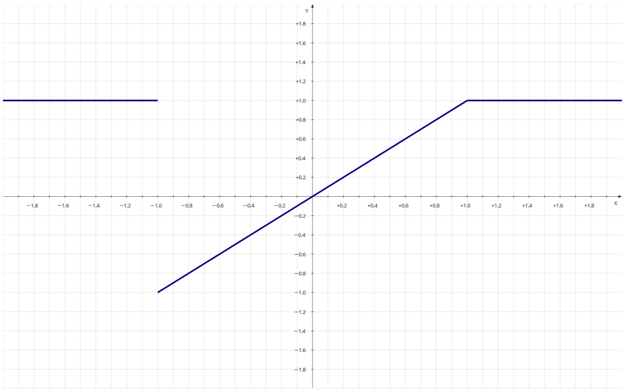
$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \textit{ha } x \in [0,1] \\ 2 - x, & \textit{egyébként} \end{cases}$$



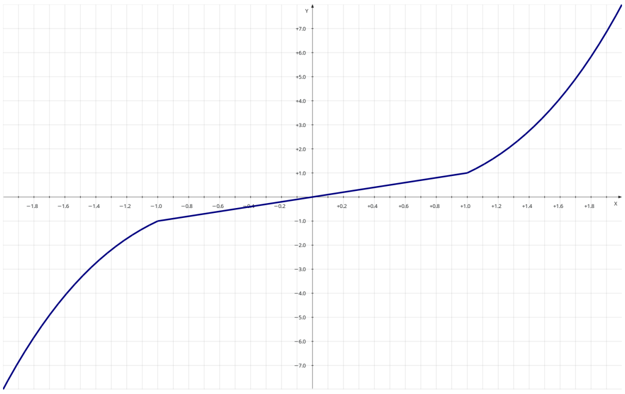
10. ábra. A 15. Feladat (c) részében szereplő függvény

(d)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \textit{ha } x \in [-1,1] \\ 1, & \textit{egyébként} \end{cases}$$



11. ábra. A 15. Feladat (d) részében szereplő függvény



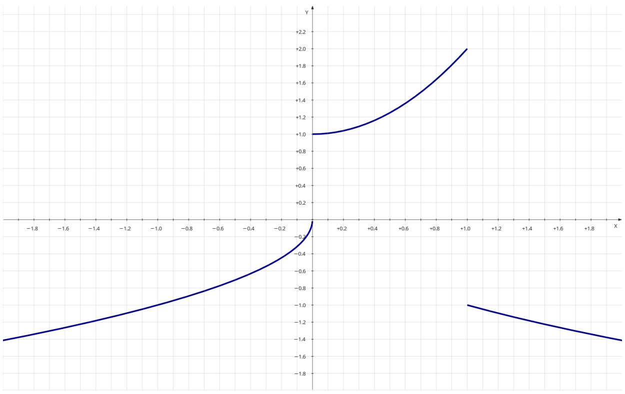
12. ábra. A 15. Feladat (e) részében szereplő függvény

(e)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \textit{ha } x \in [-1, 1] \\ x^3, & \textit{egyébként} \end{cases}$$

(f)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \textit{ha } x \in [0, 1] \\ -\sqrt{|x|}, & \textit{egyébként} \end{cases}$$



13. ábra. A 15. Feladat (f) részében szereplő függvény