Igaz-hamis kérdések

1. $\int (2x+2)e^x \,\mathrm{d}x = (2x-2)e^x + C$

2. Tetszőleges $A, \alpha \in \mathbb{R}$ esetén $\int \frac{A}{x+\alpha} \,\mathrm{d}x = A\ln(|x-\alpha|) + C$.

3. $\int \frac{1}{\sinh^2 x} \,\mathrm{d}x = \coth(x) + C$

4. $\int 3x^2 + 2x + 5 \,\mathrm{d}x = x^3 + x^2 + 5 + C$

5. $\int (3x+4)e^x \,\mathrm{d}x = (3x+4)e^x + C$

6. Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n, $f(x) \neq 0$ $(x \in [a,b])$, f differenciálható $]a,b[$-n, akkor az $\frac{f'}{f}$ függvénynek létezik a primitív függvénye, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \ln(|f(x)|) + C \quad (x \in]a,b[)$.

7. $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C$

8. $\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$

9. $-\int \sinh(x) \,\mathrm{d}x = -\cosh(x) + C$

10. $\int \frac{1}{\sin^2(x)} \,\mathrm{d}x = \mathrm{tg}(x) + C$

11. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény és jelölje $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ az f függvény egy primitív függvényét. Ekkor $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b)$.

12. $\int_0^\pi 1 \,\mathrm{d}x = 2\pi$.

13. $\int_{-1}^1 x \,\mathrm{d}x = 1$.

14. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Az f függvény akkor, és csakis akkor Riemann-integrálható, ha bármely $\epsilon > 0$ esetén van olyan P felosztása az $[a,b]$ intervallumnak, melyre $\mathcal{O}(f,P) < \epsilon$ teljesül.

15. Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Ekkor f monoton $[a,b]$-n.

D csoport

Igaz - hamis:

1.) Hamis, mert $\int \overset{f}{(2x+2)}\overset{g'}{e^x}\,dx = \overset{f}{(2x+2)}\cdot \overset{g}{e^x} - \int \overset{f'}{2}\cdot \overset{g}{e^x}\,dx =$

$= (2x+2)e^x - 2e^x + C = 2x\cdot e^x + C$

2.) Hamis, mert $\int \frac{A}{x+\alpha}\,dx = A\cdot \ln(|x+\alpha|) + C$

4.) Hamis, mert $\int 3x^2+2x+5\,dx = x^3+x^2+5x+C$

3.) Hamis, mert $\left(\coth(x)+C\right)' = \left(\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)}\right)' = \frac{\cosh'(x)\cdot\sinh(x) - \cosh(x)\cdot\sinh'(x)}{\sinh^2(x)}$

$= \frac{\sinh^2(x)-\cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$

5.) Hamis, mert $\int \overset{f}{(3x+4)}\overset{g'}{e^x}\,dx = \overset{f}{(3x+4)}\overset{g}{e^x} - \int \overset{f'}{3}\cdot \overset{g}{e^x}\,dx = (3x+4)e^x - 3e^x$

$+ C = (3x+1)e^x + C$

6) Igaz

7) Igaz, $\int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}}\,dx =$

$= \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{4/3}}{4/3} + \frac{x^{5/4}}{5/4} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + \frac{4}{5}x^{5/4} + C$

8.) Igaz

9.) Igaz, hiszen $\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C$

10.) Hamis, hiszen $(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} =$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$. Valójában $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C$

11.) Hamis, hiszen a Newton - Leibniz formula helyes alakja:

$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

12.) Hamis, mert $\int_0^{\pi} 1\, dx = [x]_0^{\pi} = \pi - 0 = \pi$

13.) Hamis, mert $\int_{-1}^{1} x\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0$

14.) Igaz

15.) Hamis, mert pl.: az $f(x) = x^2$ függvény Riemann-integrálható $[-1, 1]$-en, de ott nem monoton.

D csoport, Feladatok:

1.) $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$ monotonitás szempontjából

- $f'(x) = \left(\frac{x+2}{x+1}\right)' = \frac{(x+2)' \cdot (x+1) - (x+2) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(x+1) - (x+2)}{(x+1)^2} =$

↳ hányados, $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f g'}{g^2}$

$= \frac{-1}{(x+1)^2}$

- f'-nak nincs zérushelye, mert számlálója nem 0. Így

$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$ minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ kivételével, hiszen $(x+1)^2 > 0$.

x	$]-\infty, -1[$	-1	$]-1, +\infty[$
$f'(x)$	$-$	nincs	$-$
$f(x)$	szig. mon. csökk.	értelmezetlen	szig. mon. csökk.

2.) $f(x) = e^{-x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ konvexitása

- $f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$

↳ összetett fgv.

belső: $-x^2$ → belső deriváltja $(-x^2)' = -2x$

külső: e^y → külső deriváltja $(e^y)' = e^y$

- $f''(x) = \underbrace{\left(e^{-x^2} \cdot (-2x)\right)'}_{\text{szorzat, } (fg)' = f'g + fg'} = \underbrace{\left(e^{-x^2}\right)'}_{\text{ismét összetett fgv., } (f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'} (-2x) + \left(e^{-x^2}\right) \cdot (-2x)' =$

$= e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot (-2x) + e^{-x^2} (-2) = e^{-x^2} (4x^2 - 2)$

- f'' zérushelyei: $e^{-x^2}(4x^2-2) = 0 \quad / : e^{-x^2}$, mert $e^{-x^2} \neq 0$

$$4x^2 - 2 = 0$$
$$4x^2 = 2$$
$$x^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad / \sqrt{}$$
$$|x| = \sqrt{\frac{1}{2}} \to \boxed{x = -\sqrt{\frac{1}{2}}}, \quad \boxed{x = \sqrt{\frac{1}{2}}}$$

- Ebből f konvexitása:

$e^{-x^2} > 0$ miatt $4x^2-2$ előjele határozza meg f'' előjelét

x	$]-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}[$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$]-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}[$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$]\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty[$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	konvex	I.P.	konkáv	I.P.	konvex

3.) $f(x) = (x^2 - 4x - 11)e^x \quad (x \in \mathbb{R})$ stacionárius pontjai osztályozása

- $f'(x) = \underbrace{\left((x^2 - 4x - 11)e^x\right)'}_{\text{szorzat, } (f \cdot g)' = f'g + fg'} = (x^2 - 4x - 11)' e^x + (x^2 - 4x - 11)(e^x)' =$

$= (2x - 4)e^x + (x^2 - 4x - 11)e^x = e^x(x^2 - 2x - 15)$

• f' zérushelyei (stac. pontok):

$$e^x(x^2-2x-15)=0 \quad / : e^x, \text{ mert } e^x \neq 0$$

$$x^2-2x-15=0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-15)}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm\sqrt{64}}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow \frac{2+8}{2}=\boxed{5} \\ \searrow \frac{2-8}{2}=\boxed{-3} \end{matrix}$$

• A -3 és 5 stac. pontok osztályozása:

x	$]-\infty,-3[$	-3	$]-3,5[$	5	$]5,+\infty[$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	szig. mon. nő	MAX	szig. mon. csökken	MIN	szig. mon. nő

← $e^x>0$, így $x^2-2x-15$ előjele határozza meg f' előjelét

4.) a) $\int 8e^x - 7\sin x + 3\cosh x - \frac{7}{x} + x^3\,dx = 8e^x - 7(-\cos x) + 3\sinh x - 7\ln|x| + \frac{x^4}{4} + C$

b) $\int \underbrace{(6x+2)}_{f}\cdot\underbrace{\sinh x}_{g'}\,dx = \underbrace{(6x+2)}_{f}\underbrace{\cosh x}_{g=\int g'} - \int \underbrace{6}_{f'}\cdot\underbrace{\cosh x}_{g}\,dx =$

$= (6x+2)\cosh x - 6\sinh x + C$

c) $\int \frac{4\cos x - 3\sin x}{4\sin x + 3\cos x}\,dx = \ln|4\sin x + 3\cos x| + C$

↳ nevező deriváltja: $(4\sin x + 3\cos x)' = 4\cos x - 3\sin x \Rightarrow \int \frac{g'}{g}$ alak

d) $\int \underbrace{(-7\cosh x + 8\cos x - 4)^7}\cdot(-7\sinh x - 8\sin x)\,dx = \frac{(-7\cosh x + 8\cos x - 4)^8}{8} + C$

belső fgv deriváltja: $(-7\cosh x + 8\cos x - 4)' = -7\sinh x \cancel{+} - 8\sin x$

$\Rightarrow \int g^\alpha \cdot g'$ alak

e) $\int \frac{x+2}{x^2-1}\,dx = ⊛$

↳ nevező diszkriminánsa: $0^2 - 4\cdot 1(-1) = 4 > 0 \Rightarrow 2$ valós gyök

$$x_{1,2} = \frac{-0\pm\sqrt{0^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{0\pm\sqrt{4}}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow \frac{2}{2}=\boxed{1} \\ \searrow \frac{-2}{2}=\boxed{-1} \end{matrix}$$

parciális törtekre bontás

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(A+B)+(A-B)}{x^2-1}$$

$\Rightarrow$ egyenletrendszer. $\left.\begin{aligned} 1 &= A+B \\ 2 &= A-B \end{aligned}\right\}$

$1+2 = 2A$

$3 = 2A$

$\boxed{A = \frac{3}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{B = 1-A = 1-\frac{3}{2} = \frac{-1}{2}}$

Vagyis $(*) = \int \frac{3/2}{x-1} + \frac{-1/2}{x+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$

f) $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx = \int \frac{1}{e^x+\frac{1}{e^x}}\,dx = \int \frac{1}{t+\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t^2+1}\,dt$

$\boxed{t = e^x}$ $\Big\downarrow \ln$

$\ln t = x$ $\Big\downarrow \frac{d}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = (\ln t)' = \frac{1}{t}$

$\boxed{dx = \frac{1}{t}\,dt}$

$= \operatorname{arctg}(t) + C = \operatorname{arctg}(e^x) + C$

visszahelyettesítés, $t = e^x$