Valós függvények

Korlátosság, monotonitás, folytonosság

1. Definíció. *Legyen $D \subset \mathbb{R}$ egy nemüres halmaz, ekkor az $f : D \to \mathbb{R}$ függvényt **valós függvény**nek nevezzük.*

Korlátosság

2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény **alulról/felülről korlátos**, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$ konstans, hogy*

$$f(x) \geqslant K, \qquad \textit{illetve} \qquad f(x) \leqslant K$$

*teljesül minden $x \in D$ esetén. Azt mondjuk továbbá, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény **korlátos**, ha mind alulról, mind felülről korlátos.*

1. Megjegyzés. *Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor korlátos (alulról/felülről), ha az $f(D) \subset \mathbb{R}$ halmaz korlátos (alulról/felülről).*

Monotonitás

3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ valós függvény **monoton növekedő/csökkenő**, ha minden olyan $x, y \in D$ esetén, melyre $x \leqslant y$,*

$$f(x) \leqslant f(y), \qquad \textit{illetve} \qquad f(x) \geqslant f(y)$$

*teljesül. Ha a fenti egyenlőtlenségek minden $x \neq y$ esetén szigorúak, akkor **szigorú monoton növekedés**ről, illetve **szigorú monoton csökkenés**ről beszélünk.*

Folytonosság

4. Definíció. *Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény **folytonos az $x_0 \in D$ pontban**, ha bármely $\varepsilon \geqslant 0$ esetén van olyan $\delta \geqslant 0$, hogy ha $x \in D$ és $|x - x_0| \leqslant \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$ teljesül.*

1. Tétel (Átviteli elv). *Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor folytonos az $x_0 \in D$ pontban, ha tetszőleges (x_n) D–beli elemekből álló, x_0–hoz konvergáló sorozat esetén $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

2. Megjegyzés. *Az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor **nem folytonos** az $x_0 \in D$ pontban, ha van olyan (x_n) D–beli elemekből álló, x_0–hoz konvergáló sorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$.*

5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény az $A \subset D$ halmazon **egyenletesen folytonos**, ha bármely $\varepsilon \geqslant 0$ esetén létezik olyan $\delta \geqslant 0$, hogy ha $x, y \in A$ és $|x - y| \leqslant \delta$, akkor $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$ teljesül.*

3. Megjegyzés (Egyenletes folytonosság $\Rightarrow$ folytonosság). *Ha az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény az $A \subset D$ halmazon egyenletesen folytonos, akkor az A halmaz minden pontjában folytonos.*

2. Tétel (Folytonosság és műveletek). *Ha az $f, g : D \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak az $x_0 \in D$ pontban, akkor*

(i) az $f + g$ függvény is folytonos az x_0 pontban;

(ii) tetszőleges $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a λf függvény is folytonos az x_0 pontban;

(iii) az $f \cdot g$ függvény is folytonos az x_0 pontban;

(iv) ha tetszőleges $x \in D$ esetén $g(x) \neq 0$, akkor az $\frac{f}{g}$ függvény is folytonos az x_0 pontban.

3. Tétel (Az összetett függvény folytonossága). *Legyenek $f : D \to \mathbb{R}$ és $g : f(D) \to \mathbb{R}$ adott függvények. Ha az f függvény folytonos az $x_0 \in D$ pontban, a g pedig az $f(x_0) \in f(D)$ pontban, akkor a $g \circ f$ függvény folytonos az x_0 pontban.*

4. Tétel. *Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, $K \subset D$ kompakt halmaz. Ekkor az $f(K)$ halmaz is kompakt.*

5. Tétel. *Legyen $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f felveszi K–n a minimumát és a maximumát.*

6. Tétel (Heine). *Legyen $K \subset \mathbb{R}$ kompakt halmaz, $f : K \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, ekkor f egyenletesen folytonos a K halmazon.*

Feladatok

1. Feladat. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ rögzítettek. Vizsgáljuk meg korlátosság és monotonitás szempontjából az*

$$f(x) = ax + b \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon értelmezett függvényt.

2. Feladat. *Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Vizsgáljuk meg az*

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt korlátosság szempontjából.

3. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket korlátosság szempontjából.*

(a) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in]0, +\infty[)$

(b) $f(x) = x^2 - 4x + 6 \quad (x \in \mathbb{R})$

(c) $f(x) = 5 - x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$

(d) $f(x) = -\frac{2x+3}{x-1} \quad (x \in]1, +\infty[)$.

4. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket monotonitás szempontjából.*

(a) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in]0, +\infty[)$

(b) $f(x) = |x - \pi| \quad (x \in \mathbb{R})$

5. Feladat. *Legyen $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, de rögzített. Vizsgáljuk meg monotonitás szempontjából az*

$$f(x) = x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt.

6. Feladat. *Adjunk példát olyan $f, g : D \to \mathbb{R}$ függvényekre, melyekre az alábbiak egyidejűleg teljesülnek.*

(a) f, g nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban és $f + g$ folytonos x_0–ban.

(b) f, g nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban és $f + g$ nem folytonos x_0–ban.

(c) f, g nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban és $f \cdot g$ folytonos x_0–ban.

(d) f, g nem folytonos az $x_0 \in D$ pontban és $f \cdot g$ nem folytonos x_0–ban.

(e) f a D halmaz egyetlen pontjában sem folytonos, és az $|f|$ függvény a D minden pontjában folytonos.

(f) f *a* D *halmaz egyetlen pontjában sem folytonos, és az* f^2 *függvény a* D *minden pontjában folytonos.*

7. Feladat. *Legyen* $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ *és* $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ *függvények,* $x_0 \in D$.

(a) *Igaz-e, hogy az* $f+g$ *függvénynek az* x_0 *szakadási helye, ha* f *folytonos az* x_0 *pontban,* g *azonban nem?*

(b) *Igaz-e, hogy az* $f+g$ *függvénynek az* x_0 *szakadási helye, ha az* x_0 *pont szakadási helye mind az* f*, mind a* g *függvénynek?*

(c) *Igaz-e, hogy az* $f \cdot g$ *függvénynek az* x_0 *szakadási helye, ha* f *folytonos az* x_0 *pontban,* g *azonban nem?*

(d) *Igaz-e, hogy az* $f \cdot g$ *függvénynek az* x_0 *szakadási helye, ha az* x_0 *pont szakadási helye mind az* f*, mind a* g *függvénynek?*

(e) *Igaz-e, hogy az* $f \circ g$ *függvénynek az* x_0 *szakadási helye, ha* f *folytonos az* x_0 *pontban,* g *azonban nem?*

(f) *Igaz-e, hogy az* $f \circ g$ *függvénynek az* x_0 *szakadási helye, ha az* x_0 *pont szakadási helye mind az* f*, mind a* g *függvénynek?*

8. Feladat. *Legyen* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *és* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *egy folytonos függvény. Igazoljuk, hogy ekkor az*

(a)

$$m(x) = \inf\{f(\xi) \mid a \leqslant \xi \leqslant x\} \qquad (x \in [a,b])$$

(b)

$$M(x) = \sup\{f(\xi) \mid a \leqslant \xi \leqslant x\} \qquad (x \in [a,b])$$

módon megadott $m, M\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvények is folytonosak.*

9. Feladat. *Legyen* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *és* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *folytonos függvények. Igazoljuk, hogy ekkor az*

(a)

$$\phi(x) = \min\{f(x), g(x)\} \qquad (x \in [a,b])$$

(b)

$$\psi(x) = \max\{f(x), g(x)\} \qquad (x \in [a,b])$$

módon megadott $\phi, \psi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvények is folytonosak.*

10. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a) $f(x) = |x| \quad (x \in \mathbb{R})$

(b) $f(x) = ax + b \quad (x \in \mathbb{R}, a, b \in \mathbb{R}$ *rögzítettek*$)$

(c) $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (x \in \mathbb{R}, a, b, c \in \mathbb{R}$ *rögzítettek*$)$

(d) $f(x) = |x^2 - 4| \quad (x \in \mathbb{R})$

(e) $f(x) = x^r \quad (x \in]0, +\infty[, r \in \mathbb{Q}$ *rögzített*$)$

11. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{ha } x \neq -2 \\ 0 & \text{ha } x = -2 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{ha } x \neq -2 \\ -4 & \text{ha } x = -2 \end{cases}$$

12. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{ha} \quad x \geqslant 0 \\ x^2 - 2x, & \text{ha} \quad x < 0 \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{ha } x \leqslant 1 \\ x^2 - 5x & \text{ha } x > 1 \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & ha\ x < 4 \\ 2 & ha\ x = 4 \\ x^2 - 12x + 39 & ha\ x > 4 \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & ha\ x < 2 \\ 2 & ha\ x = 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & ha\ x < 2 \end{cases}$$

13. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ha\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ha\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ha\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0 & ha\ x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & ha \quad x \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{|x|}, & ha \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

14. Feladat. *Vizsgáljuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

(b)

$$f(x) = [x] \quad (x \in \mathbb{R})$$

(c)

$$f(x) = \{x\} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

(d)

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 - 3x + 2) \quad (x \in \mathbb{R})$$

ahol $[x]$ *az x valós szám egészrészét, míg* $\{x\}$ *az x valós szám törtrészét jelöli.*

15. Feladat. *Vizsgájuk meg az alábbi függvényeket folytonosság szempontjából.*

(a)

$$f(x) = \operatorname{sgn}(3x^2 - x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(b)

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x(1 - x^2)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & ha\ x \in [0,1] \\ 2 - x, & egyébként \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} x, & ha\ x \in [-1,1] \\ 1, & egyébként \end{cases}$$

(e)

$$f(x) = \begin{cases} x, & ha\ x \in [-1,1] \\ x^3, & egyébként \end{cases}$$

(f)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & ha\ x \in [0,1] \\ -\sqrt{|x|}, & egyébként \end{cases}$$