Valós sorok

A gyakorlat célja

Ennek a gyakorlatnak a célja, hogy megismerkedjünk a valós sorok fogalmával, állítások fogalmazzuk meg sorok konvergenciájával kapcsolatban. A félév anyagának ez a rész természetesen önmagában is érdekes, szép és fontos, jelentősége azonban majd csak a későbbiekben fog megmutatkozni, ekkor derül majd csak ki ugyanis, hogy ezekből a fogalmakból kiindulva lehet majd bevezetni a valós analízis legfontosabb függvényeit: az exponenciális függvényt, a logaritmus függvényt, a trigonometrikus és a hiperbolikus függvényeket.

Felhasznált elméleti anyag

A feladatok megoldásához szükséges fogalmak és elméleti állítások:

(a) valós sor fogalma, konvergenciája, abszolút konvergenciája és feltételes konvergenciája

(b) Összehasonlító kritérium I. és II. változat

(c) Cauchy-féle gyökkritérium és a D'Alembert-féle hányadoskritérium

(d) a harmonikus sor konvergenciájára vonatkozó állítás

(e) Leibniz-kritérium alternáló sorokra

1. Feladat. *A definíció felhasználásával mutassuk meg, hogy az alábbi sorok mindegyike konvergens és határozzuk meg a szóban forgó sorok összegét is.*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Megoldás. *Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

és figyeljük meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Ebből azonban azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 = \tfrac{1}{1\cdot 2} = 1 - \tfrac{1}{2} \\
\sigma_2 &= x_1 + x_2 = \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) = 1 - \tfrac{1}{3} \\
\sigma_3 &= x_1 + x_2 + x_3 = \tfrac{1}{1\cdot 2} + \tfrac{1}{2\cdot 3} + \tfrac{1}{3\cdot 4} = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) = 1 - \tfrac{1}{4} \qquad (n \in \mathbb{N})\,. \\
&\vdots \\
\sigma_n &= x_1 + \cdots + x_n = \tfrac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \tfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \tfrac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

Mivel a

$$\sigma_n = 1 - \frac{1}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens és* $\lim_{n\to\infty}\sigma_n = 1$*, ezért a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ *sor is konvergens és*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

□

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

Útmutatás. *Használjuk egyfelől azt, hogy minden* $n\in\mathbb{N}$ *esetén*

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

teljesül, másfelől az előző rész gondolatmenetét. □

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}100\cdot(0,9)^n$

Megoldás. *Legyen* $q\in]-1,1[$ *tetszőleges. A feladatban szereplő sor helyett a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ *sor konvergenciájával, illetve ennek a sornak az összegével fogunk foglalkozni. Ebből az általánosabb eredményből azonnal fog majd következni a feladatban szereplő sor konvergenciája és meg tudjuk majd határozni a sor összegét is.*

Legyen minden $n\in\mathbb{N}$ *esetén*

$$x_n = q^n$$

és jelölje $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ *sor részletösszeg-sorozatát. Ekkor minden* $n\in\mathbb{N}$ *esetén*

$$\sigma_n = x_1\cdots+x_n = q+\cdots+q^n = \frac{q^{n+1}-q}{q-1}$$

teljesül, hiszen a $q, q^2, \ldots, q^n$ *valós számok egy olyan geometriai sorozatot alkotnak, melynek első eleme és a kvóciense is* q*,* σ_n *pedig éppen ennek a sorozatnak az első* n *elemének az összege. Ez az összeg a (középiskolában már tanult) mértani sor összegképlete segítségével határozható meg. Mivel* $q\in]-1,1[$*, ezért* $\lim_{n\to\infty}q^n = 0$*, így*

$$\sigma_n == x_1\cdots+x_n = q+\cdots+q^n = \frac{q^{n+1}-q}{q-1}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{-q}{q-1} = \frac{q}{1-q}.$$

Ezért, ha $q\in]-1,1[$ *teljesül, akkor a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}q^n$ *sor konvergens és*

$$\sum_{n=1}^{\infty}q^n = \frac{q}{1-q}.$$

Ezt felhasználva,

$$\sum_{n=1}^{\infty}100\cdot(0,9)^n = 100\sum_{n=1}^{\infty}(0,9)^n = 100\cdot\frac{0,9}{1-0,9} = 900.$$

□

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3^n}$

Megoldás. *Használjuk az előző részt a $q = -\frac{1}{3}$ választással, ekkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{4}.$$

□

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

Útmutatás. *Használjuk egyfelől azt, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

teljesül, másfelől az (a) rész gondolatmenetét. □

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 - 3n - 2}$

Útmutatás. *Használjuk azt előző részt, illetve azt, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$9n^2 - 3n - 2 = (3n-2)(3n+1)$$

teljesül. □

2. Feladat. *Igazoljuk, hogy a következő sorok divergensek.*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

Megoldás. *Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

és tekintsük a feladatban szereplő sor részletösszeg-sorozatát

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 = \sqrt{2} - 1 \\ \sigma_2 &= x_1 + x_2 = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{3} - 1 \\ &\vdots \\ \sigma_n &= x_1 + \cdots + x_n = (\sqrt{2}-1) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1 \end{aligned}\right. \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel

$$\sigma_n = \sqrt{n+1} - 1 \xrightarrow{n\to\infty} +\infty,$$

ezért a $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ *sor valóban divergens.* □

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$,

Megoldás. *Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$x_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

és tekintsük a feladatban szereplő sor részletösszeg-sorozatát

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 = 1 + \tfrac{1}{1} \\
\sigma_2 &= x_1 + x_2 = \left(1 + \tfrac{1}{1}\right) + \left(1 + \tfrac{1}{2}\right) = 2 + \left(\tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2}\right) \\
&\vdots \\
\sigma_n &= x_1 + \cdots + x_n = \left(1 + \tfrac{1}{1}\right) + \cdots + \left(1 + \tfrac{1}{n}\right) = n + \left(1 + \cdots + \tfrac{1}{n}\right)
\end{aligned} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel

$$\sigma_n = n + \left(1 + \cdots + \frac{1}{n}\right) \geq n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$, *amiből azt kapjuk, hogy a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ *sor valóban divergens.* □

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,2}$.

Útmutatás. *Igazoljuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\sqrt[n]{0,2} \geq 0,2,$$

ebből a feladatban szereplő sor $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ részletösszeg-sorozatára az adódik, hogy

$$\sigma_n \geq 0,2n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty$. □

A harmonikus sor

1. Tétel. *Legyen $\alpha > 0$ adott, ekkor a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *sor abszolút konvergens, ha $\alpha > 1$ és divergens, ha $\alpha \leq 1$.*

Összehasonlító kritérium (I. és II. változat)

Az alábbi feladatban minden esetben jól használható az alábbi állítások valamelyike.

2. Tétel (Összehasonlító kritérium). *Legyenek* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *olyan nemnegatív tagú sorok, hogy* $x_n \leq y_n$ *teljesül minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén. Ekkor,*

(i) ha $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *konvergens, akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *is konvergens;*

(ii) ha $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *divergens, akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *is divergens.*

3. Tétel. *Legyenek* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *olyan pozitív tagú sorok, melyekre létezik és pozitív a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

határérték. Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *és a* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *sorok egyszerre konvergensek, illetve egyszerre divergensek.*

3. Feladat. *Határozzuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek, abszolút konvergensek és melyek divergensek.*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$,

Megoldás. *Mivel*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}},$$

ezért ha a harmonikus sor konvergenciájáról szóló tételt (lásd az 1. Tételt) alkalmazzuk az $\alpha = \frac{1}{2}$ *választással, akkor azt kapjuk, hogy a feladatban szereplő sor divergens.* □

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$,

Megoldás. *Legyen minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ekkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat egy (szigorúan) monoton csökkenő sorozat, így az alternáló sorokra vonatkozó Leibniz-kritérium miatt a* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ *sor konvergens.*

Továbbá,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}},$$

ami egy divergens sor.

Mivel a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ *sor konvergens, de nem abszolút konvergens, ezért ez a sor feltételesen konvergens.*

□

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+3}$,

Megoldás. (1. megoldás) *Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$x_n = \frac{1}{10n+3} \qquad \text{és} \qquad y_n = \frac{1}{11n}.$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ esetén

$$\begin{aligned} n &\geq 3 \\ 11n &\geq 10n+3 \\ \frac{1}{11n} &\leq \frac{1}{10n+3} \\ y_n &\leq x_n \end{aligned}$$

teljesül. Mivel a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} 11n$ sor divergens, így az Összehasonlító kritérium I. változata (lásd a 2. Tételt) szerint a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+3}$ sor divergens. □

Megoldás. (2. megoldás) *Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$x_n = \frac{1}{10n+3} \qquad \text{és} \qquad y_n = \frac{1}{n}.$$

Ekkor

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{10n+3}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{10n+3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{10}$$

teljesül. Mivel a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, így az Összehasonlító kritérium II. változatának (lásd a a 3. Tételt) segítségével kapjuk, hogy a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+3}$ sor is divergens. □

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$

Megoldás. *Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$x_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} \qquad \text{és} \qquad y_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Ekkor

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \frac{n\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

teljesül. Mivel a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ sor konvergens, így az Összehasonlító kritérium II. változatának (lásd a a 3. Tételt) segítségével kapjuk, hogy a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$ sor is konvergens. □

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{(6n+1)^3}$

Megoldás. *Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$x_n = \frac{7n}{(6n+1)^3} \qquad \textit{és} \qquad y_n = \frac{1}{n^2}$$

Ekkor

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{7n}{(6n+1)^3}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{7n^3}{(6n+1)^3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{7}{216}.$$

teljesül. Mivel a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *sor konvergens, így az Összehasonlító kritérium II. változatának (lásd a a 3. Tételt) segítségével kapjuk, hogy a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{(6n+1)^3}$ *sor is konvergens.* □

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$

Megoldás. *Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$x_n = \frac{n}{(n+1)^2} \qquad \textit{és} \qquad y_n = \frac{1}{n}$$

Ekkor

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{n}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

teljesül. Mivel a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *sor divergens, így az Összehasonlító kritérium II. változatának (lásd a a 3. Tételt) segítségével kapjuk, hogy a* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{(6n+1)^3}$ *sor is divergens.* □

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n\sqrt{n}}}$

Megoldás. *Mivel*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n\sqrt{n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}},$$

ezért ha a harmonikus sor konvergenciájáról szóló tételt (lásd az 1. Tételt) alkalmazzuk az $\alpha = \frac{5}{4}$ választással, akkor azt kapjuk, hogy a feladatban szereplő sor konvergens. □

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$

Megoldás. *Legyen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$x_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \qquad \textit{és} \qquad y_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Ekkor

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \sqrt{n}\frac{((n+1)-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

teljesül. Mivel a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ *sor konvergens, így az Összehasonlító kritérium II. változatának (lásd a a 3. Tételt) segítségével kapjuk, hogy a* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ *sor is konvergens.* □

(j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^3+3}$

Megoldás. *Legyen minden* $n\in\mathbb{N}$ *esetén*

$$x_n = \frac{1}{2n^3+1} \qquad \text{és} \qquad y_n = \frac{1}{n^3}$$

Ekkor

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\frac{1}{2n^3+3}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{n^3}{2n^3+3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

teljesül. Mivel a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ *sor konvergens, így az Összehasonlító kritérium II. változatának (lásd a a 3. Tételt) segítségével kapjuk, hogy a* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^3+3}$ *sor is konvergens.* □

(k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

(l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^{\alpha}}$

A gyökkritérium és a hányadoskritérium

Az alábbi feladatok esetében a Cauchy-féle gyökkritérium, illetve a D'Alembert-féle hányadoskritérium segítségével minden esetben lehet dönteni a szóban forgó sor konvergenciájáról.

4. Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium). *Legyen* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *egy valós sor.*

(i) Ha $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} < 1$*, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor abszolút konvergens.*

(ii) Ha $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} > 1$*, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor divergens.*

5. Tétel (D'Alembert-féle hányadoskritérium). *Legyen* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *egy olyan valós sor, melynek minden tagja nullától különböző.*

(i) Ha $\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$*, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor abszolút konvergens.*

(ii) Ha $\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1$*, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor divergens.*

4. Feladat. *Döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek.*

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$,

Megoldás. (Cauchy-féle gyökkritériummal) *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen*

$$x_n = \frac{n!}{5^n}.$$

Ekkor

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n!}{5^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{5} \xrightarrow{+} \infty > 1,$$

ezért a Cauchy-féle gyökkritérium miatt a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$ *sor divergens.* □

Megoldás. (D'Alembert-féle hányadoskritériummal) *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen*

$$x_n = \frac{n!}{5^n}.$$

Ekkor

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{\left|\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}\right|}{\left|\frac{n!}{5^n}\right|} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}} \cdot \frac{5^n}{n!} = \frac{n+1}{5} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty > 1,$$

így a D'Alembert-féle hányadoskritérium miatt a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$ *sor divergens.* □

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$,

Megoldás. (Cauchy-féle gyökkritériummal) *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen*

$$x_n = \frac{1}{n^n}.$$

Ekkor

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^n}\right|} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1,$$

ezért a Cauchy-féle gyökkritérium miatt a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ *sor abszolút konvergens.* □

Megoldás. (D'Alembert-féle hányadoskritériummal) *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen*

$$x_n = \frac{1}{n^n}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{\left|\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\right|}{\left|\frac{1}{n^n}\right|} &= \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \\ &= \frac{1}{n+1}\left[\left(1 + \frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{-(n+1)}\right)\right]^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \cdot (e \cdot 1)^{-1} = 0 < 1,\end{aligned}$$

így a D'Alembert-féle hányadoskritérium miatt a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ *sor abszolút konvergens.* □

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$,

Megoldás. (Cauchy-féle gyökkritériummal) *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen*

$$x_n = \frac{100^n}{n!}.$$

Ekkor

$$\sqrt[n]{\left|\frac{100^n}{n!}\right|} = \frac{100}{\sqrt[n]{n!}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1,$$

ezért a Cauchy-féle gyökkritérium miatt a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ *sor abszolút konvergens.* □

Megoldás. (D'Alembert-féle hányadoskritériummal) *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen*

$$x_n = \frac{100^n}{n!}.$$

Ekkor

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{\left|\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{100^n}{n!}\right|} = \frac{100^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{100^n} = \frac{100}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1,$$

így a D'Alembert-féle hányadoskritérium miatt a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ *sor abszolút konvergens.* □

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$,

Megoldás. (D'Alembert-féle hányadoskritériummal) *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen*

$$x_n = \frac{3^n n!}{n^n}.$$

Ekkor

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{\left|\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right|}{\left|\frac{3^n n!}{n^n}\right|} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n n!} = 3 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$= 3 \cdot \left[\left(1 + \frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)} \cdot \left(1 + \frac{1}{-(n+1)}\right)\right]^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} 3 \cdot (e \cdot 1)^{-1} = \frac{3}{e} > 1,$$

így a D'Alembert-féle hányadoskritérium miatt a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ *sor divergens.* □

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^2}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

Megoldás. **(D'Alembert-féle hányadoskritériummal)** *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen*

$$x_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

Ekkor

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{\left|\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}\right|}{\left|\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}\right|} = \frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 < 1,$$

így a D'Alembert-féle hányadoskritérium miatt a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ *sor abszolút konvergens.* □

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$

Megoldás. **(Cauchy-féle gyökkritériummal)** *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen*

$$x_n = \frac{2n}{3^n}.$$

Ekkor

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2n}{3^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}}{3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} < 1,$$

ezért a Cauchy-féle gyökkritérium miatt a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$ *sor abszolút konvergens.* □

Megoldás. **(D'Alembert-féle hányadoskritériummal)** *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen*

$$x_n = \frac{2n}{3^n}.$$

Ekkor

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{\left|\frac{2(n+1)}{3^{n+1}}\right|}{\left|\frac{2n}{3^n}\right|} = \frac{2(n+1)}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{2n} = \frac{n+1}{3n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} < 1,$$

így a D'Alembert-féle hányadoskritérium miatt a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$ *sor abszolút konvergens.* □

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^3}$

Megoldás. **(Cauchy-féle gyökkritériummal)** *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen*

$$x_n = \frac{\pi^n}{n^3}.$$

Ekkor

$$\sqrt[n]{\left|\frac{\pi^n}{n^3}\right|} = \frac{\pi}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3} \xrightarrow{n\to\infty} \pi > 1,$$

ezért a Cauchy-féle gyökkritérium miatt a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^3}$ *sor divergens.* □

Megoldás. **(D'Alembert-féle hányadoskritériummal)** *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen*

$$x_n = \frac{\pi^n}{n^3}.$$

Ekkor

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{\left|\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)^3}\right|}{\left|\frac{\pi^n}{n^3}\right|} = \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)^3} \cdot \frac{n^3}{\pi^n} = \pi \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \xrightarrow{n\to\infty} \pi > 1,$$

így a D'Alembert-féle hányadoskritérium miatt a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^3}$ *sor divergens.* □

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000n}{(1,1)^n}$

Megoldás. **(Cauchy-féle gyökkritériummal)** *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen*

$$x_n = \frac{1000n}{(1,1)^n}.$$

Ekkor

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1000n}{(1,1)^n}\right|} = \frac{\sqrt[n]{1000} \cdot \sqrt[n]{n}}{1,1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1 \cdot 1}{1,1} < 1,$$

ezért a Cauchy-féle gyökkritérium miatt a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000n}{(1,1)^n}$ *sor abszolút konvergens.* □

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[10]{n}}$

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n + 2^n}$

Megoldás. **(Cauchy-féle gyökkritériummal)** *Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen*

$$x_n = \frac{n^5}{3^n + 2^n}.$$

Ekkor

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2n}{3^n}\right|} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^5}{\sqrt[n]{3^n + 2^n}}.$$

A nevezőben lévő sorozat határértékének a megállapításához a Rendőr-elvet fogjuk használni. Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} 3^n \le\ & 3^n + 2^n && \le 3^n + 3^n = 2 \cdot 3^n \\ \sqrt[n]{3^n} \le\ & \sqrt[n]{3^n + 2^n} && \le \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} \\ 3 \le\ & \sqrt[n]{3^n + 2^n} && \le \sqrt[n]{2} \cdot 3 \end{aligned}$$

teljesül. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} 3 = 3 \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot 3 = 3,$$

ezért a $\left(\sqrt[n]{3^n + 2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n} = 3.$$

Így,

$$\sqrt[n]{\left|\frac{2n}{3^n}\right|} = \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^5}{\sqrt[n]{3^n + 2^n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} < 1,$$

ezért a Cauchy-féle gyökkritérium miatt a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n + 2^n}$ *sor abszolút konvergens.* □

Megoldás. (D'Alembert-féle hányadoskritériummal) *Minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén legyen*

$$x_n = \frac{n^5}{3^n + 2^n}.$$

Ekkor

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{\left|\frac{(n+1)^5}{3^{n+1}+2^{n+1}}\right|}{\left|\frac{n^5}{3^n+2^n}\right|} = \frac{(n+1)^5}{3^{n+1} + 2^{n+1}} \cdot \frac{3^n + 2^n}{n^5} = \frac{(n+1)^5}{n^5} \cdot \frac{3^n + 2^n}{3^{n+1} + 2^{n+1}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \cdot \frac{3^n + 2^n}{3 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 \cdot \frac{3^n}{3^n} \cdot \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{3 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

így a D'Alembert-féle hányadoskritérium miatt a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n + 2^n}$ *sor abszolút konvergens.* □

(n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$

(o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n}$

(p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n}$

⚠ Figyelem!

Sem a Cauchy-féle gyökkritérium, sem a D'Alembert-féle hányadoskritérium **nem kritérium** szó szerinti értelemben. Figyeljük meg ugyanis, ha ezeknek a tételeknek a jelöléseivel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 1 \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = 1,$$

akkor a Cauchy-féle gyökkritérium, illetve a D'Alembert-féle hányadoskritérium nem állít semmit. Ilyen esetben ezeknek az állításoknak a segítségével nem lehet eldönteni, hogy az adott sor konvergens-e vagy sem, hanem valamilyen más állításra, vagy módszerre van szükség.

Gondolkozzuk!

Adjunk példát olyan $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ valós sorra, melyre

(a) a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor konvergens és $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$,

(b) a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens és $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 1$,

(c) a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor konvergens és $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = 1$,

(d) a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens és $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = 1$.

Cauchy versus D'Alembert

Felvetődhet a kérdés, hogy a Cauchy-féle gyökkritérium és a D'Alembert-féle hányadoskritérium közül „erősebb”-e az egyik, és ha igen, akkor melyik. Erre az a válasz, hogy a két állítás közül **a Cauchy-féle gyökkritérium az erősebb**, tehát ennek a segítségével több sorrol el lehet dönteni, hogy konvergens-e vagy sem. Egészen pontosan az igaz, hogy ha a $\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = q$, akkor a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|}$ határérték is létezik és ez is q-val egyezik meg, a megfordítás azonban *nem feltétlenül igaz*. Ehhez tekintsük például a $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$ sort. Ez nem jelenti azonban azt, hogy jó taktika csak ezt megtanulni, a fenti példák ugyanis azt mutatják, hogy már egyszerűbb sorok esetén is előfordulhat, hogy a D'Alembert-féle hányadoskritérium segítségével könnyebben tudunk dönteni.

5. Feladat. *Mely $x \in \mathbb{R}$ számok esetén lesznek a következő sorok (abszolút) konvergensek?*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{3^n}$

Megoldás. *Legyen $x \in \mathbb{R}$ és*

$$x_n = \frac{x^n}{3^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, melyre $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor abszolút konvergens és minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, melyre $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens. Ebben az esetben

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{3^n}\right|} = \frac{|x|}{3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{|x|}{3},$$

ezért

$$\begin{array}{rclcrcl} \frac{|x|}{3} & < & 1 & & \frac{|x|}{3} & > & 1 \\ |x| & < & 3 & \textit{és} & |x| & > & 3 \\ x & \in &]-3,3[& & x & \in &]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[\end{array}$$

Az $x = \pm 3$ eseteket külön kell megvizsgálnunk. Ha $x = 3$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1,$$

ami egy divergens sor.

Ha Ha $x = -3$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n,$$

ami egy divergens sor.

Összefoglalva,

$x \in]-\infty, -3[$	$x = -3$	$x \in]-3, 3[$	$x = 3$	$x \in]3, +\infty[$
divergens	*divergens*	*abszolút konvergens*	*divergens*	*divergens*

□

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n$

Megoldás. *Legyen $x \in \mathbb{R}$ és*

$$x_n = (x-4)^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, melyre $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor abszolút konvergens és minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, melyre $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens. Ebben az esetben

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{|(x-4)^n|} = |x-4| \xrightarrow{n\to\infty} |x-4|,$$

ezért

$$|x-4| \quad < 1 \qquad\qquad\qquad\qquad |x-4| \quad > 1$$

$$-1 \quad x-4 \quad 1 \qquad\qquad \text{és}$$

$$x \quad \in \quad]3,5[\qquad\qquad\qquad\qquad x \quad \in \quad]-\infty, 3[\cup]5,+\infty[$$

Az $x = 3$ és $x = 5$ eseteket külön kell megvizsgálnunk. Ha $x = 3$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (3-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n,$$

ami egy divergens sor.

Ha Ha $x = 5$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (5-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1,$$

ami egy divergens sor.

Összefoglalva,

$x \in]-\infty, 3[$	$x = 3$	$x \in]3, 5[$	$x = 5$	$x \in]5, +\infty[$
divergens	*divergens*	*abszolút konvergens*	*divergens*	*divergens*

□

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^n$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^{n+1}}$

Megoldás. *Legyen $x \in \mathbb{R}$ és*

$$x_n = \frac{(x+3)^n}{2^{n+1}} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Ekkor minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, melyre $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor abszolút konvergens és minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, melyre $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens. Ebben az esetben

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(x+3)^n}{2^{n+1}}\right|} = \frac{|x+3|}{\sqrt[n]{2}2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{|x-3|}{2},$$

ezért

$$\begin{aligned} \tfrac{|x+3|}{2} &< 1 \\ |x+3| &< 2 \\ -2 < x+3 &< 2 \\ -5 < x &< -1. \end{aligned} \qquad \text{és} \qquad \begin{aligned} \tfrac{|x-3|}{2} &> 1 \\ x &\in \;]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[\end{aligned}$$

Az $x = -5$ és $x = -1$ eseteket külön kell megvizsgálnunk. Ha $x = -5$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-5)+3)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(-1)^n,$$

ami egy divergens sor.

Ha Ha $x = 1$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((-1)+3)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2},$$

ami egy divergens sor.

Összefoglalva,

$x \in]-\infty, -5[$	$x = -5$	$x \in]-5, -1[$	$x = -1$	$x \in]-1, +\infty[$
divergens	*divergens*	*abszolút konvergens*	*divergens*	*divergens*

□

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x^n)}{n^2}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$

Megoldás. *Legyen $x \in \mathbb{R}$ és*

$$x_n = ne^{-nx} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, melyre $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor abszolút konvergens és minden olyan $x \in \mathbb{R}$ esetén, melyre $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$ a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor divergens. Ebben az esetben

$$\sqrt[n]{|x_n|} = \sqrt[n]{|ne^{-nx}|} = \sqrt[n]{n} \cdot e^{-x} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-x},$$

ezért

$$\begin{array}{rcl} e^{-x} & < & 1 \\ -x & < & 0 \\ 0 & < & x \end{array} \qquad \textit{és} \qquad \begin{array}{rcl} e^{-x} & > & 1 \\ -x & > & 0 \\ 0 & > & x \end{array}$$

Az $x = 0$ esetet külön kell megvizsgálnunk, ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n\cdot 0} = \sum_{n=1}^{\infty} n,$$

ami egy divergens sor.

Összefoglalva,

$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
divergens	*divergens*	*abszolút konvergens*

$\square$

6. Feladat. *Igazoljuk, hogy ha a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ pozitív tagú sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ sor is konvergens. Igaz-e a megfordítás?*

Megoldás. Legyen $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ pozitív tagú, konvergens sor és tekintsük ennek a sornak a részletösszeg-sorozatát, azaz, legyen

$$\sigma_n = x_1 + \cdots + x_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Jelölje továbbá $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ sor részletösszeg-sorozatát, azaz, legyen

$$S_n = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor pozitív tagú, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n > 0$, amiből az adódik, hogy

$$0 \leq S_n = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq x_1^2 + \cdots + x_n^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i x_j = (x_1 + \cdots + x_n)^2 = \sigma_n^2 < K,$$

valamely K-ra minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, hiszen a $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos. Ez azt jelenti, hogy az $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos.

Továbbá, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$S_n = x_1 + \cdots + x_n^2 \leq x_1^2 + \cdots + x_n^2 + x_{n+1} = S_{n+1},$$

vagyis az $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növekedő.

Mindent egybevetve a $\sum_{n=1}^{\infty}$ sor $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ részletösszeg-sorozat egy korlátos és monoton, tehát konvergens sorozat. Ennek a sorozatnak a konvergenciája pedig éppen azt jelenti, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ sor konvergens.

A feladatban szereplő állítás megfordítása általában nem igaz, ehhez ugyanis legyen

$$x_n = \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

ami egy konvergens sor, azonban a

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

sor divergens. Így, a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ sor konvergenciájából általában nem következik a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ sor konvergenciája. □

7. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ *sorok konvergensek, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_y|$ *és a* $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2$ *sor is konvergens.*

Megoldás. Legyenek $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ és $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ konvergens sorok. Ekkor a konvergencia és a műveletek kapcsolatáról szóló tétel szerint a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 + y_n^2$ sor, illetve a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2 + y_n^2}{2}$ is konvergens.

Másfelől a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség miatt minden a, b nemnegatív valós szám esetén fennáll az

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

egyenlőtlenség. Legyen most $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, és alkalmazzuk a fenti egyenlőtlenséget $a = x_n^2$ és $b = y_n^2$ választással, ekkor

$$|x_n y_n| = \sqrt{x_n^2 y_n^2} \leq \frac{x_n^2 + y_n^2}{2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül. Ebből pedig már az Összehasonlító kritérium I. változatának alkalmazása után már adódik, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$ sor konvergens.

Végül, az előző rész a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ és a $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ sorok konvergenciájából következik a $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n|$ sor konvergenciája. Továbbá, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$(x_n + y_n)^2 = \left|(x_n + y_n)^2\right| = \left|x_n^2 + 2x_n y_n + y_n^2\right| \leq |x_n^2| + 2|x_n y_n| + |y_n^2| = x_n^2 + 2|x_n y_n| + y_n^2,$$

így ismét az Összehasonlító kritérium I. változatának alkalmazása után kapjuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2$ sor is konvergens. □