Igaz-hamis kérdések

1. Legyen $a \neq 1$ egy adott pozitív valós szám, ekkor $\int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$.

2. Van olyan $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum és van olyan $f : I \to \mathbb{R}$ függvény, melynek nem létezik az I intervallumon primitív függvénye.

3. Minden nemüres, nyílt $I \subset \mathbb{R}$ intervallum esetén van olyan $f : I \to \mathbb{R}$ függvény, melynek nem létezik az I intervallumon primitív függvénye.

4. $\int \ln(x) \, dx = x \ln(x) - x + C$

5. $\int x \sin(x) \, dx = \frac{x^2}{2} \cos(x) + C$

6. $\int (3x + 4)e^x \, dx = (3x + 4)e^x + C$

7. $\int \frac{1}{(2x-4)^6} \, dx = -\frac{1}{10\,(2x-4)^5} + C$

8. $\int \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx = \operatorname{ctg}(x) + C$

9. Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a, b]$-n, $f(x) \neq 0$ $(x \in [a, b])$, f differenciálható $]a, b[$-n, akkor az $\frac{f'}{f}$ függvénynek létezik a primitív függvénye, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy $\int \frac{f(x)}{f'(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C$ $(x \in]a, b[)$.

10. $\int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \, dx = \frac{1}{\frac{x^3}{3}} - \frac{1}{\frac{x^5}{5}} + C$

11. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Ekkor f monoton $[a, b]$-n.

12. $\int_{-1}^{1} x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$.

13. $\int_0^{\pi} 1 \, dx = \pi$.

14. $\int_1^2 x - 1 \, dx = \frac{x^2}{2} - x + C$.

15. Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Ekkor az f függvény felsőhatárfüggvénye folytonos az $[a, b]$ intervallumon.

A csoport

Igaz - hamis:

1.) Igaz

2.) Igaz, például az $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in]0,1[\cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{ha } x \in]0,1[\setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

függvény ilyen.

3.) Igaz, pl: ha $I \subseteq \mathbb{R}$ tetszőleges nyílt intervallum, akkor
az $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in I \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{ha } x \in I \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ függvény ilyen.

4.) Igaz, hiszen $\int \ln x \, dx = \int \underset{g'}{1} \cdot \underset{f}{\ln x} \, dx = \underset{f}{(\ln x)} \cdot \underset{g}{x} - \int \underset{g}{x} \cdot \underset{f'}{\frac{1}{x}} \, dx$

$= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x + C$

5.) Hamis, hiszen $\left(\frac{x^2}{2} \cos x + C\right)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \cos x + \frac{x^2}{2} \cdot (\cos x)' =$

$= x \cdot \cos x + \frac{x^2}{2}(-\sin x) \neq x \cdot \sin x$. De parciális integrálással is ellenőrizhető, hogy $\int x \cdot \sin x \, dx = -x\cos x + \sin x + C$

6.) Hamis, hiszen $\left[(3x+4) \cdot e^x\right]' = (3x+4)' \cdot e^x + (3x+4)(e^x)' = 3 \cdot e^x + (3x+4)e^x = (3x+7)e^x \neq (3x+4)e^x$. De parciális integrálással is kijön, hogy $\int (3x+4)e^x \, dx = (3x+1)e^x + C$

7.) Igaz, hiszen $\int \frac{1}{(2x-4)^6} \, dx = \int (2x-4)^{-6} \, dx = \frac{(2x-4)^{-5}}{-5} \cdot \frac{1}{2} + C$

$= \frac{-1}{10} \cdot \frac{1}{(2x-4)^5} + C = -\frac{1}{10(2x-4)^5} + C$

8.) Hamis, mert $(\mathrm{ctg}(x) + C)' = (\mathrm{ctg}\, x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos x' \cdot \sin x - \cos x \cdot \sin x'}{\sin^2 x}$
$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$.

Valójában $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

9.) Hamis, a helyes összefüggés

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(|f(x)|) + C$$ lenne.

10.) Hamis, mert $\int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-2} + x^{-4} dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-3}}{-3} + C$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$$

11.) Hamis, például $f(x) = x^2$ Riemann-integrálható $[-1,1]$-en, de nem monoton $[-1,1]$-en.

12.) Hamis, mert $\int_{-1}^{1} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=-1}^{1} = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0$

13.) Igaz, hiszen $\int_0^{\pi} 1 \, dx = \left[x \right]_{x=0}^{\pi} = \pi - 0 = \pi$ valóban.

14.) Hamis, mert $\int_1^2 x - 1 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{x=1}^{2} = \left(\frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right)$

$$= (2-2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}$$

15.) Igaz.

Feladatok

1.) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ $(x \in \mathbb{R})$ monotonitás szempontjából

- $f'(x) = \frac{(2x)'(x^2+1) - 2x \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2+1) - 2x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2}$

$$= \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}.$$

• $f'(x)$ zérushelye: $\dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = 0$ / A tört pontosan akkor 0, ha számlálója 0

$2-2x^2=0 \quad /:2$

$1-x^2=0$

$x^2=1 \quad /\sqrt{\ }$

$|x|=1 \to \boxed{x=1}$, $\boxed{x=-1}$

• Ebből f monotonitása:

x	$]-\infty,-1[$	-1	$]-1,+1[$	1	$]1,+\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	szig. mon. csökk.	MIN	szig. mon. nő	MAX	szig. mon. csökk.

$2-2x^2$ előjele

2.) $f(x)=x^4-14x^3+60x^2+27 \quad (x\in\mathbb{R})$ konvexitása

• $f'(x)=4x^3-14\cdot 3x^2+60\cdot 2x = 4x^3-42x^2+120x$

$f''(x)=4\cdot 3x^2-42\cdot 2x+120 = 12x^2-84x+120$

• f'' zérushelye: $12x^2-84x+120=0 \quad /:12$

$x^2-7x+10=0$

$$x_{1,2}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot 10}}{2\cdot 1}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2} \to \frac{7+3}{2}=\boxed{5},\ \frac{7-3}{2}=\boxed{2}$$

• Ebből f konvexitása:

x	$]-\infty,2[$	2	$]2,5[$	5	$]5,+\infty[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex	I.P.	konkáv	I.P	konvex

$12x^2-84x+120$ előjele ugyanaz, mint $x^2-7x+10$ előjele

3.) $f(x) = (x^2 - x - 19)e^x \quad (x \in \mathbb{R})$ Stacionárius pontjainak osztályozása.

- $f'(x) = (x^2 - x - 19)' \cdot e^x + (x^2 - x - 19) \cdot (e^x)' =$

$$= (2x-1) \cdot e^x + (x^2 - x - 19) \cdot e^x = e^x \cdot (2x - 1 + x^2 - x - 19)$$

$$= e^x (x^2 + x - 20)$$

- $f'(x)$ zérushelyei (stac. pontok):

$$e^x (x^2 + x - 20) = 0 \quad / : e^x, \text{ mert } e^x \neq 0$$

$$x^2 + x - 20 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} \nearrow \frac{-1+9}{2} = 4, \quad \searrow \frac{-1-9}{2} = -5$$

- A stac. pontok osztályozása:

x	$]-\infty, -5[$	-5	$]-5, 4[$	4	$]4, +\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	szig. mon. nő	lok. MAX	szig. mon. csökken	lok. MIN	szig. mon. nő

← e^x pozitív, így f' előjelei ugyanazok, mint x^2+x-20 előjelei

4.) a) $$\int -3 \cdot 3^x - 2e^x + 4 \cdot \sin x - 4\cos x - 9 \cdot \overbrace{\sqrt{x}}^{= x^{\frac{1}{2}}} + x^4 \, dx =$$

$$-3 \cdot \frac{3^x}{\ln 3} - 2 \cdot e^x + 4 \cdot (-\cos x) - 4 \cdot \sin x - 9 \cdot \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^5}{5} + c$$

b) $$\int \underbrace{(2x-7)}_{f} \underbrace{\cos x}_{g'} \, dx = \underbrace{(2x-7)}_{f} \cdot \underbrace{\sin x}_{g = \int g'} - \int \underbrace{2}_{f'} \cdot \underbrace{\sin x}_{g} \, dx =$$

$$= (2x-7)\sin x - 2 \cdot (-\cos x) + C$$

c) $\displaystyle\int \frac{\frac{4}{\cos^2 x} - 5\sin x}{4\,\mathrm{tg}\,x + 5\cos x - 7}\,dx = \ln\left|4\,\mathrm{tg}\,x + 5\cos x - 7\right| + C$

↳ nevező deriváltja: $(4\,\mathrm{tg}\,x + 5\cos x - 7)' = \frac{4}{\cos^2 x} - 5\sin x$

$\Rightarrow \int \frac{g'}{g}$ alak, $\int \frac{g'}{g} = \ln|g| + C$

d) $\displaystyle\int \left(5e^x + \frac{3}{2\sqrt{x}}\right)\underbrace{\left(5e^x + 3\sqrt{x}\right)^5}\,dx = \frac{\left(5e^x + 3\sqrt{x}\right)^6}{6} + C$

a belső fgv deriváltja: $(5e^x + 3\sqrt{x})' =$

$= (5e^x + 3\cdot x^{\frac{1}{2}})' = 5e^x + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 5e^x + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

$\Rightarrow \int g'\cdot g^\alpha$ alak, $\int g'\cdot g^\alpha = \frac{g^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

e) $\displaystyle\int \frac{3x+3}{x^2-9}\,dx = ⊛$

↳ nevező diszkriminánsa: $0^2 - 4\cdot 1(-9) = 36 > 0 \Rightarrow$ 2 valós gyök

$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 3}$ és $\boxed{x_2 = -3}$ a két gyök

Parciális törtekre bontás:

$$\frac{3x+3}{x^2-9} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x(A+B) + 3A - 3B}{x^2-9}$$

$\Rightarrow$ egyenletrendszer:

$$\left.\begin{aligned} 3 &= A + B \\ 3 &= 3A - 3B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 3\cdot 3 + 3 &= 3(A+B) + 3A - 3B \\ 12 &= 6A \\ &\boxed{A = 2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{B} = 3 - A = 3 - 2 = \boxed{1}$

$⊛ = \displaystyle\int \frac{2}{x-3} + \frac{1}{x+3}\,dx = 2\cdot\ln|x-3| + 1\cdot\ln|x+3| + C$

f) $\int (2x+7)\sqrt{4x+1}\,dx = \int \left(2\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}\right)+7\right)\cdot t\cdot\frac{t}{2}\,dt =$

$\boxed{t=\sqrt{4x+1}}$

$t^2 = 4x+1$

$t^2-1 = 4x$

$\boxed{x = \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}} \quad /\frac{d}{dt}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}\cdot 2t$

$\boxed{dx = \frac{t}{2}\,dt}$

$= \int \left(\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} + 7\right)\frac{t^2}{2}\,dt$

$= \int \frac{t^4}{4} + \frac{13}{4}t^2\,dt =$

$= \frac{1}{4}\cdot\frac{t^5}{5} + \frac{13}{4}\cdot\frac{t^3}{3} + C$

$= \frac{1}{20}\left(\sqrt{4x+1}\right)^5 + \frac{13}{12}\left(\sqrt{4x+1}\right)^3 + C$

visszahelyettesítés