Igaz-hamis kérdések

1. Ha $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n, $f(x) \neq 0$ $(x \in [a,b])$, f differenciálható $]a,b[$-n, akkor az $\frac{f'}{f}$ függvénynek létezik a primitív függvénye, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \ln(|f(x)|) + C \quad (x \in]a,b[)$.

2. Ha $f, F\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ és $F' = f$, akkor $G\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ pontosan akkor primitív függvénye f-nek, ha létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy $F(x) - G(x) = C \quad (x \in]a,b[)$.

3. Ha az $f, g\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak $]a,b[$-n, és létezik $\int f' \cdot g$, akkor létezik $\int f \cdot g'$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ konstans, hogy $\int f(x) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = f'(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x + C \quad (x \in]a,b[)$.

4. $\int (2x+2)e^x \,\mathrm{d}x = (2x-2)e^x + C$

5. $\int 2x + 5 \,\mathrm{d}x = x^2 + 5x + C$

6. $\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x = x\cos(x) + C$

7. $\int x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$

8. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh}(x) + C$

9. $\int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$

10. Legyen $a \neq 1$ egy adott pozitív valós szám, ekkor $\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C$.

11. $\int_1^2 x - 1\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

12. Van olyan $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton függvény, mely Riemann-integrálható.

13. Legyen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ egy Riemann-integrálható függvény. Ekkor az f függvény felsőhatárfüggvénye differenciálható az $[a,b]$ intervallumon.

14. $\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

15. $\int_0^{2\pi} \cos(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

B. csoport

Igaz-hamis:

1.) Igaz, a 4. feladat c) részében használjuk ezt.

2.) Igaz

3.) Hamis, a parciális integrálás tétele helyesen:

$$\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)\,dx$$

4.) Hamis, mert $\left[(2x-2)e^x\right]' = (2x-2)'e^x + (2x-2)(e^x)' =$

$= 2e^x + (2x-2)e^x = 2x\cdot e^x \neq (2x+2)e^x$. De parciális integrálással is látszik, hogy $\int (2x+2)e^x\,dx$

$= (2x+2)e^x - \int 2\cdot e^x\,dx = (2x+2)e^x - 2e^x = 2x\cdot e^x + C$

5.) Igaz: $\int 2x+5\,dx = 2\cdot\frac{x^2}{2} + 5x + C = x^2+5x+C$

6.) Hamis, mert $(x\cdot\cos x)' = 1\cdot\cos x + x\cdot(-\sin x) = \cos x - x\sin x$

De parciális integrálással is lehet: $\int \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{\sin x}_{g'}\,dx =$

$= \underbrace{x}_{f}\cdot\underbrace{(-\cos x)}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'}\cdot\underbrace{(-\cos x)}_{g}\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx =$

$= -x\cos x + \sin x + C$

7.) Igaz, hiszen $\int x\sqrt{x}\,dx = \int x^1\cdot x^{\frac{1}{2}}\,dx = \int x^{3/2}\,dx = \frac{x^{5/2}}{5/2} + C$

$= \frac{2\cdot x^{5/2}}{5} + C$

8.) Igaz, mivel $(\operatorname{arsinh}(x))' = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arsinh} x)} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh} x)}$

$= \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arsinh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

9.) Igaz, mert $\int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}\, dx = \int x^{-2} + x^{-4}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{x^{-3}}{-3} + c$

$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + C$

10.) Igaz. Ellenőrzük: $\left(\frac{1}{\ln a} \cdot a^x + c\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x$

11.) Igaz: $\int_1^2 x - 1\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{x=1}^{2} = \left(\frac{2^2}{2} - 2\right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1\right) =$

$= (2-2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}.$

12.) Igaz, sőt minden monoton fgv. Riemann-integrálható.

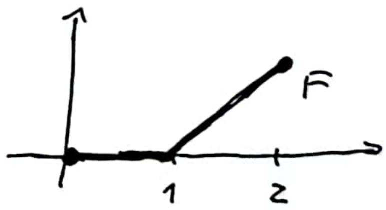
13.) Hamis. Például $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in [0,1] \\ 1 & \text{ha } x \in]1,2] \end{cases}$, akkor

ez Riemann-integrálható, és felsőhatár függvénye:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \begin{cases} \int_0^x 0\, dt = [1]_{t=0}^{x} = 1 - 1 = 0 & \text{, ha } x \in [0,1] \\ \int_0^1 0\, dt + \int_1^x 1\, dt = 0 + [t]_{t=1}^{x} = x - 1 & \text{, ha } x \in]1,2] \end{cases}$$

Vagyis $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{ha } x \in]1,2]. \end{cases}$, ami az $x_0 = 1$

pontban nem differenciálható



14.) Hamis, $\int_0^{\pi} \sin x\, dx = [-\cos x]_{x=0}^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) =$

$= -\cos\pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2.$

15.) Igaz, $\int_0^{2\pi} \cos x\, dx = [\sin x]_{x=0}^{2\pi} = \sin(2\pi) - \sin(0) =$

$= 0 - 0 = 0.$

B csoport Feladatok

1.) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$ $\quad (x \in]0, +\infty[$! $)$ monotonitása.

- $f'(x) = (x^{-1} + \ln x)' = (-1)\cdot x^{-2} + \frac{1}{x} = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2}$

- f' zérushelyei: $\frac{-1+x}{x^2} = 0$ / a számlálónak kell 0-nak lenni

$$-1 + x = 0$$
$$\boxed{x = 1}$$

- Ebből f monotonitása

x	$]0,1[$	1	$]1,+\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	szig. mon. csökk.	MIN	szig. mon. nő

2.) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$ konvexitása

- $f'(x) = \left(\sqrt{1+x^2}\right)' = \left((1+x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot x$

↳ összetett fgv,
külső fgv: $y^{\frac{1}{2}} \rightsquigarrow (y^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$
belső fgv: $1+x^2 \rightsquigarrow (1+x^2)' = 2x$

- $f''(x) = \left[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot x\right]' = \left[(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]'\cdot x + (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x)' =$

↳ szorzat, eszerint kell deriválni: $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$

$= \left(-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x\right)\cdot x + (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1 = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}(-x^2)$
$+ (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = (1+x^2)^{-3/2}(-x^2) + (1+x^2)^{-3/2}\cdot(1+x^2)^1 =$
$= (1+x^2)^{-3/2}\cdot(-x^2 + 1 + x^2) = (1+x^2)^{-3/2} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$

- f''-nak nincs zérushelye:

x	$]-\infty, +\infty[$
$f''(x)$	$+$
$f(x)$	konvex

3.) $f(x)=(x^2+7x+13)e^x$ ($x\in\mathbb{R}$) stacionárius pontjai osztályozása.

- $f'(x)=\left((x^2+7x+13)e^x\right)'=(x^2+7x+13)'\cdot e^x+(x^2+7x+13)(e^x)'$

$$=(2x+7)\cdot e^x+(x^2+7x+13)\cdot e^x=e^x(x^2+9x+20)$$

- f' zérushelyei (stac. pontok):

$$e^x\cdot(x^2+9x+20)=0 \quad /:e^x,\ \text{mert } e^x\neq 0$$

$$x^2+9x+20=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot 1\cdot 20}}{2\cdot 1}=\frac{-9\pm\sqrt{1}}{2}\ \begin{cases}\nearrow \frac{-9+1}{2}=\boxed{-4}\\ \searrow \frac{-9-1}{2}=\boxed{-5}\end{cases}$$

- Ebből a -4, -5 stac. pontok osztályozása:

x	$]-\infty,-5[$	-5	$]-5,-4[$	-4	$]-4,+\infty[$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	szig. mon. nő	MAX	szig. mon. csökk.	MIN	szig. mon. nő

← $e^x\cdot(x^2+9x+20)$ előjele azonos $x^2+9x+20$ előjelével, hisz $e^x>0$

4.) a) $\displaystyle\int 2\cdot 3^x-2e^x+4\sinh x-3\cosh x-\underbrace{\frac{2}{\sqrt{x}}}_{-2\cdot x^{-1/2}}+x^9\,dx=$

$$=2\cdot\frac{3^x}{\ln 3}-2e^x+4\cosh x-3\sinh x-2\cdot\frac{x^{1/2}}{1/2}+\frac{x^{10}}{10}+C$$

b) $\displaystyle\int\underbrace{(10x+2)}_{f}\underbrace{\cosh x}_{g'}\,dx=\underbrace{(10x+2)}_{f}\cdot\underbrace{\sinh x}_{g=\int g'}-\int\underbrace{10}_{f'}\cdot\underbrace{\sinh x}_{g}\,dx$

$$=(10x+2)\sinh x-10\cdot\cosh x+C$$

c) $\displaystyle\int\frac{e^x-3\cosh x}{-3\sinh x+e^x+44}\,dx=\ln|-3\sinh x+e^x+44|+C$

↳ $\int\frac{g'}{g}$ alak

↳ nevező deriváltja: $(-3\sinh x+e^x+44)'=-3\cosh x+e^x$ ✓

d) $\int \underbrace{(7\cosh x - 4\,\mathrm{arctg}x)^3}\cdot\left(7\sinh x - \frac{4}{x^2+1}\right)dx =$

a belső fgv deriváltja: $(7\cosh x - 4\,\mathrm{arctg}x)' = 7\sinh - \frac{4}{x^2+1}$ ✓

$= \frac{(7\cosh x - 4\,\mathrm{arctg}x)^4}{4} + C$

↳ $\int g^{\alpha}\cdot g'$ alak

e) $\int \frac{24-2x}{x^2-16}dx = (*)$

↳ nevező diszkriminánsa: $0^2 - 4\cdot 1(-16) = 64 > 0 \Rightarrow 2$ valós gyök.

x^2-16 gyökei: $x^2-16 = (x-4)(x+4) = 0$ -ből $\boxed{-4 \text{ és } +4}$

$\Rightarrow \frac{24-2x}{x^2-16} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4)+B(x-4)}{(x-4)(x+4)} =$

$= \frac{x(A+B) + (4A-4B)}{(x-4)(x+4)}$.

Egyenletrendszer: $\left.\begin{array}{l} -2 = A+B \\ 24 = 4A-4B \end{array}\right\} \Rightarrow 4\cdot(-2)+24 = 4(A+B)+(4A-4B)$

$16 = 8A$

$\boxed{A=2}$

$\Rightarrow \boxed{B = -2 - A = -2-2 = -4}$

$(*) = \int \frac{2}{x-4} - \frac{4}{x+4}\,dx = 2\cdot\ln|x-4| - 4\cdot\ln|x+4| + C$

f) $\int\sqrt{2x+9}\,(9x+3)\,dx = \int t\cdot\left(9\left(\frac{t^2}{2}-\frac{9}{2}\right)+3\right)t\,dt =$

$= \int t^2\left(\frac{9}{2}t^2 - \frac{75}{2}\right)dt = \int \frac{9}{2}t^4 - \frac{75}{2}t^2\,dt$

$= \frac{9}{2}\cdot\frac{t^5}{5} - \frac{75}{2}\cdot\frac{t^3}{3} + C =$

$\frac{9}{10}\left(\sqrt{2x+9}\right)^5 - \frac{75}{6}\left(\sqrt{2x+9}\right)^3 + C$

$\boxed{t = \sqrt{2x+9}}$

$t^2 = 2x+9$

$2x = t^2 - 9$

$\boxed{x = \frac{t^2}{2} - \frac{9}{2}}$

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\cdot 2t \Rightarrow \boxed{dx = t\,dt}$