Kalkulus — **Második zárthelyi dolgozat mintadolgozatának megoldásai** — **2022. január 10.**

Név, Neptun-kód: ....

1. Vizsgáld meg az

$$f(x) = x^2 - \ln(x^2) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

módon megadott függvényt monotonitás szempontjából.

(5 pont)

Megoldás. A megoldás során az alábbi állítást fogjuk használni. Ha az $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvény differenciálható, akkor

— ha $f' \geq 0$, akkor f monoton növekedő $]a, b[$-n;

— ha $f' \leq 0$, akkor f monoton csökkenő $]a, b[$-n.

Legyen

$$f(x) = x^2 - \ln(x^2) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) .$$

Ekkor az f függvény differenciálható az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon és

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) .$$

Ezért

$$\begin{aligned}
f'(x) &\quad \geq \quad 0 \\
2x - \frac{2}{x} &\quad \geq \quad 0 \\
x - \frac{1}{x} &\quad \geq \quad 0 \\
\frac{1}{x}\left(x^2 - 1\right) &\quad \geq \quad 0 \\
x \geq 1 &\quad \text{vagy} \quad -1 \leq x < 0.
\end{aligned}$$

Így az f függvény

— a $] - \infty, -1[$ intervallumon monoton csökkenő;

— a $[-1, 0[$ intervallumon monoton növekedő;

— a $]0, 1]$ intervallumon monoton csökkenő;

— az $]1, +\infty]$ intervallumon monoton növekedő.

□

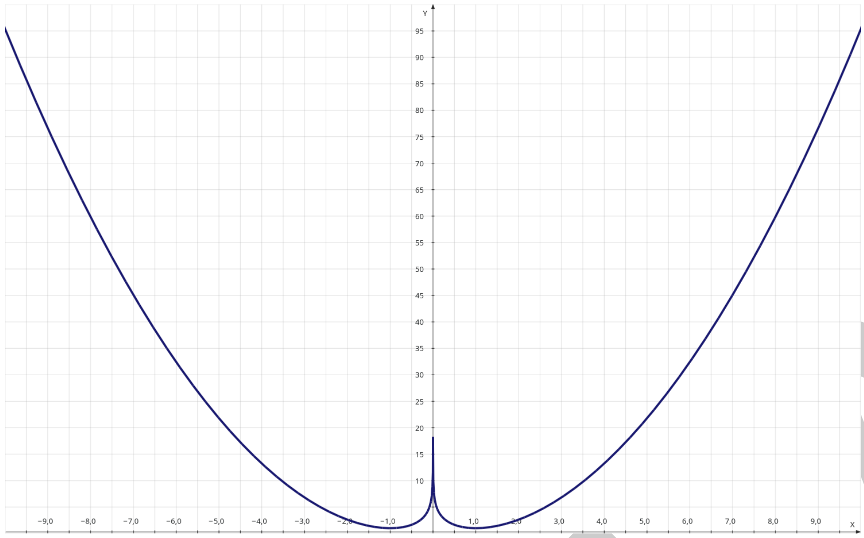
2. Határozd meg az

$$f(x) = \left(x^2 - 5x + 7\right) e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

módon megadott függvény stacionárius pontjait és osztályozd azokat.

(10 pont)

Megoldás. A megoldás során az alábbi két állítást fogjuk alkalmazni.



1. Ha az $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in]a, b[$ pontban lokális minimuma/maximuma van, és f differenciálható az x_0 pontban, akkor $f'(x_0) = 0$.
2. Ha az $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvény k-szor differenciálható ($k > 1$), és $f'(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$ és $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, akkor
   — ha k páratlan, akkor $f(x_0)$ nem szélsőérték;
   — ha k páros, akkor
     - ha $f^{(k)}(x_0) > 0$, akkor $f(x_0)$ szigorú lokális minimum;
     - ha $f^{(k)}(x_0) < 0$, akkor $f(x_0)$ szigorú lokális maximum.

Legyen

$$f(x) = \left(x^2 - 5x + 7\right) e^x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

ekkor

$$f'(x) = \left(x^2 - 3x + 2\right) e^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Így az f függvény stacionárius pontjainak meghatározásához meg kell oldanunk az

$$f'(x) = 0$$

egyenletet. Mivel

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \left(x^2 - 3x + 2\right) e^x &= 0 \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ x_1 = 1 \quad &\text{és} \quad x_2 = 2, \end{aligned}$$

ezért az f függvénynek két stacionárius pontja van, az egyik $x_1 = 1$, míg a másik $x_2 = 2$. Mivel

$$f''(x) = \left(x^2 - x - 1\right) e^x$$

és

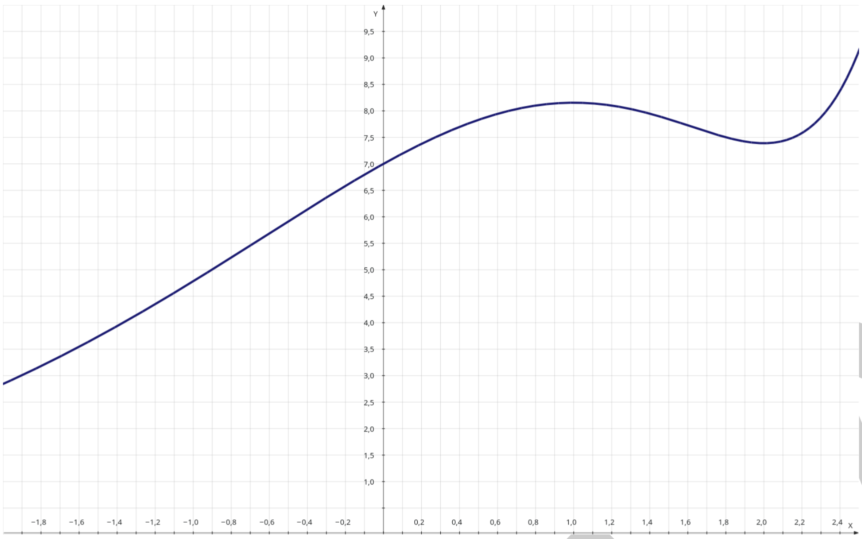
$$f''(1) = -e < 0 \qquad \text{és} \qquad f''(2) = e^2 > 0,$$

ezért az $x_1 = 1$ pont lokális maximumhely, az $x_2 = 2$ pont pedig lokális minimumhely.

□

3. Számítsd ki az alábbi határozatlan integrálokat.

Kalkulus | **Második zárthelyi dolgozat mintadolgozatának megoldásai** | **2022. január 10.**



(a)
$$\int 5^x + 5e^x + 5\sin(x) - 5\cosh(x) - \frac{5}{x} + x^5 dx$$

(b)
$$\int x\ln(x) + x^2e^x dx$$

(c)
$$\int \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1}dx$$

(d)
$$\int \frac{x+2}{x^2-1}dx$$

(e)
$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$$

(5 – 5 pont)

Megoldás. (a)
$$\int 5^x + 5e^x + 5\sin(x) - 5\cosh(x) - \frac{5}{x} + x^5 dx$$
$$= \frac{5^x}{\ln(5)} + 5e^x - 5\cos(x) - 5\sinh(x) - 5\ln|x| + \frac{x^6}{6} + C.$$

(b) A parciális integrálás tétele szerint ha az $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak $]a, b[$-n, és létezik $\int f' \cdot g$, akkor létezik $\int f \cdot g'$ is, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$ konstans, hogy
$$\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx + C \quad (x \in]a, b[)\,.$$

Így,
$$\int x\ln(x)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln(x)}{x} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

és
$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - \int 2xe^xdx$$
$$= x^2e^x - 2\left[xe^x - \int 1\cdot e^xdx\right] = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = (x^2-2x+2)e^x + C.$$

Ezért

$$\int x\ln(x) + x^2e^x dx = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + (x^2-2x+2)e^x + C.$$

(c) Azt fogjuk használni, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos $[a,b]$-n, $f(x) \neq 0$ $(x \in [a,b])$, f differenciálható $]a,b[$-n, akkor az $\frac{f'}{f}$ függvénynek létezik a primitív függvénye, és létezik olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\left(|f(x)|\right) + C.$$

Legyen ugyanis

$$f(x) = e^{x^2} + 1,$$

ekkor

$$f'(x) = 2xe^{x^2}.$$

Ezért

$$\int \frac{xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{1}{2}\ln\left(|f(x)|\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\left|e^{x^2}+1\right|\right) + C.$$

(d) Az integrandust

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

alakban keressünk, ahol az A, B valós számok egyelőre még ismeretlenek. Közös nevezőre hozva,

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{(A+B)x + (A-B)}{x^2-1},$$

vagyis

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 2 \end{cases}$$

Ennek az egyenletrendszernek a megoldása

$$A = \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad B = -\frac{1}{2},$$

ezért

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}.$$

Mindezekből azonban az adódik, hogy

$$\int \frac{x+2}{x^2-1} dx = \int \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} dx = \frac{3}{2}\ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\ln(|x+1|) + C.$$

(e) A helyettesítéses integrálás tétele szerint ha $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $g :]c,d[\to \mathbb{R}$ olyan függvények, melyek esetén létezik $g' :]c,d[\to]a,b[$ és létezik $\int f$ is, akkor létezik $\int (f \circ g) \cdot g'$ is, és van olyan $C \in \mathbb{R}$, hogy

$$\int f\left(g(x)\right) \cdot g'(x) dx = \left(\left(\int f\right) \circ g\right)(x) + C = \int f(t)dt\Big|_{t=g(x)} + C \quad (x \in]c,d[).$$

Legyen

$$t = e^x = g^{-1}(x) \implies x = g(t) = \ln(t) \implies g'(t) = \frac{1}{t}.$$

Ebben az esetben

$$\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{1}{t+\frac{1}{t}}\cdot\frac{1}{t}dt\Bigg|_{t=g^{-1}(x)}$$

$$= \int \frac{1}{t^2+1}dt\Big|_{t=g^{-1}(x)} = \operatorname{arctg}(t)+C\Big|_{t=e^x} = \operatorname{arctg}(e^x)+C.$$

□

4. Határozd meg a következő Riemann-integrál értékét.

$$\int_1^2 (3x+4)^3 dx.$$

(5 pont)

Megoldás. A helyettesítéses integrálás tétele szerint ha $\varphi\colon [a,b]\to[A,B]$ egy olyan szigorúan monoton növekedő, folytonosan differenciálható függvény, melyre $\varphi(a)=A$ és $\varphi(b)=B$. Ha az $f\colon[\varphi(a),\varphi(b)]\to\mathbb{R}$ függvény folytonos, akkor

$$\int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int\limits_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt.$$

Ebben az esetben legyen

$$t=\varphi^{-1}(x)=3x+4 \implies x=\varphi(t)=\frac{t-4}{3} \implies \varphi'(t)=\frac{1}{3}$$

és

$$\varphi(a)=1 \implies a=7 \text{ és } \varphi(b)=2 \implies b=10.$$

Ezért

$$\int\limits_1^2 (3x+4)^3dx = \int\limits_7^{10} t^3\cdot\frac{1}{3}dt = \left[\frac{t^4}{12}\right] = \frac{10^4-7^4}{12} = 633,25.$$

□

5. Vizsgáld meg, hogy konvergens-e az

$$\int_{-\infty}^1 e^x dx$$

improprius integrál.

(5 pont)

Megoldás. Tetszőleges $x\in]-\infty,1]$ esetén az

$$f(t)=e^t \qquad (t\in[x,1])$$

függvény Riemann-integrálható az $[x, 1]$ intervallumon és

$$F(x) = \int_x^1 f(t)dt = \int_x^1 e^t dt = [e^t]_x^1 = e - e^x.$$

Mivel

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} e - e^x = e,$$

ezért az $\int\limits_{-\infty}^{1} e^x dx$ improprius integrál konvergens és

$$\int\limits_{-\infty}^{1} e^x dx = e.$$

$\square$

*A dolgozat **legalább 33 pont** megszerzése esetén tekinthető sikeresnek.*