Valós függvények differenciálszámítása I.

A gyakorlat célja

Ebben a gyakorlatban a valós analízis egyik legfontosabb fogalmával, a differenciálhatósággal fogunk megismerkedni. Mint azt majd látni fogjuk ez egy nagyon algoritmikus dolog. Ahhoz azonban, hogy ez menjen nagyon fontos, hogy pontosan tudjuk az úgynevezett differenciálási szabályokat (lásd a Kalkulus előadásjegyzet 8.2 fejezetét), illetve a legfontosabb elemi függvények differenciálhányados-függvényeit.

Felhasznált elméleti anyag

A feladatok megoldásához szükséges elméleti állítások:

(a) a differenciálhatóság definíciója (8.1.2 Definíció)

(b) differenciálási szabályok (8.2.1, 8.2.2 és 8.2.3 Tételek)

(c) néhány elemi függvény differenciálhányados-függvénye (8.2 fejezet végén található)

1. Feladat. *A differenciálhányados definíciójából kiindulva határozzunk meg az alábbi függvények differenciálhányados-függvényeit.*

Útmutatás. *A megoldások során a következő definíciót fogjuk használni.*

1. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum, $x_0 \in I$. Azt mondjuk, hogy az $f\colon I \to \mathbb{R}$ függvény az $x_0 \in I$ pontban **differenciálható**, ha létezik és véges az alábbi határérték*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

□

(a)

$$x^2$$

Megoldás. *A fenti definíció felhasználásával azt fogjuk megmutatni, hogy ez a függvény az értelmezési tartománya minden pontjában differenciálható. Ehhez legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Azt kell megmutatni, hogy létezik és véges a*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték.

Ebben az esetben

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \qquad (x, x_0 \in \mathbb{R}, x \neq x_0)\,.$$

Ha tagonként számolnánk ki a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapnánk, hogy

$$\lim_{x \to x_0} \left(x^2 - x_0^2\right) = x_0^2 - x_0^2 = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0,$$

azaz, így nem tudjuk kiszámítani a fenti határértéket. Vegyük azonban észre, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow{x \to x_0} = 2x_0.$$

Ez azt mutatja, hogy a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *határérték létezik és véges. Így az f függvény differenciálható az* x_0 *pontban és*

$$f'(x_0) = 2x_0.$$

Mivel az $x_0 \in \mathbb{R}$ *pont tetszőleges volt, azért az f függvény minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban differenciálható és*

$$f'(x) = 2x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

□

(b)

$$x^3$$

Megoldás. *A fenti definíció felhasználásával azt fogjuk megmutatni, hogy ez a függvény az értelmezési tartománya minden pontjában differenciálható. Ehhez legyen* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tetszőleges. Azt kell megmutatni, hogy létezik és véges a*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

határérték.

Ebben az esetben

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} \qquad (x, x_0 \in \mathbb{R}, x \neq x_0).$$

Ha tagonként számolnánk ki a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapnánk, hogy

$$\lim_{x\to x_0} \left(x^3 - x_0^3\right) = x_0^3 - x_0^3 = 0 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = 0,$$

azaz, így nem tudjuk kiszámítani a fenti határértéket. Vegyük azonban észre, hogy

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^3-x_0^3}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2)}{x-x_0} = x^2 + xx_0 + x_0^2 \xrightarrow{x\to x_0} = 3x_0^2.$$

Ez azt mutatja, hogy a $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *határérték létezik és véges. Így az f függvény differenciálható az* x_0 *pontban és*

$$f'(x_0) = 3x_0^2.$$

Mivel az $x_0 \in \mathbb{R}$ *pont tetszőleges volt, azért az f függvény minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban differenciálható és*

$$f'(x) = 3x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

□

(c)

$$\frac{1}{x}$$

Megoldás. *A fenti definíció felhasználásával azt fogjuk megmutatni, hogy ez a függvény az értelmezési tartománya minden pontjában differenciálható. Ehhez legyen* $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ *tetszőleges. Azt kell megmutatni, hogy létezik és véges a*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

határérték.

Ebben az esetben

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} \qquad (x, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \neq x_0).$$

Ha tagonként számolnánk ki a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapnánk, hogy

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} = 0 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to x_0}(x - x_0) = 0,$$

azaz, így nem tudjuk kiszámítani a fenti határértéket. Vegyük azonban észre, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \frac{\frac{x_0 - x}{x x_0}}{x - x_0} = (-1)\frac{x - x_0}{x x_0} \cdot \frac{1}{x - x_0} \xrightarrow{x\to x_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Ez azt mutatja, hogy a $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *határérték létezik és véges. Így az f függvény differenciálható az* x_0 *pontban és*

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Mivel az $x_0 \in \mathbb{R}$ *pont tetszőleges volt, azért az f függvény minden* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *pontban differenciálható és*

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}. \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

□

(d)

$$\sqrt{x}$$

Megoldás. *A fenti definíció felhasználásával azt fogjuk megmutatni, hogy ez a függvény az értelmezési tartománya minden pontjában differenciálható. Ehhez legyen* $x_0 \in]0, +\infty[$ *tetszőleges. Azt kell megmutatni, hogy létezik és véges a*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték.

Ebben az esetben

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} \qquad (x, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \neq x_0).$$

Ha tagonként számolnánk ki a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapnánk, hogy

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} - \sqrt{x_0} = 0 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to x_0}(x - x_0) = 0,$$

azaz, így nem tudjuk kiszámítani a fenti határértéket. Vegyük azonban észre, hogy

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \xrightarrow{x\to x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Ez azt mutatja, hogy a $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *határérték létezik és véges. Így az f függvény differenciálható az* x_0 *pontban és*

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Mivel az $x_0 \in]0, +\infty[$ *pont tetszőleges volt, azért az f függvény minden* $x \in]0, +\infty[$ *pontban differenciálható és*

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \qquad (x \in]0, +\infty[).$$

□

(e)

$$\sqrt[3]{x}.$$

2. Feladat. *Számítsuk ki az $f'(1), f'(2)$ és $f'(3)$ értékeket, ha*

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Megoldás. Ebben a feladatban is a differenciálhatóság definícióját fogjuk használni. Azonban vegyük észre, hogy ha

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3 \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor

$$f(1) = 0 \quad f(2) = 0 \quad \text{és} \quad f(3) = 0,$$

ezért

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3}{(x-1)} = \lim_{x\to 1}(x-2)^2(x-3)^3 = (+1)\cdot(-8) = 8,$$

és

$$f'(2) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3}{(x-2)} = \lim_{x\to 2}(x-1)(x-2)(x-3)^3 = 1\cdot 0\cdot -1 = 0,$$

valamint

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(1)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}(x-1)(x-2)^2(x-3)^2 = 2\cdot 1\cdot 0 = 0.$$

□

3. Feladat. *Legyen* $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 2x$ $(x \in \mathbb{R})$. *Milyen* $x_0 \in \mathbb{R}$ *értékekre teljesül, hogy ...*

Útmutatás. A megoldás során azt fogjuk használni, hogy tetszőleges, de rögzített $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az x^α függvény differenciálható és

$$[x^\alpha]' = \alpha \cdot x^{\alpha-1},$$

valamint azt, hogy a differenciálás lineáris, másszóval az alábbi tételt.

1. Tétel. *Legyen* $I \subset \mathbb{R}$ *nemüres, nyílt intervallum és* $x_0 \in I$. *Ha az* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *függvények differenciálhatóak az* $x_0 \in I$ *pontban, akkor az* $f + g$, $\lambda \cdot f$ *(*$\lambda \in \mathbb{R}$ *tetszőleges konstans) függvények is differenciálhatóak az* x_0 *pontban, továbbá*

(i)

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(ii)

$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$$

□

Megoldás. A fentieknek megfelelően, ha

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

akkor az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban differenciálható és

$$f'(x_0) = x_0^2 + x_0 - 2.$$

Ezt felhasználva

(a)

$$f'(x_0) = 0$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$x_0^2 + x_0 - 2 = 0.$$

Ezt a másodfokú egyenletet megoldva azt kapjuk, hogy $x_0 = 1$ vagy $x_0 = -2$.

(b)

$$f'(x_0) = -2$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$x_0^2 + x_0 - 2 = -2.$$

Ezt a másodfokú egyenletet megoldva azt kapjuk, hogy $x_0 = -1$ vagy $x_0 = 0$.

(c)

$$f'(x_0) = 10$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$x_0^2 + x_0 - 2 = 10.$$

Ezt a másodfokú egyenletet megoldva azt kapjuk, hogy $x_0 = -4$ vagy $x_0 = 3$.

(d)

$$f'(x_0) = -\pi.$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$x_0^2 + x_0 - 2 = -\pi.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek a **valós** számok körében nincs megoldása. Így nem létezik olyan $x_0 \in \mathbb{R}$, melyre $f'(x_0) = -\pi$ teljesülne.

□

4. Feladat. *Határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

Útmutatás. A megoldás során azt fogjuk használni, hogy tetszőleges, de rögzített $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén az x^α függvény differenciálható és

$$[x^\alpha]' = \alpha \cdot x^{\alpha-1},$$

valamint azt, hogy a differenciálás lineáris, másszóval az alábbi tételt.

2. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum és $x_0 \in I$. Ha az $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in I$ pontban, akkor az $f + g$, $\lambda \cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans) függvények is differenciálhatóak az x_0 pontban, továbbá*

(i)
$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(ii)
$$(\lambda \cdot f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$$

□

Megoldás. (a)

$$\left[4x^3\right]' = 4 \cdot \left[x^3\right]' = 4 \cdot 3x^3 = 12x^2$$

(b)

$$\left[6x^2 - x^4\right]' = 6\left[x^2\right]' - \left[x^4\right]' = 6 \cdot 2x - 4x^3 = 12x - 4x^3$$

(c)

$$\left[x^3 + x^2 + x + 1\right]' = \left[x^3\right]' + \left[x^2\right]' + [x]' + [1]' = 3x^2 + 2x + 1 + 0$$

(d)

$$\left[x^3 - \sqrt[3]{x} + 3x\right]' = \left[x^3\right]' - \left[x^{\frac{1}{3}}\right]' + 3\,[x]' = 3x^2 + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 3$$

(e)

$$\left[1 - x^3\right]' = 0 - 3x^2$$

(f)

$$\left[\sqrt[3]{x^2}\right]' = \left[x^{\frac{2}{3}}\right]' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

(g)

$$\left[\sqrt[7]{x^5} + \sqrt{x}\right]' = \left[x^{\frac{5}{7}} + x^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{5}{7}x^{-\frac{2}{7}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

(h)

$$\left[8\sqrt[4]{x^3}\right]' = \left[8x^{\frac{3}{4}}\right]' = 8 \cdot \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$$

(i)

$$\left[4x^2 - 16\sqrt[4]{x^2}\right]' = \left[4x^2 - 16x^{\frac{1}{2}}\right]' = 8x - 8x^{-\frac{1}{2}}$$

(j)

$$\left[x^9 + \sqrt{x}\right]' = \left[x^9 + x^{\frac{1}{2}}\right]' = 9x^8 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

(k)

$$\left[x^7\right]' = 7x^6$$

(l)

$$\left[x^{-4}\right]' = (-4)x^{-5}$$

(m)

$$\left[\frac{1}{x^6}\right]' = \left[x^{-6}\right]' = (-6)x^{-7}$$

(n)

$$\left[\sqrt[3]{x}\right]' = \left[x^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

(o)

$$\left[\frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}\right]' = \left[2x^{-\frac{3}{4}}\right]' = 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{7}{4}}$$

(p)

$$\left[\frac{x^4}{\sqrt[3]{x}}\right]' = \left[x^4 \cdot x^{-\frac{1}{3}}\right]' = \left[x^{\frac{11}{3}}\right]' = \frac{11}{3}x^{\frac{8}{3}}$$

(q)

$$\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right]' = \left[x^{-\frac{2}{3}}\right]' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$$

(r)

$$\left[\sqrt{x\sqrt[3]{x}}\right]' = \left[\left(x \cdot x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \left[x^{\frac{2}{3}}\right]' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

(s)

$$\left[\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[6]{x}}}\right]' = \left[\left(\left((x)^{\frac{1}{6}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \left[x^{\frac{1}{36}}\right]' = \frac{1}{36}x^{-\frac{35}{36}}$$

(t)

$$\left[\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\right]' = \left[x^{-\frac{4}{3}}\right]' = \left(-\frac{4}{3}\right)x^{-\frac{7}{3}}$$

(u)

$$\left[\frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}\right]' = \left[3x^{\frac{13}{10}}\right]' = 3\cdot\frac{13}{10}x^{\frac{3}{10}}$$

□

5. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányados-függvényeit.*

Megoldás. (a)

$$\left[x^{11} + x^{\frac{1}{11}} - 11x + \sqrt[110]{x}\right]' = 11x^{10} + \frac{1}{11}x^{-\frac{10}{11}} - 11 + \frac{1}{110}x^{-\frac{109}{110}}$$

(b)

$$\left[x^5 - 4x^{10} + 5x^6\right]' = 5x^4 - 4\cdot 10x^9 + 5\cdot 6x^5$$

(c)

$$\left[x^{100} + x^{10} + x + x^{-10}\right]' = 100x^{99} + 10x^9 + 1 + (-10)x^{-11}$$

(d)

$$\left[\frac{5}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^4}\right]' = \left[5x^{-2} + 2x^{-\frac{1}{2}} + 3x^{-4}\right]' = 5\cdot(-2)x^{-3} + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} + 3\cdot(-4)x^{-5}$$

(e)

$$\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right]' = \left[x^{-1}, +x^{-\frac{1}{2}} + x^{-2}\right]' = (-1)x^{-2} + \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} + (-2)x^{-3}$$

(f)

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right]' = \left[x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{3}{4}}\right]' = \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} + \left(-\frac{3}{4}\right)x^{-\frac{7}{4}}$$

(g)

$$\left[5x^6 + 4x^4 - 3x^3\right]' = 5\cdot 6x^5 + 4\cdot 4x^3 - 3\cdot 3x^2$$

(h)

$$\left[4x^7 + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right]' = \left[4x^7 + x^{-3} - x^{-\frac{1}{2}}\right]' = 7\cdot 7x^6 + (-3)x^{-4} - \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$$

(i)

$$\left[4x^4 - x^2 + 0,96\right]' = 4\cdot 4x^3 - 2x + 0$$

(j)

$$\left[3x\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt[6]{x}} + 2\right]' = \left[3x^{\frac{3}{2}} - 5x^{-\frac{1}{6}} + 2\right]' = 3\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 5\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)x^{-\frac{7}{6}} + 0$$

(k)

$$\left[\frac{3x^2 + 2x^3}{\sqrt{x}}\right]' = \left[3x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{5}{2}}\right]' = 3\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 2\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

(l)

$$\left[\frac{5\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}}{x^2}\right]' = \left[5x^{-\frac{3}{2}} - 6x^{-\frac{5}{3}}\right]' = 5\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} - 6\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)x^{-\frac{8}{3}}$$

□

6. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi függvények differenciálhányados függvényeit.*

Megoldás. (a)

$$\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^4}{2}+\frac{13x^5}{5}-2x^6+\frac{4x^7}{4}\right]'=7\,x^6-12\,x^5+13\,x^4-6\,x^3+x^2$$

(b)

$$\left[3x^{\frac{7}{3}}-4x^{\frac{13}{4}}+9x^{\frac{2}{3}}-6x^{\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}}-\frac{4}{7}x^{-\frac{7}{2}}\right]'=-13\,x^{\frac{9}{4}}+7\,x^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{x^{\frac{1}{3}}}-\frac{3}{\sqrt{x}}-\frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{2}{x^{\frac{9}{2}}}$$

(c)

$$\left[\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{5}+\frac{m}{n}\sqrt[m]{x^n}-\frac{p}{\sqrt[p]{x^q}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right]'$$
$$=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+2\cdot(-3)x^{-4}+\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)x^{\frac{2}{3}}+\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}-p\cdot\left(-\frac{q}{p}\right)x^{-\frac{q}{p}-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}$$

(d)

$$\left[27x^3-\frac{81x^2\sqrt[3]{x^2}}{2}+12x^2+\frac{12x\sqrt[3]{x^2}}{2}\right]'=27\cdot 3x^2-\frac{81}{2}\cdot\frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}}+12\cdot 2x+\frac{12}{2}\cdot\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

(e)

$$\left[\frac{5x^2}{\sqrt[5]{x^2}}+30\sqrt[15]{x}+\frac{6}{\sqrt[3]{x}}\right]'=5\frac{8}{5}x^{\frac{3}{5}}+20\frac{1}{15}x^{-\frac{14}{15}}+6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}$$

(f)

$$\left[x\sqrt[6]{x^5}-\frac{18x^2\sqrt[6]{x^5}}{17}+\frac{3x^3\sqrt[3]{x}}{10}\right]'=\frac{11}{6}x^{\frac{5}{6}}-\frac{18}{17}\frac{17}{6}x^{\frac{11}{6}}+\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{3}x^{\frac{7}{3}}$$

7. Feladat. *A szorzat differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

Útmutatás. A megoldások során a szorzat differenciálási szabályát, vagyis a következő állítást fogjuk használni.

3. Tétel. *Legyen $I\subset\mathbb{R}$ nemüres, nyílt halmaz és $x_0\in I$. Ha az $f,g\colon I\to\mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0\in I$ pontban, akkor az $f\cdot g$ függvény is differenciálható az x_0 pontban, továbbá*

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)\,.$$

(a)

$$-\frac{1}{2}x(x^2-2)$$

Megoldás. Legyen

$$f(x)=-\frac{1}{2}x \qquad \text{és} \qquad g(x)=x^2-1,$$

ekkor

$$f(x)\cdot g(x)=-\frac{1}{2}x(x^2-2),$$

és

$$f'(x)=-\frac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad g'(x)=2x,$$

ezért

$$\left[-\frac{1}{2}x(x^2-2)\right]'=-\frac{1}{2}\cdot\left(x^2-1\right)+\left(-\frac{1}{2}x\right)\cdot(2x)\,,$$

(b)

$$(4x^2 + x - 1)(x^2 + 3x + 5)$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = 4x^2 + x - 1 \qquad \text{és} \qquad g(x) = x^2 + 3x + 5,$$

ekkor

$$f(x) \cdot g(x) = (4x^2 + x - 1)(x^2 + 3x + 5),$$

és

$$f'(x) = 8x + 1 \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 2x + 3,$$

ezért

$$\left[(4x^2 + x - 1)(x^2 + 3x + 5)\right]' = (8x + 1) \cdot \left(x^2 + 3x + 5\right) + \left(4x^2 + x - 1\right) \cdot (2x + 3)\,.$$

□

(c)

$$(ax - 1)(x^2 + 5x + 6)$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = ax - 1 \qquad \text{és} \qquad g(x) = x^2 + 5x + 6,$$

ekkor

$$f(x) \cdot g(x) = (ax - 1)(x^2 + 5x + 6),$$

és

$$f'(x) = a \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 2x + 5,$$

ezért

$$\left[(ax - 1)(x^2 + 5x + 6)\right]' = a \cdot \left(x^2 + 5x + 6\right) + (ax - 1) \cdot (2x + 5)\,,$$

□

(d)

$$(\sqrt{x} - 1)\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}\right)$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = \sqrt{x} - 1 \qquad \text{és} \qquad g(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x},$$

ekkor

$$f(x) \cdot g(x) = (\sqrt{x} - 1)\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}\right),$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}},$$

ezért

$$\left[(\sqrt{x} - 1)\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}\right)\right]' = \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{x}\right) + \left(\sqrt{x} - 1\right) \cdot \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\right),$$

□

(e)

$$(x^2 + 10)\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 3\right)$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = x^2 + 10 \qquad \text{és} \qquad g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 3,$$

ekkor

$$f(x) \cdot g(x) = (x^2 + 10)\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 3\right),$$

és

$$f'(x) = 2x \qquad \text{és} \qquad g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}},$$

ezért

$$\left[(x^2 + 10)\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 3\right)\right]' = 20 \cdot \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 3\right) + \left(x^2 + 10\right) \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}\right),$$

□

(f)

$$e^x \sqrt{x}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = e^x \qquad \text{és} \qquad g(x) = \sqrt{x},$$

ekkor

$$f(x) \cdot g(x) = e^x \sqrt{x},$$

és

$$f'(x) = e^x \qquad \text{és} \qquad g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

ezért

$$\left[e^x \sqrt{x}\right]' = e^x \cdot \sqrt{x} + e^x \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

□

(g)

$$(x^2 + x + 1)\ln(x)$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = x^2 + x + 1 \qquad \text{és} \qquad g(x) = \ln(x),$$

ekkor

$$f(x) \cdot g(x) = (x^2 + x + 1)\ln(x),$$

és

$$f'(x) = 2x + 1 \qquad \text{és} \qquad g'(x) = \frac{1}{x},$$

ezért

$$\left[(x^2 + x + 1)\ln(x)\right]' = (2x + 1) \cdot \ln(x) + \left(x^2 + x + 1\right) \cdot \frac{1}{x}.$$

□

(h)

$$\ln(x)(e^x - 2^x)$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = \ln(x) \qquad \text{és} \qquad g(x) = e^x - 2^x,$$

ekkor

$$f(x) \cdot g(x) = \ln(x)(e^x - 2^x),$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = e^x - 2^x \ln(2),$$

ezért

$$[\ln(x)(e^x - 2^x)]' = \frac{1}{x} \cdot (e^x - 2^x) + \ln(x) \cdot (e^x - 2^x \ln(2)) .$$

□

(i)

$$2^x \cdot x^2 - 10$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = 2^x \qquad \text{és} \qquad g(x) = x^2,$$

ekkor

$$f(x) \cdot g(x) = 2^x x^2,$$

és

$$f'(x) = 2^x \ln(2) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 2x,$$

ezért

$$\left[2^x x^2 - 10\right]' = 2^x \ln(2) \cdot x^2 + 2^x \cdot 2x.$$

□

(j)

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = x - 1 \qquad \text{és} \qquad g(x) = (x-2)(x-3),$$

ekkor

$$f(x) \cdot g(x) = (x-1)(x-2)(x-3),$$

és

$$f'(x) = 1.$$

A g függvény differenciálhányados-függvényének meghatározásához legyen

$$u(x) = x - 2 \qquad \text{és} \qquad v(x) = x - 3,$$

ekkor

$$u'(x) = 1 \qquad \text{és} \qquad v'(x) = 1,$$

így

$$g'(x) = [u(x)v(x)]' = 1 \cdot (x-3) + (x-2) \cdot 1.$$

Végül

$$[(x-1)(x-2)(x-3)]' = 1 \cdot \{(x-2)(x-3)\} + (x-1) \cdot \{1 \cdot (x-3) + (x-2) \cdot 1\} .$$

□

(k)

$$(a + bx)(c + dx)$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = a + bx \qquad \text{és} \qquad g(x) = c + dx,$$

ekkor

$$f(x) \cdot g(x) = (a + bx)(c + dx),$$

és

$$f'(x) = b \qquad \text{és} \qquad g'(x) = d,$$

ezért

$$[(a + bx)(c + dx)]' = b \cdot (c + dx) + (a + bx) \cdot d.$$

□

(l)

$$e^x \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = e^x \qquad \text{és} \qquad g(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6,$$

ekkor

$$f(x) \cdot g(x) = e^x \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right),$$

és

$$f'(x) = e^x \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 3x^2 - 6x + 6,$$

ezért

$$\left[e^x \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)\right]' = e^x \cdot \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right) + e^x \cdot \left(3x^2 - 6x + 6\right).$$

□

(m)

$$e^{ax} \left(a \sin(x) - \cos(x)\right)$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = e^{ax} \qquad \text{és} \qquad g(x) = a \sin(x) - \cos(x),$$

ekkor

$$f(x) \cdot g(x) = e^{ax} \left(a \sin(x) - \cos(x)\right),$$

és

$$f'(x) = e^{ax} \cdot a \qquad \text{és} \qquad g'(x) = a \cos(x) + \sin(x),$$

ezért

$$\left[e^{ax} \left(a \sin(x) - \cos(x)\right)\right]' = \left(e^{ax} a\right) \cdot \left(a \sin(x) - \cos(x)\right) + e^{ax} \cdot \left(a \cos(x) + \sin(x)\right).$$

□

(n)

$$e^{ax} \left(a \cos(x) + \sin(x)\right)$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = e^{ax} \qquad \text{és} \qquad g(x) = a \cos(x) + \sin(x),$$

ekkor

$$f(x) \cdot g(x) = e^{ax} \left(a \cos(x) + \sin(x)\right),$$

és

$$f'(x) = e^{ax} \cdot a \qquad \text{és} \qquad g'(x) = -a \sin(x) + \cos(x),$$

ezért

$$\left[e^{ax} \left(a \cos(x) + \sin(x)\right)\right]' = \left(e^{ax} a\right) \cdot \left(a \cos(x) + \sin(x)\right) + e^{ax} \cdot \left(-a \sin(x) + \cos(x)\right).$$

□

(o)

$$x^3\left(\frac{2x^2\sqrt{x}}{11}-\frac{27x}{23\sqrt[6]{x}}+\frac{16}{3}\right)$$

Megoldás. Legyen

$$f(x)=x^3 \qquad \text{és} \qquad g(x)=\frac{2x^2\sqrt{x}}{11}-\frac{27x}{23\sqrt[6]{x}}+\frac{16}{3},$$

ekkor

$$f(x)\cdot g(x)=x^3\left(\frac{2x^2\sqrt{x}}{11}-\frac{27x}{23\sqrt[6]{x}}+\frac{16}{3}\right),$$

és

$$f'(x)=3x^2 \qquad \text{és} \qquad g'(x)=\frac{2}{11}\cdot\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}-\frac{27}{23}}\cdot\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}+0,$$

ezért

$$\left[x^3\left(\frac{2x^2\sqrt{x}}{11}-\frac{27x}{23\sqrt[6]{x}}+\frac{16}{3}\right)\right]'=3x^2\cdot\left(\frac{2x^2\sqrt{x}}{11}-\frac{27x}{23\sqrt[6]{x}}+\frac{16}{3}\right)+x^3\cdot\left(\frac{2}{11}\cdot\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}-\frac{27}{23}}\cdot\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}\right).$$

□

(p)

$$\sqrt[3]{x}\left(\frac{x\sqrt[3]{x}}{5}+\frac{18x\sqrt{x}}{11}+\frac{27\sqrt[6]{x^5}}{7}\right)$$

Megoldás. Legyen

$$f(x)=\sqrt[3]{x} \qquad \text{és} \qquad g(x)=\frac{x\sqrt[3]{x}}{5}+\frac{18x\sqrt{x}}{11}+\frac{27\sqrt[6]{x^5}}{7},$$

ekkor

$$f(x)\cdot g(x)=\sqrt[3]{x}\left(\frac{x\sqrt[3]{x}}{5}+\frac{18x\sqrt{x}}{11}+\frac{27\sqrt[6]{x^5}}{7}\right),$$

és

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \qquad \text{és} \qquad g'(x)=\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{18}{11}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{27}{2}\cdot\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}},$$

ezért

$$\left[\sqrt[3]{x}\left(\frac{x\sqrt[3]{x}}{5}+\frac{18x\sqrt{x}}{11}+\frac{27\sqrt[6]{x^5}}{7}\right)\right]'$$
$$=\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)\cdot\left(\frac{x\sqrt[3]{x}}{5}+\frac{18x\sqrt{x}}{11}+\frac{27\sqrt[6]{x^5}}{7}\right)+\sqrt[3]{x}\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}+\frac{18}{11}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{27}{2}\cdot\frac{5}{6}x^{-\frac{1}{6}}\right).$$

□

(q)

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{100}}+x^{100}\right)$$

Megoldás. Legyen

$$f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad \text{és} \qquad g(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{100}}+x^{100},$$

ekkor

$$f(x)\cdot g(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{100}}+x^{100}\right),$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = (-1)x^{-2} + (-100)x^{-101} + 100x^{99},$$

ezért

$$\left[\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{100}} + x^{100}\right)\right]'$$
$$= \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^{100}} + x^{100}\right) + \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left((-1)x^{-2} + (-100)x^{-101} + 100x^{99}\right).$$

□

(r)

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}\right)(\sin(x) + \sinh(x) - 1)$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} \qquad \text{és} \qquad g(x) = \sin(x) + \sinh(x) - 1,$$

ekkor

$$f(x) \cdot g(x) = \left(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}\right)(\sin(x) + \sinh(x) - 1),$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = \cos(x) + \cosh(x),$$

ezért

$$\left[\left(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}\right)(\sin(x) + \sinh(x) - 1)\right]'$$
$$= \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\right) \cdot (\sin(x) + \sinh(x) - 1) + \left(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}\right) \cdot (\cos(x) + \cosh(x)).$$

□

8. Feladat. *A hányados differenciálási szabályát alkalmazva, határozzuk meg a következő függvények differenciálhányados függvényeit.*

Útmutatás. A megoldások során a hányados differenciálási szabályát fogjuk használni, mely az alábbi állítás.

4. Tétel (Differenciálhatóság és műveletek). *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nemüres, nyílt intervallum és $x_0 \in I$. Ha az $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ függvények differenciálhatóak az $x_0 \in D$ pontban, és ha $g(x) \neq 0$ teljesül az x_0 pont valamely környezetében, akkor az $\frac{f}{g}$ függvény is differenciálható az x_0 pontban, továbbá*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

□

(a)

$$\frac{x-1}{x-2}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = x - 1 \qquad \text{és} \qquad g(x) = x - 1,$$

ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-1}{x-2},$$

és

$$f'(x) = 1 \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 1,$$

ezért

$$\left[\frac{x-1}{x-2}\right]' = \frac{1 \cdot (x-2) - (x-1) \cdot 1}{(x-2)^2}.$$

□

(b)

$$\frac{x}{x+1}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = x \qquad \text{és} \qquad g(x) = x + 1,$$

ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x+1},$$

és

$$f'(x) = 1 \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 1,$$

ezért

$$\left[\frac{x-1}{x-2}\right]' = \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2}.$$

□

(c)

$$\frac{\sqrt{x}}{x+3}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{és} \qquad g(x) = x + 3,$$

ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} =,$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 1,$$

ezért

$$\left[\frac{\sqrt{x}}{x+3}\right]' = \frac{\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot (x+3) - \sqrt{x} \cdot 1}{(x+3)^2}.$$

□

(d)

$$\frac{1-x}{x+5}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = 1 - x \qquad \text{és} \qquad g(x) = x + 5,$$

ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1 - x}{x + 5},$$

és

$$f'(x) = -1 \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 1,$$

ezért

$$\left[\frac{1 - x}{x + 5}\right]' = \frac{(-1) \cdot (x + 5) - (1 - x) \cdot 1}{(x + 5)^2}.$$

□

(e)

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{és} \qquad g(x) = \sqrt{x} + 2,$$

ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2},$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

ezért

$$\left[\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2}\right]' = \frac{\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(\sqrt{x} + 2\right) - \sqrt{x} \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(\sqrt{x} + 2\right)^2}.$$

□

(f)

$$\frac{-x}{1 - x}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = -x \qquad \text{és} \qquad g(x) = 1 - x,$$

ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-x}{1 - x},$$

és

$$f'(x) = -1 \qquad \text{és} \qquad g'(x) = -1,$$

ezért

$$\left[\frac{-x}{1 - x}\right]' = \frac{(-1) \cdot (1 - x) - (-x) \cdot (-1)}{(1 - x)^2}.$$

□

(g)

$$\frac{1}{a^2 - ax + x^2}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = 1 \qquad \text{és} \qquad g(x) = a^2 - ax + x^2,$$

ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{a^2 - ax + x^2},$$

és

$$f'(x) = 0 \qquad \text{és} \qquad g'(x) = -a + 2x,$$

ezért

$$\left[\frac{1}{a^2 - ax + x^2}\right]' = \frac{0 \cdot \left(a^2 - ax + x^2\right) - 1 \cdot (-a + 2x)}{\left(a^2 - ax + x^2\right)^2}.$$

□

(h)

$$\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = a^2 - x^2 \qquad \text{és} \qquad g(x) = a^2 + x^2,$$

ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2},$$

és

$$f'(x) = 2x \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 2x,$$

ezért

$$\left[\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}\right]' = \frac{(2x) \cdot \left(a^2 + x^2\right) - \left(a^2 - x^2\right) \cdot (2x)}{\left(a^2 + x^2\right)^2}.$$

□

(i)

$$\frac{5 + 3x + x^2}{5 - 3x + x^2}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = 5 + 3x + x^2 \qquad \text{és} \qquad g(x) = 5 - 3x + x^2,$$

ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5 + 3x + x^2}{5 - 3x + x^2},$$

és

$$f'(x) = 3 + 2x \qquad \text{és} \qquad g'(x) = -3 + 2x,$$

ezért

$$\left[\frac{5 + 3x + x^2}{5 - 3x + x^2}\right]' = \frac{(3 + 2x) \cdot \left(5 - 3x + x^2\right) - \left(5 + 3x + x^2\right) \cdot (-3 + 2x)}{\left(5 - 3x + x^2\right)^2}.$$

□

(j)

$$\frac{e^x}{x + 1}$$

Megoldás. Legyen
$$f(x) = e^x \qquad \text{és} \qquad g(x) = x + 1,$$
ekkor
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x}{x+1},$$
és
$$f'(x) = e^x \qquad \text{és} \qquad g'(x) = x + 1,$$
ezért
$$\left[\frac{e^x}{x+1}\right]' = \frac{e^x \cdot (x+1) - e^x \cdot 1}{(x+1)^2}.$$
□

(k)
$$\frac{x}{\ln(x)}$$

Megoldás. Legyen
$$f(x) = x \qquad \text{és} \qquad g(x) = \ln(x),$$
ekkor
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\ln(x)},$$
és
$$f'(x) = 1 \qquad \text{és} \qquad g'(x) = \frac{1}{x},$$
ezért
$$\left[\frac{x}{\ln(x)}\right]' = \frac{1 \cdot \ln(x) - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}.$$
□

(l)
$$\frac{\sqrt{x}}{e^x}$$

Megoldás. Legyen
$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{és} \qquad g(x) = e^x,$$
ekkor
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{e^x},$$
és
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = e^x,$$
ezért
$$\left[\frac{\sqrt{x}}{e^x}\right]' = \frac{\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) \cdot e^x - \sqrt{x} \cdot e^x}{(e^x)^2}.$$
□

(m)
$$\frac{e^x}{\sqrt{x}}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = e^x \qquad \text{és} \qquad g(x) = \sqrt{x},$$

ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x}{\sqrt{x}},$$

és

$$f'(x) = e^x \qquad \text{és} \qquad g'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

ezért

$$\left[\frac{e^x}{\sqrt{x}}\right]' = \frac{e^x \cdot \sqrt{x} - e^x \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2}.$$

□

(n)

$$\frac{2 + \ln(x)}{x^2}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = 2 + \ln(x) \qquad \text{és} \qquad g(x) = x^2,$$

ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2 + \ln(x)}{x^2},$$

és

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 2x,$$

ezért

$$\left[\frac{2 + \ln(x)}{x^2}\right]' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (2 + \ln(x)) \cdot 2x}{(x^2)^2}.$$

□

(o)

$$\frac{2e^x - 4}{e^x + 1}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = 2e^x - 4 \qquad \text{és} \qquad g(x) = e^x + 1,$$

ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2e^x - 4}{e^x + 1},$$

és

$$f'(x) = 2e^x \qquad \text{és} \qquad g'(x) = e^x,$$

ezért

$$\left[\frac{2e^x - 4}{e^x + 1}\right]' = \frac{(2e^x) \cdot (e^x + 1) - (2e^x - 4) \cdot e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

□

(p)

$$\frac{e^x - a}{e^x + a}$$

Megoldás. Legyen
$$f(x) = e^x - a \qquad \text{és} \qquad g(x) = e^x + a,$$
ekkor
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^x - a}{e^x + a},$$
és
$$f'(x) = e^x \qquad \text{és} \qquad g'(x) = e^x,$$
ezért
$$\left[\frac{e^x - a}{e^x + a}\right]' = \frac{e^x \cdot (e^x + a) - (e^x - a) \cdot e^x}{(e^x + a)^2}.$$
□

(q)
$$\frac{2^x + x^2}{3^x + x^3}$$

Megoldás. Legyen
$$f(x) = 2^x + x^2 \qquad \text{és} \qquad g(x) = 3^x + x^3,$$
ekkor
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2^x + x^2}{3^x + x^3},$$
és
$$f'(x) = 2^x \ln(2) + 2x \qquad \text{és} \qquad g'(x) = 3^x \ln(3) + 3x^2,$$
ezért
$$\left[\frac{2^x + x^2}{3^x + x^3}\right]' = \frac{(2^x \ln(2) + 2x) \cdot \left(3^x + x^3\right) - \left(2^x + x^2\right) \cdot \left(3^x \ln(3) + 3x^2\right)}{(3^x + x^3)^2}.$$
□

(r)
$$\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}$$

Megoldás. Legyen
$$f(x) = \sin(x) \qquad \text{és} \qquad g(x) = \sinh(x),$$
ekkor
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin(x)}{\sinh(x)},$$
és
$$f'(x) = \cos(x) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = \cosh(x),$$
ezért
$$\left[\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}\right]' = \frac{\cos(x) \cdot \sinh(x) - \sin(x) \cdot \cosh(x)}{(\sinh(x))^2}.$$
□

(s)
$$\frac{\sin(x) + \sinh(x)}{\cos(x) + \cosh(x)}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = \sin(x) + \sinh(x) \qquad \text{és} \qquad g(x) = \cos(x) + \cosh(x),$$

ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin(x) + \sinh(x)}{\cos(x) + \cosh(x)},$$

és

$$f'(x) = \cos(x) + \cosh(x) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = -\sin(x) + \sinh(x),$$

ezért

$$\left[\frac{\sin(x) + \sinh(x)}{\cos(x) + \cosh(x)}\right]' = \frac{(\cos(x) + \cosh(x)) \cdot (\cos(x) + \cosh(x)) - (\sin(x) + \sinh(x)) \cdot (-\sin(x) + \sinh(x))}{(\cos(x) + \cosh(x))^2}.$$

□

(t)

$$\frac{10^x + e^x + \pi^x}{\ln(x) + \sqrt{x} + \sqrt[100]{x}}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = 10^x + e^x + \pi^x \qquad \text{és} \qquad g(x) = \ln(x) + \sqrt{x} + \sqrt[100]{x},$$

ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{10^x + e^x + \pi^x}{\ln(x) + \sqrt{x} + \sqrt[100]{x}},$$

és

$$f'(x) = 10^x \ln(10) + e^x + \pi^x \ln(\pi) \qquad \text{és} \qquad g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{100}x^{-\frac{99}{100}},$$

ezért

$$\left[\frac{10^x + e^x + \pi^x}{\ln(x) + \sqrt{x} + \sqrt[100]{x}}\right]'$$

$$= \frac{(10^x \ln(10) + e^x + \pi^x \ln(\pi)) \cdot \left(\ln(x) + \sqrt{x} + \sqrt[100]{x}\right) - (10^x + e^x + \pi^x) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{100}x^{-\frac{99}{100}}\right)}{\left(\ln(x) + \sqrt{x} + \sqrt[100]{x}\right)^2}.$$

□

(u)

$$\frac{x^2 - 4}{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 1}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = x^2 - 4 \qquad \text{és} \qquad g(x) = \sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 1,$$

ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 4}{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 1},$$

és

$$f'(x) = 2x \qquad \text{és} \qquad g'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}},$$

ezért

$$\left[\frac{x^2 - 4}{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 1}\right]' = \frac{2x \cdot \left(\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 1\right) - \left(x^2 - 4\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} + 1\right)^2}.$$

□

(v)

$$\frac{ax+b}{a-bx+cx^2}$$

Megoldás. Legyen

$$f(x) = ax+b \qquad \text{és} \qquad g(x) = a-bx+cx^2,$$

ekkor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{ax+b}{a-bx+cx^2},$$

és

$$f'(x) = a \qquad \text{és} \qquad g'(x) = -b+2cx,$$

ezért

$$\left[\frac{ax+b}{a-bx+cx^2}\right]' = \frac{a\cdot\left(a-bx+cx^2\right)-(ax+b)\cdot(-b+2cx)}{(a-bx+cx^2)^2}.$$

$\square$