Valós függvények határértéke

Útmutatás.

A megoldások során a határértékre vonatkozó Átviteli elvet fogjuk használni, mely az alábbi állítás.

1. Tétel (Átviteli elv). *Legyen $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, illetve $x_0 \in D'$ és $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Ekkor $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$ pontosan akkor teljesül, ha tetszőleges $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ D–beli, x_0–hoz konvergáló sorozat esetén $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$ teljesül.*

1. Feladat. *Az Átviteli elv felhasználásával igazoljuk az alábbiakat.*

(a)

$$\lim_{x\to 4}(3x-5) = 7,$$

Megoldás. *A fenti tétel jeöléseivel nekünk most*

$$f(x) = 3x-5 \qquad x_0 = 4 \qquad \text{és} \qquad \alpha = 7.$$

*Ennek megfelelően legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy **tetszőleges**, $x_0 = 4$-hez konvergáló sorozat. Ekkor*

$$f(x_n) = 3 \cdot x_n - 5 \xrightarrow{n\to+\infty} 3 \cdot 4 - 5 = 12 = \alpha.$$

□

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{25x^3+2}{75x^7-2} = -1,$$

(c)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{3}{2},$$

Megoldás. *Ismét az Átviteli elvet fogjuk használni. A fenti tétel jeöléseivel nekünk most*

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1} \qquad x_0 = 1 \qquad \text{és} \qquad \alpha = \frac{3}{2}.$$

*Ennek megfelelően legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy **tetszőleges**, $x_0 = 1$-hez konvergáló sorozat. Ha külön-külön számolnánk az f függvény számlálójában, illetve nevezőjében a határértéket, akkor azt kapnánk, hogy*

$$x_n^3 - 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1-1 = 0 \qquad \text{és} \qquad x_n - 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1-1 = 0,$$

vagyis a hányados határértékéről nem tudnánk semmit mondani. Vegyük észre, hogy

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

Ha ezt használjuk, akkor

$$f(x_n) = \frac{x_n^2+x_n+1}{x_n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2} = \alpha.$$

□

(d)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6,$$

(e)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = 4,$$

(f)

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1.$$

2. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e az alábbi határértékek.*

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

Megoldás. *A fenti tétel jelöléseivel nekünk most*

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \textit{és} \qquad x_0 = 0.$$

*Azt fogjuk megmutatni, hogy a feladatban szereplő határérték **nem létezik**. Az Átviteli elv miatt ehhez elegendő azt megmutatni, hogy van **legalább egy** olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ valós számsorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 = 0$ teljesül, de a függvényértékekből álló $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **divergens**.*

Legyen

$$x_n = (-1)^n \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$f(x_n) = f\left((-1)^n \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{(-1)^n \frac{1}{n}} = (-1)^n n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ami divergens. Így a $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ határérték nem létezik. □

(b)

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{1}{(x-\alpha)^2} \quad (\alpha > 0)$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Megoldás. *Az (a) részhez hasonlóan itt is azt fogjuk megmutatni, hogy nem létezik a feladatban szereplő határérték. A fenti tétel jelöléseivel nekünk most*

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \textit{és} \qquad x_0 = 0.$$

Ehhez legyen

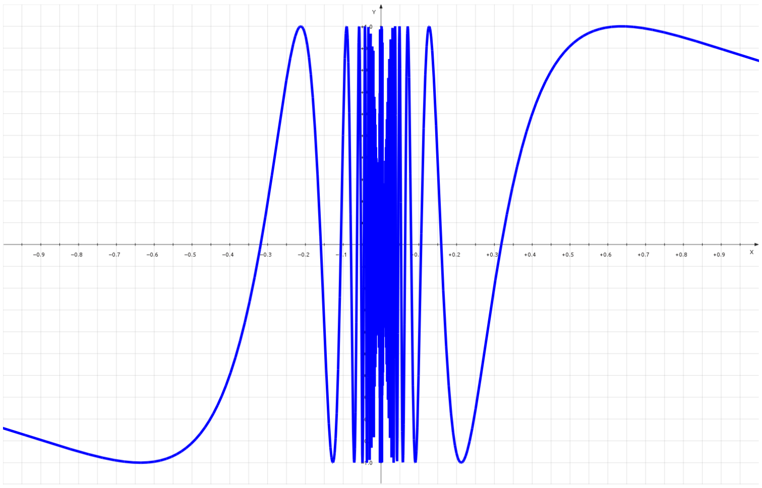
$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

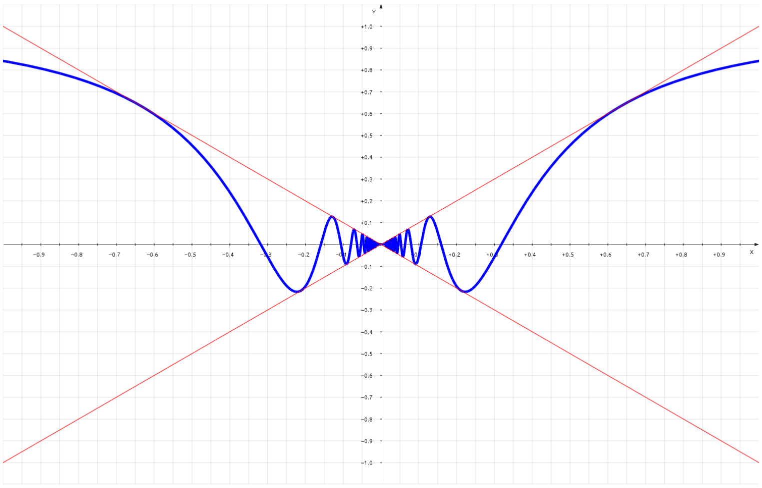
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi} = 0,$$

azonban

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$



1. ábra. A $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ függvény



2. ábra. Az $x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ függvény

ami egy divergens sorozat.

Ezek szerint van legalább egy olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *valós számsorozat (a megadott* $\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat ilyen), amire* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$*, de a függvényértékekből álló* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat divergens. Ezért a* $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *határérték nem létezik.* □

(d)

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

A fenti tétel jelöléseivel nekünk most

$$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \textit{és} \qquad x_0 = 0.$$

Az Átviteli elv segítségével azt fogjuk megmutatni, hogy a feladatban szereplő határérték létezik és $\alpha = 0$*-val egyenlő.*

Ehhez legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy tetszőleges,* $x_0 = 0$*-hoz konvergáló sorozat. Azt kell megmutatnunk, hogy*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0.$$

Mivel nem ismerjük az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat elemeit, a* $\left(\sin\left(\frac{1}{x_n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatról nem tudjuk eldönteni még azt sem, hogy konvergens-e egyáltalán. (A (c) rész megoldását látva ugyanis világos, hogy még divergens is lehet.) Ettől függetlenül, amiatt, hogy minden* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1,$$

annyit biztosan állíthatunk, hogy

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \leq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

így

$$-|x_n| \leq x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \leq |x_n|,$$

így a Rendőr-elv miatt

$$\lim_{n\to\infty} x_n \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 0,$$

vagyis a függvényértékekből álló $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens és nulla a határértéke. Tehát a*

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

határérték létezik és $\alpha = 0$*-val egyenlő.*

(e)

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

(f)

$$\lim_{x\to 1} 2^{\frac{1}{x-1}}.$$

3. Feladat. *Mutassuk meg, hogy a*

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & ha \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & ha \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

módon értelmezett $\chi_{\mathbb{Q}} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ún. Dirichlet–függvénynek egyetlen pontban sem létezik a határértéke.*

4. Feladat. *Legyenek* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, *igazoljuk, hogy*

(a)

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{x^2 - \alpha^2}{x - \alpha} = 2\alpha$$

(b)

$$\lim_{x\to\beta} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\beta}}{x - \beta} = \frac{1}{2\sqrt{\beta}}.$$

Megoldás. (a) Ha külön-külön számolnánk a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapnánk, hogy

$$\lim_{x\to\alpha} x^2 - \alpha^2 = \alpha^2 - \alpha^2 = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to\alpha} x - \alpha = \alpha - \alpha = 0.$$

Így nem tudjuk megállapítani a hányados határértékét. Vegyük azonban észre, hogy

$$\frac{x^2 - \alpha^2}{x - \alpha} = \frac{(x-\alpha)(x+\alpha)}{x - \alpha} = x + \alpha \xrightarrow{x\to\alpha} \alpha + \alpha = 2\alpha.$$

(b) Hasonlóan, mint az (a) részben, ha tagonként számolnánk a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapnánk, hogy mindkettő nulla. Itt is valamilyen algebrai átalakítása van szükség, mégpedig a következőre.

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{\beta}}{x - \beta} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\beta}}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{\beta}\right) \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{\beta}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{\beta}} \xrightarrow{x\to\beta} \frac{1}{2\sqrt{\beta}}.$$

□

Polinom-per-polinom típusú függvény határértéke $\pm\infty$-ben

Legyenek P és Q valós polinomok és tegyük fel, hogy a $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ vagy a $\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ határértéket szeretnénk kiszámolni. Ha külön-külön számolnánk ki a számláló és a nevező határértékét, akkor azt kapnánk, hogy

$$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) \in \{-\infty, +\infty\} \quad \text{és} \quad \lim_{x\to\pm\infty} Q(x) \in \{-\infty, +\infty\},$$

vagyis nem tudnánk dönteni. A határérték kiszámításához ezért hasonló dolgot fogunk tenni, mint a sorozatok esetén a polinom-per-polinom típusnál:

1. Kiemelünk a nevező legnagyobb fokú tagjával.
2. Használjuk, hogy tetszőleges $\alpha > 0$ esetén
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0.$$
3. A fenti lépések után már tagonként lehet számolni.

5. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi függvényhatárértékeket.*

Megoldás. (a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^5 + 8x^4 - 3x^3 + 10x^2 + 2x - 15}{x^3 + 16x^2 + 49x - 270}$$

$$\frac{6x^5 + 8x^4 - 3x^3 + 10x^2 + 2x - 15}{x^3 + 16x^2 + 49x - 270} = \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{6x^2 + 8x - 3 + 10\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2} - 15\frac{1}{x^3}}{1 + 16\frac{1}{x} + 49\frac{1}{x^2} - 270\frac{1}{x^3}} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{+\infty}{1} = +\infty.$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8x^2 + 7x + 6}{9x^3 + 8x^2 + 7x + 6}$$

$$\frac{8x^2 + 7x + 6}{9x^3 + 8x^2 + 7x + 6} = \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{8\frac{1}{x} + 7\frac{1}{x^2} + 6\frac{1}{x^3}}{9 + 8\frac{1}{x} + 7\frac{1}{x^2} + 6\frac{1}{x^3}} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{0}{9} = 0.$$

(c)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2 + 6x + 12}{9x^2 - 10x + 26}$$

$$\frac{2x^2 + 6x + 12}{9x^2 - 10x + 26} = \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{2 + 6\frac{1}{x} + 12\frac{1}{x^2}}{9 - 10\frac{1}{x} + 26\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{2}{9}.$$

(d)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-x^3 + 17x^2 + 111}{2x^2 + 26x - 17}$$

$$\frac{-x^3 + 17x^2 + 111}{2x^2 + 26x - 17} = \frac{x^2}{x^2} \frac{-x + 17x + 111\frac{1}{x^2}}{2 + 26\frac{1}{x} - 17\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x\to-\infty} = \frac{+\infty}{2} = +\infty.$$

(e)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2 - 13x + 28}{8x^3 + 56x^2 + 13x - 4}$$

$$\frac{5x^2 - 13x + 28}{8x^3 + 56x^2 + 13x - 4} = \frac{x^3}{x^3} \frac{5\frac{1}{x} - 13\frac{1}{x^2} + 28\frac{1}{x^3}}{8 + 56\frac{1}{x} + 13\frac{1}{x^2} - 4\frac{1}{x^3}} \xrightarrow{x\to-\infty} \frac{0}{8} = 0.$$

(f)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+5x-46}{-9x^2+81x+27}$$

$$\frac{3x^2+5x-46}{-9x^2+81x+27} = \frac{x^2}{x^2}\frac{3+5\frac{1}{x}-46\frac{1}{x^2}}{-9+81\frac{1}{x}+27\frac{1}{x^2}} \xrightarrow{x\to-\infty}= \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}.$$

(g)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$$

(h)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$$

□

6. Feladat. *Határozzuk meg a következő függvényhatárértékeket.*

Polinom-per-polinom típusú függvény határértéke véges, valós helyen

Az ebben a feladatban szereplő példák nagyon hasonlítanak az előző típusra, de van egy nagyon lényeges különbség. Igaz ugyanm hogy itt is polinomok hányadosának szeretnénk kiszámolni a határértékét, de nem $\pm\infty$-ben, hanem egy **véges valós** helyen. Alapból ezt tagonként kell megtenni. Van viszont egy olyan eset, amikor ez nem vezet eredményre: legyenek P és Q adott valós polinomok, $x_0 \in \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

határértéket szeretnénk kiszámolni, de

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to x_0} Q(x) = 0.$$

Ekkor a következőket kell tennünk.

1. Meghatározzuk a P és Q polinomok gyökeit (azaz, megoldjuk a $P(x) = 0$ és $Q(x) = 0$ algebrai egyenleteket).

2. A gyökök ismeretében gyöktényezős alakra hozzuk a P és Q polinomokat.

3. Egyerűsítünk és utána tagonként számolunk.

(a)

$$\lim_{x\to1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$$

Megoldás.

$$x^2-3x+2=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = 1 \quad \text{és} \quad x_2 = 1$$

és

$$x^2-4x+3=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = 1 \quad \text{és} \quad x_2 = 3$$

Ezért

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2) \quad \text{és} \quad x^2-4x+3 = (x-1)(x-3).$$

Ezeket felhasználva,

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-2}{x-3} \xrightarrow{x\to1}= \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

□

(b)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^2-x-2}$$

Megoldás.

$$x^2-7x+10=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1=2 \quad \text{és} \quad x_2=5$$

és

$$x^2-x-2=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1=-1 \quad \text{és} \quad x_2=2$$

Ezért

$$x^2-7x+10=(x-2)(x-5) \quad \text{és} \quad x^2-x-2=(x-2)(x+1).$$

Ezeket felhasználva,

$$\frac{x^2-7x+10}{x^2-x-2}=\frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x+1)}=\frac{(x-5)}{(x+1)}\xrightarrow{x\to 2}=\frac{-3}{3}=-1.$$

□

(c)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$$

Megoldás.

$$x^2-5x+6=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1=2 \quad \text{és} \quad x_2=3$$

és

$$x^2-8x+15=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1=3 \quad \text{és} \quad x_2=5$$

Ezért

$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2) \quad \text{és} \quad x^2-8x+15=(x-3)(x-5).$$

Ezeket felhasználva,

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}=\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)}=\frac{x-2}{x-5}\xrightarrow{x\to 3}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

□

(d)

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5\,x+6}{x^2-8\,x+12}$$

(e)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-6\,x+5}{x^2-8\,x+7}$$

(f)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^2-2\,x-3}$$

(g)

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-2\,x-8}$$

(h)

$$\lim_{x\to \pi}\frac{x^2-\pi\,x+x-\pi}{x^2-\pi\,x-x+\pi}$$

(i)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$$

7. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e az alábbi határértékek.*

(a)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$$

(b)

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{1-x^3}\right)$$

8. Feladat. *Számítsuk ki a következő határértékeket.*

(a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sqrt{x}-1}$$

(b)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

(d)

$$\lim_{x\to \alpha}\frac{\sqrt{\alpha x}-\sqrt{x}}{x-\alpha}\quad (\alpha>0 \text{ rögzített})$$

Gyökök különbsége típus

Az ebben a feladatban található példák nagyon hasonlítanak a sorozatok esetében tanult „gyökök különbsége” típusra. Az ott tanult algebrai átalakítás itt is mindig eredményre vezet. Ha P és Q adott valós polinomok és a

$$\lim_{x\to +\infty}\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}$$

határértéket szeretnénk kiszámolni, akkor

1. A $\sqrt{P(x)}-\sqrt{Q(x)}$ kifejezést szorozzuk meg az alábbi kifejezéssel

$$\frac{\sqrt{P(x)}+\sqrt{Q(x)}}{\sqrt{P(x)}+\sqrt{Q(x)}}.$$

2. A szorzás után végezzük el az adódó egyszerűsítéseket.

3. A kapott hányados esetében emeljünk ki a nevező „legdominánsabb” tagjával és számoljunk tagonként.

9. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy léteznek-e az alábbi határértékek.*

(a)

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$$

Megoldás.

$$\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\frac{x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}\xrightarrow{x\to+\infty}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

□

(b)

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$$

Megoldás.

$$\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)=\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{(x+2)-x}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}\xrightarrow{x\to+\infty}=\frac{0}{1+1}=0.$$

□

(c)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x}-\sqrt{2x^2-x}\right)$$

Megoldás.

$$\left(\sqrt{2x^2+3x}-\sqrt{2x^2-x}\right)\cdot\frac{\sqrt{2x^2+3x}+\sqrt{2x^2-x}}{\sqrt{2x^2+3x}+\sqrt{2x^2-x}}=\frac{(2x^2+3x)-(2x^2-x)}{\sqrt{2x^2+3x}+\sqrt{2x^2-x}}$$
$$=\frac{4x}{\sqrt{2x^2+3x}+\sqrt{2x^2-x}}=\frac{x}{x}\cdot\frac{4}{\sqrt{2+3\frac{1}{x}}+\sqrt{2-\frac{1}{x}}}\xrightarrow{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

□

(d)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x^2+5x+9}-\sqrt{3x^2+4x+8}\right)$$

(e)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)$$

(f)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\right)$$

10. Feladat. *Határozzuk meg a következő függvényhatárértékeket.*

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$$

Megoldás. *Egy, előadáson tanult állítás szerint*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$

□

(b)

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x)}{x}$$

Megoldás. *Mivel a* sin *függvény folytonos a teljes értelmezési tartományán, ezért a folytonosság a és a határérték kapcsolatáról szóló tétel szerint*

$$\lim_{x\to 2}\sin(x)=\sin(2)\qquad \textit{valamint}\qquad \lim_{x\to 2}x=2,$$

ezért

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{\sin(2)}{2}.$$

□

(c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin(x)}{x}$$

Megoldás. *Legyen* $x \in]0, +\infty]$ *tetszőleges, ekkor*

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Továbbá

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

ezért a feladatban szereplő határérték is létezik és

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0.$$

□

(d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\beta x}$$

Megoldás. *A szóban forgó feladaz (a) részének felhasználásával*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} = 1,$$

ezért

$$\frac{\sin(\alpha x)}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} \xrightarrow{x\to 0} \frac{\alpha}{\beta} \cdot 1 = \frac{\alpha}{\beta}.$$

□

(e)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$$

(f)

$$\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(g)

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(nx)}{\sin(mx)}$$

(h)

$$\lim_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ típusú határértékek

Az ebben a feladatban található példák nagyon hasonlítanak a sorozatok esetében tanult $\left(\left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$-típusra. Az ott tanult algebrai átalakítások itt is eredményre vezetnek, ha használjuk, hogy

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

11. Feladat. *Számítsuk ki az alábbi határértékeket.*

(a)

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{2 + x}{3 - x}\right)^x$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$$

Megoldás.

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\left(\frac{(x+1)-1}{x+1}\right)^x=\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)^x=\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^x=\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{x+1}\cdot\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-1}$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-(x+1)}\right]^{-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-(x+1)}\right)^{-1}\xrightarrow{x\to+\infty}e^{-1}\cdot 1=\frac{1}{e}.$$

□

(c)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$$

Megoldás.

$$\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}=\left(\frac{(x+3)-4}{x+3}\right)^{x+2}=\left(1+\frac{-4}{x+3}\right)^{x+2}=\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{x+2}=\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{x+3}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{-1}$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{\frac{x+3}{-4}}\right]^{-4}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-4}}\right)^{-1}\xrightarrow{x\to+\infty}e^{-4}\cdot 1=\frac{1}{e^4}.$$

□

(d)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$$

(e)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+5}\right)^{2x-3}$$

(f)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)^x.$$

Megoldás.

$$\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)^x=\left(\frac{(2x+1)+1}{2x+1}\right)^x=\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^x=\left[\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{2x}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left[\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{2x+1}\cdot\left(1+\frac{1}{2x+1}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}}\xrightarrow{x\to+\infty}(e\cdot 1)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

□