Valós számsorozatok II.

Elméleti áttekintés

Nevezetes sorozatok és határértékeik

1. Legyen $r \in \mathbb{Q}, r > 0$. Ekkor
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} n^r = +\infty.$$
2. Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ és $a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tekintsük az
$$x_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozatot. Ekkor
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha} \quad a_n > 0 \\ -\infty, & \text{ha} \quad a_n < 0. \end{cases}$$
3. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$
4. $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$
5. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan sorozat, mely esetén léteznek olyan $a, b > 0$ és $N > 0$ számok, hogy minden $n > N$ esetén $a < x_n < b$. Ekkor
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1.$$
Speciálisan, tetszőleges $a > 0$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$
6. Tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$
7. $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$
8. Tetszőleges $k \in \mathbb{N}$ esetén
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0.$$
9. $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$
10. Legyen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan sorozat, mely vagy $+\infty$–hez, vagy $-\infty$–hez divergál, ekkor
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e.$$
11. Tekintsük az $x_n = q^n, n \in \mathbb{N}$ úgynevezett geometriai sorozatot.
    - ha $|q| < 1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$;
    - ha $q = 1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és határértéke 1;
    - ha $q > 1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat $+\infty$–hez divergál;
    - ha $q = -1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos és divergens;
    - ha $q < -1$, akkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos és divergens.
12. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan konvergens sorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} x_n \in]-1, 1[$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^n = 0$.
13. Legyen $k \in \mathbb{N}$ és $q \in \mathbb{R}, q > -1$. Ekkor
$$\lim_{n\to\infty} q^n n^k = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad q \in]-1, 1[\\ +\infty, & \text{ha} \quad q > 1. \end{cases}$$
14. Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan konvergens sorozat, melynek határértéke $x \in \mathbb{R}$. Legyen továbbá,
$$\sigma_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat úgynevezett számtani-közép–sorozata. Ekkor a $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = x.$$

Feladatok

1. Feladat. *A Rendőr-elv felhasználásával határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.*

(a)
$$\left(\sqrt[n]{n^3+3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$\left(\sqrt[2n]{n^2-16}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$\left(\sqrt[n]{n^3+n^2+2n+11}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(\sqrt[n]{n^2+2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\sqrt[n-3]{n^2+10n+100}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2+10n+7}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)
$$\left(\sqrt[2n]{10n^2+55}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)
$$\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i)
$$\left(\frac{2n+\sin(2n)}{3n+\cos(3n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(j)
$$\left(\frac{n\sin(n^2+1)}{n^2+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(k)
$$\left(\frac{\sin^2(n)}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(l)
$$\left(\frac{n+\cos(n)}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(m)
$$\left(\frac{3\sin(n)+7\cos\left(\frac{n}{2}\right)+6n^2}{1-2n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(n)
$$\left(\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{2n+1}\cos(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(o)
$$\left(\frac{n+\cos(n)}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(p)
$$\left(\sqrt[n]{3^n+2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(q)
$$\left(\sqrt[n]{3\cdot\pi^n+\pi\cdot e^n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(r)
$$\left(\sqrt[n]{3\cdot 11^n+20\cdot 5^n+19\cdot\pi^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

2. Feladat. *Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét.*

(a)
$$\left(\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$\left(\left(1+\frac{1}{n-12}\right)^{n+5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$\left(\left(1+\frac{4}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\left(1-\frac{5}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$\left(\left(\frac{n+a}{n-a}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)
$$\left(\left(0,9999+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)
$$\left(\left(1,1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i)
$$\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(j)
$$\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(k)
$$\left(\left(\frac{3n-2}{3n+5}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(l)
$$\left(\left(\frac{5n-3}{5n+3}\right)^{-n-2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

3. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.*

(a)
$$\left(\frac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$\left(\frac{2^n+3^{n+1}}{2^{n+1}+3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$\left(\frac{2-4^n}{7^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(\frac{5^n-3}{2-3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\frac{7^{n+2}+(-1)^n}{7^n-7}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$\left(\frac{6\cdot 7^n+7^{-n}}{9\cdot 7^n-7^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)
$$\left(\frac{5^{2n-3}-4\cdot 6^{n+10}}{2^{1+4n}+7^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)
$$\left(\frac{3^{2n+5}-4\cdot 5^{n+1}}{(-2)^{1+3n}+9^{n+2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

4. Feladat. *Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét.*

(a)
$$\left(\frac{\sqrt[3]{n^2\sin(n!)}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$\left(\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\ldots+\frac{(-1)^n n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\ldots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)
$$\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

5. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi sorozatok.*

(a)
$$\left((-1)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)
$$\left((-1)^n\frac{1}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$\left(1+\frac{n}{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(1+2(-1)^{n+1}+3(-1)^{n(n-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\frac{n^2}{1+n^2}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$\left(1+n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

6. Feladat. *Legyenek $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ rögzítettek és*

$$x_1=\alpha,\ x_2=\beta,\quad \text{és}\quad x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}\qquad (n\geq 3)\,.$$

Mutassuk meg, hogy az így megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és határozzuk meg a határértékét.

7. Feladat. *Legyen $x_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tetszőleges és*

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)\qquad (n\in\mathbb{N})\,.$$

Igazoljuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

8. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a* $(n^{(-1)^n})_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat divergens.*

9. Feladat. *Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak. Az igaz állításokat bizonyítsuk, a hamis állításokat ellenpéldával támasszuk alá.*

(a) Van legalább egy olyan valós számsorozat, ami konvergens.

(b) Van legalább száz olyan valós számsorozat, ami divergens.

(c) Minden valós számsorozat vagy monoton növekedő vagy monoton csökkenő.

(d) Van olyan Cauchy-sorozat, ami nem korlátos.

(e) Minden monoton sorozatnak van korlátos részsorozata.

(f) Minden valós számsorozatnak van korlátos részsorozata.

(g) Ha egy valós számsorozat minden részsorozata korlátos, akkor ez a sorozat konvergens.

(h) Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens, akkor az* $(x_{n+10})_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is az, de a két sorozat határértéke nem feltétlenül egyezik meg.*

(i) Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatokra az teljesül, hogy* $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nullsorozat, akkor ezek a sorozatok Cauchy-sorozatok.*

(j) Ha egy valós számsorozatnak van két különböző szigorúan monoton csökkenő részsorozata, akkor ez a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

(k) Ha egy valós számsorozatnak minden részsorozata Cauchy-sorozat, akkor ez a sorozat konvergens.

10. Feladat. *Tegyük fel, hogy az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és az* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatokra*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$$

teljesül. Következik-e ebből, hogy legalább az egyik sorozat nullsorozat?

11. Feladat. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy valós számsorozat, és*

$$\alpha_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mutassuk meg, hogy

(a) ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat korlátos, akkor*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n;$$

(b) ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens, akkor az* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

(c) következik-e az $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergenciájából az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergenciája?*

12. Feladat. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy pozitív tagú, konvergens sorozat. Igazoljuk, hogy ekkor a* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ *határérték létezik és*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$