Valós számsorok

Elméleti áttekintés

1. Definíció. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy valós számsorozat, és képezzük az alábbi sorozatot*

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= x_1\\ \sigma_n &= x_1+\cdots+x_n, \quad (n\in\mathbb{N}, n\geqslant 2)\,.\end{aligned}$$

Ekkor a $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatot az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatból képzett* ***sor****nak nevezzük, és a továbbiakban* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$*-nel jelöljük. Ha létezik a* $\lim_{n\to\infty}\sigma_n$ *határérték, akkor azt mondjuk, hogy a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor* ***konvergens****. A* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sort* ***abszolút konvergens****nek nevezzük, ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ *sor konvergens. Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor konvergens, de nem abszolút konvergens, akkor* ***feltételesen konvergens****nek nevezzük.*

1. Tétel (Abszolút konvergencia ⇒ konvergencia). *Ha egy valós sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

2. Tétel. *Ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor konvergens, akkor* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

3. Tétel (Összehasonlító kritérium). *Legyenek* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *olyan nemnegatív tagú sorok, hogy* $x_n \leqslant y_n$ *teljesül minden* $n\in\mathbb{N}$ *esetén. Ekkor,*

(i) ha $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *konvergens, akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *is konvergens;*

(ii) ha $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *divergens, akkor* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *is divergens.*

4. Tétel (Összehasonlító kritérium II.). *Legyenek* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *olyan pozitív tagú sorok, melyekre létezik és pozitív a* $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}$ *határérték. Ekkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *és a* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ *sorok egyszerre konvergensek, illetve egyszerre divergensek.*

5. Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium). *Legyen* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *egy valós sor.*

(i) Ha $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} < 1$*, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor abszolút konvergens.*

(ii) Ha $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} > 1$*, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor divergens.*

6. Tétel (D'Alembert-féle hányadoskritérium). *Legyen* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *egy olyan valós sor, melynek minden tagja nullától különböző.*

(i) Ha $\lim_{n\to\infty}\dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} < 1$*, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor abszolút konvergens.*

(ii) Ha $\lim_{n\to\infty}\dfrac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > 1$*, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *sor divergens.*

7. Tétel (Leibniz-féle kritérium alternáló sorokra). *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy monoton nullsorozat, ekkor a* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ *sor konvergens.*

8. Tétel (Cauchy-féle ritkítási kritérium). *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy nemnegatív tagú, monoton csökkenő valós számsorozat. Ekkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *valós sor pontosan akkor konvergens, ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ *sor konvergens.*

9. Tétel (A geometriai sor). *Legyen* $q\in\mathbb{R}$ *olyan, hogy* $|q|<1$*, ekkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ *sor konvergens, és*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}.$$

10. Tétel (A harmonikus sor). *Legyen* $\alpha>0$ *adott, ekkor a* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ *sor abszolút konvergens, ha* $\alpha>1$ *és divergens, ha* $\alpha\leqslant 1$.

Feladatok

1. Feladat. *A definíció felhasználásával mutassuk meg, hogy az alábbi sorok mindegyike konvergens és határozzuk meg a szóban forgó sorok összegét is.*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} 100 \cdot (0,9)^n$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3^n}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2-3n-2}$

2. Feladat. *Igazoljuk, hogy a következő sorok divergensek.*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0,2}$.

3. Feladat. *Határozzuk meg, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek, abszolút konvergensek és melyek divergensek.*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^3+3}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n\sqrt{n}}}}$ (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10n+3}$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n}{(6n+1)^3}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}$

4. Feladat. *Döntsük el, hogy az alábbi sorok közül melyek konvergensek.*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{3}}$, (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}$ (m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{3^n+2^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^2}$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n}{n^3}$ (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$, (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000n}{(1,1)^n}$ (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$, (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ (l) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[10]{n}}$ (p) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha \cos^2\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n}$

5. Feladat. *Mely $x \in \mathbb{R}$ számok esetén lesznek a következő sorok (abszolút) konvergensek?*

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^n x^n$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n n$ (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$ (i) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-4)^n$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2^{n+1}}$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x^n)}{n^2}$ (j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+x)^\alpha}$

6. Feladat. *Igazold, hogy ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *pozitív tagú sor konvergens, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ *sor is konvergens. Igaz-e a megfordítás?*

7. Feladat. *Bizonyítsd be, hogy ha a* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ *és* $\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2$ *sorok konvergensek, akkor a* $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_y|$ *és a* $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)^2$ *sor is konvergens.*