Valós számsorozatok I.

Elméleti áttekintés

Alapfogalmak és kapcsolatuk

1. Definíció. *Egy $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt **valós számsorozat**nak nevezünk.*

2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat **alulról korlátos**, ha létezik egy olyan $k \in \mathbb{R}$, hogy $k \leqslant x_n$ teljesül bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat **felülről korlátos**, ha létezik egy olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy $x_n \leqslant K$ teljesül bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat **korlátos**, ha alulról és felülről is korlátos.*

3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **monoton növekedő**, illetve **monoton csökkenő**, ha minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$x_n \leqslant x_{n+1} \quad \text{illetve} \quad x_n \geqslant x_{n+1}$$

teljesül. Továbbá, ha a fenti egyenlőtlenségek minden $n \in \mathbb{N}$ esetén szigorúak, úgy szigorú monoton növekedésről, illetve csökkenésről beszélünk.

4. Definíció. *Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot **konvergens**nek nevezzük, ha létezik olyan $x \in \mathbb{R}$, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $N > 0$, hogy minden $n \geqslant N$ esetén $|x_n - x| \leqslant \varepsilon$ teljesül, erre a továbbiakban a $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ jelölést fogjuk használni.*

5. Definíció. *Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot **divergens**nek nevezzük, ha nem konvergens, azaz, ha tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $\varepsilon > 0$, hogy tetszőleges $N > 0$ esetén létezik olyan $n \geqslant N$, hogy $|x_n - x| > \varepsilon$.*

6. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **$+\infty$-hez divergál**, hogy tetszőleges $K \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $N > 0$, hogy minden $n \geqslant N$ esetén $x_n \geqslant K$ teljesül. Azt mondjuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **$-\infty$-hez divergál**, hogy tetszőleges $k \in \mathbb{R}$ esetén létezik olyan $N > 0$, hogy minden $n \geqslant N$ esetén $x_n \leqslant k$ teljesül.*

1. Tétel (Konvergens sorozat határértéke egyértelmű). *Legyenek $x, y \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy olyan számsorozat, mely egyaránt tart az x és y bővített valós számokhoz, akkor $x = y$.*

2. Tétel (konvergencia $\Rightarrow$ korlátosság). *Minden konvergens sorozat korlátos.*

3. Tétel. *Egy monoton növekedő sorozat alulról, míg egy monoton csökkenő sorozat felülről korlátos.*

4. Tétel (monotonitás+korlátosság $\Rightarrow$ konvergencia). *Egy monoton sorozat pontosan akkor konvergens, ha korlátos.*

7. Definíció. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton függvény, ekkor az*

$$y_n = x_{\varphi(n)} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

*sorozatot az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat **részsorozat**ának nevezzük.*

5. Tétel. *Konvergens sorozat bármely részsorozata is konvergens, és a két sorozat határértéke megegyezik.*

8. Definíció. *Az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot **Cauchy-sorozat**nak nevezzük, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $N > 0$, hogy minden $n, m \geqslant N$ esetén $|x_n - x_m| \leqslant \varepsilon$ teljesül.*

6. Tétel (konvergens sorozat $\Leftrightarrow$ Cauchy-sorozat). *Egy valós számsorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

Konvergencia és műveletek

7. Tétel. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ két konvergens sorozat, $x, y \in \mathbb{R}$, tegyük fel továbbá, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ és $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Ekkor az $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és az $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok is konvergensek és*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = xy.$$

Továbbá, ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}$ tetszőlegesek, akkor a $(\lambda \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és az $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok is konvergensek és

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda \cdot x_n) = \lambda \cdot x \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty}(x_n^k) = x^k.$$

Valamint, ha tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $x_n \neq 0$ és $x \neq 0$, akkor az $(y_n/x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \frac{y}{x}.$$

1. Következmény. *Ha $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, akkor tetszőleges $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinom esetén a $(P(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n) = P(x).$$

Konvergencia és rendezés

8. Tétel. *Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan valós számsorozatok, amelyeknek létezik x, illetve y bővített valós szám határértéke. Ha véges sok $n \in \mathbb{N}$ kivételével*

$$x_n \leqslant y_n$$

teljesül, akkor $x \leqslant y$.

9. Tétel (A jeltartás tétele). *Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olyan konvergens sorozat, melyre $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$, akkor véges sok $n \in \mathbb{N}$ index kivételével*

$$\operatorname{sign}(x_n) = \operatorname{sign}(x)$$

teljesül.

10. Tétel (Rendőr-elv). *Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatoknak közös a határértéke és a $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat olyan, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$$

teljesül, akkor a $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Feladatok

1. Feladat. *Írjuk fel az alább $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatok első öt elemét.*

(a) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n^2 - 1)_{n\in\mathbb{N}}$

(e) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n n^2)_{n\in\mathbb{N}}$

(f) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1+(-1)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(g) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt[n]{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(h) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(i) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(n^{(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

2. Feladat. *Vizsgáljuk meg korlátosság, monotonitás és konvergencia szempontjából az alábbi sorozatokat.*

(a) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

(c) $(n)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(e) $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(f) $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$

(g) $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

3. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (szigorúan) monoton növekedő/csökkenő sorozatok, akkor az $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is (szigorúan) monoton növekedő/csökkenő.*

4. Feladat. *Mutassuk meg, hogy ha $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (szigorúan) monoton növekedő/csökkenő sorozat, akkor $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (szigorúan) monoton csökkenő/növekedő.*

5. Feladat. *Ha $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, akkor igazoljuk, hogy az $(|x_n|)$ sorozat $|x_0|$-hoz konvergál.*

6. Feladat. *Adjunk meg olyan korlátos valós sorozatot, mely divergens.*

7. Feladat. *Adjunk meg olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós divergens sorozatot, melyre az $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens.*

8. Feladat. *Legyenek $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergens sorozatok.*

(a) *Igaz-e, hogy az $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat is divergens?*

(b) *Igaz-e, hogy az $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens?*

(c) *Igaz-e, hogy az $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens?*

(d) *Igaz-e, hogy az $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens?*

9. Feladat. *Adjunk példát olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra, melyekre*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

úgy, hogy

(a) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$;

(b) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$;

(c) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = c$, *ahol c egy előre rögzített valós szám.*

(d) *az előző esetek egyike sem teljesül.*

10. Feladat. *Adjunk példát olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra, melyekre*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$$

úgy, hogy

(a) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = c$, *ahol c egy előre rögzített valós szám;*

(b) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = +\infty$;

(c) $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = -\infty$;

(d) *az $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos és divergens;*

(e) *az $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem korlátos és divergens.*

11. Feladat. *Adjunk példát olyan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra, melyekre*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \textit{és} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

úgy, hogy

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = +\infty$;

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = -\infty$;

(c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = c$, *ahol c egy előre rögzített valós szám;*

(d) *a fentiek egyike sem teljesül.*

12. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.*

(a) $$\left(\frac{n-2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b) $$\left(\frac{n+1999}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c) $$\left(\frac{n}{3n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d) $$\left(\frac{\pi n^2+1}{2n-5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e) $$\left(\frac{3n^2-2n+5}{2n^2+8}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f) $$\left(\frac{2n^2+12}{3-n-3n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g) $$\left(\frac{1-3n^2}{n-2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h) $$\left(\frac{-2n^2-5n+12}{2-8n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i) $$\left(\frac{n^3-n+3}{n^2-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(j) $$\left(\frac{n^5-25n^3}{7n^9-2n^7}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(k) $$\left(\frac{(n+4)^3-n(n+6)^2}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(l) $$\left(\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

13. Feladat. *Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét.*

(a) $$\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b) $$\left(\frac{\sqrt{1+2n}}{1+\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c) $$\left(\frac{5n-2\sqrt{n}+8}{\sqrt{n^2+10n+2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d) $$\left(\frac{\sqrt[3]{n^2+n+10}}{n+11}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e) $$\left(\frac{\sqrt[4]{n^3+n^2-n}}{\sqrt[3]{n+9}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f) $$\left(\frac{\sqrt[4]{n^3+n}-n}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

14. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.*

(a) $$\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b) $$\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c) $$\left(\sqrt{n+\pi}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d) $$\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e) $$\left(\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f) $$\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g) $$\left(\sqrt{n+\sqrt[3]{n^2}}-\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h) $$\left(\sqrt{2n^2+3n}-\sqrt{2n^2-2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(i) $$\left(n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{2}{n}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(j) $$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(k) $$\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(l) $$\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(m) $$\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$