Valós számsorozatok II.

A gyakorlat célja

A gyakorlat során folytatni fogjuk az előző alkalommal megkezdett témakört és további nevezetes sorozattal és azok határértékével fogunk megismerkedni. Megvizsgáljuk továbbá azt is, hogy a konvergenciának mi a kapcsolata a rendezéssel. Ennek a témakörnek az egyik legfontosabb eredménye az úgynevezett Rendőr-elv.

Felhasznált elméleti anyag

A feladatok megoldásához szükséges fogalmak és elméleti állítások:

(a) nevezetes sorozatok és határértékeik

(b) Jeltartás tétele

(c) Rendőr-elv

Szükséges előismeretek

A feladatok megoldásához szükséges (középiskolában már tanult) ismeretek az alábbiak:

(a) a hatványozás azonosságai (link)

(b) trigonometrikus függvények és azonosságaik (link)

(c) exponenciális függvények és azonosságaik (link)

$\sqrt[n]{P(n)}$ alakú sorozatok

Legyen $k \in \mathbb{N}$ és legyenek $a_k, \ldots, a_1, a_0$ adott pozitív valós számok. Az

$$x_n = \sqrt[n]{a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

alakú sorozatok esetében határérték könnyedén kiszámítható a Rendőr-elv segítségével, ha az alábbi, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén fennálló becsléseket alkalmazzuk

$$\sqrt[n]{a_k n^k} \leq \sqrt[n]{a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0} \leq \sqrt[n]{a_k n^k + \cdots + a_1 n^k + a_0 n^k} = \sqrt[n]{(a_k + \cdots + a_1 + a_0) n^k},$$

azaz,

(1) meg kell keresni az n-edik gyökjel alatt szereplő polinom legnagyobb fokú tagját,

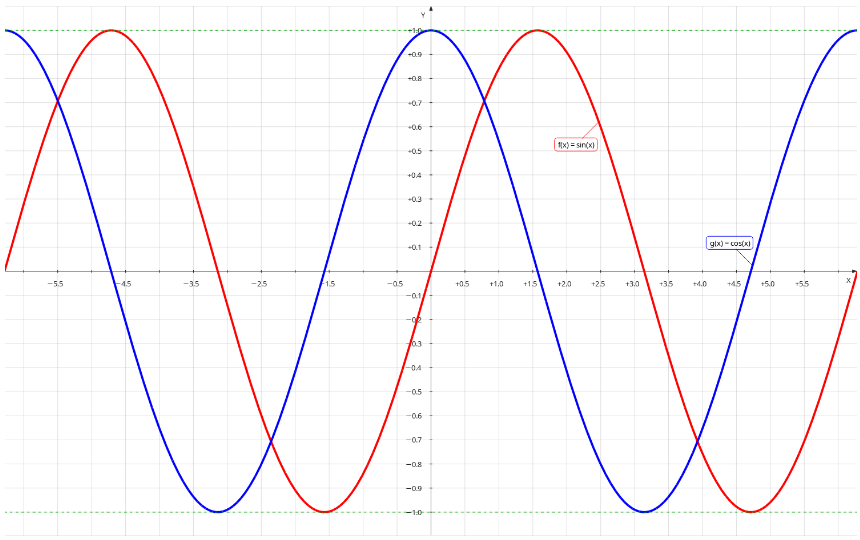
(2) a felső becsléshez minden alacsonyabb fokú tagot erre a legnagyobb fokú tagra ki kell cserélni, az együtthatók megtartása mellett,

(3) az alsó becsléshez a legnagyobb fokú tagot megtartjuk az együtthatójával együtt, az összes többi helyett nullát írunk.

$\sin$-t és/vagy $\cos$-t tartalmazó sorozatok

Amennyiben a kérdéses sorozat sinus-os és cosinus-os tagokat tartalmaz, akkor számos esetben eredménye vezet a Rendőr-elv, ha használjuk ezeknek a függvényeknek azt a tulajdonságát, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \qquad \text{és} \qquad -1 \leq \cos(x) \leq 1.$$



1. ábra. A sinus és a cosinus függvények

$\sqrt[n]{a_1\lambda_1^n + \cdots + a_k\lambda_k^n}$ sorozatok

Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges, $a_1, \ldots, a_k$ és $\lambda_1 < \cdots < \lambda_k$ adott pozitív valós számok. Ekkor az

$$\sqrt[n]{a_1\lambda_1^n + \cdots + a_k\lambda_k^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

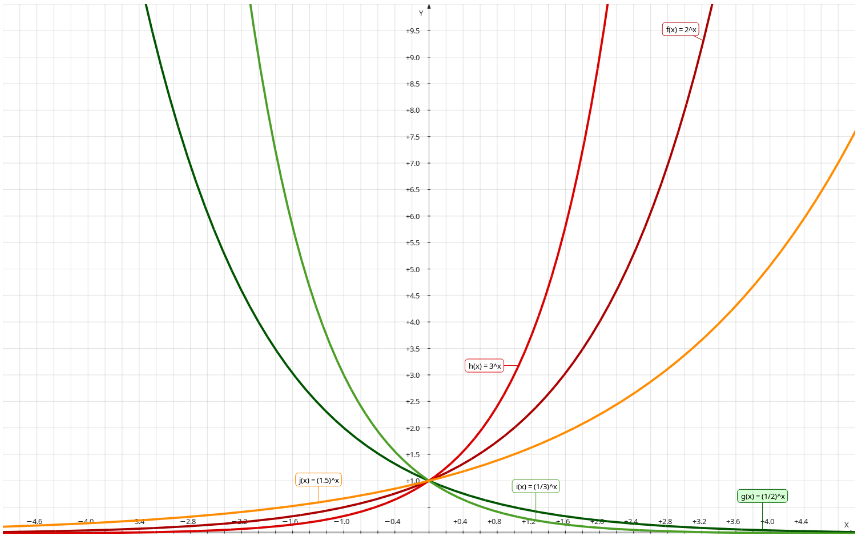
alakú sorozatok esetében számos esetben eredménye vezet a Rendőr-elv, ha használjuk az alábbi becsléseket

$$\sqrt[n]{a_k\lambda_k^n} \leq \sqrt[n]{a_1\lambda_1^n + \cdots + a_k\lambda_k^n} \leq \sqrt[n]{a_1\lambda_k^n + \cdots + a_k\lambda_k^n} = \sqrt[n]{(a_1 + \cdots + a_k)\lambda_k^n},$$

(1) meg kell keresni az n-edik gyökjel alatt szereplő kifejezés legnagyobb alapú tagját fokú tagját,

(2) a felső becsléshez minden kisebb alapú tagot erre a legnagyobb alapú tagra kell kicserélni, az együtthatók megtartása mellett,

(3) az alsó becsléshez a legnagyobb alapú tagot megtartjuk az együtthatójával együtt, az összes többi helyett nullát írunk.



2. ábra. Különböző alapú exponenciális függvények

1. Feladat. *A Rendőr-elv felhasználásával határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.*

(a)

$$\left(\sqrt[n]{n^3+3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás. *Legyenek $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olyanok, hogy $k \leq l$, ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$n^k \leq n^l$$

teljesül, ezért

$$\begin{aligned}
n^3 &\leq n^3 + 3n &&\leq n^3 + 3n^3 \\
n^3 &\leq n^3 + 3n &&\leq 4n^3 \\
\sqrt[n]{n^3} &\leq \sqrt[n]{n^3+3n} &&\leq \sqrt[n]{4n^3} \\
\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 &\leq \sqrt[n]{n^3+3n} &&\leq \sqrt[n]{4}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^3
\end{aligned}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1^3 = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1\cdot 1^3 = 1,$$

ezért a Rendőr-elv miatt a $\left(\sqrt[n]{n^3+3n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3n} = 1.$$

□

(b)

$$\left(\sqrt[n]{n^3+n^2+2n+11}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás. *Legyenek $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olyanok, hogy $k \leq l$, ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$n^k \leq n^l$$

teljesül, ezért

$$\begin{aligned}
n^3 &\leq n^3 + n^2 + 2n + 11 &&\leq n^3 + n^3 + 2n^3 + 11n^3 \\
n^3 &\leq n^3 + n^2 + 2n + 11 &&\leq 15n^3 \\
\sqrt[n]{n^3} &\leq \sqrt[n]{n^3+n^2+2n+11} &&\leq \sqrt[n]{15n^3} \\
\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 &\leq \sqrt[n]{n^3+n^2+2n+11} &&\leq \sqrt[n]{15}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^3
\end{aligned}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1^3 = 1 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{15}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = 1\cdot 1^3 = 1,$$

ezért a $\left(\sqrt[n]{n^3+n^2+2n+11}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+n^2+2n+11} = 1.$$

□

(c)

$$\left(\sqrt[n]{n^2+2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás. *Legyenek $k, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ olyanok, hogy $k \leq l$, ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$n^k \leq n^l$$

teljesül, ezért

$$\begin{aligned}
n^2 &\leq n^2 + 2n + 1 &&\leq n^2 + 2n^2 + n^2\\
n^2 &\leq n^2 + 2n + 1 &&\leq 4n^2\\
\sqrt[n]{n^2} &\leq \sqrt[n]{n^2+2n+1} &&\leq \sqrt[n]{4n^2}\\
\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 &\leq \sqrt[n]{n^2+2n+1} &&\leq \sqrt[n]{4}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2
\end{aligned}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = 1^2 = 1 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = 1\cdot 1^2 = 1,$$

ezért a $\left(\sqrt[n]{n^2+2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+2n+1} = 1.$$

□

(d)

$$\left(\sqrt[n-3]{n^2+10n+100}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)

$$\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n^2+10n+7}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás. *Legyenek $k, n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ olyanok, hogy $k \leq l$, ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$n^k \leq n^l$$

teljesül, ezért

$$\begin{aligned}
n^2 &\leq n^2 + 10n + 7 &&\leq n^2 + 10n^2 + 7n^2\\
n^2 &\leq n^2 + 10n + 7 &&\leq 18n^2\\
\sqrt[n]{n^2} &\leq \sqrt[n]{n^2+10n+7} &&\leq \sqrt[n]{18n^2}\\
\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 &\leq \sqrt[n]{n^2+10n+7} &&\leq \sqrt[n]{18}\cdot\left(\sqrt[n]{n}\right)^2
\end{aligned}$$

teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = 1^2 = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{18} \cdot \left(\sqrt[n]{n}\right)^2 = 1 \cdot 1^2 = 1,$$

ezért a $\left(\sqrt[n]{n^2+10n+7}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2+10n+7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+10n+7}} = 1.$$

□

(f)

$$\left(\sqrt[2n]{10n^2+55}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)

$$\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

teljesül, ezért speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1,$$

így

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Azonban

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

így a Rendőr-elv miatt a $\left(\frac{\sin(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

□

(h)

$$\left(\frac{2n+\sin(2n)}{3n+\cos(3n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \qquad \text{és} \qquad -1 \leq \cos(x) \leq 1$$

teljesül, ezért speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$-1 \leq \sin(2n) \leq 1 \qquad \text{és} \qquad -1 \leq \cos(3n) \leq 1,$$

így

$$\frac{2n-1}{3n+1} \leq \frac{2n-1}{3n+\cos(3n)} \leq \frac{2n+\sin(2n)}{3n+\cos(3n)} \leq \frac{2n+1}{3n+\cos(3n)} \leq \frac{2n+1}{3n-1}$$

Azonban

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2}{3} \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{2}{3}$$

így a Rendőr-elv miatt a $\left(\dfrac{2n+\sin(2n)}{3n+\cos(3n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+\sin(2n)}{3n+\cos(3n)}=\frac{2}{3}.$$

□

(i)

$$\left(\frac{n\sin(n^2+1)}{n^2+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás. *Minden* $x\in\mathbb{R}$ *esetén*

$$-1\leq\sin(x)\leq 1$$

teljesül, ezért speciálisan minden $n\in\mathbb{N}$ *esetén*

$$-1\leq\sin(n^2+1)\leq 1,$$

is fennáll, ezért

$$\frac{-n}{n^2+3}\leq\frac{n\sin(n^2+1)}{n^2+3}\leq\frac{n}{n^2+3}.$$

Azonban

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n^2+3}=0\quad\textit{és}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+3}=0,$$

így a Rendőr-elv miatt a $\left(\dfrac{n\sin(n^2+1)}{n^2+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sin(n^2+1)}{n^2+3}=0.$$

□

(j)

$$\left(\frac{\sin^2(n)}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás. *Minden* $x\in\mathbb{R}$ *esetén*

$$-1\leq\sin(x)\leq 1$$

teljesül, ezért speciálisan minden $n\in\mathbb{N}$ *esetén*

$$-1\leq\sin(n)\leq 1,$$

is fennáll, ezért

$$0\leq\sin^2(n)\leq 1$$

teljesül minden $n\in\mathbb{N}$ *esetén, amiből*

$$0\leq\frac{\sin^2(n)}{n+1}\leq\frac{1}{n+1}$$

adódik minden $n\in\mathbb{N}$ *esetén. Azonban*

$$\lim_{n\to\infty}0=0\quad\textit{és}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

így a Rendőr-elv miatt a $\left(\dfrac{\sin^2(n)}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2(n)}{n+1}=0.$$

□

(k)

$$\left(\frac{n+\cos(n)}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(l)

$$\left(\frac{3\sin(n)+7\cos\left(\frac{n}{2}\right)+6n^2}{1-2n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \qquad \text{és} \qquad -1 \leq \cos(x) \leq 1$$

teljesül, ezért speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$-1 \leq \sin(n) \leq 1 \qquad \text{és} \qquad -1 \leq \cos\left(\frac{n}{2}\right) \leq 1,$$

így

$$\frac{3\cdot 1+7\cdot 1+6n^2}{1-2n^2} \leq \frac{3\sin(n)+7\cos\left(\frac{n}{2}\right)+6n^2}{1-2n^2} \leq \frac{3\cdot(-1)+7\cdot(-1)+6n^2}{1-2n^2},$$

hiszen minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $1-2n^2 \leq 0$. Azonban

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 1+7\cdot 1+6n^2}{1-2n^2} = \frac{6}{-2} = -3 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot(-1)+7\cdot(-1)+6n^2}{1-2n^2} = \frac{6}{-2} = -3,$$

így a Rendőr-elv miatt a $\left(\frac{3\sin(n)+7\cos\left(\frac{n}{2}\right)+6n^2}{1-2n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\sin(n)+7\cos\left(\frac{n}{2}\right)+6n^2}{1-2n^2} = -3.$$

□

(m)

$$\left(\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{2n+1}\cos(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás. *Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén*

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

teljesül, ezért speciálisan minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1,$$

is fennáll minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Másfelől,

$$\frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{2n+1} = \frac{4n}{2n+1},$$

amiből

$$\frac{-4n}{2n+1} \leq \frac{4n}{2n+1}\cos(n) = \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{2n+1}\cos(n) = \frac{4n}{2n+1}\cos(n) \leq \frac{4n}{2n+1}$$

adódik minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Azonban

$$\lim_{n\to\infty}\frac{-4n}{2n+1} = \frac{4}{2} = -2 \quad \text{és} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{2n+1} = \frac{4}{2} = 2,$$

mely határértékek nem egyeznek meg. Így a Rendőr-elv ebben az esetben nem vezet eredményre. Azt fogjuk megmutatni, hogy a feladatban szereplő sorozat divergens. Indirekt tegyük fel, hogy az

$$x_n = \frac{(n+1)^2-(n-1)^2}{2n+1}\cos(n) = \frac{4n}{2n+1}\cos(n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens. A $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozat egy olyan divergens sorozat, melynek vannak olyan $\cos(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ és $(\cos(\psi(n)))_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozatai, melyekre

$$\lim_{n\to\infty}\cos(\varphi(n)) = 1 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{n\to\infty}\cos(\psi(n)) = -1$$

teljesül, figyeljük meg, hogy ekkor

$$\begin{aligned} x_{\varphi(n)} &= \tfrac{(\varphi(n)+1)^2-(\varphi(n)-1)^2}{2\varphi(n)+1}\cos(\varphi(n)) = \tfrac{4\varphi(n)}{2\varphi(n)+1}\cos(\varphi(n)) &\xrightarrow{n\to\infty}& \;2 \\ x_{\psi(n)} &= \tfrac{(\psi(n)+1)^2-(\psi(n)-1)^2}{2\psi(n)+1}\cos(\psi(n)) = \tfrac{4\psi(n)}{2\psi(n)+1}\cos(\psi(n)) &\xrightarrow{n\to\infty}& \;-2, \end{aligned}$$

ami ellentmond az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergenciájának. Ezért a feladatban szereplő sorozat valóban divergens. □

(n)

$$\left(\frac{n+\cos(n)}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(o)

$$\left(\sqrt[n]{3^n+2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás. *Legyenek λ és μ olyan pozitív valós számok, hogy $\lambda \leq \mu$, ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\lambda^n \leq \mu^n$$

teljesül. Ezért,

$$\begin{aligned} 3^n + 0 \leq &\quad {\color{red}3^n} + 2^n &\leq 3^n + 3^n = 2\cdot 3^n \\ \sqrt[n]{3^n} \leq &\quad \sqrt[n]{3^n+2^n} &\leq \sqrt[n]{2\cdot 3^n} \\ 3 \leq &\quad \sqrt[n]{3^n+2^n} &\leq \sqrt[n]{2}\cdot 3 \end{aligned}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} 3 = 3 \qquad \textit{és} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}\cdot 3 = 1\cdot 3 = 3,$$

ezért a Rendőr-elv miatt az $\left(\sqrt[n]{3^n+2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+2^n} = 3.$$

□

(p)

$$\left(\sqrt[n]{3\cdot\pi^n + \pi\cdot e^n + 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás. *Legyenek λ és μ olyan pozitív valós számok, hogy $\lambda \leq \mu$, ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$\lambda^n \leq \mu^n$$

teljesül. Ezért,

$$\begin{aligned} 3\cdot\pi^n = 3\cdot\pi^n + 0 + 0 \le \quad & 3\cdot{\color{red}\pi^n} + \pi\cdot e^n + 1 && \le 3\cdot\pi^n + \pi\cdot\pi^n + \pi^n \\ \sqrt[n]{3\cdot\pi^n} \le \quad & \sqrt[n]{3\cdot\pi^n + \pi\cdot e^n + 1} && \le \sqrt[n]{(3+\pi+1)\cdot\pi^n} \\ \sqrt[n]{3}\cdot\pi \le \quad & \sqrt[n]{3\cdot\pi^n + \pi\cdot e^n + 1} && \le \sqrt[n]{3+\pi+1}\cdot\pi \end{aligned}$$

minden $n\in\mathbb{N}$ esetén. Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}\cdot\pi = 1\cdot\pi = \pi \qquad \textit{és} \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\pi+1}\cdot\pi = 1\cdot\pi = \pi$$

ezért a Rendőr-elv miatt az $\left(\sqrt[n]{3\cdot\pi^n + \pi\cdot e^n + 1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3\cdot\pi^n + \pi\cdot e^n + 1} = \pi.$$

□

(q)

$$\left(\sqrt[n]{3\cdot 11^n + 20\cdot 5^n + 19\cdot\pi^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

2. Feladat. *Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét.*

(a)

$$\left(\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\cdot\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{-2} \xrightarrow{n\to\infty} e\cdot 1 = e.$$

□

(b)

$$\left(\left(1+\frac{1}{n-12}\right)^{n+5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\left(1+\frac{1}{n-12}\right)^{n+5} = \left(1+\frac{1}{n-12}\right)^{n-12}\cdot\left(1+\frac{1}{n-12}\right)^{17} \xrightarrow{n\to\infty} e\cdot 1 = e.$$

□

(c)

$$\left(\left(1+\frac{4}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\left(1+\frac{4}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^4 \xrightarrow{n\to\infty} e^4.$$

□

(d)

$$\left(\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\left(\frac{n+4}{n+1}\right)^n = \left(\frac{(n+1)+3}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{3}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{3}}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{3}}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{3}}\right)^{-1} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{3}}\right)^{\frac{n+1}{3}}\right]^3 \cdot \left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{3}}\right)^{-1} \xrightarrow{n\to\infty} e^3 \cdot 1 = e^3.$$

□

(e)

$$\left(\left(1-\frac{5}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\left(1-\frac{5}{n}\right)^n = \left(1+\frac{-5}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{-n}{5}}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{-n}{5}}\right)^{-\frac{n}{5}}\right]^{-5} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-5}.$$

□

(f)

$$\left(\left(\frac{n+a}{n-a}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Megoldás.

$$\left(\frac{n+a}{n-a}\right)^n = \left(\frac{(n-a)+2a}{n-a}\right)^n = \left(1+\frac{2a}{n-a}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{n-a}{2a}}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{n-a}{2a}}\right)^{n-a} \cdot \left(1+\frac{1}{\frac{n-a}{2a}}\right)^a$$

$$= \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n-a}{2a}}\right)^{\frac{n-a}{2a}}\right]^{2a} \cdot \left(1+\frac{1}{\frac{n-a}{2a}}\right)^a \xrightarrow{n\to\infty} e^{2a} \cdot 1 = e^{2a}.$$

□

(g)

$$\left(\left(0,9999+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Útmutatás. *Használjuk egyfelől azt, hogy az*

$$x_n = (0,9999)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

geometriai sorozat nullsorozat, másfelől azt, hogy nullsorozat és korlátos sorozat szorzata nullsorozat. □

(h)

$$\left(\left(1,1+\frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Útmutatás. *Használjuk egyfelől azt, hogy az*

$$x_n = (1,1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

geometriai sorozat $+\infty$-hez, másfelől azt, hogy $+\infty$-hez divergáló és egy pozitív valós számhoz konvergáló sorozat $+\infty$-hez divergál. □

(i)

$$\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Útmutatás. *Használjuk a Bernoulli-egyenlőtlenséget és a Rendőr-elvet annak igazolásához, hogy a feladatban szereplő sorozat egy egyhez konvergáló sorozat.* □

(j)

$$\left(\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Útmutatás. *Használjuk az előző feladat gondolatmenetét.* □

(k)

$$\left(\left(\frac{3n-2}{3n+5}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\left(\frac{3n-2}{3n+5}\right)^n = \left(\frac{(3n+5)-7}{3n+5}\right)^n = \left(1+\frac{-7}{3n+5}\right)^n$$

$$= \left(1+\frac{1}{\frac{3n+5}{-7}}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n+5}{-7}}\right)^{3n}\right]^{\frac{1}{3}} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n+5}{-7}}\right)^{3n+5}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{3n+5}{-7}}\right)^{-5}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\left[\left[\left(1+\frac{1}{\frac{3n+5}{-7}}\right)^{\frac{3n+5}{-7}}\right]^{-7}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{3n+5}{-7}}\right)^{-5}\right]^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{n\to\infty} \left(e^{-7}\cdot 1\right)^{\frac{1}{3}} = e^{-\frac{7}{3}}.$$

□

(l)

$$\left(\left(\frac{5n-3}{5n+3}\right)^{-n-2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\left(\frac{5n-3}{5n+3}\right)^{-n-2} = \left(\frac{(5n+3)-6}{5n+3}\right)^{-n-2} = \left(1+\frac{-6}{5n+3}\right)^{-n-2} = \left(1+\frac{1}{\frac{5n+3}{-6}}\right)^{-n-2}$$

$$= \left(1+\frac{1}{\frac{5n+3}{-6}}\right)^{-n}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{5n+3}{-6}}\right)^{-2} = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{5n+3}{-6}}\right)^{n}\right]^{-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{5n+3}{-6}}\right)^{-2}$$

$$= \left[\left[\left(1+\frac{1}{\frac{5n+3}{-6}}\right)^{5n}\right]^{\frac{1}{5}}\right]^{-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{5n+3}{-6}}\right)^{-2} = \left[\left[\left(1+\frac{1}{\frac{5n+3}{-6}}\right)^{5n+3}\left(1+\frac{1}{\frac{5n+3}{-6}}\right)^{-3}\right]^{\frac{1}{5}}\right]^{-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{5n+3}{-6}}\right)^{-2}$$

$$\left[\left[\left[\left(1+\frac{1}{\frac{5n+3}{-6}}\right)^{\frac{5n+3}{-6}}\right]^{-6}\left(1+\frac{1}{\frac{5n+3}{-6}}\right)^{-3}\right]^{\frac{1}{5}}\right]^{-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\frac{5n+3}{-6}}\right)^{-2}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \left((e\cdot 1)^{\frac{1}{5}}\right)^{-1}\cdot 1 = e^{-\frac{1}{5}}.$$

□

3. Feladat. *Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.*

(a)

$$\left(\frac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}} = \frac{2\cdot 2^n+3^n}{2^n+3\cdot 3^n} = \frac{3^n}{3^n}\cdot\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}.$$

□

(b)

$$\left(\frac{2^n+3^{n+1}}{2^{n+1}+3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)

$$\left(\frac{2-4^n}{7^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)

$$\left(\frac{5^n-3}{2-3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)

$$\left(\frac{7^{n+2}+(-1)^n}{7^n-7}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)

$$\left(\frac{6\cdot 7^n+7^{-n}}{9\cdot 7^n-7^{-n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{6\cdot 7^n+7^{-n}}{9\cdot 7^n-7^{-n}} = \frac{6\cdot 7^n+\left(\frac{1}{7}\right)^n}{9\cdot 7^n-\left(\frac{1}{7}\right)^n} = \frac{7^n}{7^n}\cdot\frac{6+\left(\frac{1}{49}\right)^n}{9-\left(\frac{1}{49}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

□

(g)

$$\left(\frac{5^{2n-3}-4\cdot 6^{n+10}}{2^{1+4n}+7^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{5^{2n-3}-4\cdot 6^{n+10}}{2^{1+4n}+7^{n+1}} = \frac{5^{-3}\cdot 25^n-4\cdot 6^{10}\cdot 6^n}{2\cdot 16^n+7\cdot 7^n} = \frac{16^n}{16^n}\cdot\frac{5^{-3}\cdot\left(\frac{25}{16}\right)^n-4\cdot 6^{10}\cdot\left(\frac{6}{16}\right)^n}{2+7\cdot\left(\frac{7}{16}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{+\infty-0}{2} = +\infty.$$

□

(h)

$$\left(\frac{3^{2n+5}-4\cdot 5^{n+1}}{(-2)^{1+3n}+9^{n+2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás.

$$\frac{3^{2n+5}-4\cdot 5^{n+1}}{(-2)^{1+3n}+9^{n+2}}=\frac{3^5\cdot 9^n-4\cdot 5\cdot 5^n}{(-2)\cdot(-8)^n+9^2\cdot 9^n}=\frac{9^n}{9^n}\cdot\frac{243-20\left(\frac{5}{9}\right)^n}{(-2)\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)^n+81}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{243-0}{0+81}=\frac{243}{81}=3.$$

□

4. Feladat. *Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét.*

(a)

$$\left(\frac{\sqrt[3]{n^2\sin(n!)}}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Útmutatás. *Használjuk a Rendőr-elvet, illetve azt, hogy minden $n\in\mathbb{N}$ esetén*

$$-1\leq\sin(n!)\leq 1$$

teljesül. □

(b)

$$\left(\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Útmutatás. *Legyenek $a,b\in\mathbb{R}$ tetszőlegesek. Ekkor*

$$1+a+a^2+\ldots+a^n=\begin{cases}\dfrac{a^{n+1}}{a-1}, & ha\ a\neq 1\\ n+1, & ha\ a=1\end{cases}\quad és\quad 1+a+a^2+\ldots+a^n=\begin{cases}\dfrac{b^{n+1}}{b-1}, & ha\ b\neq 1\\ n+1, & ha\ b=1\end{cases}$$

Ezért, attól függően, hogy az a és b valós számok egytől különbözőek-e vagy sem, összesen négy esetet kell megkülönböztetnünk.

1. eset $(a\neq 1, b\neq 1)$

$$\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}=\frac{\frac{a^{n+1}-1}{a-1}}{\frac{b^{n+1}-1}{b-1}}=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b-1}{b^{n+1}-1}=\frac{b^{n+1}}{b^{n+1}}\cdot\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{b}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{b}\right)^{n+1}}$$

2. eset $(a\neq 1, b=1)$

$$\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}=\frac{a^{n+1}-1}{(a-1)(n+1)}$$

3. eset $(a=1, b\neq 1)$

$$\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}=\frac{n+1}{\frac{b^{n+1}}{b-1}}=\frac{(b-1)(n+1)}{b^{n+1}-1}$$

4. eset $(a=1, b=1)$

$$\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}=\frac{n+1}{n+1}=1.$$

A fenti határértékek pedig a gyakorlaton tanult módszerek segítségével már könnyedén kiszámíthatóak.

□

(c)

$$\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás. *Az megoldás során azt fogjuk használni, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

teljesül, ezért

$$\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1 + 2 + \cdots + (n-1)}{n^2} = \frac{\frac{(n-1)n}{2}}{n^2} = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{n^2 - n}{2n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}.$$

□

(d)

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} + \ldots + \frac{(-1)^n n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)

$$\left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Útmutatás. *Használjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$1^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

□

(f)

$$\left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \ldots + \frac{(2n-1)^2}{n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(g)

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(h)

$$\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Megoldás. *Legyen $k \in \mathbb{N}$ tetszőleges, ekkor*

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

ezért

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

□

5. Feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi sorozatok.*

(a)

$$\left((-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(b)

$$\left((-1)^n\frac{1}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(c)
$$\left(1+\frac{n}{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(d)
$$\left(1+2(-1)^{n+1}+3(-1)^{n(n-1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(e)
$$\left(\frac{n^2}{1+n^2}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(f)
$$\left(1+n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

6. Feladat. *Legyenek $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ rögzítettek és*

$$x_1=\alpha,\ x_2=\beta,\quad \text{és}\quad x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}\qquad (n\geq 3)\,.$$

Mutassuk meg, hogy az így megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, és határozzuk meg a határértékét.

7. Feladat. *Legyen $x_1\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tetszőleges és*

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)\qquad (n\in\mathbb{N})\,.$$

Igazoljuk, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és $\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.

Útmutatás. Először mutassuk meg, hogy a feladatban szereplő sorozat korlátos (alulról és felülről is) és (egy indextől kezdve) monoton. Ebből már adódik a sorozat konvergenciája egy előadáson tanult állítás miatt. A határérték kiszámításához vegyük mindkét oldal határértékét. □

8. Feladat. *Bizonyítsuk be, hogy a $(n^{(-1)^n})_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens.*

Megoldás. Tekintsük az

$$x_n=n^{(-1)^n}\qquad (n\in\mathbb{N})$$

módon megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatot és indirekt tegyük fel, hogy ez a sorozat konvergens. Ekkor az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat minden $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ részsorozata is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{\varphi(n)}$$

teljesül. Figyeljük meg, hogy

$$x_{2n+1}=(2n+1)^{(-1)^{2n+1}}=(2n+1)^{-1}=\frac{1}{2n+1}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

és

$$x_{2n}=(2n)^{(-1)^{2n}}=2n\xrightarrow{n\to\infty}+\infty,$$

ami ellentmondás. Így az $\left(n^{(-1)^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat divergens. □

9. Feladat. *Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak. Az igaz állításokat bizonyítsuk, a hamis állításokat ellenpéldával támasszuk alá.*

(a) Van legalább egy olyan valós számsorozat, ami konvergens.

Megoldás. *Igen, például az*

$$x_n=\frac{1}{n}\qquad (n\in\mathbb{N})$$

módon megadott $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat ilyen. □

(b) Van legalább száz olyan valós számsorozat, ami divergens.

Megoldás. *Igen, minden* $i = 1, \ldots, 100$ *esetén tekintsük az*

$$x_n^{(i)} = i \cdot (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $(x_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatot.* □

(c) Minden valós számsorozat vagy monoton növekedő vagy monoton csökkenő.

Megoldás. *Nem, mert például az*

$$x_n = (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat sem nem monoton növekedő, se nem monoton csökkenő.* □

(d) Van olyan Cauchy-sorozat, ami nem korlátos.

Megoldás. *Ez az állítás hamis. A Cauchy-féle konvergenciakritérium értelmében egy való számsorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat. Továbbá, minden konvergens sorozat egyúttal korlátos is. Mindezekből az következik, hogy minden Cauchy-sorozat korlátos.* □

(e) Minden monoton sorozatnak van korlátos részsorozata.

Megoldás. *Ez az állítás hamis, ugyanis például az*

$$x_n = n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat egy olyan monoton növekedő sorozat, melynek minden részsorozata felülről nem korlátos. □

(f) Minden valós számsorozatnak van korlátos részsorozata.

Megoldás. *Ez az állítás hamis, ugyanis például az*

$$x_n = n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat egy olyan sorozat, melynek minden részsorozata felülről nem korlátos. □

(g) Ha egy valós számsorozat minden részsorozata korlátos, akkor ez a sorozat konvergens.

Megoldás. *Ez az állítás hamis, tekintsük ugyanis az*

$$x_n = (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott valós számsorozatot. Ez egy olyan sorozat, melynek minden részsorozata korlátos, de az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat mégsem konvergens.* □

(h) Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens, akkor az* $(x_{n+10})_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is az, de a két sorozat határértéke nem feltétlenül egyezik meg.*

Megoldás. *Ez az állítás hamis. Ha ugyanis az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat egy konvergens valós számsorozat, akkor ennek a sorozatnak minden részsorozata is konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)}$$

teljesül. Ezért, ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergens, akkor az* $(x_{n+10})_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is az és a hét sorozat határértéke szükségképpen megegyezik.* □

(i) Ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *és* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozatokra az teljesül, hogy* $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nullsorozat, akkor ezek a sorozatok Cauchy-sorozatok.*

Megoldás. *Ez az állítás hamis. Legyen ugyanis $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy tetszőleges divergens sorozat és*

$$y_n = -x_n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor az $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat az azonosan nulla sorozat, ami nyilván nullsorozat, azonban az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok nem Cauchy-sorozatok, hiszen nem konvergensek. □

(j) Ha egy valós számsorozatnak van két különböző szigorúan monoton csökkenő részsorozata, akkor ez a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Megoldás. *Ez az állítás hamis.* □

(k) Ha egy valós számsorozatnak minden részsorozata Cauchy-sorozat, akkor ez a sorozat konvergens.

Megoldás. *Ez az állítás igaz, mert tetszőleges $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valós számsorozatnak saját maga mindig részsorozata.* □

10. Feladat. *Tegyük fel, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatokra*

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$$

teljesül. Következik-e ebből, hogy legalább az egyik sorozat nullsorozat?

Megoldás. Nem feltétlenül, ehhez tekintsük ugyanis az

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 1, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad \text{és} \qquad x_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott divergens sorozatokat. Ekkor

$$x_n y_n = 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

miatt a szorzatsorozat nyilván nullsorozat, viszont a szorzat tényezői nem konvergensek. □

11. Feladat. *Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy valós számsorozat, és*

$$\alpha_n = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mutassuk meg, hogy

(a) ha az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos, akkor

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} \alpha_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n;$$

Útmutatás. *Legyenek $n \in \mathbb{N}$ és $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tetszőlegesek, ekkor az*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

valós számot az $x_1, \ldots, x_n$ valós számok számtani (aritmetikai) közepének nevezzük. Ez a mennyiség kielégíti a

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\}$$

egyenlőtlenségeket, ahol $\min\{x_1, \ldots, x_n\}$ *jelöli az $\{x_1, \ldots, x_n\}$ halmaz minimumát (legkisebb elemét), míg* $\max\{x_1, \ldots, x_n\}$ *jelöli az $\{x_1, \ldots, x_n\}$ halmaz maximumát (legnagyobb elemét).* □

(b) *ha az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergens, akkor az* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat is konvergens és*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

Útmutatás. *Használjuk az (a) részt, illetve a konvergencia és a rendezés kapcsolatáról szóló tételt.* □

(c) *következik-e az* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergenciájából az* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat konvergenciája?*

Megoldás. *Nem. Tekintsük ugyanis az*

$$x_n = (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

módon megadott divergens sorozatot és figyeljük meg, hogy ekkor

$$\alpha_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páros} \\ -\frac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ami egy nullsorozat. □

12. Feladat. *Legyen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *egy pozitív tagú, konvergens sorozat. Igazoljuk, hogy ekkor a* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$ *határérték létezik és*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$