1) $p(x) = N(\hat{x}_0, \Sigma_0)$ x משתנה גאוסי

ישנן 2 מדידות המיוצגות באופן הבא:

$$z_1 = h_1(x) + v_1 \quad , \quad v_1 \sim N(0, \Sigma_{v1})$$

$$z_2 = h_2(x) + v_2 \quad , \quad v_2 \sim N(0, \Sigma_{v2})$$

(a) המדידות לא תלויות בגלל שאלו מסוגים שונים ולכן
אם נכתוב את כלל בייס זה יהיה כך:

$$(\mathrm{I}) \quad p(x|z_1,z_2) = \frac{p(z_1,z_2|x)p(x)}{p(z_1,z_2)}$$

$$p(z_1,z_2|x) = p(z_1|x)p(z_2|x)$$

כמו שראינו בכיתה ניתן להגיע לנוסחה בכיוון I

$$(\mathrm{I}) \quad p(x|z_1,z_2) \propto \eta\, p(z_1|x)p(z_2|x)p(x)$$

$$(\mathrm{II}) \quad x = \operatorname{argmax}\left(\eta \cdot p(z_1|x) \cdot p(z_2|x)p(x)\right)$$

$$\downarrow$$

$$(\mathrm{II}) \quad x = \operatorname{argmin}\left[\|z_1 - h_1(x)\|^2_{\Sigma_{v_1}} + \|z_2 - h_2(x)\|^2_{\Sigma_{v_2}} + \|x - \hat{x}_0\|^2_{\Sigma_0}\right]$$

נגדיר את הבעיה $x = \bar{x} + \Delta x$ כאשר נפתור בעזרת גאוס-ניוטון.
לינאריזציה בקירוב טיילור עבור $h_1(x), h_2(x)$

$$h_1(x) = h_1(\bar{x} + \Delta x) = h_1(\bar{x}) + H_1 \Delta x$$

$$h_2(x) = h_2(\bar{x} + \Delta x) = h_2(\bar{x}) + H_2 \Delta x$$

נציב את זה ב II.

$$(\mathrm{II}) \quad \hat{x} = \operatorname{argmin}\Big[\|\Sigma_{v_1}^{-\frac{1}{2}}(z_1 - h_1(\bar{x}) - H_1\Delta x)\|^2 + \|\Sigma_{v_2}^{-\frac{1}{2}}(z_2 - h_2(\bar{x}) - H_2\Delta x)\|^2$$

$$+ \|\Sigma_0^{-\frac{1}{2}}(\bar{x} + \Delta x - \hat{x}_0)\|^2\Big]$$

- כעת נוכל את הבעיה לצורה הבאה: $\|A\Delta x - b\|^2$ ולפתור,
בעזרת LS.

$$A \triangleq \begin{bmatrix} \Sigma_{v_1}^{-\frac{1}{2}} H_1 \\ \Sigma_{v_2}^{-\frac{1}{2}} H_2 \\ \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \qquad b \triangleq \begin{bmatrix} \Sigma_{v_1}^{-\frac{1}{2}} (h_1(\bar{x}) - z_1) \\ \Sigma_{v_2}^{-\frac{1}{2}} (h_2(\bar{x}) - z_2) \\ \Sigma_0^{-\frac{1}{2}} (\hat{x}_0 - \bar{x}) \end{bmatrix}$$

(III) $\Lambda = A^T A$

$$\Delta x = (A^T A)^{-1} A^T b.$$

$$\Lambda = A^T A = \left(H_1^T \Sigma_{v_1}^{-1} H_1 + H_2^T \Sigma_{v_2}^{-1} H_2 + \Sigma_0^{-1}\right)$$

נציב ב- B ונקבל את Δx

$$\Delta x = \left(H_1^T \Sigma_{v_1}^{-1} H_1 + H_2^T \Sigma_{v_2}^{-1} H_2 + \Sigma_0^{-1}\right)^{-1} \cdot \ldots$$

$$\left(H_1^T \Sigma_{v_1}^{-1}(h_1(\bar{x}) - z_1) + H_2^T \Sigma_{v_2}^{-1}(h_2(\bar{x}) - z_2) + \Sigma_0^{-1}(\hat{x}_0 - \bar{x})\right)$$

הפתרון יצא לאחר איטרציות.

b) ויצא שמשתנה x במדידות z_1, z_2.

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{l} \end{pmatrix} = E(x, l \mid z_1, z_2)$$

מיקום המצלמה לא תלוי ב Landmark

מיקום Landmark לא תלוי במצלמה.

$$p(x, l \mid z_1, z_2) = p(x \mid z_1, z_2, l) \cdot p(l \mid z_1, z_2)$$

$$= p(x \mid z_1, z_2)\, p(l)$$

$p(x \mid z_1, z_2) \sim N(\mu, \Sigma)$ - נתון מסעיף a.

$p(l) \sim N(\hat{l}_0, \Sigma_{l0})$ - נתון מראש.

$$E(x, l \mid z_1, z_2) = \begin{pmatrix} \mu \\ \hat{l}_0 \end{pmatrix} = z_0.$$

נק' לינ': $z - z_0 = z - N(\mu, \hat{l}_0)$

c) $p(x,l|z_1,z_2,z)$ -

(i) אין תלות בין l לבין z בהסתר (z_1,z_2 בלי) ולהיפך.

(ii) אין תלות בין x לבין l ולהיפך

(iii) z_i, תלות בין x,z תמיד ולהיפך

$$= \frac{p(z_1,z_2|x,l,z)\cdot p(x,l|z)}{p(z_1,z_2|z)} = \frac{p(z_1,z_2|x)\,p(x,l|z)}{p(z_1,z_2)}$$

$$= \frac{p(z_1|x)\cdot p(z_2|x)\,p(x,l|z)}{p(z_1)\,p(z_2)}$$

$$= \frac{p(z_1|x)\cdot p(z_2|x)\cdot p(z|x,l)\cdot p(x,l)}{p(z_1)\,p(z_2)\cdot p(z)}$$

$$= \frac{p(z_1|x)\cdot p(z_2|x)\cdot p(z|x,l)\cdot p(x)\cdot p(l)}{p(z_1)\,p(z_2)\,p(z)}$$

d) אם הייתי לא סופר c לפתור בדרך זו, שונה רק

מה שלגבי הנחה.

$$p(x,l|z_1,z_2,z) = \frac{p(z_1,z_2|x,l,z)\cdot p(x,l|z)}{p(z_1,z_2|z)}$$

$$= \frac{p(z_1,z_2|x)\,p(x,l|z)}{p(z_1,z_2)} = \frac{p(z_1,z_2|x)\,p(z|x,l)\,p(x,l)}{p(z_1,z_2)\cdot p(z)}$$

$$= \frac{p(z_1,z_2|x)\cdot p(z|x,l)\cdot p(x)\cdot p(l)}{p(z_1,z_2)\,p(z)}$$

$$= \frac{p(x|z_1,z_2)\cdot p(z|x,l)\,p(l)}{p(z)}$$

Scanned by CamScanner

נקבל:

$$= \arg\max \left(\frac{p(x|z_1, z_2)\, p(z|x,l)\, p(l)}{p(z)} \right)$$

$$= \arg\min \left(\|x-\mu\|^2_{\Sigma} + \|z - h(x,l)\|^2_{\Sigma_v} + \|l - l_0\|^2_{\Sigma_{l0}} \right)$$

$$= \arg\min \left(\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}(x-\mu)\|^2 + \|\Sigma_v^{-\frac{1}{2}}(z - h(x,l))\|^2 + \|\Sigma_{l0}^{-\frac{1}{2}}(l - l_0)\|^2 \right)$$

נקבל, כמו בשאלה הקודמת a.

$x = \bar{x} + \Delta x \quad , \quad l = \bar{l} + \Delta l$

$$z - h(x,l) \approx z - h(\bar{x} + \Delta x, \bar{l} + \Delta l) = z - h(\bar{x}, \bar{l}) - H_x \Delta x - H_l \Delta l$$

$x - \mu = \bar{x} + \Delta x - \mu \qquad H_x = \nabla_x h(x,l)|_{\bar{x},\bar{l}}$

$l - l_0 = \bar{l} + \Delta l - l_0 \qquad H_l = \nabla_l h(x,l)|_{\bar{x},\bar{l}}$

$$\left\| A \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta l \end{pmatrix} - b \right\|$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} -\Sigma_v^{-\frac{1}{2}} H_x & -\Sigma_v^{-\frac{1}{2}} H_l \\ \Sigma^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \Sigma_{l0}^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}}_{3\times 2} \qquad b = \underbrace{\begin{pmatrix} -z + h(\bar{x}, \bar{l}) \\ \Sigma^{-\frac{1}{2}}\mu - \bar{x} \\ \Sigma_{l0}^{-\frac{1}{2}} l_0 - \bar{l} \end{pmatrix}}_{3\times 1}$$

$$I = A^T A = \begin{pmatrix} H_x^T \Sigma_v^{-1} H_x + \Sigma^{-1} & H_x^T \Sigma_v^{-1} H_l \\ H_l^T \Sigma_v^{-1} H_x & H_l^T \Sigma_v^{-1} H_l + \Sigma_{l0}^{-1} \end{pmatrix}$$

Question 2

given: $R_i = R^G_{c_i}$

$t_i = t^G_{c_i \to G}$ $\quad i = 1:2$

defining a same point in camera 2 and camera 1: denote point as X^{c_2} in FOR of cam 2 and X^{c_1} in 1st FOR. so that:

$$w_1 \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{point on screen} = \binom{z}{1}} = K_1 [R_1 | t_1] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}^G$$

$$w_1 K_1^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = [R_1 | t_1] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}^G = X^{c_1}$$

same for cam 2. so that:

$$(1) \begin{cases} X^{c_1} = w_1 K_1^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ X^{c_2} = w_2 K_2^{-1} \begin{pmatrix} z_2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

now define the point in 2nd FOR:

$$X^{c_2} = R^{c_2}_{c_1} X^{c_1} + t^{c_2}_{c_2 \to c_1} = R_2^T R_1 X^{c_1} + t^{c_2}_{c_2 \to c_1}$$

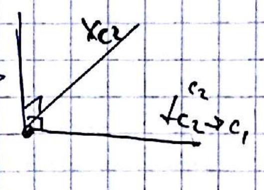
$$R^{c_2}_{G} R^{G}_{c_1} = (R^G_{c_2})^{-1} R^G_{c_1} = R_2^T R_1$$

like in class, performing cross multiplication by translation from 2 to 1 will yield:

$$[t^{c_2}_{c_2 \to c_1}]_\times / \quad [t^{c_2}_{c_2 \to c_1}]_\times X^{c_2} = [t^{c_2}_{c_2 \to c_1}]_\times R_2^T R_1 X^{c_1} + \cancel{[t^{c_2}_{c_2 \to c_1}]_\times t^{c_2}_{c_2 \to c_1}}$$

same with $[(X^{c_2})^T]_\bullet$ will null the LHS:

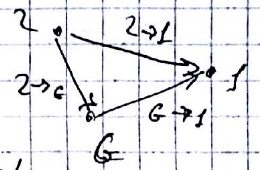
LHS: $\quad [(X^{c_2})^T]_\bullet \left([t^{c_2}_{c_2 \to c_1}]_\times X^{c_2} \right) = 0$



so that vector multiplication yields 0.

we remain with RHS:

$$[x^{c_2}]^T \left([\underbrace{t^{c_2}_{c_2 \to c_1}}]_\times (R_2^T) R_1 x^{c_1} \right) = 0$$



we are given only t in G frame. So that

$$t^{c_2}_{c_2 \to c_1} = (R_2^G)^{-1} \left[t^G_{2 \to G} - t^G_{1 \to G} \right] = R_2^T (t_2 - t_1)$$

$$\Rightarrow (x^{c_2})^T \left([R_2^T (t_2 - t_1)]_\times R_2^T R_1 x^{c_1} \right) = 0$$

inserting (1) yields:

$$\left[\cancel{w_2} K_2^{-1} \begin{pmatrix} z_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^T \left([R_2^T (t_2 - t_1)]_\times R_2^T R_1 \left[\cancel{w_1} K_1^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right) = 0 \qquad / : w_1 w_2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_2 \\ 1 \end{pmatrix}^T K_2^{-1T}}_{\hat{x}'^T} \underbrace{[R_2^T (t_2 - t_1)]_\times R_2^T R_1 K_1^{-1}}_{E} \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\hat{x}} = 0$$

point in space. essential matrix point on image 1

and FOR1

Question 2-6

$$p(x_1 x_2 \mid z_1 z_2) = \frac{p(z_1 z_2 \mid x_1 x_2)\, p(x_1, x_2)}{p(z_1, z_2)} \propto$$

$$\propto p(z_1 z_2 \mid x_1 x_2)\, p(x_1, x_2)$$

camera poses are independent $\Rightarrow$ $p(x_1, x_2) = p(x_1)\,p(x_2)$

which are given as prior distributions

what is left is to model $p(z_1\ z_2 \mid x_1, x_2)$

we are looking for MAP for (x_1, x_2)

$$MAP = \underset{x_1 x_2}{\arg\max} \left(p(x_1\ x_2 \mid z_1\ z_2) \right) =$$

$$= \underset{x_1 x_2}{\arg\min} \underbrace{\| z - f(x) \|^2_{\Sigma_r}}_{1} + \| x_1 - \mu_1 \|^2_{\Sigma_1} + \| x_2 - \mu_2 \|^2_{\Sigma_2}$$

where $f(x)$ was taken from observation model

$$z = f(x) + v \sim N(f(x), \Sigma_r)$$

the term 1 has to be minimized, it describes the observation error. Same as the epipolar constraint, which in ideal case without any noise is 0.

So we can replace these 2 conditions, and get relation to the epipolar constraint:

$$p(x_1; x_2) \propto p(h(z_1 z_2\ x_1, x_2))\, p(x_1)\, p(x_2)$$

$$x_1 \sim N(\mu_1, \Sigma_1)$$

$$x_2 \sim N(\mu_2, \Sigma_2)$$

$$h(z_1, z_2\ x_1 x_2) \sim N(0, \Sigma_{ep})$$

$$\underset{x_1 x_2}{\arg\max} (p(x_1 x_2 \mid z_1\ z_2)) =$$

$$= \underset{x_1 x_2}{\arg\min} \| h(z_1\ z_2\ x_1, x_2) \|^2_{\Sigma_{ep}} + \| x_1 - \mu_1 \|^2_{\Sigma_1} + \| x_2 - \mu_2 \|^2_{\Sigma_2}$$

3) $F = (K'^T)^{-1} E (K^T)^{-1}$

$t = [t_x, t_y, t_z]$

$$[t]_x = \begin{pmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{pmatrix}$$

$E = [t]_x R$

מטריצה של מכפלה וקטורית דטרמיננטה 0.

$\det(F) = \det((K'^T)^{-1} [t]_x R (K^T)^{-1}) =$

$= \det((K'^T)^{-1}) \det([t]_x) \det((K^T)^{-1})$

$\det([t]_x) = 0 - t_x^2 + t_z t_x t_y - t_y t_x t_z = 0.$

$\boxed{\det(F) = 0.}$