$x \sim N(\mu, \Sigma) \qquad x \sim N^{-1}(\eta, \Lambda) \qquad x \in R^n$ 1

צ"ל:

$$p(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\eta^T \Lambda^{-1} \eta\right)}{\sqrt{\det(2\pi\Lambda^{-1})}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^T \Lambda x + \eta^T x\right)$$

בצורת קווריאנס:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)\right)$$

$$\Lambda = \Sigma^{-1}, \quad \eta = \Lambda \cdot \mu \implies \Sigma = \Lambda^{-1} \quad \mu = \Lambda^{-1}\eta$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\det 2\pi \cdot \Lambda^{-1}}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}(x - \Lambda^{-1}\eta)^T \Lambda (x - \Lambda^{-1}\eta)\right] =$$

נשים לב כי Σ, Λ סימטריות!

$$= \frac{1}{\sqrt{\det 2\pi\Lambda^{-1}}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}(x^T - \eta^T \Lambda^{-T})(\Lambda x - \eta)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det 2\pi\Lambda^{-1}}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x^T\Lambda x - x^T\eta - \eta^T \underbrace{\Lambda^{-T}\Lambda}_{\text{סימטרי}} x + \eta^T \Lambda^{-T} \eta\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det 2\pi\Lambda^{-1}}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x^T\Lambda x - \eta^T x - \eta^T \Lambda^{-1} \Lambda \cdot x + \eta^T \underbrace{\Lambda^{-T}}_{\text{סימטרי}} \cdot \eta\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det 2\pi\Lambda^{-1}}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(x^T\Lambda x - \eta^T x - \eta^T x + \eta^T \cdot \Lambda^{-1} \cdot \eta\right)\right]$$

$$= \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\eta^T \Lambda^{-1} \eta\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x^T \Lambda x + \eta^T x\right)}{\sqrt{\det 2\pi\Lambda^{-1}}}$$

$x \in R^n \quad , \quad z = h(x) + v \quad , \quad v \sim N(0, \Sigma_v)$ שאלה 2:

$x \sim N(\hat{x}_0, \Sigma_0)$

a.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi \Sigma_0)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \|x - \mu\|^2_{\Sigma_0}\right)$$

$$E(z|x) = E(h(x) + v) = E(h(x)) + \cancel{E(v)}^{0} = E(h(x)) = h(x)$$

$$\operatorname{cov}(z|x) = \operatorname{cov}(h(x) + v) = \cancel{\operatorname{cov}(h(x))}^{0} + \operatorname{cov}(v) = \Sigma_v$$

$z|x \sim N(h(x), \Sigma_v)$

$$p(z|x) = \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi \Sigma_v)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \|z - h(x)\|^2_{\Sigma_0}\right)$$

b.

$p(x), \; p(z|x)$ נתונים

$p(x|z_1)$ מצא את

$$p(x|z_1) = \frac{p(z_1|x) \cdot p(x)}{p(z_1)}$$

$$p(z_1) = \sum_x p(z_1, x) = \sum_x p(z_1|x) \cdot p(x)$$

$$p(x|z_1) = \frac{p(z_1|x) \cdot p(x)}{\underbrace{\sum_x p(z_1|x) \cdot p(x)}_{A - \text{const}}} = A \cdot p(z_1|x) \cdot p(x)$$

c.

בעמ' הבא $\leftarrow$

$x \mid z_1 \sim N(\hat{x}_1, \Sigma_1)$

$x|z_1$ הינו גאוסיאני לכן הקווריאנס שלו והממוצע בדיעבד הם

כמו עבור maximum a posteriori

$$x^* = \arg\max_x p(x \mid z_1) = \arg\min_x \left(\log(-p(x \mid z_1)) \right)$$

$$\log(-p(x \mid z_1)) = \log[-\underbrace{p(z_1 \mid x)}_{N(h(x), \Sigma_v)} \cdot \underbrace{p(x)}_{N(\hat{x}_0, \Sigma_0)} \cdot A] =$$

$$= \log[-A] + \log[p(z_1 \mid x)] + \log[p(x)] =$$

$$= \log(-A) + \log\frac{1}{\sqrt{\det 2\pi\Sigma_v}} - \frac{1}{2}\|z - h(x)\|^2_{\Sigma_v} + \log\left(\frac{1}{\sqrt{\det 2\pi\Sigma_0}}\right) - \frac{1}{2}\|x - \hat{x}_0\|^2_{\Sigma_0}$$

$$= \underset{\text{קבוע}}{\tilde{A}} - \frac{1}{2}\|z - h(x)\|^2_{\Sigma_v} - \frac{1}{2}\|x - \hat{x}_0\|^2_{\Sigma_0}$$

$$x^* = \arg\min_x \left(J(x) \right) = \arg\min_x \left(-\frac{1}{2}\|z - h(x)\|^2_{\Sigma_v} - \frac{1}{2}\|x - \hat{x}_0\|^2_{\Sigma_0} \right)$$

נסמן

בתרגיל הקודם ראינו את אותה הבעיה רק $h(x)$ היתה לינארית.

כעת נבצע לינאריזציה סביב נקודה $\bar{x}$ ונפתור איטרטיבית עד התכנסות

$$\Delta x^* = \arg\min_{\Delta x} \left(J(\bar{x} + \Delta x) \right) \quad , \quad x = \bar{x} + \Delta x$$ נסמן

$$x - \hat{x}_0 = \bar{x} + \Delta x - \hat{x}_0$$

$$z - h(x) = z - h(\bar{x} + \Delta x) = z - h(\bar{x}) - \left.\frac{\partial h(x)}{\partial x}\right|_{\bar{x}} \cdot \Delta x$$

$$J(\bar{x} + \Delta x) = \|\Delta \bar{x} + (\bar{x} - \hat{x}_0)\|^2_{\Sigma_0} + \|H\Delta x + \underbrace{h(\bar{x})}_{\text{קבוע}} - z\|^2_{\Sigma_v} =$$

$$= \|\Sigma_0^{-0.5}[\Delta x + (\bar{x} - \hat{x}_0)]\|^2 + \Sigma_v^{-0.5}(H\Delta x + h(\bar{x}) - z\|^2$$

$$A = \begin{pmatrix} \Sigma_0^{-0.5} \\ \Sigma_v^{-0.5} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -\Sigma_0^{-0.5}(\bar{x} - \hat{x}_0) \\ -\Sigma_v^{-0.5}(h(\bar{x}) - z) \end{pmatrix}$$

$$\Delta x^* = \arg_{\Delta x} \left(\|A\Delta x - B\|^2 \right)$$

זוהי בעצם בעיית מינימום ריבועים ופתרונה הינו:

$$\Delta x^* = (A^T A)^{-1} A^T B$$

$$\bar{x}_{new} = \bar{x} + \Delta x^*$$

עדכון עם לינאריזציה!

ומכאן ניתן להמשיך עד להתכנסות.

d. נתון: $x|z_1 \sim N(\hat{x}_1, \Sigma_1)$, $\hat{x}_1, \Sigma_1$

צ"ל: $x|z_1, z_2 \sim N(\hat{x}_2, \Sigma_2)$

לפי הנחת מרקוב:

$$p(x|z_1,z_2) = \eta\, p(z_2|x) \cdot \underbrace{p(x|z_1)}_{\text{נתון}}$$

מודל המדידה קבוע עבור כל x

$$p(z_2|x) = p(z|x),$$

$$z|x \sim N(h(x), \Sigma_v)$$

$$p(x|z_1,z_2) = \eta \cdot \frac{1}{\sqrt{\det 2\pi\Sigma_v}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\det 2\pi\Sigma_1}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\|z-h(x)\|^2_{\Sigma_v} + \|x-\hat{x}_1\|^2_{\Sigma_1}\right)\right]$$

$$x|z_1,z_2 \sim N(\hat{x}_2, \Sigma_2)$$

שאלה 3:

a.

$x_k \in R^n \qquad x_{k+1} = f(x_k, u_k) + w_k$

$w_k \sim N(0, \Sigma_w)$

$z = h(x) + v \quad , \quad v \sim N(0, \Sigma_v)$

$x \sim N(\hat{x}_0, \Sigma_0)$

$p(x_k \mid x_{k-1}, u_{k-1}) = ?$

$E(x_{k+1}) = E(f(x_k, u_k) + w_k) = E(f(x_k, u_k)) + E(\cancel{w_k}) =$

$E(x_{k+1} \mid x_k, u_k) = E(f(x_k, u_k) \mid x_k, u_k) = f(x_k, u_k)$

$cov(x_{k+1}) = \cancel{cov(f(x_k, u_k))} + cov(w_k) = \Sigma_w$

היות וההסתברות (עבור x_{k+1}) הינה מותנית ב- x_k, u_k אזי $f(x_k, u_k)$

הינו דטרמיניסטי:

$x_k \mid x_{k-1}, u_{k-1} \sim N(f(x_{k-1}, u_{k-1}), \Sigma_w)$

לכן גם $p(x_k \mid x_{k-1}, u_{k-1})$ ידועה

b: נחשב את $p(x_1 \mid z_1, u_0)$

$$p(x_1 \mid z_1, u_0) = \frac{p(z_1 \mid x_1, u_0) \cdot p(x_1 \mid u_0)}{p(z_1 \mid u_0)} =$$

$$= \eta \cdot p(z_1 \mid x_1) \cdot p(x_1 \mid u_0)$$

$$p(x_1 \mid u_0) = \int_{x_0} p(x_1 \mid u_0, x_0) \cdot p(x_0)\, dx_0$$

$$p(x_1 \mid z_1, u_0) = \eta\, p(z_1 \mid x_1) \cdot \int_{x_0} p(x_1 \mid u_0, x_0) \cdot p(x_0)\, dx_0$$

$x_0 \sim N(\hat{x}_0, \Sigma_0)$

$z_1 \mid x_1 \sim N(h(x), \Sigma_v)$

$x_1 \mid u_0, x_0 \sim N(f(x_0, u_0), \Sigma_w)$

ג.

$$x^* = \arg\max_{x_k} p(x_k | z_k, u_{k-1})$$

$$p(x_k | z_k, u_{k-1}) = \eta \exp\left(-\frac{1}{2}\|z-h(x_k)\|^2_{\Sigma_v}\right)\int_{x_0}\exp\left[\left(-\frac{1}{2}\|x_k - f(x_{k-1}, u_{k-1})\| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \|x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}\|^2_{\Sigma_0}\right)\right]dx_0 =$$

$$= \eta \exp\left[-\frac{1}{2}\|z-h(x_k)\|^2_{\Sigma_v}\right]\underbrace{\int_{x_0}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\|w_k\|^2_{\Sigma_w} + \|x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}\|^2_{\Sigma_0}\right\}dx_0\right.}_{\text{אינטגרל של } X_k}$$

נמצא את המקסימום

$$x^* = \arg\max_{x_k}\left(p(x_k | z_k, u_{k-1})\right) =$$

$$= \arg\min_{x_k}\left\{-\log\left(p(x_k | z_k, u_{k-1})\right)\right\}$$

$$= \arg\min_{x_k}\left\{\log\eta + \frac{1}{2}\|z-h(x_k)\|^2_{\Sigma_v} + \log(\text{אינטגרל})\right\} =$$

$$= \arg\min_{x_k}\left\{\|z-h(x_k)\|^2_{\Sigma_v}\right\}$$

זוהי בעצם בעיית מינימום ריבועים לא לינארית.

ד.

$$x_k \in R^n \Rightarrow \Sigma_{ij}, I_{ij} \in R^{n\times m}$$

$$\Sigma_{0:1}, I_{0:1} \in R^{2n\times 2m}$$

ביטוי עבור המטריצות Σ_1', I_1'

- אינטגרציה זו $p(x_{0:1} | u_0, z_1)$ מראה כי הקווריאנס מתקבל מתוך ההגדרה $\Sigma_1' = \Sigma_{11}$

$$\left.\begin{aligned} I_{0:1} &= \Sigma_{0:1}^{-1} \\ I_1' &= (\Sigma_1')^{-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{לכן} \quad I_1' = \left\{\left[(I_{0:1})^{-1}\right]_{1,1}\right\}^{-1}$$

$$I_1' = I_{11} - I_{01}^T I_{11}^{-1} I_{01}$$

נבצע היפוך ונקבל