По заданной функции полезности u, вектору полезности p, доходу потребителя M требуется:

1) найти функцию спроса потребителя $x^* = x^*(p, M)$ и значение функции полезности в оптимальной точке $u^* = u(x^*)$, проверить тождество $p_1 x_1^* + p_2 x_2^* = M$;
2) вычислить множитель Лагранжа λ^* и предельные нормы замены товаров;
3) составить модели поведения потребителя при возросших ценах на величину $dp_1 = dp_2$ а) без компенсации и б) с компенсацией, а также в) при увеличении дохода на величину dM; во всех случаях найти соответствующие значения функции полезности и цены M^* бюджетных множеств, сравнить их с бюджетом потребителя;
4) сформулировать выводы о влиянии а) некомпенсируемого и б) компенсируемого повышения цен на функции спроса и полезности, в) повышения дохода при неизменных ценах, г) о наличии ценных, взаимозаменяемых и взаимодополняемых товаров, д) о наличии свойства валовой заменимости функции спроса;
5) дать сравнительную характеристику эффективности бюджета как функции цен и спроса;

ВАРИАНТ 8:

u	p_1	p_2	M	dp_1	dp_2	dM
$5x_1^{\frac{1}{5}}x_2^{\frac{1}{5}}$	8	6	196	0.4	0.4	8

Решение:

1) а) запишем уравнение связи:

$\varphi(x) = 8x_1 + 6x_2 - 196$

б) составим функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = 5x_1^{\frac{1}{5}}x_2^{\frac{1}{5}} - \lambda(8x_1 + 6x_2 - 196)$$

в) найдем частные производные функции L по всем аргументам и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = x_1^{-\frac{4}{5}} x_2^{\frac{1}{5}} - 8\lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = x_1^{\frac{1}{5}} x_2^{-\frac{4}{5}} - 6\lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = -(8x_1 + 6x_2 - 196) = 0; \end{cases}$$

г) решим полученную систему уравнений, для этого перенесем вторые слагаемые первых двух уравнений в правую часть:

$$\begin{cases} x_1^{-\frac{4}{5}} x_2^{\frac{1}{5}} = 8\lambda \\ x_1^{\frac{1}{5}} x_2^{-\frac{4}{5}} = 6\lambda \end{cases}$$

и поделим каждую часть первого уравнения полученной системы на соответствующие части второго уравнения системы

$$\frac{x_1^{-\frac{4}{5}} x_2^{\frac{1}{5}}}{x_1^{\frac{1}{5}} x_2^{-\frac{4}{5}}} = \frac{8\lambda}{6\lambda},$$

после сокращений на множитель λ в правой части и деления в левой части запишем уравнение

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{4}{3}$$

откуда находим, что $x_1 = \frac{3}{4}x_2$. Подставим в левую часть третьего уравнения системы в) вместо x_1 его представление, сменим знаки членов уравнения на противоположные и перенесем свободный член в правую часть:

$$-8\frac{3}{4}x_2 - 6x_2 + 196 = -6x_2 - 6x_2 + 196 = -12x_2 + 196 = 0$$

отсюда

$$x_2 = \frac{49}{3}$$

значит

$$x_1 = \frac{3}{4}x_2 = \frac{3}{4}\frac{49}{3} = \frac{49}{4}$$

запишем функцию спроса потребителя

$$x^* = (x_1^*, x_2^*)^T = \left(\frac{49}{4}\,; \frac{49}{3}\right)^T = \begin{pmatrix} \frac{49}{4} \\ \frac{49}{3} \end{pmatrix}$$

и вычислим значение функции полезности в оптимальной точке

$$x^* = \left(\frac{49}{4}\,; \frac{49}{3}\right)^T:$$

$$u^* = u(x^*) = 5x_1^{\frac{1}{5}}x_2^{\frac{1}{5}} = 5\sqrt[5]{\frac{49}{4}}\sqrt[5]{\frac{49}{3}} \approx 5 * 2.886 \approx 14.428$$

цена бюджетного множества x^* равна:

$$M^* = p_1x_1^* + p_2x_2^* = 8\frac{49}{4} + 6\frac{49}{3} = 2 \cdot 49 + 2 \cdot 49 = 196 \equiv M$$

2) Вычислим множитель Лагранжа в оптимальной точке, используя формулу $\lambda^* = \frac{\frac{\partial u^*}{\partial x_i}}{p_i}$ и принимая для определенности $i = 1$:

$$\lambda^* = \frac{\frac{\partial u^*}{\partial x_i}}{p_i} = \frac{x_1^{-\frac{4}{5}}x_2^{\frac{1}{5}}}{8} = \frac{\sqrt[5]{\frac{49}{3}}}{8\sqrt[5]{\left(\frac{49}{4}\right)^4}} \approx 0.029$$

предельные нормы замены одного товара другим вычислим по формуле $-\frac{dx_i^*}{dx_j^*} = \frac{\frac{\partial u^*}{\partial x_j}}{\frac{\partial u^*}{\partial x_i}}$

для $i = 1$:

$$-\frac{dx_1^*}{dx_2^*} = \frac{\frac{\partial u^*}{\partial x_j}}{\frac{\partial u^*}{\partial x_i}} = \frac{x_1^{-\frac{4}{5}}x_2^{\frac{1}{5}}}{x_1^{\frac{1}{5}}x_2^{-\frac{4}{5}}} = \frac{4}{3}$$

для $i = 1$:

$$-\frac{dx_2^*}{dx_1^*} = \frac{3}{4}$$

3) Составим теперь модели потребителя при возросших ценах и доходе потребителя, найдем соответствующие значения функции полезности и стоимости приобретаемых товаров. С этой целью выполним

следующие действия: а) построим матрицу Гессе в оптимальной точке, с этой целью найдем чистые и смешанные производные второго порядка функции полезности в оптимальной точке

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^{-\frac{4}{5}} x_2^{\frac{1}{5}}\right) = -\frac{4}{5} x_1^{-\frac{9}{5}} x_2^{\frac{1}{5}} \approx -0.015$$

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1^{-\frac{4}{5}} x_2^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{5} x_1^{-\frac{4}{5}} x_2^{-\frac{4}{5}} \approx 0.003$$

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(x_1^{\frac{1}{5}} x_2^{-\frac{4}{5}}\right) = -\frac{4}{5} x_1^{\frac{1}{5}} x_2^{-\frac{9}{5}} \approx -0.008$$

составим матрицу Гессе

$$U^* = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 u^*}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 u^*}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 u^*}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.015 & 0.003 \\ 0.003 & -0.008 \end{pmatrix}.$$

найдём матрицу, обратную матрицу Гессе

$$U^{*-1} = \frac{1}{|U^*|}\begin{pmatrix} -0.008 & -0.003 \\ -0.003 & -0.015 \end{pmatrix} = \frac{1}{0.000111}\begin{pmatrix} -0.008 & -0.003 \\ -0.003 & -0.015 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -72.072 & -27.027 \\ -27.027 & -135.135 \end{pmatrix}$$

вычислим произведение:

$$pU^{*-1}p^T = (8 \quad 6)\begin{pmatrix} -72.072 & -27.027 \\ -27.027 & -135.135 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= (8 \cdot (-72.072) + 6 \cdot (-27.027) \quad 8 \cdot (-27.027) + 6 \cdot (-135.135))\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$= (-738.738 \quad -1027.026)\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} = -12072.06$$

по формуле $\mu = -\left(pU^{*-1}p^T\right)^{-1}$ найдем число μ

$$\mu = -\left(pU^{*-1}p^T\right)^{-1} = -\frac{1}{-12072.06} = \frac{100}{1207206}$$

построим матрицу H, для чего выполним следующие действия: вычислим вектор-строку pU^{*-1}

$$pU^{*-1} = (8 \quad 6)\begin{pmatrix} -72.072 & -27.027 \\ -27.027 & -135.135 \end{pmatrix} =$$

$$= (8 \cdot (-72.072) + 6 \cdot (-27.027) \quad 8 \cdot (-27.027) + 6 \cdot (-135.135)) =$$

$$= (-738.738 \quad -1027.026)$$

и вектор-столбец $U^{*^{-1}}p^T$

$$U^{*^{-1}}p^T = \begin{pmatrix} -72.072 & -27.027 \\ -27.027 & -135.135 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -72.072 \cdot 8 + (-27.027) \cdot 6 \\ -27.027 \cdot 8 + (-135.135) \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -738.738 \\ -1027.026 \end{pmatrix}$$

Найдем произведение вектор столбца $U^{*^{-1}}p^T$ – на вектор-строку $pU^{*^{-1}}$ по правилу умножения матриц как произведение одностолбцовой матрицы на однострочную:

$$U^{*^{-1}}p^T pU^{*^{-1}} = \begin{pmatrix} -738.738 \\ -1027.026 \end{pmatrix}(-738.738 \quad -1027.026) =$$

$$= \begin{pmatrix} 545733.833 & 758703.133 \\ 758703.133 & 1054782.405 \end{pmatrix}$$

вычислим матрицу $\mu U^{*^{-1}}p^T pU^{*^{-1}}$:

$$\mu U^{*^{-1}}p^T pU^{*^{-1}} = \frac{100}{1207206}\begin{pmatrix} 545733.833 & 758703.133 \\ 758703.133 & 1054782.405 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45.206 & 62.848 \\ 62.848 & 87.374 \end{pmatrix}$$

составим, наконец, матрицу $H = \mu U^{*^{-1}}p^T pU^{*^{-1}} + U^{*^{-1}}$:

$$H = \begin{pmatrix} 45.206 & 62.848 \\ 62.848 & 87.374 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -72.072 & -27.027 \\ -27.027 & -135.135 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26.866 & 35.821 \\ 35.821 & -47.761 \end{pmatrix}$$

Запишем первое уравнение Слуцкого $dx^* = \mu U^{*^{-1}}p^T x_n^* dp_n + \lambda^* H_n dp_n$ и найдем изменение спроса dx^* в связи с некомпенсируемым ростом цен p_n на величину dp_n:

а) для $dp_1 = 0.4$

$$dx^*(1) = \frac{100}{1207206}\begin{pmatrix} -738.738 \\ -1027.026 \end{pmatrix}\frac{49}{4}0.4 + 0.029\begin{pmatrix} -26.866 \\ 35.821 \end{pmatrix}0.4 = \begin{pmatrix} -0.611 \\ -0.0013 \end{pmatrix}$$

б) для $dp_2 = 0.4$

$$dx^*(2) = \frac{100}{1207206}\begin{pmatrix} -738.738 \\ -1027.026 \end{pmatrix}\frac{49}{3}0.4 + 0.029\begin{pmatrix} 35.821 \\ -47.761 \end{pmatrix}0.4 = \begin{pmatrix} 0.0157 \\ -1.1098 \end{pmatrix}$$

Вычислим измененный спрос:

а) $x^*(1) = x^* + dx^*(1) = \begin{pmatrix} \frac{49}{4} \\ \frac{49}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.611 \\ -0.0013 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.639 \\ 16.332 \end{pmatrix}$

б) $x^*(2) = x^* + dx^*(2) = \begin{pmatrix} \frac{49}{4} \\ \frac{49}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0157 \\ -1.1098 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.2657 \\ 15.2235 \end{pmatrix}$

Найдем соответствующие значения функции полезности:

а) $u^*(1) = 5 \cdot \sqrt[5]{11.639}\sqrt[5]{16.332} \approx 14.2811$

б) $u^*(2) = 5 \cdot \sqrt[5]{12.2657}\sqrt[5]{15.2235} \approx 14.2302$

а также соответствующие стоимости приобретенных товаров:

а) $M^*(1) = p_1 x_1^*(1) + p_2 x_2^*(1) = 8 \cdot 11.639 + 6 \cdot 16.332 = 191.104 < M$

б) $M^*(2) = p_1 x_1^*(2) + p_2 x_2^*(2) = 8 \cdot 12.2657 + 6 \cdot 15.2235 = 189.4666 < M$

Запишем второе уравнение Слуцкого:

$$dx_{comp}^* = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_n}\right)_{comp} dp_n = \lambda^*\left(\mu U^{*-1} p^T p U^{*-1} + U^{*-1}\right)_n dp_n = \lambda^* H_n dp_n$$

и найдем изменение спроса при компенсируемом росте цен:

а) для $n = 1$

$$dx(1)_{comp}^* = 0.029 \cdot \begin{pmatrix} -26.866 \\ 35.821 \end{pmatrix} \cdot 0.4 = \begin{pmatrix} -0.3116 \\ 0.4155 \end{pmatrix}$$

б) для $n = 2$

$$dx(2)_{comp}^* = 0.029 \cdot \begin{pmatrix} 35.821 \\ -47.761 \end{pmatrix} \cdot 0.4 = \begin{pmatrix} 0.4155 \\ -0.554 \end{pmatrix}$$

подсчитаем изменённую величину спроса:

а) $x(1)_{comp}^* = x^* + dx(1)_{comp}^* = \begin{pmatrix} \frac{49}{4} \\ \frac{49}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.3116 \\ 0.4155 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.9384 \\ 16.7488 \end{pmatrix}$

б) $x(2)_{comp}^* = x^* + dx(2)_{comp}^* = \begin{pmatrix} \frac{49}{4} \\ \frac{49}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.4155 \\ -0.554 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.6655 \\ 15.7793 \end{pmatrix}$

найдем соответствующее значение функции полезности:

а) $u^*\left(x(1)_{comp}^*\right) = u_1^* = 5 \cdot \sqrt[5]{11.9384}\sqrt[5]{16.7488} \approx 14.4263$

б) $u^*\left(x(2)_{comp}^*\right) = u_2^* = 5 \cdot \sqrt[5]{12.6655}\sqrt[5]{15.7793} \approx 14.4249$

а также стоимость приобретаемых товаров:

а) $M(1)_{comp}^* = p_1 x(1)_{comp_1}^* + p_2 x(1)_{comp_2}^* = 8 \cdot 11.9384 + 6 \cdot 16.7488 = 196 <$ $M_{comp} = 196 + \frac{49}{4} \cdot 0.4$

б) $M(2)_{comp}^* = p_1 x(2)_{comp_1}^* + p_2 x(2)_{comp_2}^* = 8 \cdot 12.6655 + 6 \cdot 15.7793 =$ $195.9998 < M_{comp} = 196 + \frac{49}{3} \cdot 0.4$

Запишем, наконец, третье уравнение Слуцкого $dx^* = -\mu U^{*-1} p^T dM$

и найдем величину изменения спроса при неизменных ценах в связи с изменением дохода М на величину $dM = 16$, взятую произвольно:

$$dx_M^* = -\mu U^{*-1} p^T dM = \frac{100}{1207206}\begin{pmatrix}-738.738\\-1027.026\end{pmatrix}\cdot 8 = \begin{pmatrix}-0.4856\\-0.6806\end{pmatrix}$$

подсчитаем измененное значение спроса:

$$x_M^* = x^* + dx_M^* = \begin{pmatrix}\frac{49}{4}\\\frac{49}{3}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-0.4856\\-0.6806\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11.7644\\15.6527\end{pmatrix}$$

и соответствующее значение функции полезности:

$$u_M^* = u(x_M^*) = 5\cdot\sqrt[5]{11.7644}\sqrt[5]{15.6527} = 14.1906$$

а также общую стоимость приобретенных товаров:

$$M_M^* = M(x_M^*, p) = 8 * 11.7644 + 6 * 15.6527 = 188.0314 < M = 196 + 8 = 204$$

т.е. стоимость всего множества приобретенных товаров оказалось меньше бюджета потребителя.

4) Сформулируем выводы: а) при некомпенсируемом повышении цены на один из товаров спрос на него падает, а на другой товар остается неизменным, что в обоих случаях ведет к снижению значения функции полезности; общая стоимость приобретаемого множества товаров в первом случае меньше бюджета потребителя, во втором – больше этого бюджета; б) при компенсируемом повышении цены на любой товар спрос на него падает, тогда как на второй товар он растет, растет и стоимость всего множества приобретаемых товаров, оставаясь меньше бюджета потребителя, разумеется, при неизменном значении функции полезности; в) при повышении дохода без изменения цен растет спрос на каждый товар, что ведет к росту функции полезности; г) поскольку, далее, с повышением дохода спрос на любой из товаров растет, то оба товара являются ценными; так как падение спроса на каждый товар приводит к росту спроса на другой товар, то оба товара образуют пару взаимозаменяемых товаров, а это в свою очередь означает, что функция спроса обладает свойством сильной валовой заменимости.