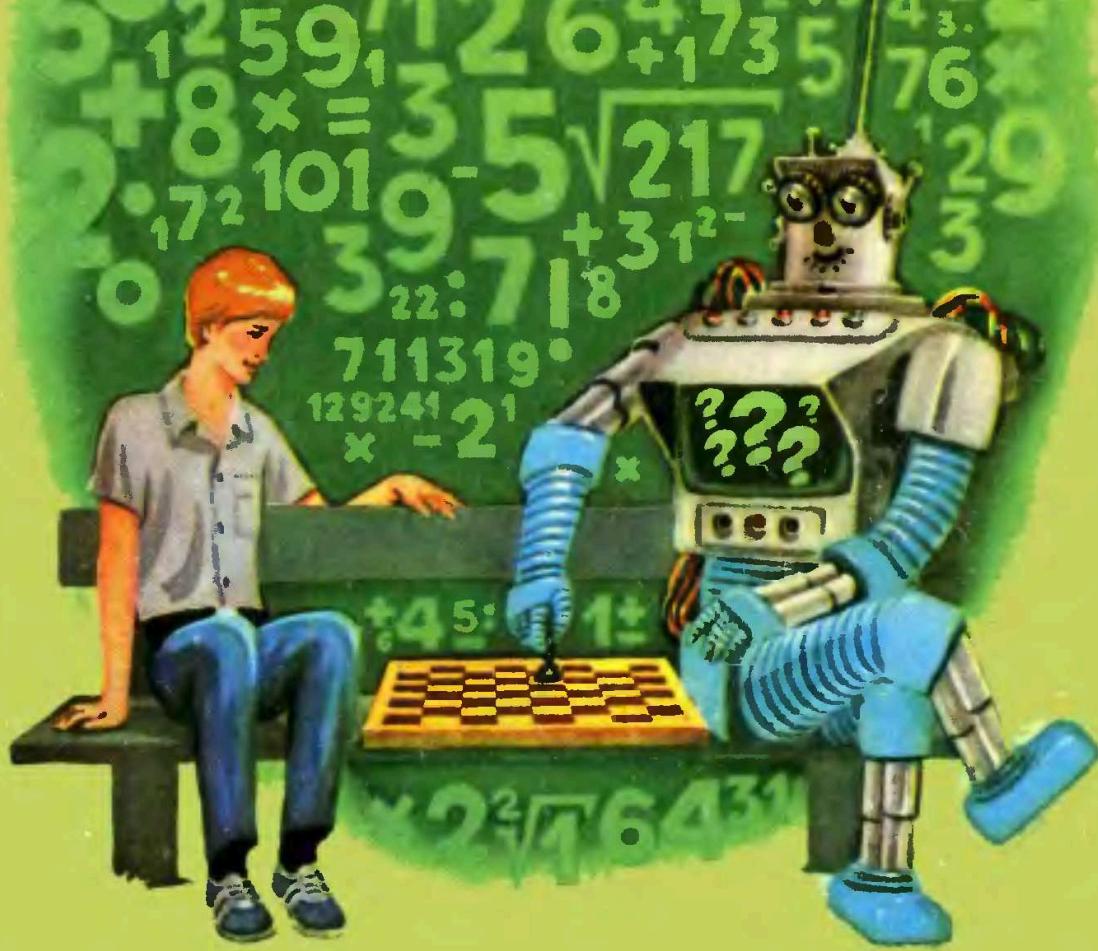


Б.А.КОРДЕМСКИЙ
А.А.АХАДОВ

УДИВИТЕЛЬНЫЙ МИР ЧИСЕЛ



КРИПТОГРАММА

Расшифровав подписи к рисункам (число — буква), прочитайте отличное четверостишие литовского поэта.

14.5.1.5.9.8.7.21. 3.6.13.21. 13.4.8. 9.1.5.24.5.13.23.14
14.12. 18. 3.1.6.26.6.4.8.3. 19.5.7.14.23.24
4.6. 1.2.7.7.11.8.44.42.3.2.15. 4.2. 9.5.26.5.17.21
9.5.26.4.8 : 3.7.25. 3. 44.3.5.8.24. 1.18.22.2.24.

Свою расшифровку сопоставьте с эпиграфом к

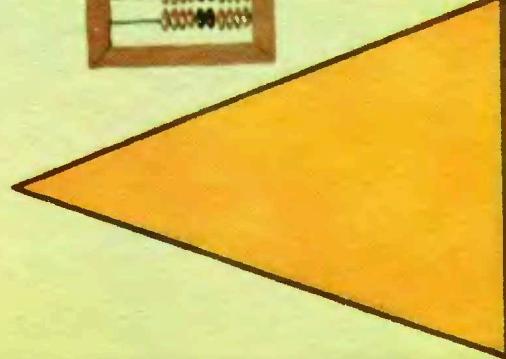
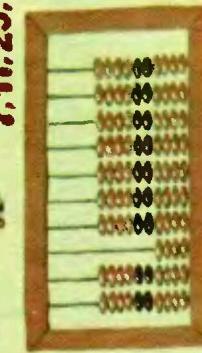
ЗАГАДКА

По бумаге я брошу,
Острый носиком вожу.
Оставляю сзади след,
Когда — верный,
когда — нет.
Вот это как раз
зависит от вас!

„Звуковой“ ребус
на загадку
ответ



И



Ключ к криптограмме:

7,11,25,14,12



1.2, 3, 4, 5, 10, 6, 13, 1, 6, 4, 4, 12, 15
14, 1, 6, 48, 19, 5, 20, 21, 4, 8, 22

23, 17, 6, 1, 8, 16, 2
4, 2
9, 8, 1, 2, 26, 8, 13, 6

Б.А.КОРДЕМСКИЙ
А.А.АХАДОВ

УДИВИТЕЛЬНЫЙ МИР ЧИСЕЛ



(МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ГОЛОВОЛОМКИ
И ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ)

КНИГА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ



МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
1986

ББК 22.1
К66

Рецензенты:

учитель математики г. Ногинска Т. К. Шабашов,
младший научный сотрудник НИИ школ МП РСФСР М. В. Ткачева.

Кордемский Б. А., Ахадов А. А.
К66 Удивительный мир чисел: (Матем. головоломки и задачи для любознательных): Кн. для учащихся.— М.: Просвещение, 1986.— 144 с.: ил.

Данная книга содержит более двухсот задач по преимуществу арифметических и алгебраических, направленных на воспитание гибкости математического мышления и развитие инициативы и сообразительности. Книга рассчитана в основном на учащихся старших классов средней школы.

К 4306020000—727 228—86
103(03)—86



© Издательство «Просвещение», 1986

ББК 22.1
51

Торопись, ведь дни проходят,
Ты у времени в гостях.
Не рассчитывай на помощь,
Помни: всё в твоих руках.

Юстас Палецкис

ПРЕДИСЛОВИЕ

Две стихии господствуют в математике — числа и фигуры с их бесконечным многообразием свойств и взаимосвязей. Задача — это почти всегда поиск, раскрытие каких-то свойств и отношений, а средства ее решения — это интуиция и догадка, эрудиция и владение методами математики. Эти же качества человеческого ума воспитываются, укрепляются, обогащаются у каждого, кто регулярно отдает часть своего досуга умственной гимнастике, лучшим видом которой является решение математических головоломок, ребусов, задач с интригующим содержанием.

В нашей книге отдано предпочтение стихии чисел. Такая одноплановость состава задач не уменьшает ни удовольствия, ни пользы от самостоятельного поиска их решения и даже от ознакомления с решениями, приведенными в книге: какое-либо из них может оказаться более изящным, чем свое.

Само возникновение понятия числа — одно из гениальнейших проявлений человеческого разума. Действительно, числа не только что-то измеряют, сравнивают, вычисляют, но даже рисуют, проектируют, сочиняют, играют, делают умозаключения, выводы.

Самые древние по происхождению числа — натуральные. «Ручейки» натуральных чисел, сливаясь, порождают безбрежный океан вещественных и разного рода особых специальных чисел.

Внутренняя красота разнообразных свойств первых обитателей этого океана — вещественных чисел — привлекла к ним внимание авторов предлагаемых умственно-гимнастических упражнений. Искомое тут почти всегда число или какое-либо свойство чисел определенного вида. Некоторое пристрастие авторов к большим числам вполне созвучно космической эре цивилизации. Работа с такими числами потребует обращения к справочникам, таблицам и калькуляторам, а этот навык необходим в наше время каждому.

Некоторые из предлагаемых авторами задач близки по форме и содержанию задачам школьных учебников. Другие — по трудности — на ступеньку выше, оставаясь все же в границах доступности для учащихся VIII—X классов и всех, окончивших школу. Но те и другие задачи нацелены на проникновение разумом в удивительный мир чисел, на раскопку его богатств, на возбуждение математической любознательности и собственной инициативы. Упражняйтесь!

Кордемский Б. А., Ахадов А. А.

В МАТЕМАТИКУ ТРОПИНКИ ОДОЛЕЙТЕ БЕЗ ЗАПИНКИ



Тропинка наблюдений и поиска закономерностей

Зеленый огонек светофора, открывающего доступ к математике, зажигается для нас еще в раннем детстве вместе с таблицей умножения. И не только потому, что с помощью таблицы умножения мы начинаем учиться вычислять и преобразовывать математические выражения. Таблица умножения является одной из форм проявления закономерностей, правильностей, управляющих жизнью и направляющих нашу умственную деятельность.

Вот выучил мальчик таблицу умножения. Радость познания и жажда исследований побудили его выписать в свою тетрадь последние цифры произведения чисел 0, 1, 2, ..., 9 на 7:

$$0, 7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3. \quad (*)$$

Вычитая из каждого последующего числа предыдущее, он обнаруживает ритмичную последовательность разностей:
 7, -3, -3, опять 7, -3, -3 и опять 7, -3, -3.

Простое действие вычитания сотворило гармонию чисел!

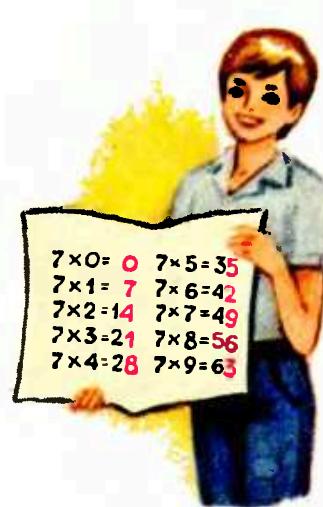
Продолжая наблюдения, мальчик устанавливает дополнительно, что, переписав последовательность (*) в обратном порядке, он получает строку последних цифр результатов в таблице умножения на 3.

Мы можем сказать теперь, что этот мальчик вышел на одну из тропинок к математике, тропинку находок и маленьких открытий, объявившихся при помощи наблюдений незнакомых для себя соотношений и связей между числами или фигурами. Математика в сущности и занимается изучением и классификацией всевозможных закономерностей.

Что же касается искусства вычислений и преобразований, то оно всего лишь рабочее орудие математика. Впрочем, владеть им надо в совершенстве. Гаусс — «король мате-



$$\begin{aligned}
 3 \times 1 &= 3 \\
 3 \times 2 &= 6 \\
 3 \times 3 &= 9 \\
 3 \times 4 &= 12 \\
 3 \times 5 &= 15 \\
 3 \times 6 &= 18 \\
 3 \times 7 &= 21 \\
 3 \times 8 &= 24 \\
 3 \times 9 &= 27 \\
 3 \times 0 &= 0
 \end{aligned}$$



матиков» — никогда не избегал вычислений, даже любил вычислять. Многие из его ранних открытий являются результатом наблюдений и изучения своих кропотливых вычислений.

От наблюдений над разностями чисел одного из столбиков таблицы умножения естествен шаг к испытаниям «на разность» какого-либо набора произвольно взятых чисел.

Возьмем наугад четыре натуральных числа a_1, a_2, a_3, a_4 и вычислим абсолютные значения четырех разностей «по кругу»:

$$|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, |a_3 - a_4|, |a_4 - a_1|.$$

С получившимися разностями произведем аналогичные вычисления и, повторив эту процедуру несколько раз — совсем не так уж много,— доберемся, к удивлению, всегда до ... четырех нулей!

Можно нарочно взять числа с контрастными разностями, например такие: 5, 1012, 98, 96, но процедура вычислений никогда не получается длительной. В данном случае



$ 5 - 1012 = 1007$	5	1012	98	96
$ 1012 - 98 = 914$	1007	914	2	91
$ 98 - 96 = 2$	93	912	89	916
$ 96 - 5 = 91$	819	823	827	823
$ 1007 - 914 = 93$	4	4	4	4
$ 914 - 93 $	0	0	0	0

— всего
пять
шагов.

Мы брали много других исходных «квартетов» чисел, и ни разу нам не потребовалось более 12 шагов!

Но ведь все множество натуральных чисел не испытаете! Поэтому экспериментально обнаруженный феномен еще нельзя считать закономерным, пока не убедишься в его всеобщности. Попытайтесь!

Если самостоятельный поиск обоснования закономерного, а не случайного превращения четверок разностей в нули не приведет вас к успеху, загляните в решение задачи «Безошибочный прогноз» (с. 123).

Иной результат наблюдается для серии разностей в случае комплекта из трех произвольных натуральных чисел: в финале всегда получаются две единицы и нуль в том или ином чередовании.

Пример. Пусть исходная тройка чисел $R_0 = (7, 12, 1)$. Тогда последовательность разностей будет $R_1 = (5, 11, 6)$, $R_2 = (6, 5, 1)$, $R_3 = (1, 4, 5)$, $R_4 = (3, 1, 4)$, $R_5 = (2, 3, 1)$, $R_6 = (1, 2, 1)$, $R_7 = (1, 1, 0)$,

Много интересных, красивых, полезных числовых соотношений, связей, результатов таится на тропинке наблюдений над простыми числами, т. е. имеющими только два делителя: единицу и самого себя (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...).

Наблюдаем: из цифр 1, 3, 6, 9 формируются 24 различных четырехзначных числа; из них только два — простые: 3169 и 3691 — хотите верьте, хотите проверьте!

Заменим цифру 6 цифрой 8, и никакая расстановка цифр 1, 3, 8, 9 не дает простого четырехзначного числа. Догадываетесь почему?

Не может не восхитить результат еще одного наблюдения. Будем делить произведение n первых натуральных чисел ($1 \cdot 2 \cdot \dots \times (n-1) \cdot n = n!$ — читается «эн факториал») на их сумму ($1 + 2 + \dots + (n-1) + n$), краткая запись: $\sum_{n=1}^n n$. Наблюдаем:
 $n=3$ — простое число: $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ (делится, $n+1=4$ — составное число); $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10}$ (не делится, $n+1=5$ — простое); $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{15}$ (делится, $n+1=6$ — составное); $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{21}$ (не делится, $n+1=7$ — простое); $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{28}$ (делится, $n+1=8$ — составное); $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{36}$ (делится) и т. д.

Замечания в скобках подсказывают вывод-гипотезу: $n!$ ($n > 2$) не делится на $\sum_{n=1}^n n$ только в том случае, когда $n+1$ — простое число.

Ни одним примером не удается опровергнуть эту гипотезу. Значит, надо пытаться защитить ее. (Излагаемое далее доказательство можно опустить при первом чтении.)

Запишем исследуемое частное в виде дроби:

$$\frac{n!}{1+2+\dots+n} = \frac{(n-1)!n}{0,5 \cdot n(n+1)} = \frac{2 \cdot (n-1)!}{n+1}.$$

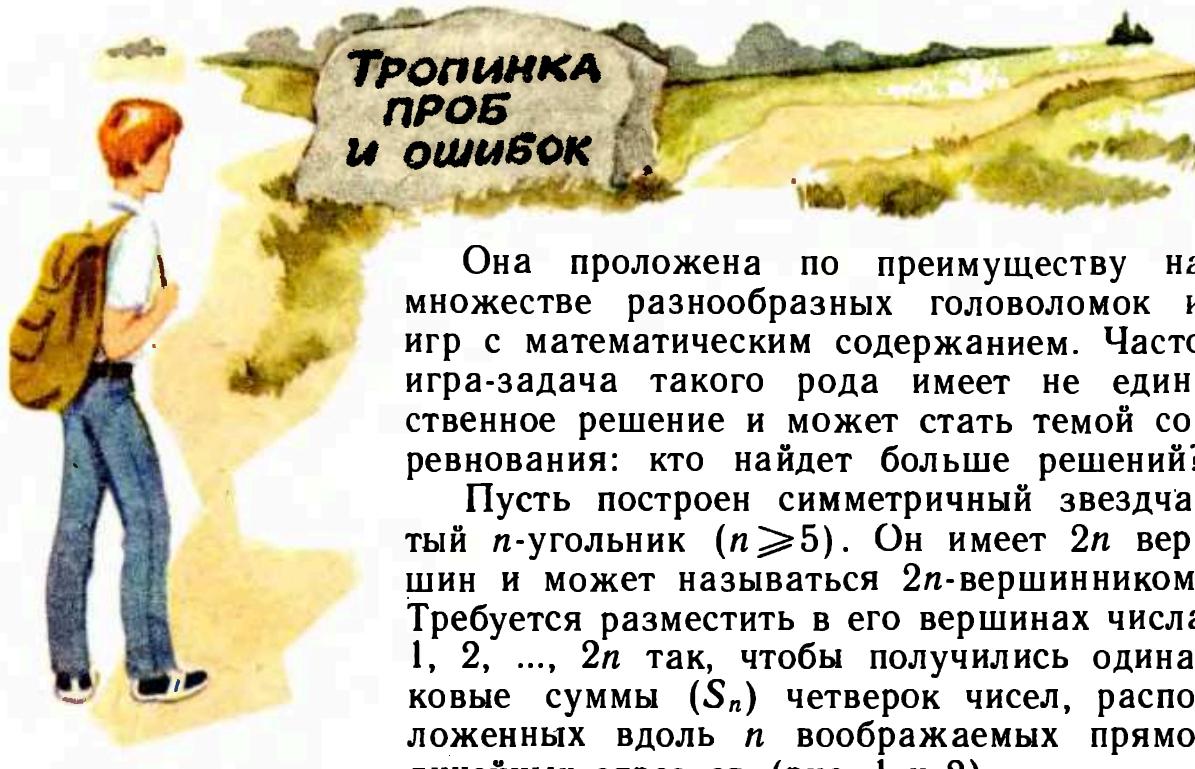
Если $n+1$ — четное число, т. е. составное, то легко обосновывается, что $\frac{n+1}{2} < n-1$ и, значит, входит множителем в $(n-1)!$

Пусть $n+1$ — нечетное составное,

$$n+1=p \cdot q \quad (p, q \in \mathbb{N}).$$

Легко видеть, что $p < n-1$ и $q < n-1$, следовательно, если $p \neq q$, то оба входят множителями в $(n-1)!$; если $p=q$, т. е. $n+1=q^2$, то в составе $(n-1)!$ найдется множитель q и множитель, кратный q .

Итак, гипотеза верна, числовая закономерность обоснована!



Она проложена по преимуществу на множестве разнообразных головоломок и игр с математическим содержанием. Часто игра-задача такого рода имеет не единственное решение и может стать темой соревнования: кто найдет больше решений?

Пусть построен симметричный звездчатый n -угольник ($n \geq 5$). Он имеет $2n$ вершин и может называться $2n$ -вершинником. Требуется разместить в его вершинах числа $1, 2, \dots, 2n$ так, чтобы получились одинаковые суммы (S_n) четверок чисел, расположенных вдоль n воображаемых прямолинейных отрезков (рис. 1 и 2).

Возможное значение «магической» суммы S_n можно вычислить заранее. Умножая S_n на число n воображаемых отрезков, получаем с одной стороны $n \cdot S_n$, а с другой — удвоенную сумму всех размещаемых чисел, которая равна $(1+2n) \cdot 2n$. Из $n \cdot S_n = (1+2n) \cdot 2n$ следует, что $S_n = 2 \cdot (1+2n)$. Для 5-угольной звезды $S_5 = 22$, для 6-угольной — $S_6 = 26$ и т. д. Одно из возможных решений для 7-угольной звезды представлено на рисунке 1. Получено оно простым подбором, иначе говоря, методом «проб и ошибок».

Во всех случаях на воображаемых или построенных прямолинейных отрезках звездчатого $2n$ -вершинника расположено по 4 вершины.

ЭВМ, решавшая задачу для звездчатого 12-вершинника, установила, что возможно 80 различных вариантов «магических» расположений чисел и более 2000 для 18-вершинника.

Можно провести игру-соревнование на 6-, 7-, 9-угольных звездах, но не пытайтесь составить звездчатые магические 5- и 8-угольники (10- и 16-вершинники). «Не выйдет», — разъяснила ЭВМ, рассматривавшая эти задачи.

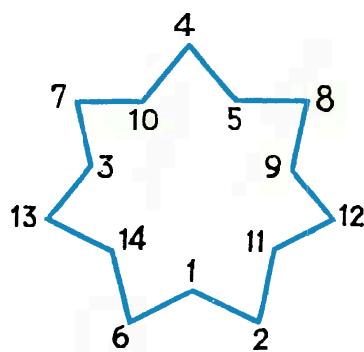


Рис. 1

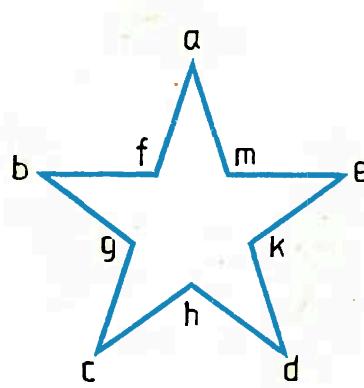


Рис. 2

Впрочем, несуществование решения 5-угольной звезды (рис. 2) нетрудно обосновать и не консультируясь с ЭВМ. Как было сказано, $S_5=22$, а сумма всех размещаемых чисел $1+2+\dots+10=55$. Вычитая из 55 сумму чисел, расположенных на двух отрезках с общим элементом a , получим:

$$b+e+h=55-44+a, b+e+h=11+a.$$

Крайние числа (1 и 10) не могут расположиться на одном отрезке, скажем, быть значениями b и e , так как в этом случае $1+10+h=11+a$, следовательно, $h=a$, что противоречит условию задачи.

Пусть 1 и 10 расположены на разных лучах, например $a=10$ и $b=1$.

Тогда

$$10+11=1+e+h, \text{ следовательно, } e+h=20.$$

Но и это невозможно, так как на заданном множестве (1, ..., 10) сумма любой пары элементов меньше 20. Так доказано, что магическая 5-угольная звезда неосуществима на заданном множестве чисел.



Всем известна поговорка: «Ложка дегтя портит бочку меда».

Предположим, действительно какой-то озорник из бутылки с дегтем перелил ложку дегтя в банку с медом. Перемешал тщательно, а затем такую же ложку смеси перелил из банки в бутылку с дегтем.

Чего получилось больше: меда в бутылке с дегтем или дегтя в банке с медом?

Положим теперь, что эту операцию переливания по ложке смеси туда и обратно озорнику удалось повторить несколько раз.

Наш вопрос тот же. А каков ваш ответ?

Надеемся, вы решили эту задачу?! А каким способом: арифметически или предпочли обратиться за помощью к уравнениям? На любом из этих путей, наверно, пришлось немало повозиться с дробями и преобразованиями?

Правильный ответ: одинаково. Если он у вас получился, то не показался ли неожиданным и удивительным?

Действительно, при любом числе переливаний меда в бутылке с дегтем окажется столько же, сколько дегтя в банке с медом!

Но для получения правильного ответа к этой задаче не понадобятся никакие вычисления, если отсеять из ее условия несущественные сведения — своего рода камуфляж.

Так как по условию задачи о меде и дегте переливается какое-то количество смеси из бутылки в банку и такое количество смеси переливается обратно, то совершенно не существенно ни количество меда в банке, ни количество дегтя в бутылке, ни перемешивание, ни состав смеси в данной ее порции, ни количество переливаний туда и обратно. Суть в том, что после каждой пары переливаний объем содержимого в банке и в бутылке остается таким же, как и вначале. А если так, то очевидно, что в бутылку с дегтем должно поступить ровно столько меда, сколько дегтя из бутылки поступило в банку с медом.

Вот и все решение задачи.

Отбрасывание несущественных сведений, которыми естественно обрастает задача, возникающая из практики, до тех пор, пока останутся только существенные, делает задачу «прозрачной» для решения.

Такова суть еще одной скромной тропинки в математике.



Пересечение тропинок

Решая задачи из одной области математики, мы часто используем методы другой. Например, выявление свойств функций при помощи чертежа, в частности отыскание корней уравнения, в левой части которого дана эта функция,— пример использования геометрических методов в алгебре. Отождествляя линию или поверхность с уравнением (ее уравнением), мы геометрические задачи решаем средствами алгебры (эта область математики так и называется: аналитическая геометрия).

Оперируя с электронной счетной машиной, мы арифметику десятичных чисел переводим в арифметику двоичных или восьмеричных чисел, а всё вместе — в динамику механизмов и электрического тока.

Рассмотрим такую задачу. На центральном поле уменьшенной шахматной доски (5×5) помещен конь (рис. 3). Он должен

обойти всю доску, побывав на каждом поле по одному разу. (Если не знаете, по какому правилу перемещается шахматный конь, спросите у любого шахматиста.)

Великий математик Эйлер уделял большое внимание подобным задачам.

Конечно, нас не удовлетворит решение предложенной задачи, основанное на бесполезных попытках перемещений коня в расчете на «слепую» удачу. Ну, а на осмысленную систему действий может навести нас тропинка подбора какой-нибудь простой, наглядной интерпретации связей между пунктами последовательного перемещения коня.

Перенумеруем поля данной шахматной доски (рис. 4). На доске поля 13 и 14 или 13 и 8 соседние, но с точки зрения возможных перемещений коня полями, соседними с полем 13, являются поля 2 и симметричное ему 22, 4 и симметричное ему 24, 10 и 6, 20 и 16.

Значит, сохраняя за полем 13 центральное положение, надо связать его прямыми выходами на эти поля (2, 22, 4, 24, 10, 6, 20, 16), расположив их вокруг центрального поля 13. Если теперь между этими полями и вне их расположить остальные 16 полей, стараясь сохранить симметрию шахматной доски, то может получиться, например, такая сеть, как на рисунке 5. Связи между соседними полями изображены отрезками прямых.

Теперь видно, что у коня много разных маршрутов (кстати, сколько?), и легко выбрать какой-либо из них. Конь может переместиться с поля 13, например, на поле 2, далее обойти поля внутреннего прямоугольника и, наконец, внешнего. Остается только перенести выбранный маршрут на шахматную доску.

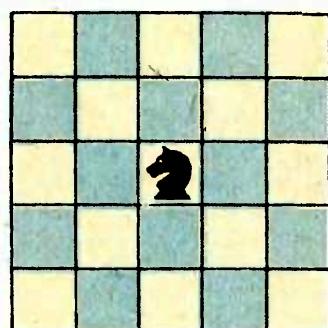


Рис. 3

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Рис. 4

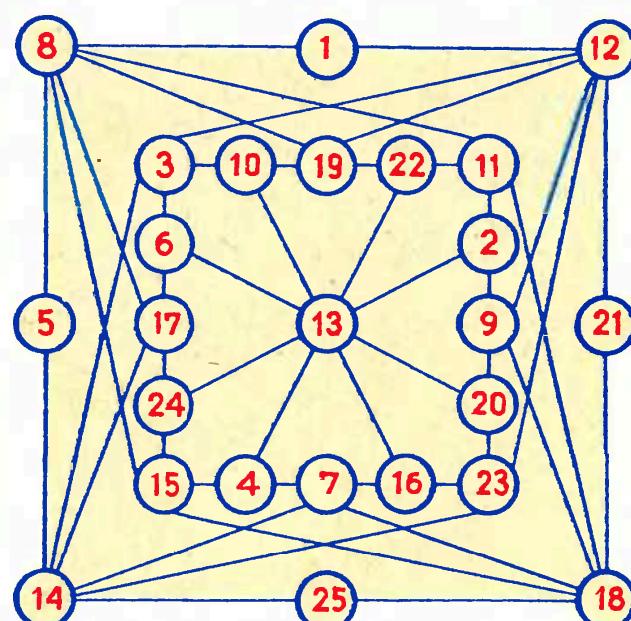


Рис. 5



Тот, кто увлечен математикой, обычно не успокаивается тем, что успешно овладел изложенным в учебнике доказательством того или иного математического утверждения. Наоборот, не выходя из круга приобретенных к этому периоду времени знаний, он ищет другие способы доказательства.

Поиск вариантов доказательства обогащает нас знаниями, развивает инициативу, математическое мышление и здоровый спортивный азарт и даже может стать предметом коллекционирования.

Известно, например, около сотни вариантов доказательства теоремы Пифагора. А в нашей личной коллекции накопилось десять вариантов доказательства следующего утверждения: последовательность (S_n), где $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, не имеет предела при $n \rightarrow \infty$.

Вспомним простую школьную теорему: если отрезок AM является одновременно медианой и биссектрисой треугольника ABC , то этот треугольник равнобедренный.

Приведем следующие три доказательства этой теоремы.

Доказательство 1. На продолжении отрезка AM (рис. 6) отложим $MD = AM$ и с помощью отрезков DC и DB образуем четырехугольник $ACDB$. Он параллелограмм, а так как диагональ AD делит $\angle A$ пополам, то $ACDB$ — ромб и, следовательно, $AB = AC$.

Доказательство 2. Построим $BD \perp AM$ и $CE \perp AM$ (рис. 7), тогда $\triangle ABD \sim \triangle ACE$, следовательно, $AB:AC = BD:CE$; $\triangle BDM \sim \triangle CME$, следовательно, $BM:CM = BD:CE = 1$.

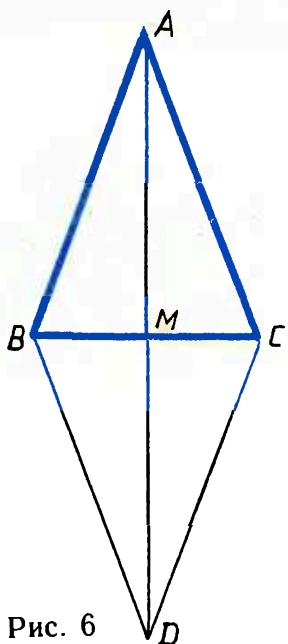


Рис. 6

Сопоставляя с предыдущим равенством, получаем:

$$AB:AC=1, \text{ т. е. } AB=AC.$$

Доказательство 3 (от противного). Если $AB \neq AC$, то пусть $AB' = AC'$ (рис. 8), т. е. $\triangle AB'C'$ — равнобедренный. Тогда согласно условию $B'M = MC'$ и $\triangle BB'M = \triangle CMC'$, следовательно, $\angle CC'M = \angle MB'B$.

А если так, параллельность прямых AB и AC — абсурд. Значит, в действительности $AB = AC$, т. е. $\triangle ABC$ равнобедренный, а $\triangle AB'C'$ совпадает с ним.

Приведем пример из алгебры. Решению задач, связанных с неравенствами, часто помогает формула

$$(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2) \quad — \text{неравенство Коши.}$$

Из коллекции вариантов вывода этого неравенства приведем два.

1) К треугольнику, изображенному на рисунке 9, применим теорему косинусов: $AM^2 = OM^2 + OA^2 - 2OM \cdot OA \cdot \cos(\angle AOM)$.

По формуле расстояния между двумя точками $A(a,b)$ и $M(x,y)$ находим $AM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Тогда $(x-a)^2 + (y-b)^2 = (x^2+y^2) \cdot (a^2+b^2) - 2\sqrt{(x^2+y^2)(a^2+b^2)} \cos(\angle AOM)$, следовательно, $(ax+by)^2 = (x^2+y^2)(a^2+b^2) \times \cos^2(\angle AOM)$.

Учитывая, что $\cos^2(\angle AOM) \leq 1$, находим:

$$(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2) \cdot (x^2+y^2).$$

2) Источником доказательства неравенства Коши может послужить одно любопытное свойство вещественных чисел: если сумму двух квадратов умножить на сумму двух квадратов, то результат можно представить также в форме суммы двух квадратов:

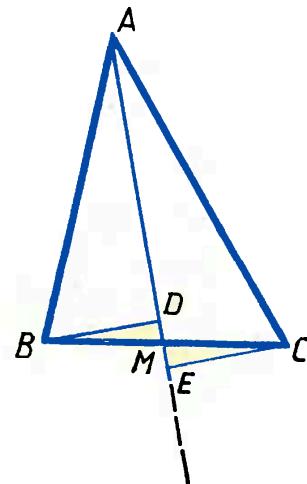


Рис. 7

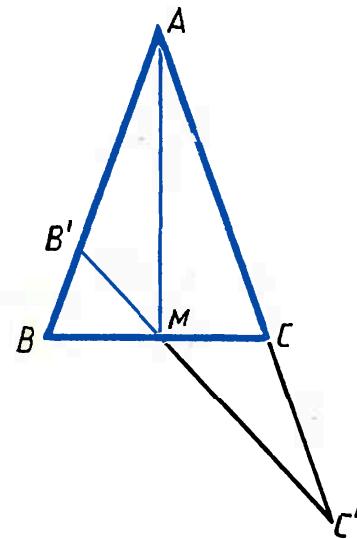


Рис. 8

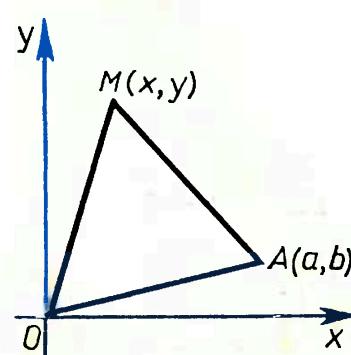


Рис. 9

$$(a^2 + b^2) \cdot (x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (bx - ay)^2. \quad (*)$$

Справедливость этого тождества проверяется простым раскрытием скобок. Отбрасывая второе слагаемое правой части равенства, сразу получаем неравенство Коши.

Тождество (*) привлекательно само по себе изяществом своей структуры. Так нельзя ли, увеличивая число слагаемых в скобках, все-таки сохранить гармонию его конструкции?

Ответ: да, можно. Но при этом далеко не продвинешься — только до четырех и восьми слагаемых в каждой скобке.

Для четырех слагаемых:

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = \\ & = (ax + by + cz + dt)^2 + (bx - ay + dz - ct)^2 + (cx - dy - az + bt)^2 + (dx + cy - bz - at)^2. \end{aligned}$$

Сообразите самостоятельно:

- а) какой вид примет неравенство для восьми слагаемых;
- б) верно ли неравенство, содержащее по три слагаемых в каждой скобке:

$$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) ?$$

Как далеко можно его обобщить?

В путь по тропинкам математики



Нет нужды в точной классификации и перечислении всех тропинок в математике — их много. Главная из них та, которая начинается за школьным столом и учебной книгой, вливающаяся затем в основную, широкую тропу систематического, вдумчивого изучения раздела за разделом одной из древнейших и прекраснейших наук — математики. Не уходите с этой тропы далеко и на долго, но время от времени прогуливайтесь и по ее тропинкам. В путь!

А для разминки «на привале» выбирайте упражнения по вкусу из десяти последующих разделов.

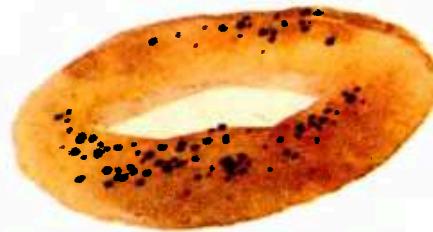


(Из стихотворения В. Михновского «Математика», подаренного нам поэтом.)

Думы нездешней полна,
Чуть загрустив отчего-то,
Молча стоит у окна,
В мыслях — расчеты,
расчеты...
Да, математике надо
Мир постигать наш —
и вот
Страсть отстраненного
взгляда
В прорву пространства
ведет.
Пусть ей взгрустнется
немножко,
Жалобы не услыхать...
Строгая, смотрит в окошко,
Сущее хочет познать.

Загадка

Нас трое в треугольнике
любом.
Предпочитая золотые
середины,
Мы центр тяжести
встречаем на пути,
Ведущем прямо из
вершины.
Как называют нас?



Шарада

Мой первый слог —
почтенный срок,
Коль прожит он
недаром.
Модель второго — на
столе,
Румяна, с пылу, с жару.
Меня вы встретите
везде —
Такой я вездесущий.
А имя громкое мое —
Латинское «несущий».



ЗДЕСЬ ЗАГАДКИ И ШАРАДЫ. ЗА РАЗГАДКУ — ДВЕ НАГРАДЫ

Первая награда — удовольствие от систематических упражнений своей находчивости, наблюдательности, логического мышления; вторая награда — радость раскрытия «секретов» загадочного содержания математических головоломок.

Иногда мы с трудом находим правильный ответ на поставленный вопрос только потому, что не приучили мысль сворачивать от привычного направления. Что вы скажете, например, о таком происшествии?

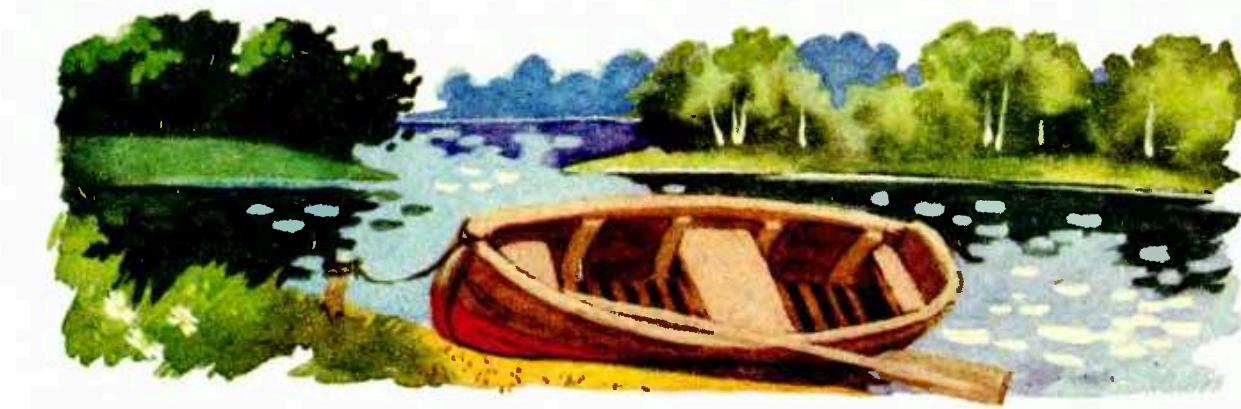
1. У РЕКИ

Два человека подошли к реке. У пустынного берега стояла лодка, в которой мог поместиться только один человек. Все же оба туриста без всякой помощи переправились на этой лодке через реку и продолжили свой путь. Как они это сделали?

«Невозможно», или «Неправдоподобно», или «Тут что-то недоговорено» — такие ответы свидетельствуют лишь о том, что отвечающий размышляет по ранее сложившемуся у него шаблону.

Подумайте еще. Еще раз и еще раз прочтайте наш рассказ...

Ну вот, надеемся, и стало вам ясно, что есть же еще и такая возможность... Впрочем, проверьте совпадение вашего ответа с нашим.

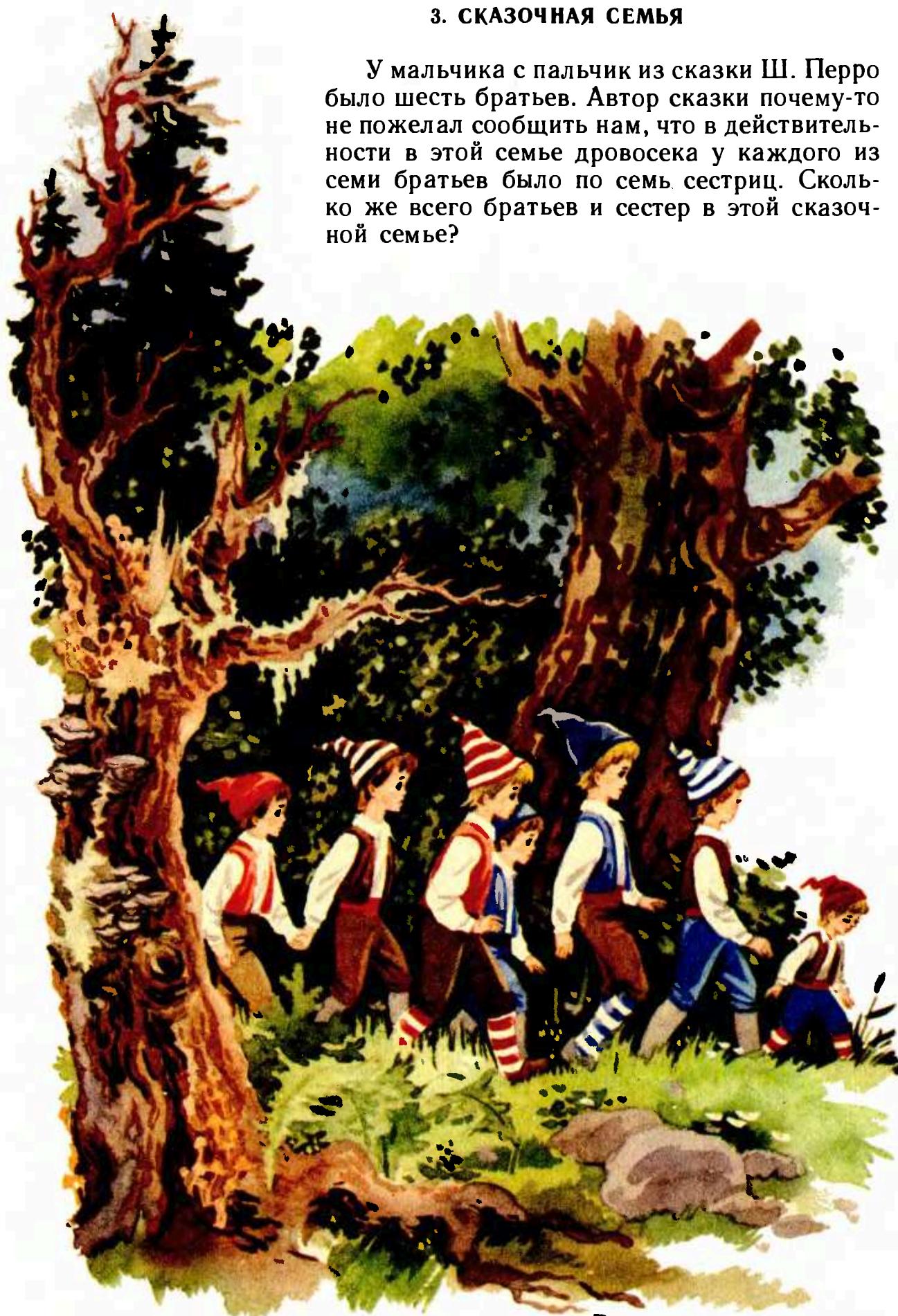


2. ПОЧЕМУ ТРИ НОГИ?

Почему штативы к фотографическим аппаратам, землемерным инструментам и рояли имеют три ноги, а не четыре?

3. СКАЗОЧНАЯ СЕМЬЯ

У мальчика с пальчик из сказки Ш. Перро было шесть братьев. Автор сказки почему-то не пожелал сообщить нам, что в действительности в этой семье дровосека у каждого из семи братьев было по семь сестриц. Сколько же всего братьев и сестер в этой сказочной семье?



4. ЕСТЬ ЛИ ТАКОЙ ЧЕЛОВЕК?

Есть ли на Земле человек, утроенный квадрат возраста которого ровно на 14 лет меньше квадрата вашего, читатель, возраста или возраста вашей мамы? (Считать только целое число лет.)

5. МОЗАИКА ИЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Сосчитайте, сколько треугольников в фигуре, изображенной на рисунке 10.

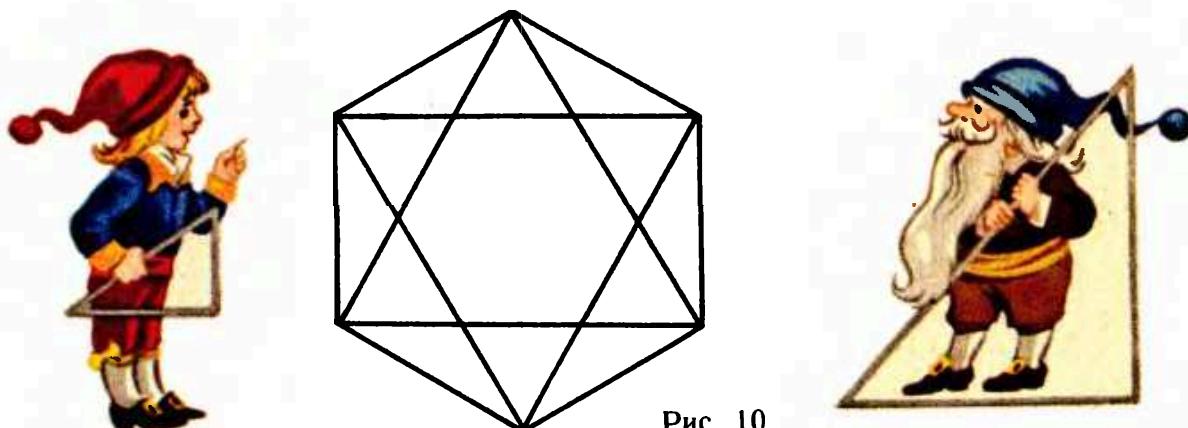


Рис. 10

6. БРИЛЛИАНТЫ И ВЕСЫ

В коробке лежат 242 бриллианта, из которых один природного происхождения, остальные — его копии, изготовленные в лаборатории (искусственные). Массы искусственных бриллиантов одинаковы, масса природного немного меньше. Придумайте систему действий для выделения природного бриллианта при помощи пяти взвешиваний на чашечных весах без гирь и разновесов.





7. РАЗЛЕЙТЕ МОЛОКО

В вашем распоряжении имеются четыре емкости: 200 г, 400 г, 600 г, 800 г — все цилиндрической формы. Емкость, вмещающая 400 г, наполнена молоком, остальные — пустые. Пользуясь только этими емкостями, разлейте молоко так, чтобы в каждой емкости-цилиндре оказалось ровно по 100 г.

8. РОЗЫ

Начертите в своей тетради квадрат с буквами (рис. 11) и наметьте линии разреза квадрата на 4 части, одинаковые по форме и размерам, так, чтобы в каждой части оказались Р, О, З, Ы.



	P				
	P	ы	Р		
	з	о	з	о	
	о	з	о	з	
		ы		ы	
P				ы	



Рис. 11

9. ИНТЕРЕСНЫЕ ДРОБИ

Имеются две дроби, из которых одна в k раз больше другой. Каждую дробь мальчик возвел в степень p и результаты сложил, а девочка возвела их в степень n и результаты сложила. Обе суммы оказались равными. Найдите эту пару интересных дробей в общем виде и при $k=2$, $n=3$, $p=4$.

10. У КОГО ЖИВЕТ СОРОКА?

На одной из улиц дачного поселка только пять домов. Они окрашены в разные цвета, и занимают их семьи поэта, писателя, критика, журналиста и редактора. В доме каждой семьи живет любимая птичка. Глава семьи получает на завтрак любимый им напиток, после чего отправляется в город, пользуясь любимым способом передвижения.

Поэт пользуется велосипедом. Редактор живет в красном доме. Критик живет в крайнем доме слева, рядом расположен голубой дом.

Тот, кто ездит на мотоцикле, живет в среднем доме.

Тот, кто живет в зеленом доме, расположенному рядом с белым, справа от него, всегда отправляется в город пешком.

В доме, где живет снегирь, на завтрак всегда бывает молоко.

Тот, кто на завтрак получает какао, живет в доме, соседнем с тем домом, где живет синица.

В желтом доме на завтрак подают чай.

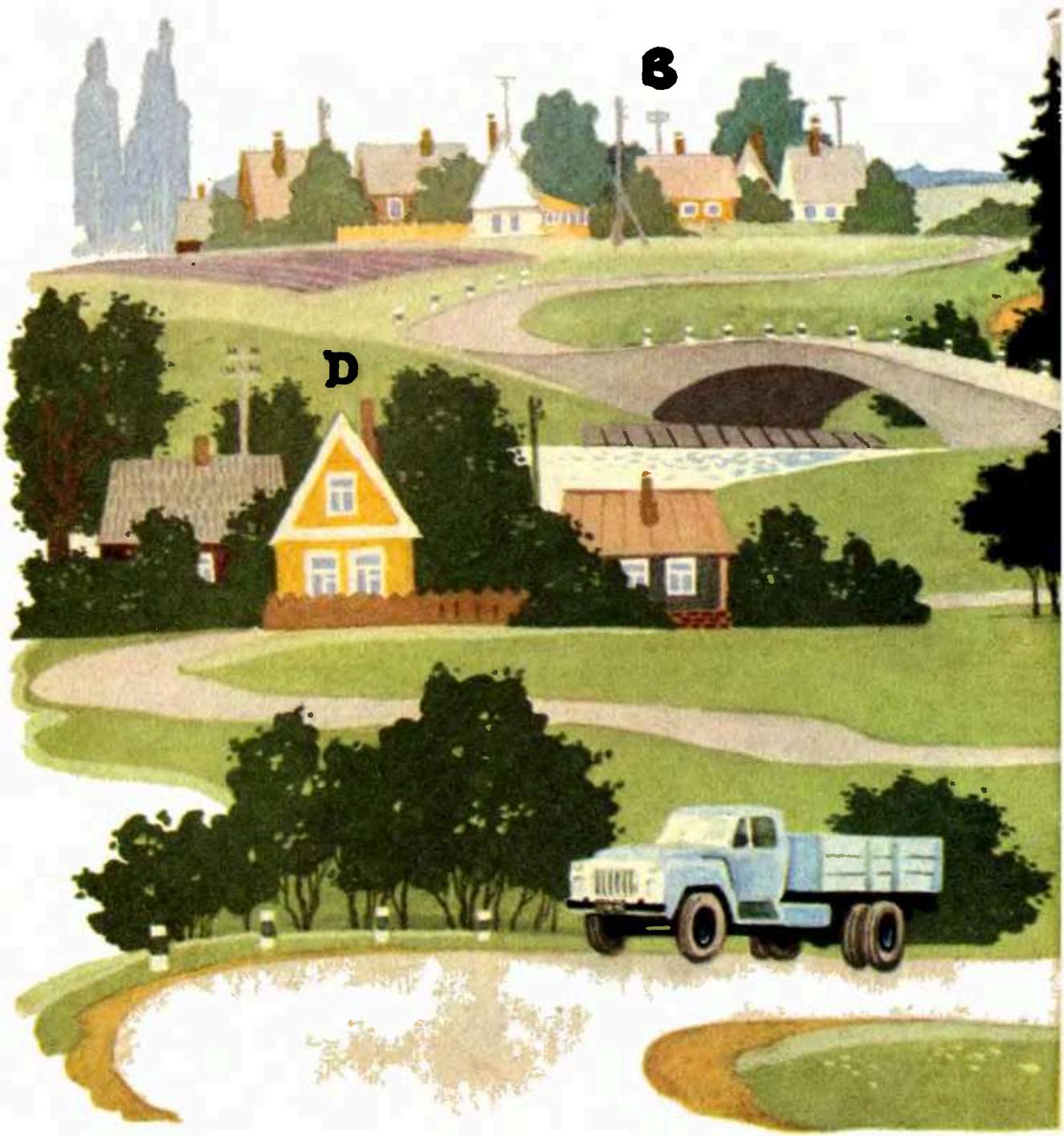
Живущий рядом с любителем канареек утром пьет чай. Писатель пьет только кофе.

Тот, кто ездит на своем автомобиле, любит пить томатный сок.

В доме журналиста живет попугайчик.

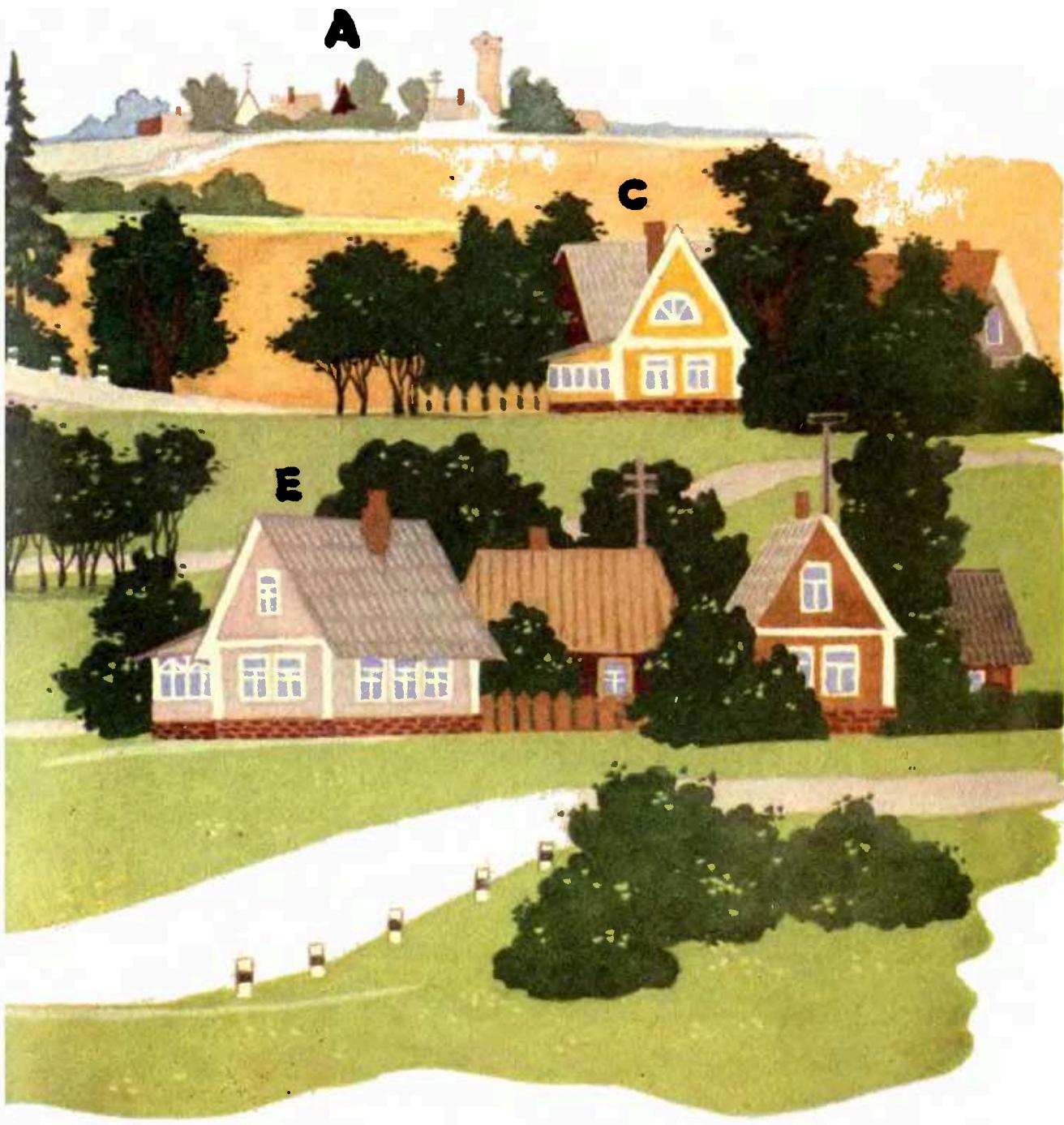
А у кого живет сорока?





11. КОВАРНАЯ ЗАДАЧА ПАПЫ

Мой пapa — шофер — часто ездит по трассе, вдоль которой расположены пять небольших поселков: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. Пapa знал точно, сколько домов в каждом из этих поселков, и составил для меня такую задачу: «Сколько всего домов в этих пяти поселках, если в *A* и *B* вместе 13 домов, в *B* и *C* вместе 31 дом, в *C* и *E* — 17 домов, в *E* и *D* — 26 домов, в *A* и *D* — 23 дома?».



Я подметил, что число домов в каждом поселке подсчитывалось папой дважды (по тексту задачи), поэтому мое решение было молниеносным:

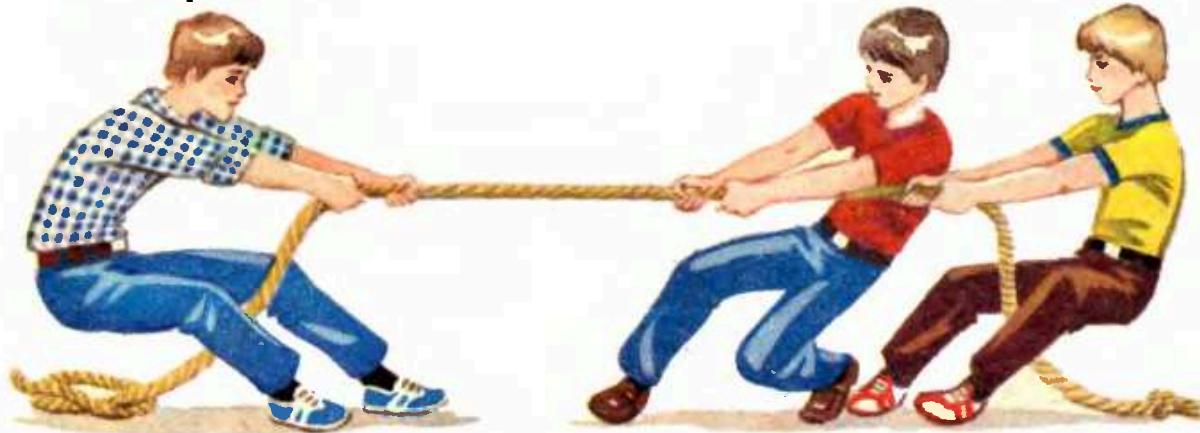
$$\frac{13 + 31 + 17 + 26 + 23}{2} = 57 \text{ (домов в пяти поселках вместе).}$$

Но... вот уж действительно: поспешишь — людей насмешишь! Оказалось, что задачу папа сознательно поставил так, что она не может быть решена. И я должен был это доказать. Помогите!

12. ПЕРЕТЯГИВАНИЕ КАНАТА

Борис взялся за один конец каната, а Аркадий и Николай вместе — за другой конец. Перетянул Борис, хотя и с большим трудом. Когда с одной стороны встали Борис и Аркадий, а с другой — Владимир с Николаем, то ни та, ни другая пара не смогли перетянуть канат на свою сторону. Но стоило только Николаю и Аркадию поменяться местами, как победу одержала пара Владимир и Аркадий.

При помощи точных рассуждений докажите, что Владимир — самый сильный из этих четырех друзей, и определите, кто по силе на втором, третьем и последнем местах.



13. ГОЛОВОЛОМКИ СО СПИЧКАМИ

- 1) Используя 12 спичек, соберите шесть одинаковых квадратов.
 - 2) Используя 8 спичек, соберите квадрат и четыре треугольника.
 - 3) Используя 9 спичек, соберите семь одинаковых треугольников.
 - 4) Используя 12 спичек, соберите квадрат и восемь треугольников.
 - 5) Используя 36 спичек, соберите шесть квадратов и двадцать четыре треугольника.
 - 6) а) Найдите два способа переложить одну спичку так, чтобы получилось правильное равенство (рис. 12, а).
б) Измените положение двух спичек, и неверное равенство станет верным (рис. 12, б).
в) Добейтесь верного равенства, используя одну дополнительную спичку (рис. 12, в).
 - 7) С помощью кусочков пластилина соорудили модель пирамиды из шести спичек одинаковой длины (рис. 13) и заметили, что в этой конструкции содержится четыре равных равносторонних треугольника.
- А нельзя ли выложить из тех же шести спичек четыре равных равносторонних треугольника, расположенных в одной плоскости?

Рис. 12

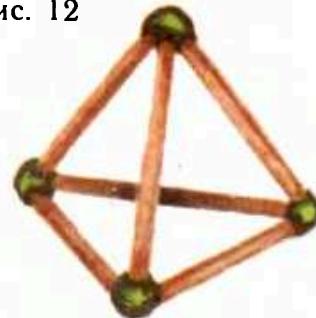
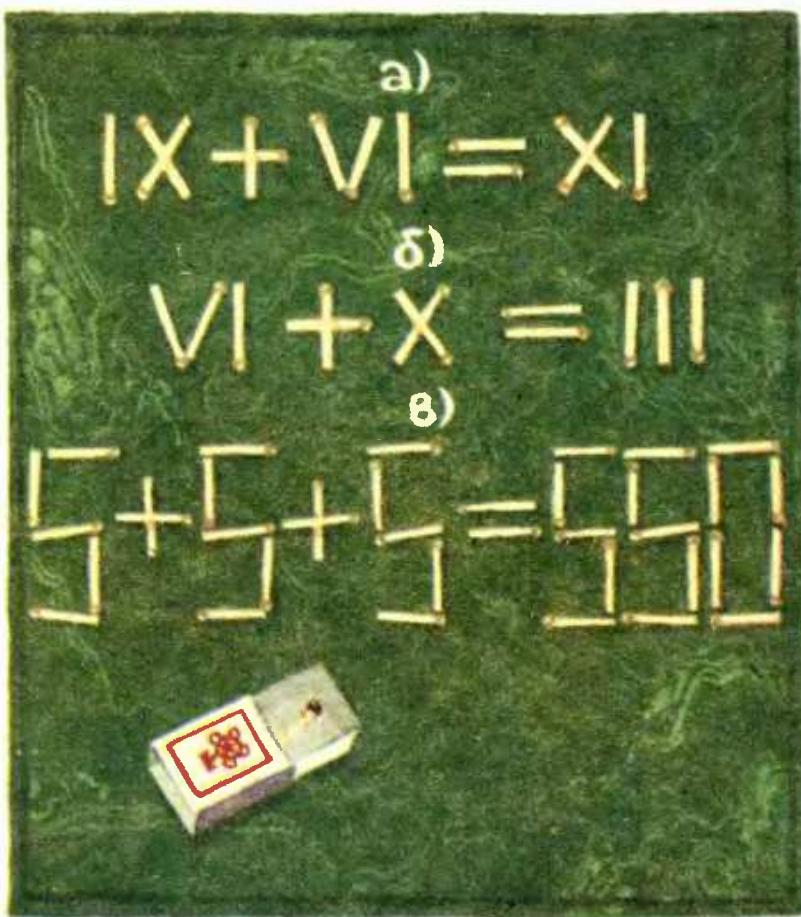


Рис. 13



Рис. 14

8) Из двух квадратов можно сделать пять, если умело переложить три спички (рис. 14)...

14. НУЖЕН ВАШ АРБИТРАЖ

По Лермонтову, у Казбека с Шат-горою был великий спор ... В нашей выдумке спорят две дроби: правильная — $\frac{m}{n}$ ($m < n$) и неправильная — $\frac{n}{m}$. Каждая из них полагает, что именно она ближе к числу 1, чем другая. Приглашаем вас быть арбитром их спора: которая права?



15. ПЯТЬ ДВОЕК...

Однажды Витя Малеев получил в школе пять двоек подряд по пяти предметам. Дома после такого печального события Витя занимался очень усердно. Устал порядочно, но тут внезапно как-то сама по себе возникла у него забавная мысль: нельзя ли, оперируя полученными пятью двойками, соорудить все школьные оценки, включая единицу? Удалось! Смотрите:



$$1=2+2-2-\frac{2}{2}, \quad 2=2+2+2-2-2,$$
$$3=2+2-2+\frac{2}{2}, \quad 4=2\cdot 2\cdot 2-2-2,$$
$$5=2+2+2-\frac{2}{2}.$$

Усталость уступила место заинтересованности. Витя любил активный отдых и решил продолжить внезапно возникшую математическую забаву.

Постепенно ему удалось образовать из пяти двоек все порядковые числа от 1 до 26. При этом он употреблял только такие действия: сложение, вычитание, умножение, деление, возвведение в степень и, где нужно, скобки. Вам это удалось бы?



16. ЖЕНСТВЕННЫЕ И МУЖЕСТВЕННЫЕ

В очень древнем китайском манускрипте (более 4000 лет до н. э.) четные числа назывались женственными, а нечетные — мужественными. Так вот, употребляя все однозначные числа от 1 до 9 по одному разу и применяя только действия сложения, вычитания, умножения и деления, составьте такое равенство, в котором все женственные числа оказались бы по одну сторону знака равенства, а все мужественные — по другую.

17. ЛЕГЕНДА О ЧОХБИЛМИШЕ И ШАХМАТАХ

Чохбилмиш у азербайджанцев — человек, много знающий. Правитель страны сказал Чохбилмишу так: «Предположим, что в нашем распоряжении неограниченный запас жемчужин и какое-то их количество разложено на 64 кучки — по числу клеток твоей шахматной доски. В каждой кучке, начиная со второй, жемчужин больше, чем в предыдущей.

Я повелеваю: из кучки, содержащей наибольшее количество жемчужин, перекладывать в остальные 63 кучки столько жемчужин, сколько надо, чтобы в каждой кучке их количество удваивалось.

Как ты считаешь, Чохбилмиш, можно ли добиться уравнивания числа жемчужин в каждой из 64 кучек, повторяя 64 раза



процедуру перекладывания жемчужин, строго следуя указанной схеме действий (из большей кучки в остальные)?

Определи также, какое наименьшее количество жемчужин должно было содержаться первоначально в каждой кучке, и в награду ты получишь все жемчужины, оказавшиеся в первой кучке после первого перекладывания».

Получил ли Чохбильмиш награду?

18. ГИРЛЯНДА ФЛАЖКОВ

Флажки, изображенные на рисунке 15, образуют закономерную последовательность. Тот, кто знает «Свод военно-морских сигналов», легко сообразит, какие еще два флагжа могут продолжить их последовательность.

Рис. 15





19. ТРИ ФЕИ: ДОБРА, КРАСОТЫ И УМА

Родилась девочка. А позже, когда утомленная, но счастливая мама задремала, вдруг перед ней возникли три феи: добра (Д), красоты (К), ума (У).

— Мы подойдем к колыбели девочки со своими дарами одна за другой в строго определенном порядке, при котором будут полностью удовлетворены пожелания каждой из нас,— сказала фея Д.

— Я согласна подойти к девочке последней,— продолжала фея Д.— Но при условии, что фея К принесет свои дары не первой. Если же я подойду первой, то фея К не должна быть последней.

Затем свое пожелание высказала фея У:

— Пусть буду последней я, тогда фея Д должна поднести свой дар не позже феи К. Если же я подойду первой, то фея Д пусть поднесет свой дар не раньше феи К.

А фея К сказала кратко:

— Если я не окажусь ни первой, ни последней, то фея Д одарит ребенка не раньше, чем фея У.

В каком же порядке должны подойти эти феи к новорожденной, чтобы пожелания каждой из них оказались выполненными?



20. ИВАНУШКА и КОВАРНАЯ ПРИНЦЕССА

— Задаю тебе последнюю задачу,— сказала принцесса Иванушке,— найди единственно верный путь из этой комнаты в наш зимний сад и сорви для меня самую красивую розу. Из этой комнаты ты пройдешь через левую, или правую, или среднюю дверь во вторую комнату; такие же три вида дверей будут перед тобой при переходе из второй комнаты в третью и из третьей — в сад.

— Учи мои советы,— продолжала принцесса,— первый: из этого зала пройди через правую дверь; второй: из второй комнаты — не через правую дверь, и третий совет: из третьей — не через левую дверь.

Иванушка знал, что обычно из трех советов принцессы ровно два указывают ложное направление, кроме того, служанка принцессы успела шепнуть ему, что надо обязательно пройти через дверь каждого вида по одному разу.

Как и полагается в сказке, принес Иванушка розу и был вознагражден. Какой же маршрут оказался единствено верным?





21. КТО ОДНОКЛАССНИЦА ТОЛИ?

В школьной математической олимпиаде приняли участие четыре мальчика — Саша, Павел, Толя, Коля — из разных классов и четыре девочки — Даша, Эля, Нина, Маша — по одной из тех же классов, что и мальчики.

Нина решила 4 задачи, Даша — 3, Эля — 2, а Маша — только одну. Саша решил столько задач, сколько его одноклассница. Павел, Толя и Коля решили больше задач, чем их одноклассницы, соответственно вдвое, втрой и вчетверо. Всего было решено 32 задачи.

Кто из этих девочек — одноклассница Толи?

22. ЧИСЛОВАЯ ЗАГАДКА

Есть два числа: 1333 и 2171. Хотелось бы каждое представить в виде произведения нескольких натуральных чисел так, чтобы сумма всех сомножителей тоже была равна соответственно 1333 и 2171.

Можете?

23. ПАМЯТНЫЕ ДАТЫ

Определите даты жизни человека, если известно:

- а) цифры года его рождения и года смерти одинаковы;
- б) сумма цифр года рождения равна 14;
- в) цифра единиц года рождения в 4 раза больше цифры единиц года смерти.

24. В XXI ВЕКЕ

В феврале 2004 года будет пять воскресных дней.

На какой день недели придется 19 февраля 2004 года?

Еще в какие годы XXI века в феврале окажется пять воскресных дней?

При меч ани е. Иной раз бывает необходимо установить, на какой день недели приходится календарная дата определенного года и числа месяца в далеком прошлом или будущем. Быстро и легко позволяет установить это компактный «Постоянный (вечный) календарь» (с. 108—109).



— При помощи пятой спички поднимите двумя пальцами конструкцию из четырех спичек не разрушая ее



И ФОКУСЫ ПОКАЖЕМ, И СЕКРЕТ РАССКАЖЕМ

1. ТАИНСТВЕННЫЕ ЦИФРЫ:

а) четверка; б) шестерка; в) восьмерка.

Из кусочков бумаги выложите на столе *четверку*, или *шестерку*, или *восьмерку*, или сразу все три фигуры (рис. 16).

Вы, фокусник, повернитесь спиной к столу и предложите одному из своих друзей (если выложена на столе одна фигура) или трем (если на столе три фигуры) задумать любое число. Это число должно быть больше числа бумажек:

- а) для четверки — в ее «ножке»;
- б) для шестерки — в ее «хвостике»;
- в) для восьмерки — в ее «головке».

Пусть теперь задумавший число отсчитывает бумажки, начиная с той, которая отмечена буквой *H* (см. рис. 16), и двигаясь:

а) снизу вверх по «ножке» четверки и ее продолжению до конца, потом налево и далее по кругу, минуя бумажки, образующие «ножку» четверки;

б) сверху вниз по «хвостику» шестерки и далее по закруглению шестерки без возвращения на ее «хвостик»;

в) по «головке» восьмерки в направлении движения часовой стрелки, и, обойдя «головку» один раз, продолжает движение только по нижнему овалу восьмерки, обходя его против движения часовой стрелки.

В каждом случае (а, б, в) указанный обход длится до тех пор, пока отсчет достигнет задуманного числа, после чего «обходчику» следует снова отсчитывать от единицы до задуманного

Рис. 16



числа, начав с бумажки, на которой он остановился, но двигаться теперь в обратном направлении и по-прежнему минуя бумажки, расположенные по:

- а) «ножке» четверки;
- б) «хвостику» шестерки;
- в) «головке» восьмерки.

После этого «обходчик» объявляет об окончании отсчета, вы поворачиваетесь к столу и сразу указываете ту бумажку, на которой закончился отсчет.

Секрет фокуса. Независимо от того, какое число было задумано, отсчет заканчивается всегда на одной и той же бумажке при том их количестве, которое показано на рисунке 16, где эта бумажка обозначена буквой K .

Участникам фокуса будет труднее разгадать его секрет, если вы при повторении фокуса измените (уменьшая или увеличивая) количество бумажек: а) в «ножке» четверки; б) в «хвостице» шестерки; в) в «головке» восьмерки.

Естественно, что в измененных вариантах отсчет будет заканчиваться на других бумажках, но каждый раз вы заранее сообразите на каких.

2. ПЕРВЫЙ ЧИСЛОВОЙ ФОКУС

Скажите другу: «Любое трехзначное число умножь на 37, потом на 27. К полученному шестизначному числу прибавь удвоенное первоначальное число. Покажи мне результат, и я угадаю задуманное трехзначное число».

Секрет фокуса. Пусть задумано трехзначное число $100x + 10y + z$, где x, y, z — цифры сотен, десятков и единиц соответственно.

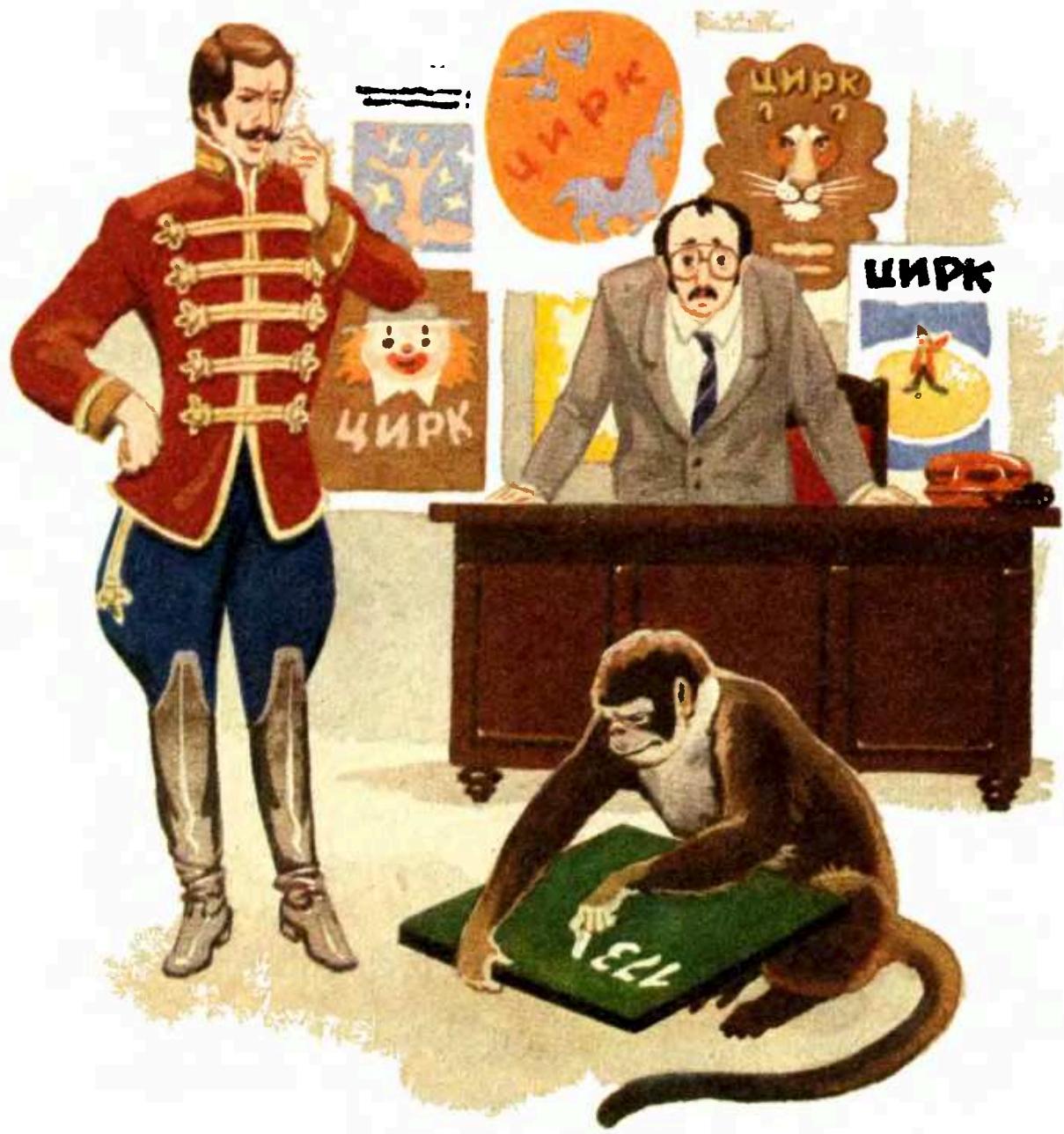
Выполнив указанные действия, получим:

$$100 \cdot 100x + 10 \cdot 100y + 100z = 1001 \cdot (100x + 10y + z).$$

Теперь ясно, что достаточно разделить результат на 1001, чтобы получилось задуманное трехзначное число.

Пример. Пусть задумано число 173. После выполнения указанных действий получилось 173 173. Наблюдаем, что в его записи трехзначное число 173 повторяется. Вычеркнем 173; это равносильно тому, что 173 173 разделили на 1001; в результате остается задуманное число 173.

Замечание. При повторении фокуса легко обнаружится, что если задумано число abc , то результат, показываемый фокуснику, имеет вид $abca\overline{bc}$. Чтобы это скрыть, надо добавить еще одно действие в конце фокуса, например потребовать прибавить 1111. Тогда фокуснику скажут не 173 173, а 174 284. Теперь закономерность скрыта, а фокуснику ничего не стоит в уме вычесть 1111, а затем угадать задуманное число.



3. ВТОРОЙ ЧИСЛОВОЙ ФОКУС

Двое участников задумывают одно трехзначное число. Первый умножает его на 27, потом на 37. Второй умножает задуманное число на 13, потом умножает на 77. Затем фокусник предлагает им сложить получившиеся два шестизначных числа и результат показать ему. Фокусник сообщает, какое трехзначное число было задумано.

Секрет фокуса. Пусть задумано трехзначное число $100x + 10y + z$. Выполнив указанные действия, получим:

$$200\ 000x + 20\ 000y + 2000z = 1000 \cdot 2 \cdot (100x + 10y + z).$$

Становится ясным, что достаточно разделить результат на 2000, чтобы получить задуманное число.

4. ОТГАДАТЬ ЧИСЛО, НИЧЕГО НЕ СПРАШИВАЯ

Пусть кто-нибудь задумает двузначное число в виде $10x + y$, где x — цифра десятков, y — цифра единиц, $x - y \geq 2$, $y \neq 0$. Потребуйте теперь, чтобы он переставил цифры в обратном порядке и вычел меньшее число из большего. Полученную разность пусть сложит с нею же, но написанной в обратном порядке следования цифр. Ничего не спрашивая у загадавшего, вы сообща-ете, что у него получилось 99.

Пример. Пусть задумано 75. Загадавший должен выполнить следующие действия: $75 - 57 = 18$, $18 + 81 = 99$.

В общем виде: пусть задумано $10x + y$, где $x - y \geq 2$. При обратном расположении цифр число имеет вид $10y + x$.

Абсолютная величина разности: $R = |10x + y - (10y + x)| = -9 \cdot |x - y|$. Так как $x - y \geq 2$, то $R = 9 \cdot (x - y) = 10(x - y) - (x - y) + 10 - 10 = 10(x - y - 1) + [10 - (x - y)]$. (1)

Запишем число с обратным расположением цифр:

$$10(y - x + 10) + (x - y - 1). \quad (2)$$

Сложив (1) и (2), получим:

$$10(x - y - 1) + (y - x + 10) + 10(y - x + 10) + (x - y - 1) = 99.$$

Итак, независимо от выбора цифр x и y двузначного числа при $x - y \geq 2$ и $y \neq 0$ всегда получается число 99.

Если вышеуказанные действия будут применены к любому трехзначному числу $100x + 10y + z$ при соблюдении условий $x - y > 2$, $x - y = y - z$, то в результате всегда получится 1089.

Для четырехзначного числа $1000x + 100y + 10z + t$ при условии $x > y > z > t > 0$, $x - y = y - z = z - t$, в результате всегда получится число 10 890, и т. д.



5. ТАИНСТВЕННЫЕ КВАДРАТЫ В КАЛЕНДАРЕ

Пусть кто-нибудь выберет табель-календарь на любой месяц и отметит на нем какой-нибудь квадрат 4×4 , содержащий 16 чисел. Достаточно назвать наибольшее из них, чтобы показывающий этот фокус тут же после быстрого подсчета назвал сумму шестнадцати чисел, находящихся в указанном квадрате.

Секрет фокуса. Если p — наибольшее число в указанном квадрате, то всякий такой квадрат имеет вид:

$p - 24$	$p - 17$	$p - 10$	$p - 3$
$p - 23$	$p - 16$	$p - 9$	$p - 2$
$p - 22$	$p - 15$	$p - 8$	$p - 1$
$p - 21$	$p - 14$	$p - 7$	p

и сумма всех чисел квадрата равна $16p - 192 = 16 \cdot (p - 12)$.

Следовательно, угадывающему надо лишь вычесть из названного числа 12 и результат умножить на 16.

Пример. Пусть наибольшее число в выделенном квадрате 28. Тогда сумма выделенных 16 чисел этого квадрата равна $(28 - 12) \cdot 16 = 256$.

6. «ЛЕСНОЙ» ФОКУС

Узнаете деревья по нарисованным веткам? Правильно: клен, дуб, ива.

Теперь тайно от меня замените каждую букву цифрой произвольно, но так, чтобы ни одна цифра не повторилась. Сложите образовавшиеся числа и объявите в любом порядке все цифры результата, кроме любой одной. Я чуть-чуть подумаю и безошибочно назову утаенную цифру.

Секрет фокуса. Сумма десяти цифр равна 45 независимо от их расположения в трех слагаемых, следовательно, делится на 9. Сумма чисел, образованных из этих цифр, является числом, кратным 9, следовательно, и сумма его цифр должна делиться на 9. Поэтому, чтобы выявить утаенную цифру, надо сложить объявленные цифры; тогда число, дополняющее эту сумму цифр до ближайшего числа, кратного 9, определит утаенную цифру. Например, сумма объявленных цифр равна 14. Ближайшее число, кратное 9, большее чем 14, равно 18; следовательно, утаена цифра 4 ($18 - 14 = 4$).



7. С ДНЕМ РОЖДЕНИЯ!

Можете отгадать дату рождения (число, месяц и даже день недели) сразу у каждого из группы своих товарищей? Может быть, кто-нибудь скажет, что вы просто знаете дату его рождения, тогда пусть он задумает (и запишет для последующего контроля) какую-либо дату своего воображаемого дня рождения.

Предложите каждому написать на своем листке бумаги, какого числа он родился. Пусть умножат написанное число на 20,

затем прибавят 73, сумму умножат на 5, после чего прибавят порядковый номер месяца рождения, увеличенный на 35 ($1+35$, если январь, $2+35$, если февраль, ..., $12+35$, если декабрь). Результат объявляется вслух. Вы, фокусник, мысленно вычитаете 400 из объявленного результата. Число, образованное двумя последними цифрами остатка, определяет месяц рождения, а начальные цифры остатка (одна или две) образуют число месяца.

Пусть объявлено 501; $501 - 400 = 101$. Значит, сообщивший это число родился 1 января. Чтобы установить, в какой день недели произошло это радостное событие, попросите назвать год рождения. При помощи «Вечного календаря» (см. с. 108), весьма изобретательно сконструированного И. П. Коногорским — учителем математики из Иркутска, вы быстро определите наименование дня недели.

Положим, был назван 2001 год (1-й год XXI века). По календарю определяете: первый день XXI века — понедельник.

Секрет фокуса. Пусть число $10a+b$ — день рождения, число $10x+y$ — порядковый номер месяца. Под вашу диктовку образуется запись: $((10a+b) \cdot 20 + 73) \cdot 5 + 10x+y + 35 = 1000a + 100b + 400 + 10x+y$. После уменьшения на 400 получается $100 \cdot (10a+b) + 10x+y$ — выражение, определяющее искомые двузначные (или однозначные) числа $10a+b$ и $10x+y$.

8. ПО ЩУЧЬЕМУ ВЕЛЕНЬЮ, ПО МОЕМУ ХОТЕНЬЮ

Приготовляясь к игре в шахматы, партнер тайно от вас захватывает в один кулак белую пешку, в другой — черную. Вам хочется выбрать белую, и вы при помощи несложного, но изящного фокуса беретесь угадать, в каком она кулаке: правом или левом.

Вы говорите партнеру: «Оценим черную пешку числом 1, а белую — числом 2. Числовое значение пешки, зажатой в правой руке, умножь на какое хочешь четное число, а числовое значение другой пешки умножь на любое нечетное число. Сложи результаты и объяви последнюю цифру суммы. Теперь я скажу безошибочно, в какой руке белая пешка».



Секрет фокуса. Если объявленное число четное, то белая пешка левой руке, а если нечетное, то в правой.

В справедливости этого заключения убедитесь самостоятельно, рассмотрев оба случая: белая пешка — в правой руке, черная — в левой и наоборот.

9. ХОЧЕШЬ ПОКАЗЫВАТЬ ФОКУС — САМ ПРОЯВИ ДОГАДКУ

Пусть ваш друг задумает 4 положительных целых числа, но каждое меньше ста. Для вас они неизвестные (x_1, x_2, x_3, x_4). Вы называете какую-либо свою четверку чисел (a_1, a_2, a_3, a_4) и предлагаете другу вычислить и сообщить вам значение S_1 такого выражения:

$$S_1 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4.$$

Далее вы можете назвать другую четверку чисел (b_1, b_2, b_3, b_4) и опять попросить сообщить вам значение S_2 аналогичного выражения:

$$S_2 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4.$$

Ясно, что достаточно повторить эту процедуру 4 раза, тогда вы будете располагать четырьмя уравнениями с четырьмя неизвестными и сможете определить их значения.

— Но ведь никакого фокуса тут и нет!

— Пока... Если же вы сможете определить все 4 задуманных числа только с одного шага, т. е. по первому же значению S_1 , вот это фокус, и притом весьма эффектный!

— Неужели всегда можно угадать задуманные числа с помощью лишь одного вопроса?

— Да! Секрет лишь в том, чтобы умело назначить свои числа a_1, a_2, a_3 и a_4 . Догадаетесь? Вот и решите предварительно эту задачу «на догадку»!

Скажем еще в дополнение, что угадать вы можете с одного вопроса не только 4 числа, но и любое количество $n \geq 2$ задуманных двузначных чисел (необязательно различных).

Секрет фокуса (решение задачи)

Так как каждое из задуманных чисел меньше 100, то надо назвать такую четверку чисел: $(10^6, 10^4, 10^2, 1)$. Тогда $S_1 = 1\ 000\ 000x_1 + 10\ 000x_2 + 100x_3 + x_4$. Разбив запись числа S_1 на двузначные «границы» справа-налево, вы называете раздельно все 4 числа, задуманные вашим другом.

Например, пусть $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7, 13, 5, 74)$.

Тогда друг сообщает: « $S_1 = 7\ 130\ 574$ », и вы угадываете задуманные числа.

Символ + образовался
 из латинского слова „et” (союз и).
 При скорописи букву „e” опускали.
 Оставшаяся буква „t”
 со временем и превратилась в знак +
 $(t \rightarrow \dot{t} \rightarrow +)$



Как нет на свете без ножек столов,
 Как нет на свете без рожек козлов,
 Котов без усов и без панцырей раков,
 Так нет в арифметике действий без знаков.



НАШ КОНСТРУКТОР ЧИСЛОВОЙ, ПОРАБОТАЙ ГОЛОВОЙ!

ЗНАЙТЕ И ПРИМЕНЯЙТЕ

Напомним, что: 1) $n!$ — сокращенная запись произведения последовательных чисел от 1 до n включительно; например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$; 2) число q называется *квадратным*, если $q = n^2$, $n \in \mathbf{N}$; 3) число называется *палиндромическим*, если оно равно числу, цифры которого расположены в обратном порядке: $a_1a_2\dots a_{n-1}a_n = a_na_{n-1}\dots a_2a_1$; 4) Σn — сокращенная запись суммы последовательных чисел от 1 до n ; например, $\Sigma 2 = 1 + 2$, $\Sigma 5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

Числовой конструктор — это вид головоломок (игра), конструктор числовых равенств (тождеств) с необычной, но привлекательно-занятной формой их выражения. Детали нашего конструктора: десять цифр и знаки арифметических действий, включая те, которые обозначаются символами $\sqrt{}$ — радикал, $!$ — факториал, \log — логарифм.

Для успешного выполнения заданий, содержащих, как всякая конструктивная задача, какие-либо ограничительные условия, нужны изобретательность, догадка, упорство.

Рассмотрим такие задания.

1. Допустим, потребовалось соорудить числовую конструкцию, тождественно равную единице, из десяти различных цифр с помощью одного действия.

Интуиция подсказывает ответ: n^0 , или 1^n , где n — произвольное число из девяти различных цифр, исключая 0 в первом случае и 1 во втором; например, $123\ 456\ 789^0 = 1$ и $1^{23456789} = 1$.

2. Больше изобретательности потребует такая задача: найдите трехзначные числа вида xyz , которые можно выразить теми же цифрами x , y , z при помощи каких угодно арифметических действий.

Предлагаем несколько возможных конструкций:

$$121 = 11^2; 125 = 5^{1+2}; 127 = 2^7 - 1; 128 = 2^{8-1};$$

$$144 = (1+4)! + 4!; 145 = 1! + 4! + 5!; 153 = 51 \cdot 3;$$

$$216 = 6^{1+2}; 343 = (3+4)^3. \text{ Еще найдете?}$$

3. Выясните, найдется ли квадратное число среди всех пятизначных чисел, составленных из цифр 2, 2, 9, 9, 9

Естествен такой план действий: составить из заданных цифр все возможные пятизначные числа и каждое испытать, извлекая квадратный корень или пользуясь таблицей квадратов чисел. Не слишком ли это трудоемко? Нет. Ведь квадрат натурального числа не может оканчиваться цифрой 2, поэтому испытуемых чисел оказывается только 6: 22 999, 29 299, 29 929, 92 299 и 99 229. Из них только одно квадратное: $29\ 929 = 173^2$.

Теперь тренируйте свою догадку и изобретательность на следующих задачах.

1. АЙ ДА ЧЕТВЕРКИ!

Пусть в нашем распоряжении есть только одна цифра 4. Употребляя ее ровно два раза, формируем числа 1 и 64:

$$1 = 4 : 4, \text{ или так: } 1 = \log_4 4, 64 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{4^4}}}, \dots$$

При шестикратном использовании цифры 4 формируем число $100 : 100 = \frac{444 - 44}{4}$. Придумайте другие конструкции, выражающие числа 64 (из двух четверок) и 100 (из шести четверок). А еще сформируйте 100 из семи четверок, 113 из четырех четверок.

2. СОТВОРЕНИЕ КРАСОТЫ

Красивая числовая формула получается, например, для такого n -значного числа, сумма цифр которого равна кубическому корню из этого числа.

Вот пара таких пятизначных чисел: 17 576 и 19 683.

$$1 + 7 + 5 + 7 + 6 = \sqrt[3]{17576},$$

$$1 + 9 + 6 + 8 + 3 = \sqrt[3]{19683}.$$

Как, по-вашему, много ли есть трехзначных и четырехзначных чисел с аналогичным свойством? Найдите их.

3. ЧИСЛА-ДИКОВИНКИ

1) Число 32. Десятичная запись куба этого числа начинается самим числом, а запись его пятой степени оканчивается цифрами данного числа:

№1 **32**

№2 **3149; 3151**

№3 **698896**

№4 **11826; 12363; 14676**

№5 **1729**

№6 **117649**

№7 **1030301**

№8 **32043; 99066**

$$\underline{32^3} = \underline{32768}, \underline{32^5} = \underline{33554432}.$$

2) Пара чисел: 3149 и 3151. Десятичная запись куба каждого из них начинается двумя его первыми цифрами, а оканчивается двумя его последними цифрами:

$$3149^3 = \underline{31} 226 116 \underline{949}, 3151^3 = \underline{31} 285 651 \underline{951}.$$

Есть еще два последовательных четырехзначных числа, обладающих таким же свойством. Какие это числа?

Догадаться поможет нам экспонат № 1 нашего стенда.

3) Число 698 896 квадратное (836^2), палиндромическое.

Предполагают, что оно — наименьшее квадратное палиндромическое число с четным количеством цифр. Подтвердить это или опровергнуть можно, только покопавшись в таблице квадратов чисел, меньших 836.

4) Числа 11 826, 12 363, 14 676. В десятичной записи квадрата каждого из них содержатся цифры от 1 до 9, по одному разу каждая:

$$11 826^2 = 139 854 276, 12 363^2 = 152 843 769, \\ 14 676^2 = 215 384 976.$$

Есть еще пятизначное число с таким же свойством. Его запись содержит цифры 1, 2, 3, 4, 5, каждую по одному разу.

Из пяти разных цифр (без нуля) можно сформировать $5! = 120$ разных пятизначных чисел (убедитесь!), но, пользуясь калькулятором, вы без большого труда выделите из них требуемое число.

5) Число $1729 = 1^3 + 12^3$ или $1729 = 9^3 + 10^3$.

Найдите число, ближайшее к 1729, представимое суммой кубов трех неравных чисел, четырех неравных чисел, девяти неравных чисел (всякий раз двумя равенствами). На размышление даем одну минуту.

6) Число 117 649 одновременно в трех качествах: квадратное, кубическое и кратное семи:

$$117\ 649 = 343^2 = 49^3 = 7k, k \in N.$$

Более того, на отрезке от единицы до миллиона оно единственное с таким свойством. Докажите!

7) Число 1 030 301 одновременно в трех качествах: кубическое (101^3), палиндромическое и сумма его цифр — число кубическое (8). Точно такая же диковинка — число 1 367 631. Кубом какого числа оно является? Это можно узнать и не умея извлекать кубические корни.

8) Числа 32 043 и 99 066. В запись квадрата каждого из них входят все 10 цифр, по одному разу каждая:

$$32\ 043^2 = 1\ 026\ 753\ 849, 99\ 066^2 = 9\ 814\ 072\ 356.$$

Предполагают, что первое — наименьшее, а второе — наибольшее из пятизначных чисел с таким свойством.

Подтвердить или опровергнуть это утверждение под силу только ЭВМ или энтузиасту — любителю счета.

4. ШЕСТИЗНАЧНОЕ ЧИСЛО

Ученику понадобилось написать наибольшее из шестизначных чисел, кратных 11 и чтобы цифра 6 была первой слева. Как надо действовать ученику для быстрого выполнения задания, если признаков делимости на 11 он еще не знает?

Сообщим, что искомое число обладает забавной особенностью: если каждую его цифру повернуть на 180° в плоскости бумаги, оставляя ее на прежнем месте, то образовавшееся число окажется дважды кратным 11 (делится на 11 и частное также делится на 11).

Выявите еще одну особенность чисел найденного и с повернутыми цифрами.

5. ВСЕ ДЕСЯТЬ ЦИФР

Если найдете способ размещения между цифрами числа 43 210 цифр 9, 8, 7, 6 именно в этом порядке и в конце записи образовавшегося числа припишите цифру 5, то получится такое десятизначное число, которое после его умножения на 2 останется десятизначным, содержащим каждую цифру также по одному разу.

Получившееся в результате такого умножения число займет место в упорядоченном множестве всех десятизначных чисел, которые можно составить, употребляя каждую из десяти цифр по одному разу.

6. СУММА РАВНА ПРОИЗВЕДЕНИЮ

На отрезке числовой оси (рис. 17) изображены семь точек с целочисленными координатами. Из них три последовательные точки с координатами 1, 2 и 3 таковы, что $1+2+3=1\cdot2\cdot3$. Но на данном отрезке вы легко найдете еще две тройки и только одну пятерку последовательных точек, сумма координат которых равна их произведению.

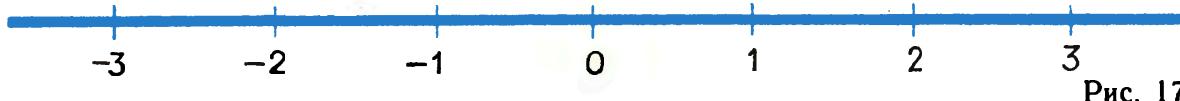


Рис. 17

Найдутся ли на всей числовой оси еще другие тройки и пятерки последовательных точек, сумма целочисленных координат которых равна их произведению?

7. ТОЛЬКО ПО ДОГАДКЕ

Результат решения предыдущей задачи поможет вам подобрать, теперь уже только по догадке, комплект последовательных целых чисел, сумма которых равна их произведению, если комплект состоит из любого заданного нечетного ($2n+1$) количества таких чисел.

8. ТРОЙКА, СЕМЕРКА И... ТОЛЬКО

Найдите наименьшее число, обладающее следующими свойствами: состоит только из цифр 7 и 3, оно само и сумма его цифр делятся на 7 и на 3.

9. КРАСИВЫЕ ЦЕПОЧКИ РАВЕНСТВ

Пусть символ $\text{Сц}(N)$ выражает сумму цифр числа N в десятичной записи. Например, $\text{Сц}(5^3)=\text{Сц}(125)=1+2+5=8$.

Мы утверждаем, что при одном и том же целом значении x имеют место две красивые цепочки тождеств:

- 1) $\text{Сц}(x^6)=\text{Сц}(x^7)=\text{Сц}(x^8)=\text{Сц}(x^{12})=6x;$
- 2) $\text{Сц}(x^9)=\text{Сц}(x^{10})=\text{Сц}(x^{11})=\text{Сц}(x^{13})=\text{Сц}(x^{17})=\text{Сц}(x^{21})=x^x.$

Найдите подходящее значение x .

10. ФИГУРНОЕ РАЗМЕЩЕНИЕ ЧИСЕЛ

- 1) Девять чисел, образующих арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью 220, надо разместить в ячейках

Рис. 18

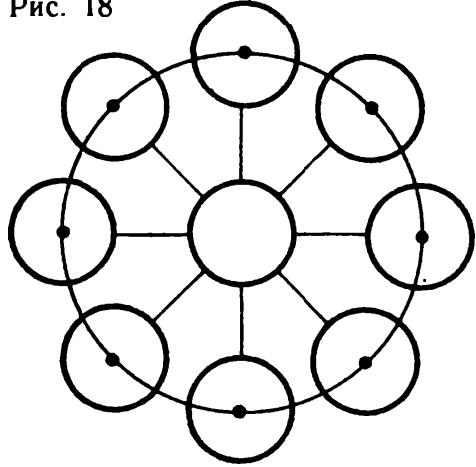
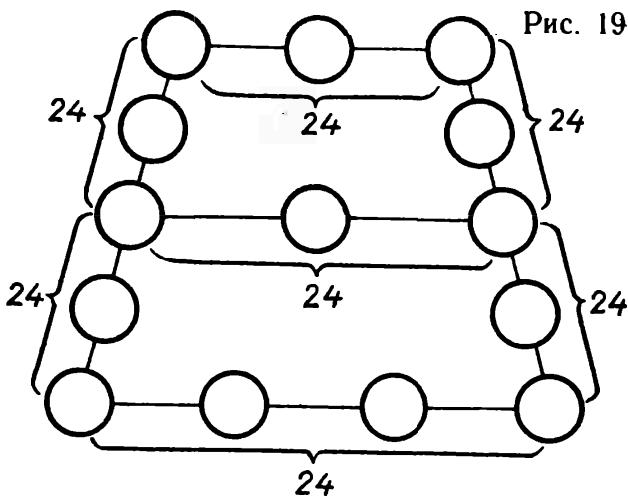


Рис. 19



«колеса» (рис. 18) так, чтобы сумма каждой тройки чисел, расположенных вдоль диаметра колеса, равнялась 1986.

2) Числа 2, 3, ..., 15 впишите по одному в каждую ячейку (рис. 19) так, чтобы сумма чисел вдоль отрезков, отмеченных фигурной скобкой, равнялась 24.

11. НАПРАСНЫЕ НАДЕЖДЫ И ...

Складывая факториалы последовательных чисел $1! + 2! + 3! + \dots$, усердный школьник надеется достигнуть суммы ровно в один миллион.

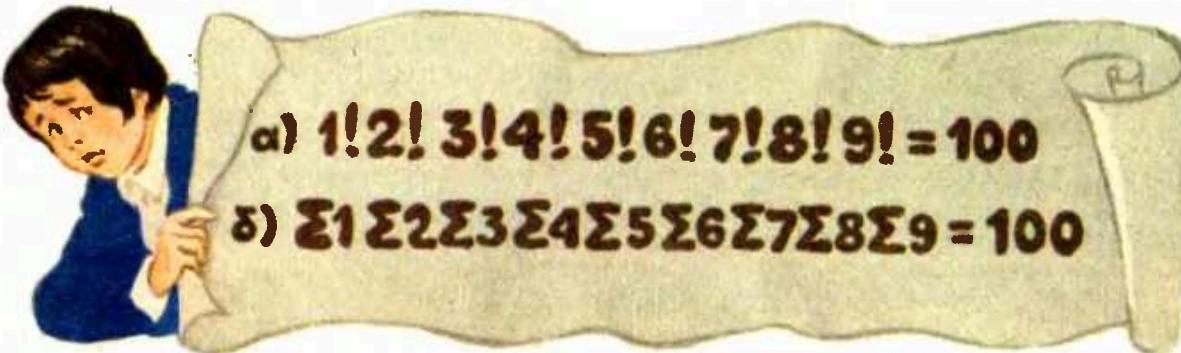
Увы! Его надежды и усилия тщетны. Это можно доказать легко и быстро. Не правда ли?

12. УТЕШЕНИЕ

Для утешения огорченного неудачей школьника предлагаем составить число 100 из девяти подряд записанных чисел в виде:

- $1! 2! 3! 4! 5! 6! 7! 8! 9! = 100$;
- $\Sigma 1 \Sigma 2 \Sigma 3 \Sigma 4 \Sigma 5 \Sigma 6 \Sigma 7 \Sigma 8 \Sigma 9 = 100$.

При этом, не изменяя расположения записанных чисел, надо расставить в промежутках знаки сложения, вычитания, умножения и, если понадобится, знак деления и скобки так, чтобы образовались верные равенства.



13. ТРИОК КЛОУНА

Клоунам, имена которых Пять, Шесть и Семь, хотелось так расположиться в один ряд, чтобы цифры на их костюмах образовали трехзначное число, делящееся на 13 без остатка. Вначале не удавалось, но вскоре один из них, самый догадливый, крикнул: «Придумал!»... и все получилось, как хотелось!

Разгадайте секрет его трюка.





Три соседа мужика
(Федор, Яков и Лука),
Чтоб всегда с водою жить,
Стали свой колодец рыть.
Но Лука вдруг говорит:
«Ведь момент один забыт!
Нужно длины всех дорог
От колодца на порог
Сделать равными, друзья!
Допускать обид нельзя!».
Можно ль это сделать им?
И скажи, путем каким?



СИТУАЦИИ В ЖИЗНИ ТАКИЕ: ЛИБО СЛОЖНЫЕ, ЛИБО ПРОСТЫЕ

1. ПЕРВАЯ МАТЬ-ГЕРОИНЯ

Первый орден «Мать-героиня» был вручен жительнице Пушкинского района Московской области Анне Савельевне Алексахиной в 1944 году.

Десять сыновей и двое дочерей было в семье Алексахиной (по старшинству: Сергей, Алексей, Александр, Иван, Георгий, Валентин, Михаил, Николай, Владимир, Андрей, Виктория и Светлана), причем все они родились через одинаковые промежутки времени.

В тот год, когда Светлане было 10 лет, сумма квадратов возрастов детей равнялась сумме квадратов возрастов родителей. Треть суммы возрастов родителей равна седьмой части суммы возрастов детей (считаем только целое число лет).

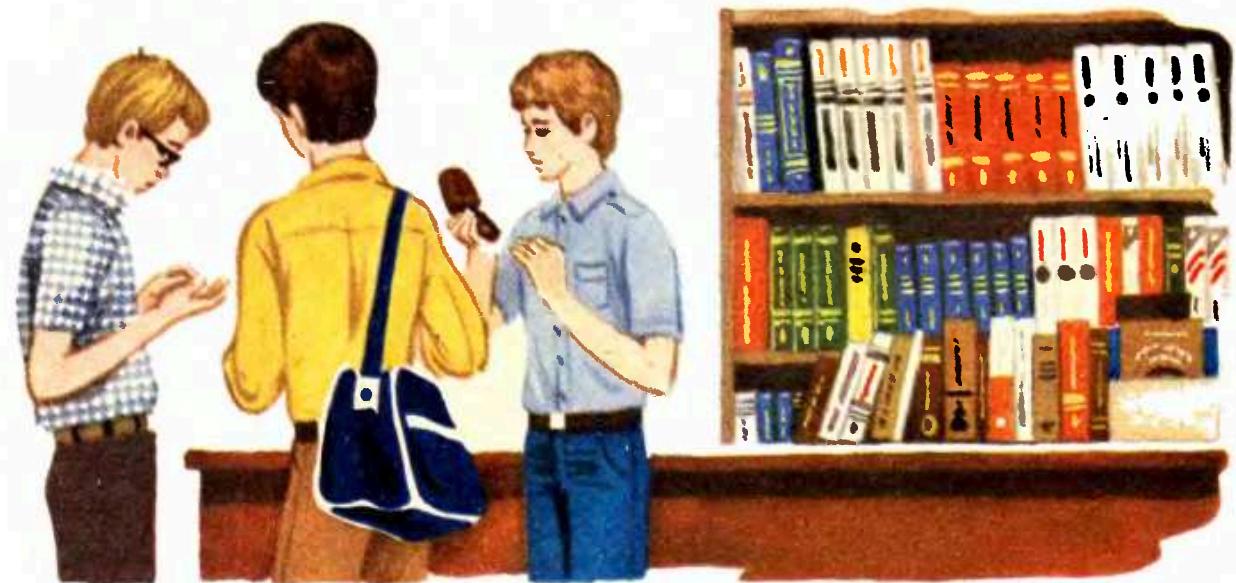
Сколько лет было тогда каждому из детей и родителям, если известно, что муж Анны Савельевны — Максим Сергеевич старше ее?

2. ТРОЕ ДРУЗЕЙ

Трое друзей хотят купить книжку. Оказалось, что двоим на покупку книги не хватает 1 к., третьему — 2 р. 90 к.

Когда они сложили свои деньги, то денег на покупку книги им все равно не хватало.

Зная, что денег у первого из друзей на 19 к. больше, чем у второго, найдите, сколько денег было у каждого.



3. КТО ГДЕ ЖИВЕТ?

Лайне, Майму, Юта, Белла, Елена и Элеонора живут в одном блоке здания. Возвращаясь из школы домой, Лайне проходит внутри здания 84 ступеньки, Майму — 126, Юта — 147, Белла — 189, Елена — 210, а Элеонора — 231 ступеньку. До квартиры на первом этаже ступенек нет, а между этажами одинаковые количества ступенек. Кто на каком этаже живет?

4. «ВЫ ОШИБЛИСЬ В ПОДСЧЕТЕ»

Ученик покупает в магазине 18 карандашей, 6 тетрадей, 12 резинок, 9 блокнотов и несколько тетрадей для рисования по 15 к. Девушка-продавец выписала чек на 1 р. 52 к. Взглянув на чек, мальчик сразу же сказал продавцу: «Вы ошиблись в подсчете». Девушка пересчитала и исправила свою ошибку.

Как удалось ученику так быстро обнаружить просчет?

5. ЗАГАДОЧНЫЙ ОТВЕТ ПРОХОЖЕГО

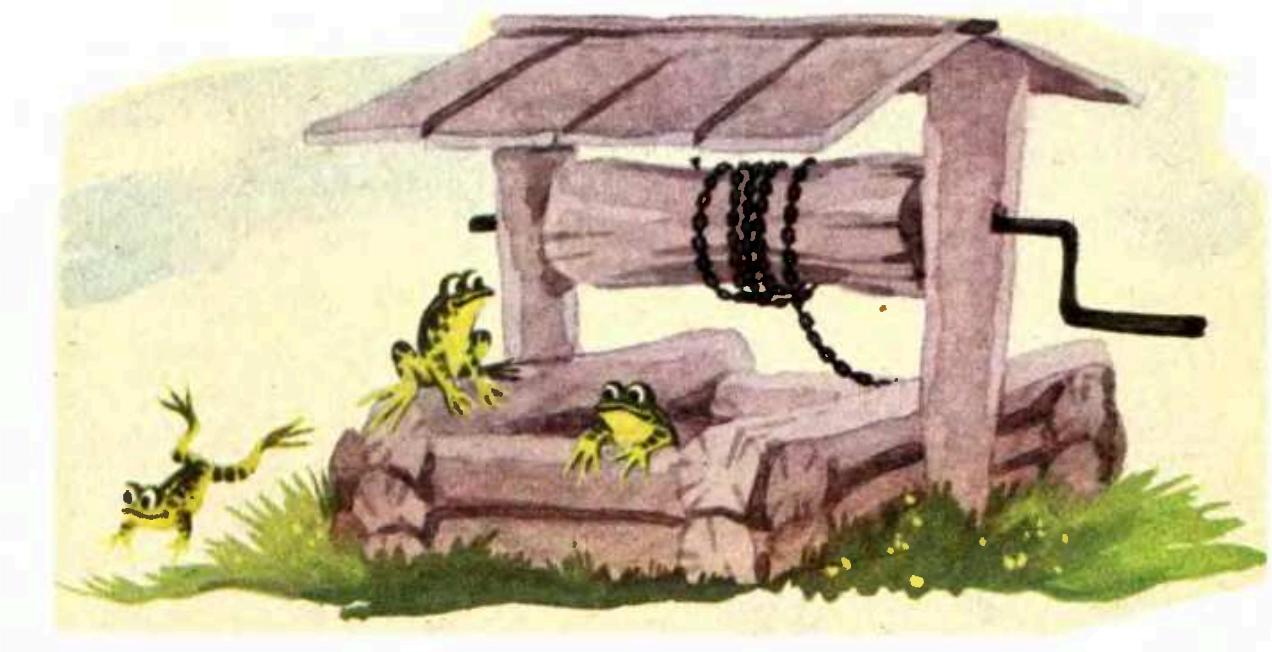
Ребята спросили прохожего:

— Скажите, пожалуйста, сколько сейчас времени?

— Вы узнаете, который час, если промежуток времени до полудня увеличите на $\frac{2}{5}$ промежутка времени, прошедшего после полуночи.

Разгадайте и вы загадку прохожего.





6. ТРИ ЛЯГУШКИ

Три лягушки находятся на дне колодца глубиной 60 м. За день они поднимаются на 18 м каждая, а потом спускаются первая на 12 м, вторая на 16 м, третья на 17 м и остаются на своих местах до следующего дня. На следующий день каждая лягушка проделывает снова такой же маршрут и т. д.

Через сколько дней лягушки выйдут из колодца?

7. НА БАЗАРЕ

За 9 кг орехов и 2 кг фейхоа заплатили столько же денег, сколько за 6 кг гранат. А за 6 кг орехов, 5 кг фейхоа и 4 кг гранат заплатили 43 р.

Сколько стоит 1 кг орехов, фейхоа и гранат отдельно, если известно, что стоимость каждого продукта выражается целым числом?

8. ТАКИЕ ДОЩЕЧКИ

У меня есть одна квадратная дощечка и несколько прямобугольных, неодинаковых по размерам. Как-то раз, измерив стороны, я вычислил площадь каждой дощечки и подметил забавную особенность: всякий раз сумма длины и ширины дощечки оказывалась численно равной ее площади. Установите с полной определенностью: 1) каков размер моей квадратной дощечки; 2) каков общий вид пары чисел, сумма которых равна их произведению; 3) есть ли в комплекте моих дощечек такие, у которых длина и ширина выражаются: а) целыми числами; б) числами, в записи которых все цифры одинаковы.

9. ДВЕ СЕСТРЫ

Пятнадцать лет назад Нушабе была в 5 раз старше своей младшей сестры Тунзале, а через 20 лет Нушабе будет в 1,5 раза старше Тунзале. Найдите возраст сестер.

10. ДЕДУШКА И ВНУЧКА

Сколько дедушке лет, столько месяцев внучке. Дедушке с внучкой вместе 91 год. Сколько лет дедушке и сколько внучке?



11. ЛИСА И ОВЧАРКА

Овчарка погналась за лисой, когда между ними было расстояние 99 м. Скачок лисы 1,1 м, скачок овчарки 2,2 м. Когда овчарка делает 19 скачков, лиса делает 29 скачков.

Сколько метров проскачат они, пока овчарка догонит лису?





12. НА ФЕРМЕ

На ферме выращивают кроликов и фазанов. В настоящее время их столько, что у всех вместе 740 голов и 1980 ног.

Сколько же в настоящее время находится на ферме кроликов и фазанов?

13. ФУТБОЛ И ГАНДБОЛ

Участниками игр были среди прочих команд 4 футбольные и 4 гандбольные. Назовем их A, B, C, D, E, F, G, H . О количестве набранных ими очков известно: суммарное количество очков, полученных футбольными командами, равно суммарному числу очков, полученных гандбольными командами; команда E получила на 4 очка больше, чем команда F , которая получила на 10 очков больше, чем команда B . Команды G и H получили одинаковое число очков, и каждая на 2 очка больше, чем команда C , и на 4 очка больше, чем команда D . Команда A получила на 6 очков больше, чем команда B , которая получила втрое больше очков, чем команда D .

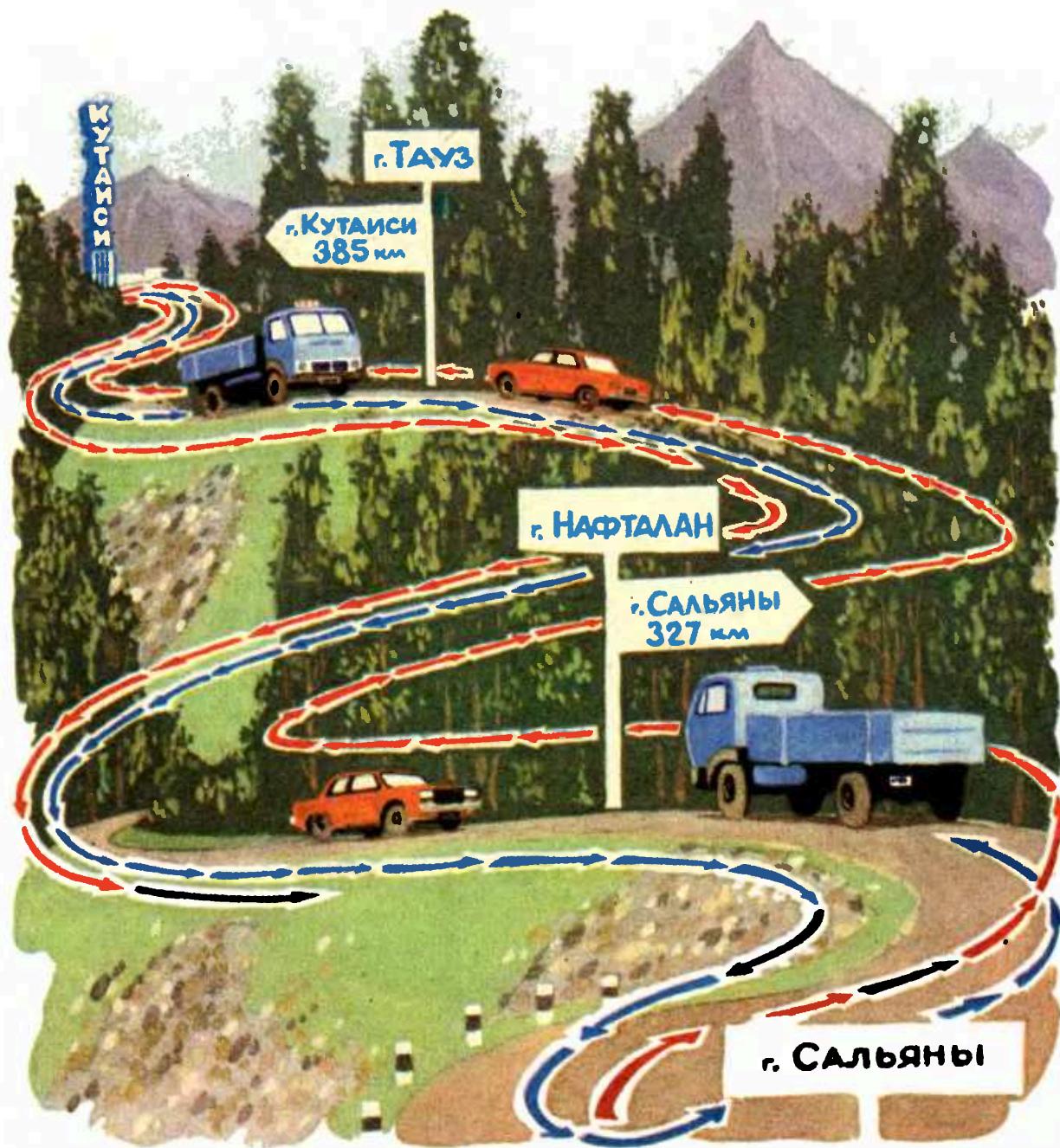
Установите, играют ли команды G и H в одну игру или в разные, если еще известно, что суммарное число очков, набранное всеми 8 командами, кратно числу 31.

14. ВСТРЕТИЛИСЬ ДВАЖДЫ

Легковая автомашина вышла из города Сальяны, направилась в сторону Кутаиси и встретилась с грузовой автомашиной, которая одновременно вышла из Кутаиси в направлении к Сальяны. Встреча произошла на расстоянии 385 км от Кутаиси в городе Тауз.

Когда автомашины достигли своих пунктов назначения, они тут же повернули обратно и вторично встретились на расстоянии 327 км от города Сальяны в городе Нафталан.

Найдите расстояние между городами Сальяны и Кутаиси.



15. СКОЛЬКО У МАМЫ ДОЧЕРЕЙ И СЫНОВЕЙ?

В семье 12 детей. Мама принесла для них 70 штук фейхоа. Половину всех фейхоа она раздала дочерям поровну, остальные фейхоа отдала сыновьям, которые разделили их между собой также поровну. Каждый мальчик получил на 2 фейхоа больше, чем каждая девочка. Сколько было у этой мамы дочерей и сыновей?

16. ТРИ ВЕЛОСИПЕДИСТА

Три велосипедиста начали с общего старта движение по круговой дорожке. Первый делает полный круг за 21 мин, второй — за 35 мин, а третий — за 15 мин. Через сколько минут они еще раз окажутся вместе в начальном пункте?

17. ОН И ОНА

Ежедневно Он подходил к городским часам ровно в 19⁰⁰; Она же появлялась почти всегда в тот момент промежутка времени между 19⁰⁰ и 20⁰⁰, когда воображаемая биссектриса угла, образованного часовой и минутной стрелками, проходила бы на циферблате через цифру 6.

В какой момент времени появлялась Она?

18. КАКОЕ ЧИСЛО НАДО ВЫЧЕСТЬ?

Из знаменателя данной дроби вычтем k . Какое число надо вычесть из числителя, чтобы полученная дробь равнялась данной? Как, по-вашему, возможно это?

19. КАКОВА ШИРИНА ОЗЕРА?

Спортивная лодка отправилась от одного берега озера к противоположному со скоростью 60 км/ч, а спустя 8 мин в том же направлении вышла вторая лодка со скоростью 90 км/ч.

Какова длина пути лодок (ширина озера), если вторая лодка подошла к противоположному берегу озера на 7 мин раньше первой лодки?





20. РАЗДЕЛИТЬ ПОРОВНУ

Требуется разделить 5 одинаковых яблок поровну между восемью мальчиками. Можете это сделать с наименьшим числом разрезов?

21. КАК БУДЕМ РАЗРЕЗАТЬ АРБУЗЫ?

К школьному завтраку надо 13 арбузов одного размера разрезать на 42 одинаковые порции. Как это сделать, не разрезая ни одного арбуза больше чем на 7 частей?

22. УСТАНОВИТЕ ФАМИЛИИ

Пять девочек и пять их братьев разделили между собой 98 фейхоа следующим образом: Ирена взяла 3 фейхоа, Белла — 8, девочка Кай — 9, Андрей получил 5 фейхоа, а Дима — 7. Число фейхоа, взятых Вовой Терехиным, равно факториалу числа фейхоа, взятых его сестрой.

Света Рыбалько получила вдвое больше фейхоа, чем ее брат. Ире Совковой досталось втрое больше, чем ее брату. Число фейхоа, полученных Мишой Элькиндов, равно кубическому корню из квадрата числа фейхоа, взятых его сестрой. Оскар Корьюс получил столько фейхоа, чему равен квадратный корень из куба числа фейхоа, взятых его сестрой.

Зная, что все девочки получили столько фейхоа, сколько и все мальчики, найдите фамилии Ирены, Беллы, Андрея, Димы и Кай.

23. ҚАК ОПРЕДЕЛИЛ ОШИБҚУ ЧОХБИЛМИШ?

Чохбилмиш предложил каждому из двух учеников задумать какое-либо шестизначное число и переставить первую цифру в конец записи числа. Одному сказал: «Найди сумму получившихся чисел». Другому сказал: «Найди разность».

Ученики выполнили действия и написали:

913 485 и 167 860.

Чохбилмиш не знал, какие числа были задуманы учениками, но сразу определил: «Вы оба ошиблись». Как рассуждал Чохбилмиш?

24. ИЗ ЖИЗНИ ДЕФУРНЕЛЯ

Некогда в отрывном календаре были приведены любопытные факты из биографии француза Пьера Дефурнеля. Он был отцом трех сыновей, родившихся в разных веках. Он сам и старший сын родились в XVII веке. Женился на девятнадцатом году жизни. Через год стал отцом первого сына. Спустя 37 лет женился второй раз. Через год стал отцом второго сына. А еще через 43 года родилась будущая его третья жена. Через 19 лет после этого они поженились. Через год родился третий сын. Спустя 8 лет Пьер Дефурнель умер.

Установите годы рождения Пьера Дефурнеля, сыновей, третьей жены и годы, когда женился Дефурнель и когда он умер.



25. МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС

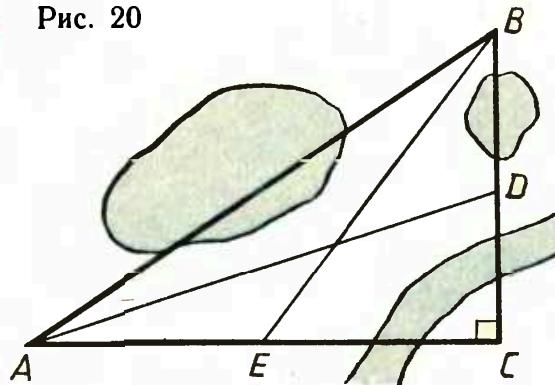
- 1) Как найти вместимость V стакана с помощью весов?
- 2) Вычислите приближенно объем лежащего перед вами мяча. В вашем распоряжении нитка и измерительная линейка.
- 3) Можно ли узнать по показаниям домашнего электросчетчика какой-либо промежуток времени?

4) С помощью мензурки определите радиус вмещающегося в нее шара.

5) На местности (рис. 20) учитель показал нам три опорных пункта A , B , C , являющиеся вершинами прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$). Требовалось определить расстояние от A до B , но непосредственному измерению доступны были только медианы AD и BE . Мы их измерили на местности, а в классе определили величину AB , не вычисляя при этом длин катетов. Какая у нас получилась формула?



Рис. 20



6) Мы изготовили штакетник, чтобы огородить квадратный участок спортивплощадки. Но оказалось возможным увеличить площадь участка на 44%. На сколько процентов больше потребуется штакетника для ограждения нового квадратного участка?

26. КЕМПИНГ ПЛЮС СПОРТПЛОЩАДКА

Для кемпинга выделили два равных отдельных квадратных участка. Длина стороны каждого участка кратна числу 7. Вблизи отвели еще один четырехугольный участок для спортивплощадки, общая площадь всех выделенных участков $2870,25 \text{ м}^2$.

Только собрались поставить ограду, подготовленную точно по размерам суммарного периметра двух участков, отведенных под кемпинг, как поступило распоряжение заменить эти два отдельных участка одним прямоугольным участком, не изменяя общей величины площади, отводимой первоначально. Так как длина нового участка была на 1 м больше его ширины, то оказалось теперь, что подготовленной оградой можно обнести полностью не только новый участок, но и весь вблизи расположенный участок спортивплощадки.

Имела ли спортивплощадка форму прямоугольника?

27. ВОТ КАК ПЕРЕВОЗЯТ СОЛЬ

В трех озерах с одинаковой концентрацией соли одинакова и скорость прироста соли в процессе ее образования. Площадь озер 3 га, 9 га и 21 га. Всю соль, добытую из первого озера, перевозят на 8 грузовиках в течение 4 недель; добытую из второго озера — 18 грузовиками в течение 6 недель. За сколько недель всю соль, добытую из третьего озера, перевезут 28 грузовиками?

28. КАВКАЗСКАЯ СЕМЬЯ

В одной кавказской семье 16 человек. Прадед, прабабушка, дед, бабушка, отец, мать, четверо сыновей — по убывающим возрастам: Эльшан, Камал, Нариман, Низами — и шестеро дочерей — по возрастающим возрастам: Эльза, Изя, Лиза, Лида, Тунзали и Нушабе.

Возраст дочерей составляет арифметическую прогрессию с разностью 3 и первым членом 3. Возраст Низами составляет среднее гармоническое двух чисел — возрастов Эльзы и Изы. Возраст Наримана есть среднее гармоническое двух чисел — возрастов Лида и Изы. Возраст Камала есть среднее гармоническое двух чисел — возрастов Нушабе и Изы. Возраст Эльшана составляет среднее гармоническое двух чисел — возрастов Лизы и Нушабе. Возраст матери есть квадрат среднего геометрического двух чисел — возрастов Низами и Лизы. Возраст отца есть квадрат среднего квадратичного двух чисел — возрастов Эльзы и Лизы.

Возраст дедушки составляет треть квадрата среднего геометрического двух чисел — возрастов Низами и отца. Возраст бабушки есть среднее арифметическое двух чисел — возраста дедушки и утроенного возраста Нушабе. Возраст прабабушки составляет сумму возрастов отца и матери. Возраст прадедушки составляет удвоенное среднее геометрическое двух чисел — возрастов прабабушки и матери.

Зная, что имеются дети-близнецы (только разнополые), найдите, сколько лет каждому члену семьи.

Указание. Пусть a и b — положительные числа, тогда $\frac{a+b}{2}$ — их среднее арифметическое, $\sqrt{a \cdot b}$ — их среднее геометрическое, $2 : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ — их среднее гармоническое, $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ — их среднее квадратичное.

29. АРИФМЕТИКА НА ПОЧТЕ



Имеется веревка длиной 9 м. Веревка должна три раза охватывать посылку в форме прямоугольного параллелепипеда попоперек и два раза вдоль. Найдите размеры посылки при возможном наибольшем объеме.

30. ТУРИСТЫ ВОЗВРАЩАЮТСЯ В МОСКВУ

Две группы туристов одновременно выехали из Звездного городка в Москву на двух автобусах. К Москве они подъехали также одновременно, причем оба автобуса прошли одинаковое число километров. Однако у первого автобуса остановки в пути составили $\frac{1}{4}$ промежутка времени движения второго автобуса, тогда как у второго автобуса остановки составили $\frac{2}{5}$ промежутка времени движения первого. Который из автобусов имел большую среднюю скорость движения на этом пути и во сколько раз?

31. В КРЫМУ

Однажды летом в Крым в лагерь «Спутник» прибыли группы болгарской, немецкой, польской и венгерской молодежи. Численные составы этих групп были одинаковыми. Вскоре каждый третий из состава прибывших отправился в турпоход по горам Крыма. Из группы болгар пошло столько человек, сколько не пошло из венгерской группы; $\frac{2}{3}$ состава немецкой группы также предпочли остаться.

Сколько человек из польской группы приняло участие в турпоходе?



32. БУКЕТ ДЛЯ АКТЕРОВ

Недавно состоялась встреча всего состава школьного драмкружка с шефами: драматургом, дирижером, режиссером, несколькими актерами и актрисами. Всего кружковцев и гостей собралось 26 человек.

В конце встречи каждый кружковец преподнес по одному цветку каждому из тех гостей, кому задавал вопросы. В результате у гостей образовались букеты: у драматурга из 13 цветков, у дирижера из 14, у режиссера из 15 и далее в той же последовательности.

Самый большой букет образовался у молодой актрисы, потому что ей задавали вопросы все кружковцы.

Сколько кружковцев присутствовало на этой встрече?

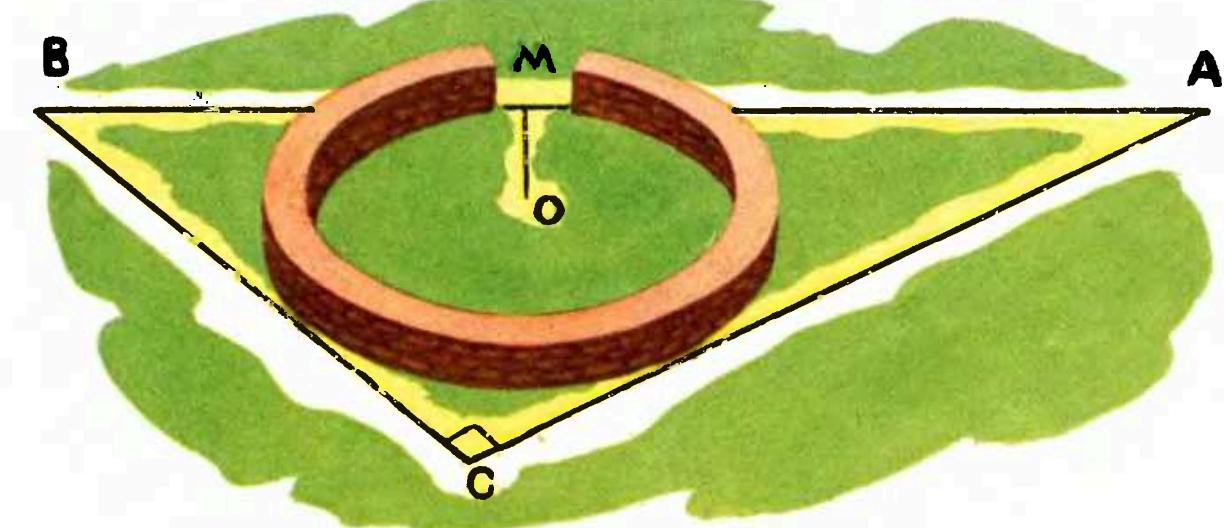
33. СОСТАЯЗАНИЕ В СПОРТИВНОЙ ХОДЬБЕ

На ровной лужайке отмечены старт (точка A) и финиш (точка B). От старта до финиша проложены две дорожки AB и ACB (рис. 21). На плане местности точки A , B , C — вершины прямоугольного треугольника ABC , у которого AB — гипотенуза, AC и CB — катеты.

Спортсмены из общества «Динамо» (D) и «Торпедо» (T) одновременно стартовали из A . D пошел по дорожке ACB , а T — по AB до M (на рис. 21 это точка касания AB с вписанной в треугольник ABC окружностью с центром в точке O), затем T пошел по MO , в O он развернулся и пошел обратно по OM , а дальше к финишу B по прямому пути MB .

Если оба спортсмена шли по указанным маршрутам с постоянной скоростью, то кто же из них раньше достиг финиша B ?

Рис. 21



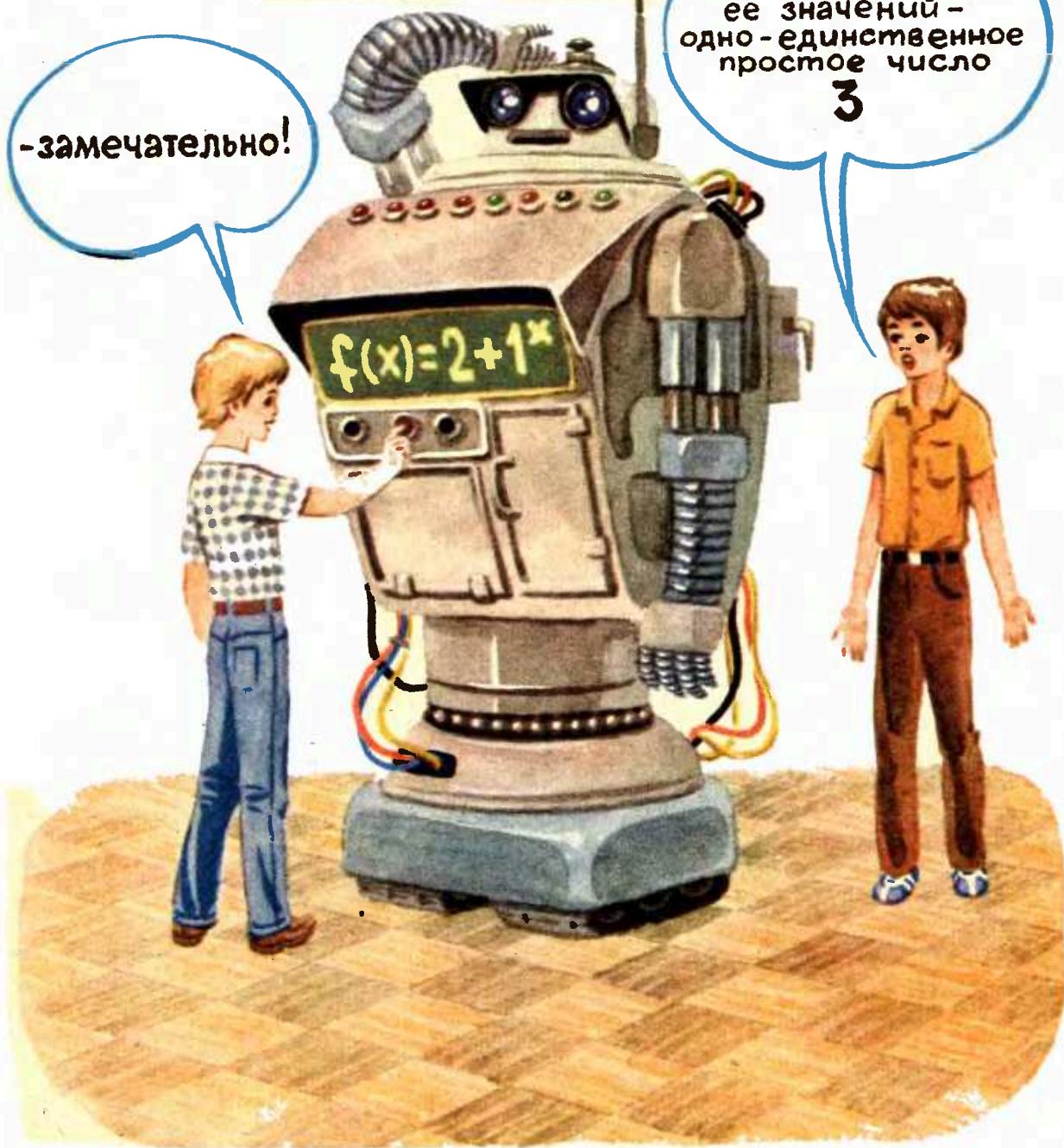
СЕНСАЦИЯ!

наш робот придумал
функцию $f(x)$,
дающую простые числа
при любых натуральных значениях
переменного x (!!?)
нажмите среднюю кнопку

-замечательно!

- Но, увы,
все множество
ее значений –
одно-единственное
простое число
3

$$f(x) = 2 + 1^x$$



НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО В АРИФМЕТИКУ ВОШЛО, ТАЙН НЕМАЛО ПРИНЕСЛО

1. ТАКИХ ЧИСЕЛ ТОЛЬКО ДВА

Есть только два двузначных числа, каждое из которых равно неполному квадрату разности своих цифр. Найдите эти числа.

Чтобы облегчить решение, подскажем, что одно число на 11 больше другого.

2. ЕЩЕ ДВА ЧИСЛА

Сходным свойством обладают еще два двузначных числа: каждое равно неполному квадрату суммы своих цифр.

Найдите эти числа, зная, что одно число на 50 больше другого.

3. ТРЕХЗНАЧНОЕ ЧИСЛО

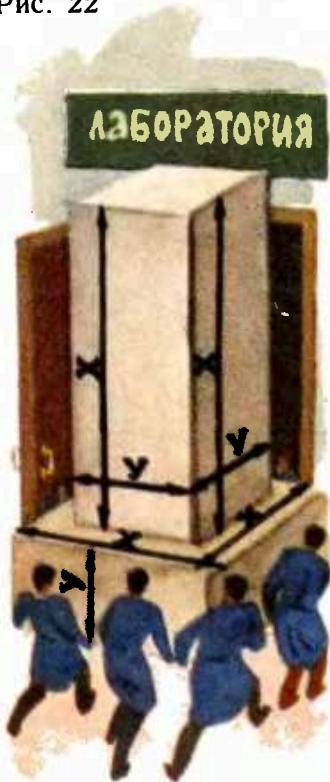
Найдите трехзначное число, обладающее следующими свойствами: число десятков на 4 меньше числа единиц, но на 4 больше числа сотен; если цифры этого числа разместить в обратном порядке, то новое полученное число будет на 792 больше исключенного.

4. И ТАКИЕ ЕСТЬ ЧИСЛА

- 1) Какое двузначное число в 19 раз больше числа его единиц?
- 2) Первое число составляет 80% второго, второе число составляет 40% третьего, третье число составляет 20% четвертого. Найдите эти числа, зная, что их сумма равна 336.
- 3) Два простых числа обладают свойством: если от каждого из них вычесть половину другого, то одна разность будет в 5 раз больше другой. Найдите эти числа.
- 4) Сумма первого числа и квадрата второго равна 57, а сумма второго числа и квадрата первого равна 71. Найдите эти числа.



Рис. 22



5. СКОЛЬКО СТРАНИЦ В КНИГЕ?

Для нумерации страниц книги наборщик типографии использовал 2529 литер с цифрами. На каждой литеце одна цифра.

Сколько страниц в этой книге?

6. НУМЕРАЦИЯ СТРАНИЦ

Я спросил наборщика типографии:

— Сколько отдельных литер с цифрами потребуется для нумерации 1000 страниц книги?

— Легко вычислить,— ответил наборщик.— Вот мое решение:

$$3000 - 18 - 90 + 1 = 2893.$$

Я решил иначе, но получил такой же результат. Придумайте свой план решения и найдите объяснение способу, предложенному наборщиком.

7. СООРУЖЕНИЕ ДЛЯ ЛАБОРАТОРИИ

Для одной лаборатории изготовили конструкцию из двух спаянных пустотелых параллелепипедов (рис. 22). Длины всех ребер (в дециметрах) — целые числа. Основания параллелепипедов — квадраты. Высота первого параллелепипеда равна стороне основания второго, а высота второго равна стороне основания первого параллелепипеда.

Поместится ли эта конструкция, объем которой 3900 дм^3 , в лаборатории, если расстояние от пола лаборатории до потолка равно 2 м 75 см?

8. УТРОЕНИЕ БЕЗ УМНОЖЕНИЯ

У натурального числа, которое предлагается найти, есть следующая особенность: последняя цифра в его записи — 3 и при ее перемещении с последнего места на первое это число утраивается.

9. ОКОЛО ПЯТИСОТ НУЛЕЙ! ПРАВДОПОДОБНО?

Как вы полагаете, каким количеством нулей оканчивается запись числа, получающегося в результате вычисления $1983!$? Сотней? Или меньше? Или больше?

10. МОЖНО ДОКАЗАТЬ

Можно доказать, что квадрат никакого целого числа, большего 10, не может оканчиваться ни на 11, ни на 51, ни на 91. Как это сделать?

11. СУММА ПЯТИЗНАЧНЫХ ЧИСЕЛ

Предположим, что из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 составлены все возможные пятизначные числа, причем все цифры в записи каждого числа различны. Чему равна сумма всех таких пятизначных чисел?

12. «ИЗБРАННЫЕ» ЧИСЛА

Есть 80 четырехзначных и 800 пятизначных чисел, не оканчивающихся нулем, и таких, что если от любого из них вычтем 999 в случае четырехзначного числа и 9999 в случае пятизначного числа, то всякий раз получим обращенное число, т. е. записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Какие это числа?

Найдите способ быстрого вычисления суммы этих чисел (без привлечения компьютера).

13. ЧИСЛА В РАЗЛИЧНЫХ СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$ — последовательность цифр k -значного числа в системе счисления с натуральным основанием $b > 1$. Все цифры числа N всегда меньше основания (b) системы счисления.

Применяются две формы записи числа:

позиционная — $N = (a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k)_b$,

и систематическая — $N = a_1 b^{k-1} + a_2 b^{k-2} + \dots + a_{k-1} b + a_k$.

Если $b = 10$, т. е. система счисления привычная нам — десятичная, то $N = a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k$, или $N = a_1 \cdot 10^{k-1} + a_2 \cdot 10^{k-2} + \dots + a_{k-1} \cdot 10 + a_k$.

(Если цифры выражены не буквами, а цифрами, то черта над числом не нужна.)

С помощью систематической формы записи числа легко переводить его из одной системы счисления в другую или отыскивать системы счисления (неизвестное b), в которых верны заданные равенства.

Примеры. 1) Перевести число $(1\ 234\ 567)_8$ в десятичную систему счисления.

Решение. $(1\ 234\ 567)_8 = 1 \cdot 8^6 + 2 \cdot 8^5 + 3 \cdot 8^4 + 4 \cdot 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8 + 7 = 342\ 391$.

2) Перевести число $1\ 234\ 567 = N$ в восьмиричную систему счисления.

Решение. Из записи $N = a_1 \cdot 8^{k-1} + a_2 \cdot 8^{k-2} + \dots + a_{k-1} \cdot 8 + a_k$ видно, что цифра a_k есть остаток от деления N на 8. Вычисляем:

$1\ 234\ 567 : 8 = 154\ 320$ (остаток 7), $a_k = 7$; первое частное — $N_1 = 154\ 320$. Далее, $\frac{N - a_k}{8} = 154\ 320 = a_1 \cdot 8^{k-1} + a_2 \cdot 8^{k-2} + \dots + a_{k-1}$.

Видим, что цифра a_{k-1} есть остаток от деления первого частного $N_1 = 154\ 320$ на 8. Вычисляем:

$154\ 320 : 8 = 19\ 290$ (без остатка), значит, $a_{k-1} = 0$. Далее, $19\ 290 : 8 = 2411$ (ост. 2); $2411 : 8 = 301$ (ост. 3);

$301 : 8 = 37$ (ост. 5); $37 : 8 = 4$ (ост. 5); $4 : 8 = 0$ (ост. 4).

Следовательно, число $1\ 234\ 567$ в восьмиричной системе счисления записывается так: $(4\ 553\ 207)_8$.

Примечание. Эту же задачу можно поставить иначе: разложить число $1\ 234\ 567$ по степеням числа 8.

Итак,

$$1\ 234\ 567 = 4 \cdot 8^6 + 5 \cdot 8^5 + 5 \cdot 8^4 + 3 \cdot 8^3 + 2 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 7 \cdot 8^0.$$

3) В какой системе счисления верно равенство

$$(777\ 777)_b + 1 = (1\ 000\ 000)_b?$$

Решение. Так как в записи числа есть цифра 7, то система счисления не менее чем восьмиричная. Проверим:

$$(777\ 777)_8 = 7 \cdot 8^5 + 7 \cdot 8^4 + 7 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 7 \cdot 8^0 = 262\ 143,$$

$$262\ 143 + 1 = 262\ 144 = 8^6 = (1\ 000\ 000)_8.$$

Задача. Разложите $1\ 000\ 000$ по степеням числа 6.

14. «СТРАННЫЕ» РЕЗУЛЬТАТЫ

1) Забавный вид имеют записи действий, выполненные в не-десятичных системах счисления, когда основание системы не указано.

а) $2 \cdot 2 = 10$;

б) $31 - 13 = 13$;

в) $43 + 2 = 100$;

г) $2022 + 22 = 2121$;

д) $10\ 000\ 000 = 1\ 111\ 111 + 1$;

е) $\frac{16}{61} = \frac{2}{7}$ (после сокращения дроби $\frac{16}{61}$ на 7).

В какой системе счисления (b) выполнялось каждое действие, если все результаты правильные?

2) Докажите, что для записи 1 млрд. в двоичной системе счисления надо употребить 30 цифр.

15. ПРЕМИЯ ЗА ИЗОБРЕТЕНИЕ

Четыре изобретателя независимо друг от друга придумали 10 различных приспособлений: Андрей — 1, Борис — 2, Виктор — 3 и Григорий — 4. Когда внедрили их в производство, то выяснилось, что каждое приспособление, разработанное одним и тем же изобретателем, дает одну и ту же годовую экономию: чье-то по 25 р., чье-то по 125 р., чье-то по 625 р., а чье-то даже по 3125 р. В результате годовая экономия составила 8350 р.

10% этой суммы выделили на премию, которую распределили между изобретателями пропорционально вкладу каждого в общую годовую экономию. Сколько рублей получил каждый из них в качестве премии?

16. БЕЗОШИБОЧНЫЙ ПРОГНОЗ

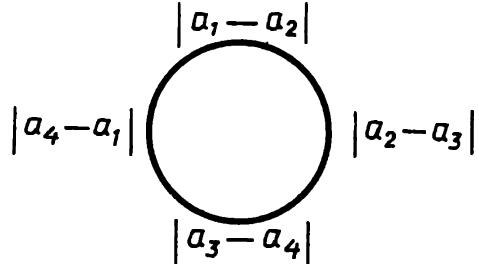
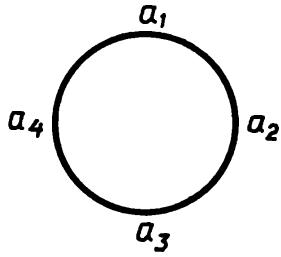
Расположите по кругу 4 произвольных натуральных числа a_1, a_2, a_3, a_4 . Замените их абсолютными значениями разностей

$$|a_1 - a_2|, |a_2 - a_3|, |a_3 - a_4|, |a_4 - a_1|.$$

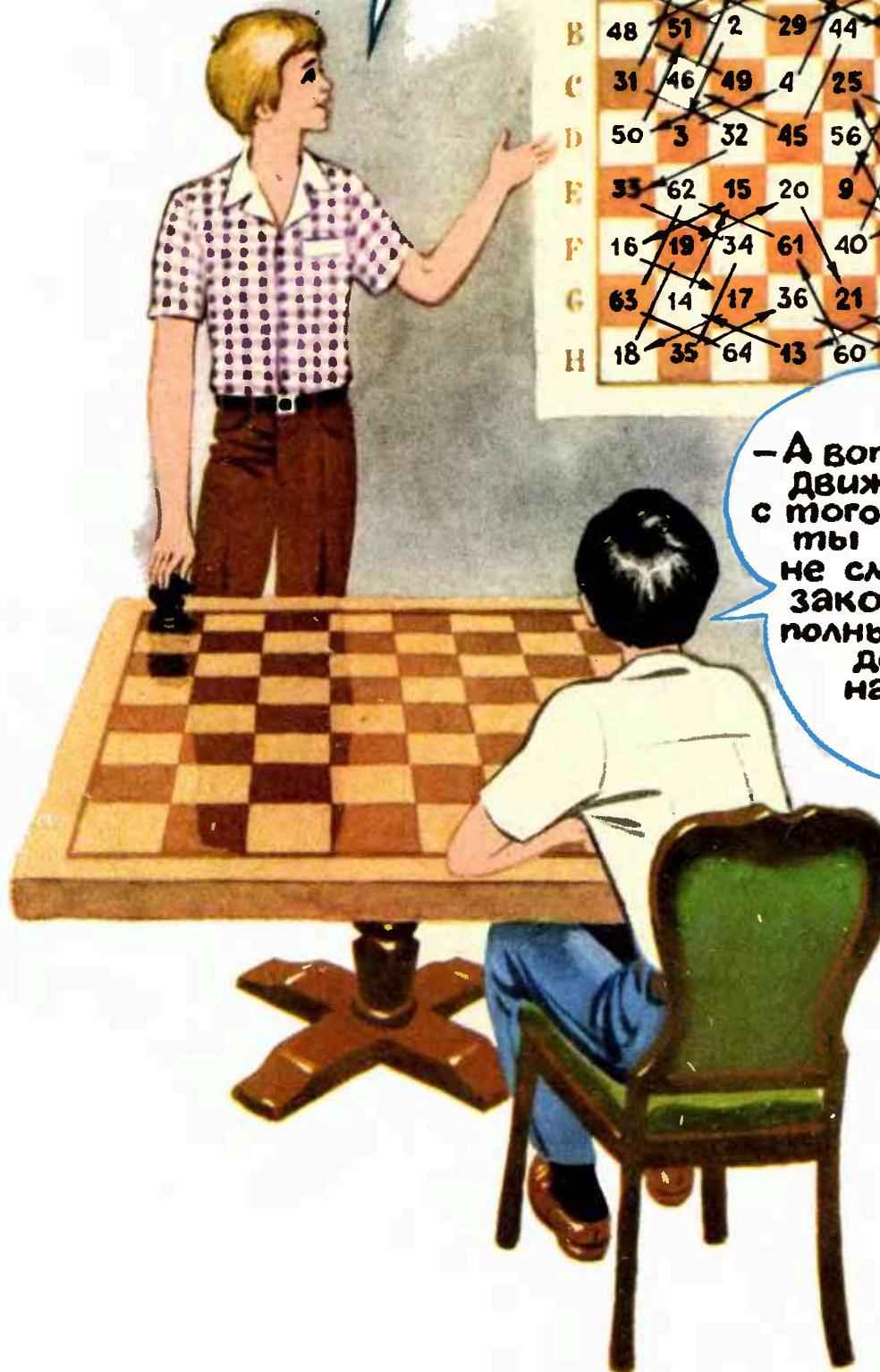
С получившимися разностями поступите так же, как с исходными числами. Повторите процедуру вычисления разностей несколько раз, и на некотором шаге все разности одновременно станут нулями.

Можете начать вычисления не с 4, а с 8 или с 16, вообще с 2^k ($k=2, 3, \dots$) чисел — финал будет таким же.

Докажите хотя бы для 4 исходных чисел, что прогноз безошибочен.



- Начиная с поля A1,
я обошел конем
всю шахматную доску,
побывав на каждом поле
по одному разу



- А вот, начав
движение
с того же поля,
ты никогда
не сможешь
закончить
полный обход
доски
на поле
H8

ЭТО РЕБУСЫ ИЗ ЦИФР, БУКВЫ, ЗВЕЗДОЧКИ — ИХ ШИФР

В арифметическом ребусе цифры заменены буквами и какими-либо знаками (у нас знаками «§»). При дешифровке ребуса, т. е. восстановлении цифровой записи действий, разные буквы не должны быть заменямы одной и той же цифрой, но вместо знака «§» можно записывать любую цифру.

Следует рассматривать все случаи, в которых результат дешифрованного арифметического действия верен.

Легко дешифровать такие два ребуса: $A^2 = A$ и $A^2 = \overline{\$A}$.

В первом: $0^2 = 0$ и $1^2 = 1$. Во втором: $5^2 = 25$ и $6^2 = 36$. Других решений нет.

Выяснилось такое свойство чисел: есть только четыре однозначных числа ($0, 1, 5, 6$), квадраты которых (впрочем, и любые последующие натуральные степени) оканчиваются той же цифрой.

Естественно, что любознательному захочется узнать больше: существуют ли двузначные, трехзначные, ..., n -значные числа, любая натуральная степень которых оканчивается теми же цифрами и в том же порядке следования?

Рассмотрим этот вопрос для второй степени трехзначного числа. Представим задачу в форме такого ребуса:

$\overline{ИКС}^2 = \overline{\$\$\$ИКС}$	

Решение. Последней цифрой квадрата натурального числа может быть только $0, 1, 5$ или 6 . Пусть $C=0$, тогда и $K=0$, а следовательно, $I=0$, что недопустимо. Значит, $C \neq 0$. Пусть $C=1$, умножим «столбиком»

$$\begin{array}{r}
 \times & И & К & 1 \\
 & И & К & 1 \\
 \hline
 & И & К & 1 \\
 \$\$ & K^2 & K \\
 \$\$\$ & И & & \\
 \hline
 \$\$\$ & (2И+K^2) & (2K) & 1 \\
 & И & К & С
 \end{array}$$

$\overline{ИК1}$ на $\overline{ИК1}$:

По условию $2K = K$, тогда $K = 0$ или, может быть, $2K = K + 10$, т. е. $K = 10$, что невозможно, так как K — цифра.

Примем $K = 0$, тогда $2K = 0$ и по условию $2I + 0 = I$, т. е. $I = 0$, что недопустимо для трехзначного числа; если же $2I + 0 = I + 10$, то $I = 10$ — это невозможно. Значит, $C \neq 1$. Положим $C = 5$ и рассмотрим

$$\begin{array}{r}
 & \times & I & K & 5 \\
 I & & & K & 5 \\
 \hline
 (5I) & & (5K+2) & 5 \\
 \begin{matrix} \S & \S \\ \S & \S & \S \end{matrix} & (K^2) & (5K) \\
 \hline
 \S & \S & \S & (10I+K^2)(10K+2) & 5 \\
 I & & K & C
 \end{array}$$

По условию $10K + 2 = K + 10n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — возможно только при $n = 2$, тогда $K = 2$ и $10K + 2 = 22$ десятка = 2 сотни + 2 десятка. Число 2 сотни прибавляем к сумме сотен, т. е. к $10I + K^2$, тогда по условию $10I + 2^2 + 2 = I + 10n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) — возможно только при $n = 6$, тогда $I = 6$. Искомое число определилось: 625; $625^2 = 390\ 625$.

Теперь, пробуя 6, действуем аналогично предыдущему и получаем второе искомое число: 376 (убедитесь!); $376^2 = 141\ 376$.

Так выяснилось, что есть только два трехзначных числа (625 и 376), квадраты которых и, как легко убедиться, любые последующие степени оканчиваются теми же цифрами и в том же порядке следования.

1. ДЕВЯТЬ В КВАДРАТЕ

Найдите шестизначное число, зашифрованное в ребусе:

$$\overline{\text{ДЕВЯТЬ}}^2 = \overline{\S \S \S \S \S} \overline{\text{ДЕВЯТЬ}}$$

2. ЛОБ ТРИ САМ

Это трехзначные числа, такие, что

$$\overline{\text{ЛОБ}} + \overline{\text{ТРИ}} = \overline{\text{САМ}}$$

Расшифруйте сложение, обходясь без цифры нуль.

В любом возможном решении должна обнаружиться определенная закономерность в числе «САМ». Какая?

3. Ж—Ж—Ж!

$$(\text{Ж} - 1)^5 = \overline{\text{Ж Ж Ж} (\text{Ж} - 1)}$$

4. ЗАШИФРОВАННЫЕ ЖУКИ

a) $\overline{\text{ЖУК}^n} = \overline{244\ 140\ \text{ЖУК}}$

б) $\overline{\text{ЖУК}^n} = \overline{19\ 987\ 173\ \text{ЖУК}}$

5. СЕМЕЙСТВО, СПРЯТАВШЕЕСЯ В «БАҚУ»

$$\begin{array}{r} \text{Б А К У} \\ \hline & \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{§} \\ & \hline & \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{У} \\ & \hline & \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{К} \\ & \hline & \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{A} \\ & \hline & \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{Б} \\ & \hline & \text{§} \end{array}$$

а) Расшифруйте произведение чисел БАҚУ и §§§§, зная, что в каждом сомножителе цифры образуют (слева-направо) строго убывающую последовательность.

Какое семейство цифр спряталось за буквами *B, A, K, У?*
б) Расшифруйте в этом ребусе еще и второй множитель (§§§§), если строго убывающую последовательность образуют цифры только первого сомножителя (БАҚУ) и если в произведении вторая цифра слева — нуль.

6. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДОРОЖКИ

Этот ребус без букв, а вместо знаков « \diamond » здесь пустые клетки (рис. 23). В каждую пустую клетку надо вписать однозначное число. При этом результаты указанных действий вдоль всех горизонтальных и вертикальных дорожек должны быть верными.

(5	\times		+		-)	:	2	+		=
\times		\times		+		:		\times		+		+
+	(6	\times)	+	(\times	4)	-		=	32
:		-		-		\times		\times		+		+
2	\times		+	(\times	10)	+		+		=	55
=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=	=
	+		+		+	20	+	40	+	13	=	92

Рис. 23

7. ТРИ УРАВНЕНИЯ В ФОРМЕ РЕБУСОВ

Восстановите цифры x , y и z , зная, что:

$$1) \frac{x+y}{k} = \overline{x,y} \quad (y \neq 0);$$

$$2) \frac{x+y}{y} = (1,2)x;$$

$$3) x = -\log_y \log_y \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{y}}}}.$$

8. И «ХВОСТ», И «ГРИВА»

Если есть четырехзначные числа, первые две и последние две цифры каждого из которых совпадают соответственно с первыми двумя и последними двумя цифрами квадрата и куба искомого числа, то какое из них наименьшее и какое — наибольшее? Числа, оканчивающиеся единицей и двумя нулями, исключаем.

В зашифрованном виде: $xyzt^2 = xy\dots zt$ и $xyzt^3 = xy\dots zt$.

В правой и левой частях этих равенств буквой x зашифрована одна и та же цифра, буквой y — также, буквой z — также и буквой t — также, но эти цифры могут быть и одинаковыми.

9. ПОИГРАЕМ В ПРЯТКИ

Все 10 цифр спрятались под буквами в каждом из пяти равенств:

$$(1) \underline{\text{Д} \cdot \text{Г} \text{ У } \text{В } \text{А}} = \underline{\text{Б } \text{Ж } \text{ Я } \text{ И } \text{ Е}.}$$

$$(2) \underline{\text{Е} \cdot \text{Д } \text{А } \text{И } \text{Г}} = \underline{\text{Б } \cdot \text{У } \text{В } \text{Ж } \text{ Я}.}$$

$$(3) \underline{\text{Е } \text{Ж} \cdot \text{Г } \text{В } \text{А}} = \underline{\text{Б } \text{У } \text{Я } \text{Д } \text{И}.}$$

$$(4) \underline{\text{Ж } \text{И} \cdot \text{Д } \text{А } \text{Г}} = \underline{\text{Е } \text{У } \text{В } \text{Б } \text{Я}.}$$

$$(5) \underline{\text{У } \text{А} \cdot \text{В } \text{Б } \text{Г}} = \underline{\text{И } \text{Я} \cdot \text{Ж } \text{Д } \text{А}.}$$



Однаковые цифры укрылись под одинаковыми буквами, разные — под разными буквами, причем то ли нечетные цифры укрылись под гласными буквами, а четные под согласными, то ли наоборот. Установите, под какой буквой какая укрылась цифра. Решение единственное.

10. МЕНЯЕМ ЧЕТЫРЕ БУКВЫ НА ЧЕТЫРЕ ЦИФРЫ

В равенстве

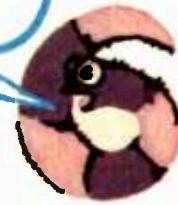
$$7 \cdot (\overline{a2} + b)^3 = \overline{2 \ 3 \ c \ 2 \ k} \quad (1)$$

и независимо от него в равенстве

$$37\ 037 \cdot \overline{ab} = 19\ 019 \cdot \overline{ck} \quad (2)$$

замените буквы a , b , c , k на подходящие цифры так, чтобы оба равенства подтвердились.

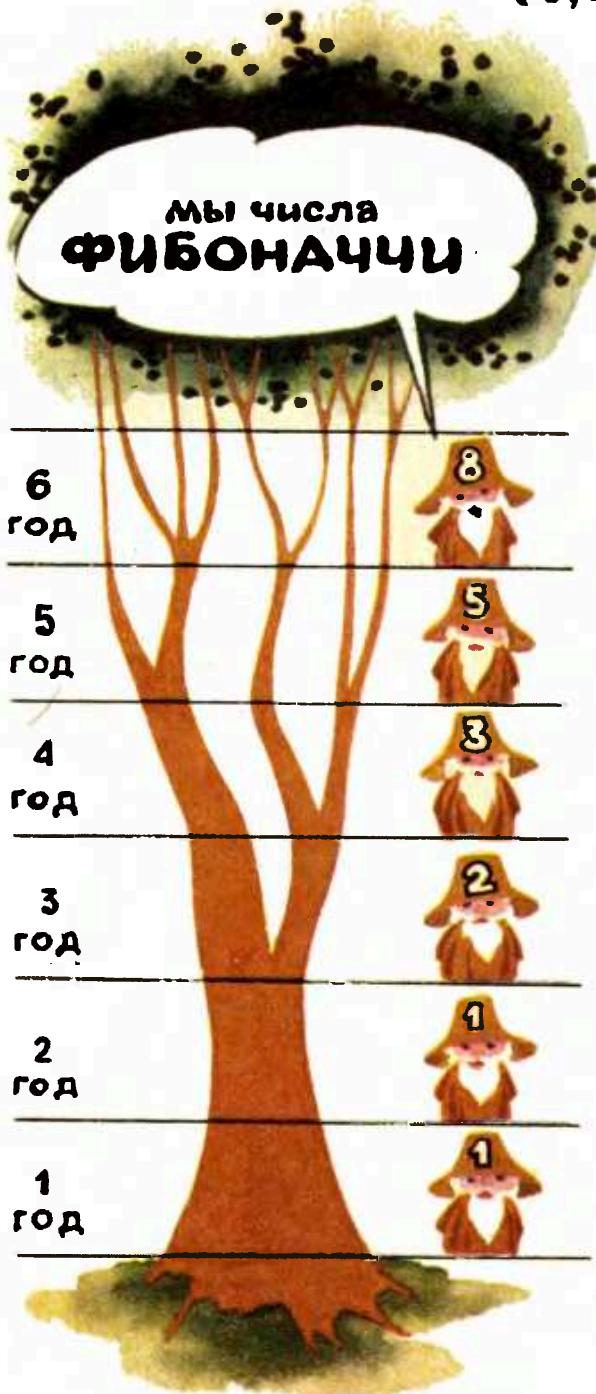
- НАЦЕЛО ДЕЛЮСЬ
НА 1, 2 и 3,
НО ГЛАВНОЕ
 $1+2+3=6$



- НАЦЕЛО ДЕЛЮСЬ
НА 1, 2, 4, 7 и 14,
НО ГЛАВНОЕ
 $1+2+4+7+14=28$



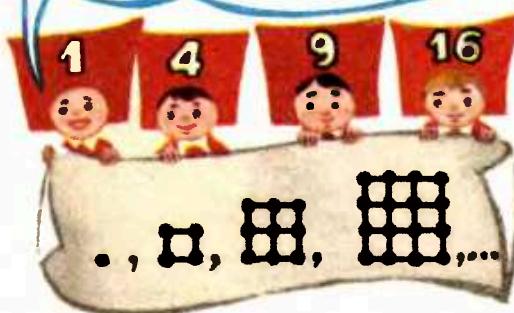
МЫ существа в мире чисел; нас всего-то пока 29 (6, 28, 496 и гр.) мы - само совершенство



мы - числа треугольные



мы - числа квадратные



мы - числа пятиугольные



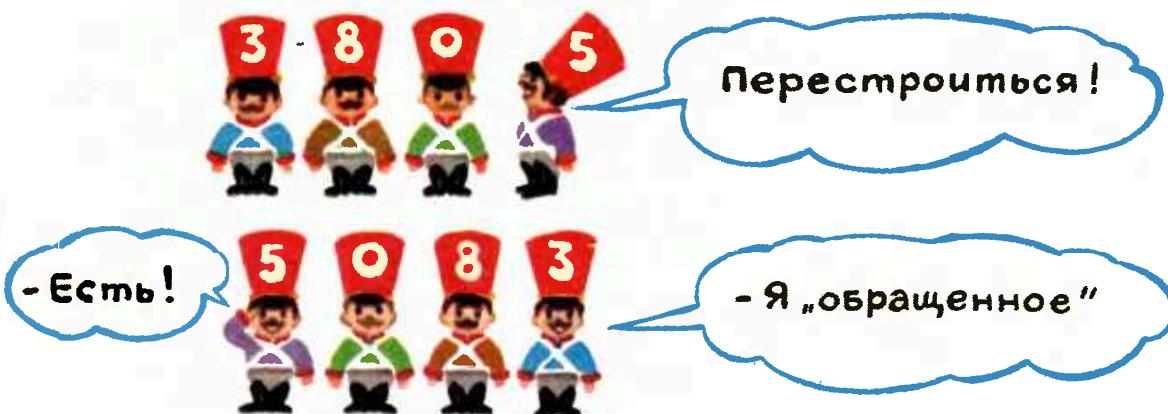
РЕБУСЫ «КРОССНАМБЕР», А ЕЩЕ — «ЧАЙННАМБЕР»

ЧИСЛА С ИМЕНЕМ

- Числа Мерсенна** — $M_p = 2^p - 1$, p — простое число. При некоторых значениях p M_p также простое число.
- Числа Ферма** — $F_k = 2^{2^k+1} + 1$ $k \in N$. При некоторых значениях k F_k — простые числа. F_1, F_2, F_3 — простые числа;
 $F_4 = 2^{32} + 1$ — составное, один из делителей — 641.
- Числа Евклида** — $E_k = 2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$, $k \in N$.
- Числа Фибоначчи** — члены последовательности (u_n) , где $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, последующие члены определяются рекуррентной формулой $u_{k+2} = u_{k+1} + u_k$, $k = 1, 2, \dots$.

ЧИСЛА С ПРИЛАГАТЕЛЬНЫМИ

- Обращенное число** — записанное теми же цифрами, но расположеннымми в обратном порядке. Например, 3805, обращенное — 5083.



- Палиндромическое число** — равное обращенному. Например, 121, 5995 — палиндромические числа.

- Совершенное число** — равное сумме всех его собственных делителей (т. е. делителей, отличных от самого числа). Например, число 28 совершенное: его делители 1, 2, 4, 7, 14 и $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$.

Если при натуральном k число $2^k - 1$ простое, то число Евклида $2^{k-1} \cdot (2^k - 1)$ совершенное.

Испытав огромный массив последовательных натуральных чисел, исследователи нашли уже более 30 совершенных: 6, 28, 496, 8128, 33 550 336 и др. Почти все последующие совершенные числа «выдерживают» только евклидову форму записи.

Вот 25-е: $2^{44 \cdot 496} \cdot (2^{44 \cdot 497} - 1)$.

В развернутой десятичной записи этого числа содержится 26 790 цифр.

n-угольное

число —

общий вид:

$$(n)_k = \frac{1}{2}k((k-1)(n-2)+2), \quad k=1, 2, \dots,$$

В частности,

Треугольное

при $n=3$

число —

$$(3)_k = \frac{1}{2}k(k+1), \quad k=1, 2, \dots .$$

*Четырехугольное
(квадратное)*

при $n=4$

число —

$$(4)_k = k^2, \quad k=1, 2, \dots .$$

Пятиугольное

при $n=5$

*число —
«Шахматное»*

$$(5)_k = \frac{1}{2}k(3k-1).$$

*Магическая
константа —*

$$2^{64} - 1.$$

постоянная сумма чисел в каждой строке магического квадрата $n \times n$. Определяется формулой $\frac{1}{2}n(n^2 + 1)$.

*Дружественные
числа —*

пара чисел, обладающих таким свойством: сумма собственных делителей первого из них равна второму числу, а сумма собственных делителей второго числа равна первому числу. Например, сумма делителей числа 220 равна $1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284$, а сумма делителей числа 284 равна $1+2+4+71+142=220$, поэтому числа 220 и 284 — дружественная пара.

Вторая дружественная пара (1184 и 1210) была найдена в 1867 году шестнадцатилетним итальянцем Б. Паганини.



1. КРОССНАМБЕР 3×3

По горизонтали (рис. 24): от **А** до **В**. Трехзначное простое число Мерсенна. **Г**. Простое число, такое, что обращенное число также простое. **Д**. Константа магического квадрата 11×11 .

По вертикали: от **А** до **Д**. Трехзначное квадратное число. **Б.** Второе простое число Ферма. **В.** Разность между тридцать восьмым и четвертым треугольными числами.



А	Б	В
Г		
Д		



Рис. 24

2. КРОССНАМБЕР 4×4

По горизонтали (рис. 25): от **А** до **В**. Обращенная 13-я степень некоторого числа. От **Г** до **Д**. Самое большое трехзначное простое число. **Е.** Обращенное второе простое число Ферма. **И.** Произведение двух простых чисел и куба простого числа.

По вертикали: от **А** до **И**. Произведение двух совершенных чисел. **Б.** Число, делящееся на 11. **В.** Число с последовательно убывающими цифрами. **Д.** Обращенное четвертое простое число Мерсенна. **Ж.** Простое число.



А	Б		В
Г		Д	
Е	Ж		
И			



Рис. 25

3. КРОССНАМБЕР 5×5

По диагоналям (рис. 26): **А.** Третье простое число Ферма. От **Б** до **В.** Палиндромическое число, сумма цифр которого — квадратное число.

По горизонтали: от **А** до **Б.** 357-е треугольное число. **В.** Число, которое, будь оно на 40 000 больше, записывалось бы одинаковыми цифрами.

По вертикали: от **А** до **В.** Утроенное 121-е пятиугольное число. **Б.** Число с последовательно возрастающими цифрами.



A					B
B					



Рис. 26

4. КРОССНАМБЕР 7×7

По диагоналям (рис. 27): А. Произведение двух простых чисел Ферма. От Б до В. Палиндромическое число, записанное двумя чередующимися цифрами, сумма цифр которого является квадратным числом.

По горизонтали: от А до Б. 1991-е треугольное число. В. Утренний куб простого числа Мерсенна.

По вертикали: от А до В. 20-я степень целого числа. Б. Обращенный удвоенный куб простого числа.



A						B
B						



Рис. 27

5. КРОССНАМБЕР 8×8

По диагоналям (рис. 28): А. Сумма степеней двух чисел, первое — 16-я степень, второе число — кубическое. Ж. Количество нулей в числе $100\ 000\ 000\ 000^{5328^2}$.

По горизонтали: от А до Ж. Произведение трехзначного числа на пятизначное, первые четыре цифры в записи этого произведения повторяются. И. 56-е 4-угольное число. К. Точный квадрат, сумма цифр которого есть квадрат квадрата. Л. 100-е 92-угольное число. Н. Сумма 11-го 1001-угольного и 3-го 6-угольного чисел.

Р. Разность между 95-м 28-угольным и 15-м 3-угольным числами.
У. Сумма 41-го и 13-го 3-угольных чисел. **Ф.** 116-е 3-угольное число. **Ц.** Разность между 304-м 8-угольным и 3-м 7-угольным числами. **Э.** Обращенное 1-е простое число Ферма. **Ю.** 3-угольное число, оно же квадратное. **Я.** Квадратное число, цифры которого также квадратные числа.

По вертикали: от **А** до **Э**. Количество нулей в числе $1\ 000\ 000\ 000^{2561323}$. **Б.** Простое число, сумма цифр которого является квадратным числом. От **В** до **Ц**. Количество нулей в десятичной записи числа $1\ 000\ 000^{724937}$. **Г.** Число, которое, будь оно на 920 меньше, записывалось бы одинаковыми цифрами. **Д.** Число, кратное 173. **Е.** Удвоенная четвертая степень числа. **Ж.** Число, которое, будь оно на 15 больше, записывалось бы одинаковыми цифрами. **М.** Число, дающее при делении на 701 остаток, равный 72. **П.** Число, делящееся на 83; сумма его цифр является квадратом. **С.** Квадрат утроенного куба. **Т.** Число, кратное 181. **Х.** Число, у которого цифры являются последовательными членами геометрической прогрессии, но расположены в записи числа не в порядке их следования в прогрессии. **Ш.** Простое число.



Рис. 28

A	B	V	G		D	E	J
I					K		
		L		M			
H	P						
R					C	T	
Y			F		X		
		Z	W				
Z			U			Я	

6. КРОССНАМБЕР «СТОЛБИКИ» (Рис. 29)

- Произведение квадрата числа на куб другого числа.
- Сума 1001-го и 2001-го 21-угольных чисел.
- Не простое число Мерсенна.
- 110-е 222-угольное число.
- 58-е число Фибоначчи.
- Обращенное наибольшего числа, которое можно записать тремя двойками.
- Обращенное удвоенного произведения чисел № 9 и 13.
- Произведение двух чисел, являющихся второй по величине дружественной парой.
- Куб числа.
- Разность кубов двух чисел.
- Удвоенная сумма чисел № 3 и 5.
- Седьмое тре-

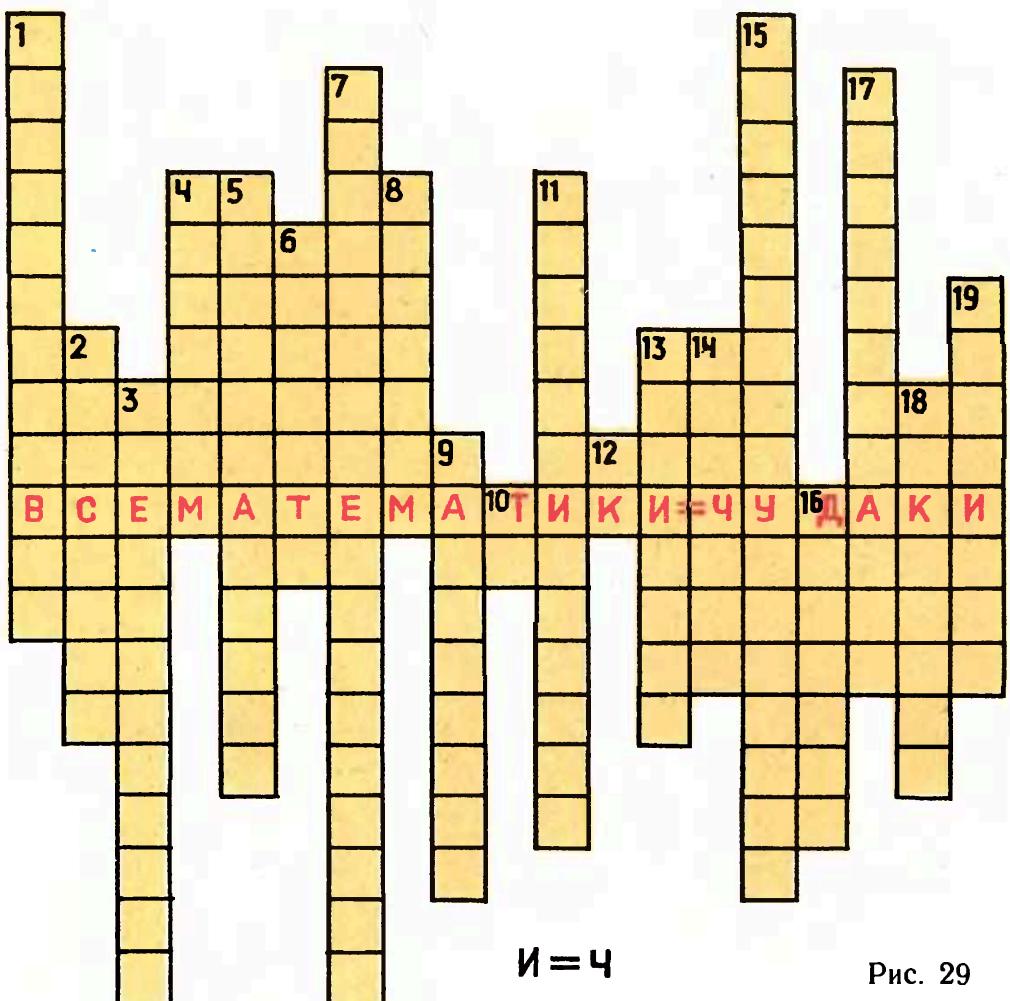


Рис. 29

угольное число. 13. Значение меньшего из двух множителей в формуле Евклида $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ при некотором четном n . 14. Обращенное 101-е 1001-угольное число. 15. Куб седьмого простого числа Мерсенна. 16. Делитель первого не простого числа Ферма. 17. Разность чисел № 5 и 8. 18. Удвоенная разность между числом из семи последовательных цифр и числом обращенным. 19. Число с последовательно возрастающими цифрами, сумма квадратов которых равна 204.

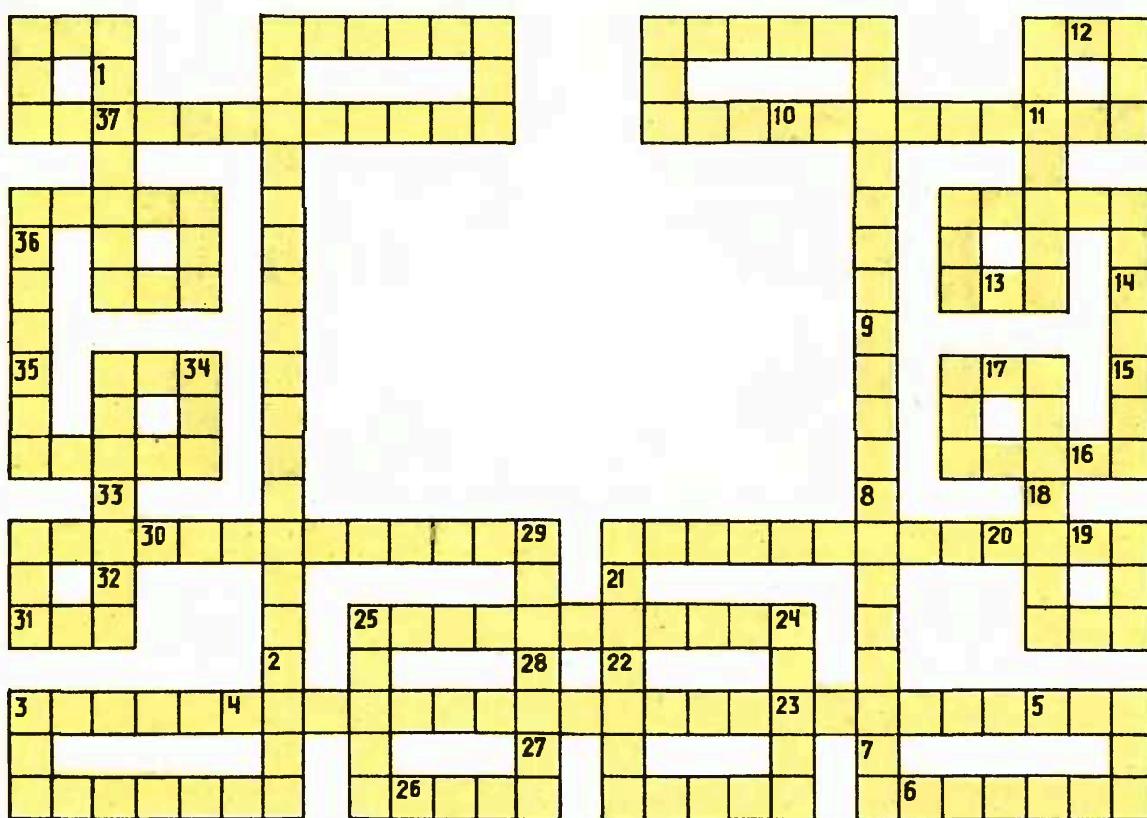
7. ЧАЙННАМБЕР

Чайннамбер — цепочка из цифр, образующих числа. Начало и конец записи требуемого числа определяются порядковыми номерами, указанными в клетках (см. рис. 30).

1—2. 12-е простое число Мерсенна. 2—3. Обращенное не простое число Мерсенна. 3—4. Точный квадрат. 4—5. Знаменитое «шахматное» число. 5—6. Найдите наибольший квадрат, содержащий все 10 цифр от 0 до 9, причем каждую цифру лишь по одному разу; уменьшите это число на 1 и результат замените обращенным числом. 6—7. Простое число. 7—8. Обращенное 101-е 1001-угольное число. 8—9. Число с последовательно убы-

вающими цифрами. 9—10. Удвоенный куб седьмого простого числа Мерсенна. 10—11. Делитель наименьшего из не простых чисел Ферма. 11—12. Число с последовательно убывающими цифрами. 12—13. Куб некоторого числа. 13—14. Наименьшее не простое число Ферма. 14—15. Простое число. 15—16. Количества цифр в десятичной записи числа 2^{11211} . 16—17. Палиндромическое квадратное число. 17—18. Число с последовательно убывающими цифрами. 18—19. Обращенная степень некоторого числа. 19—20. Квадрат некоторого числа. 20—21. Обращенное 52-е число Фибоначчи. 21—22. Число, цифры которого последовательно возрастают на 2. 22—23. 49-е число Фибоначчи. 23—24. Число, цифры которого последовательно убывают на 3. 24—25. Степень некоторого числа. 25—26. Квадрат простого числа. 26—27. Степень некоторого числа. 27—28. Простое число. 28—29. Точный куб. 29—30. Квадрат, все цифры которого различны. 30—31. Палиндромическое квадратное число; третья цифра в его записи 8. 31—32. Точный квадрат. 32—33. Третье по величине совершенное число. 33—34. Число с последовательно убывающими цифрами. 34—35. Число с последовательно возрастающими цифрами. 35—36. Точный квадрат. 36—37. $100Q_7$ — 13 582 591 472, где Q_7 — седьмое по величине совершенное число. 37—1. Степень однозначного числа.

Рис. 30



— Какие мы красивые,
а сумма делится на
9



...Или дроби... Ох, эти дроби!
Жизнь, как дробь, и точна, а — мимо.
В ней делитель упрям и злобен,
А делимое — неделимо.

(Из стихотворения И. Снеговой
«Математика — это трудно».)

ЕСЛИ ДЕЛИТСЯ ЧИСЛО, ТО РЕШЕНЬЕ ПОДОШЛО

Красивое свойство чисел — делимость... И, можно сказать, даже в чем-то романтическое (делимость — делитель — разделять...); источник и основа многих математических понятий, теорем и формул.

1. Факт делимости одного числа на другое отмечается знаком «:».

2. $(a^k + b^k) : (a + b)$ — при k нечетном,

$(a^k - b^k) : (a + b)$ — при k четном.

$(a^k - b^k) : (a - b)$ — при любом $k \in N$,

причем $(a^k - b^k) = (a - b) \cdot (a^{k-1} + a^{k-1} \cdot b + \dots + ab^{k-2} + b^{k-1})$.

3. Признаки делимости:

На 19. Число делится на 19 тогда и только тогда, когда число его десятков, сложенное с удвоенным числом единиц, делится на 19.

На 13. Разбиваем число на грани слева-направо по 3 цифры, находим сумму первой, третьей, пятой и т. д. граней, затем сумму второй, четвертой, шестой и т. д. граней; если разность этих сумм делится на 13, то и число делится на 13.

4. Пусть a, b — целые числа, m — натуральное. Если b есть остаток от деления a на m , то b называется арифметическим вычетом числа a по модулю m ; записывается так: $a \equiv b \pmod{m}$, говорят еще: a сравнимо с b по модулю m ; « \equiv » — знак сравнения.

5. Вычет произведения двух чисел по модулю m равен произведению вычетов сомножителей по модулю m .

Доказательство. Из $a \equiv b \pmod{m}$ следует $a = mk + b$, $k \in N$, из $c \equiv d \pmod{m}$ следует $c = m \cdot n + d$, $n \in N$. Тогда $a \cdot c = m \cdot (kmn + kd + bn) + bd \Rightarrow a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

6. Вычет суммы двух чисел по модулю m равен сумме вычетов слагаемых по модулю m .

7. Если число не имеет делителей, отличных от самого числа и единицы, то оно называется *простым числом*.

1. УСТОЙЧИВАЯ ДЕЛИМОСТЬ

Какое наименьшее число надо задумать, чтобы после увеличения его на 7 или на 19 результат делился соответственно на 7 или на 19, после уменьшения на 17 результат разделился бы на 17, а после деления его на 11 и результат разделился бы на 11?

2. НА ОДНО ДЕЛИТСЯ, НА ДРУГОЕ НЕТ

Найдите наименьшее число, которое делится на 77, а при делении на 74 дает в остатке 48.

3. ДЕЛЕНИЕ НА ШЕСТЬ

Докажите, что число $n^3 - n$ делится на 6.

4. ДЕЛЕНИЕ НА СЕМЬ

Делятся на 7 числа вида:

- 1) aba, если $a+b$ делится на 7;
- 2) baa, если сумма цифр делится на 7;
- 3) baa, если b — двузначное число и $b+a+a$ делится на 7;
- 4) aab, если $a+a-b$ делится на 7.

Докажите истинность этих утверждений.

5. ДОКАЖИТЕ!

Докажите, что число $k^3 + 17k$, $k \in N$, делится на 6, а число $n^5 - n$, $n \in N$, делится на 30.

6. СНИМИТЕ МАСКУ С ОДНОЙ ЦИФРЫ

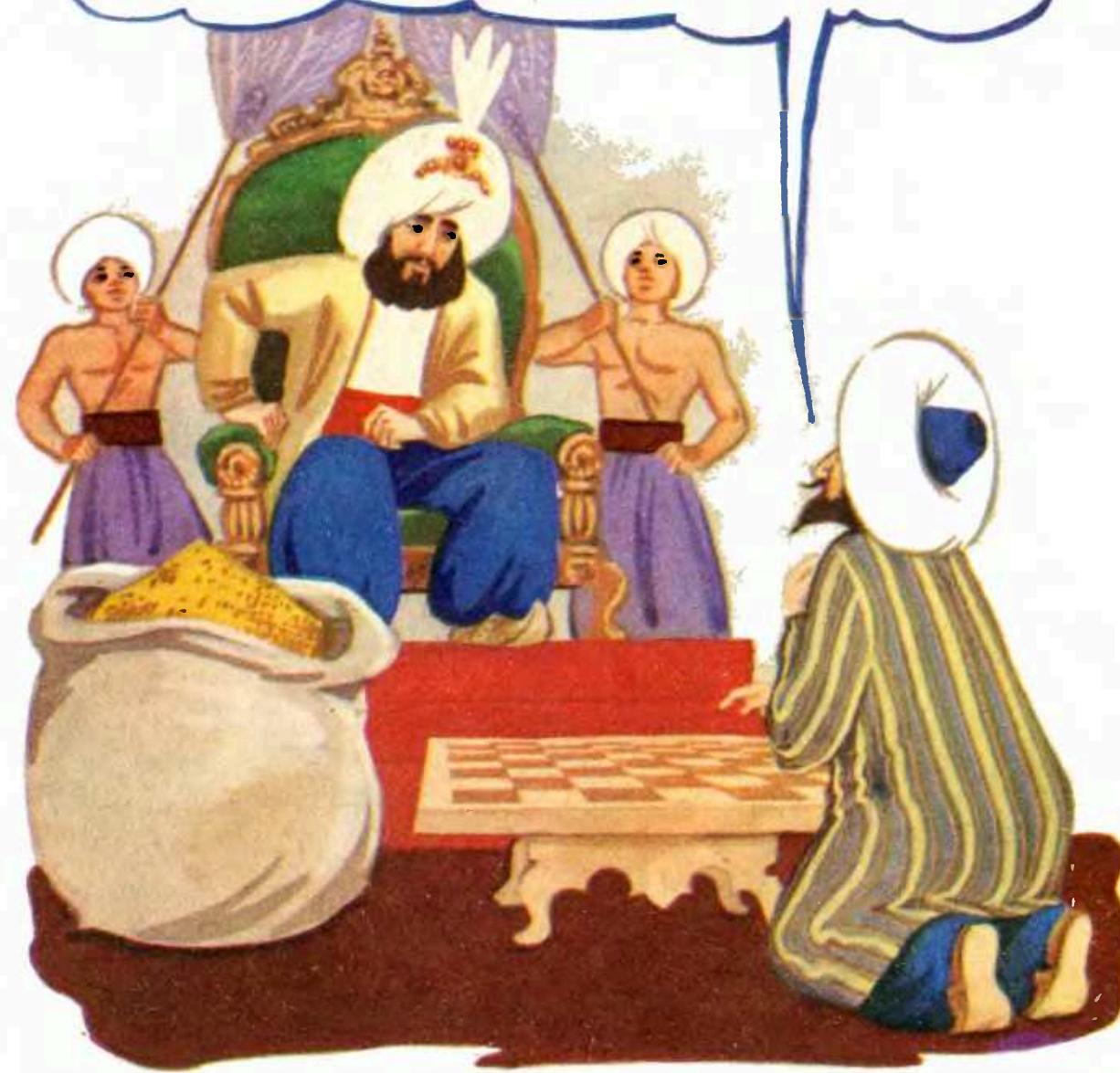
В записи знаменитого «шахматного» числа

$$M_{64} = 1y446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 615$$

на его вторую цифру накинута маска y . Сняв маску, расшифруйте значение y , зная, что достаточно увеличить заданное число на 3 единицы, как оно становится кратным числу 19.

Примечание. По легенде именно такое число пшеничных зерен следовало выдать в награду изобретателю шахмат, попросившему положить всего одно зерно на первую клетку шахматной доски, а на каждую следующую клетку вдвое большее число зерен, чем на предыдущую.

$M_{64} = 1 \text{Y } 446 \text{ } 744 \text{ } 073 \text{ } 709 \text{ } 551 \text{ } 615$



7. ВОССТАНОВИТЕ ПОТЕРЯННУЮ ЦИФРУ

Числа вида $M_p = 2^p - 1$, где p — простое число, называются числами Мерсенна. При некоторых значениях p M_p — простое число. Так, первые одиннадцать простых чисел Мерсенна получаются при значениях $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107$.

Двенадцатое простое число Мерсенна равно $M_{127} = 2^{127} - 1$.

В его десятичной записи одна цифра стерлась. Мы пока заметили ее буквой x . Получилась такая запись:

170 141 183 460 469 231 x 31 687 303 715 884 105 727.

Восстановите цифру, замещенную буквой x , если известно, что $M_{127} + 3$ делится на 13.

8. НАЗОЙЛИВЫЙ ОСТАТОК

Некоторые числа, кратные числу 7, при делении на 2, на 3, на 4, на 5 и на 6 дают остаток 1.

Найдите наименьшее из таких чисел.

9. КОНСТРУИРОВАНИЕ ОСТАТКА

Не вычисляя суммы $S = 998 + 9997 + 99\ 797 + 997\ 977 + \dots + 9\ 979\ 830 + 99\ 798\ 109$, найдите остаток от деления на 997.

10. МИНИ-АРИФМЕТИКА ОСТАТКОВ

- 1) Найдите остаток от деления числа $9991 \cdot 9992 \cdot 9993 \times 9994 \cdot 9995 \cdot 9996 \cdot 9997 \cdot 9998$ на 9.
- 2) Найдите остаток от деления числа $\frac{1990!}{1980!}$ на 11.

11. КРАСИВЫЕ НЕ ПРОСТЫЕ СТЕПЕНИ

- 1) Докажите, что $7777^{2222} + 2222^{7777}$ делится на 9.
- 2) Докажите, что $2222^{2222} + 4444^{4444} + 8888^{8888}$ делится на 3.
- 3) Докажите, что сумма $2^{2^{145}} + 3^{2^{145}}$ делится на 241, на 341 и на 11.

12. НИКОГДА НЕ ПРОСТОЕ ЧИСЛО

Докажите, что число $M = 17\ 557^k - 13\ 213^k - 9593^k + 7240^k$ делится на 32 761, $k \in \mathbb{N}$.

13. ВСЕГДА КРАТНО 3. ПОЧЕМУ?

Когда я умножал произведение двух целых чисел на разность их квадратов, то всегда получал число, кратное 3. Почему бы это?

14. ВСЕЗНАЮЩАЯ СТАТИСТИКА

Попал как-то мне в руки обрывок прошлогодней газеты. Мое внимание привлекло чернильное пятно, закрывающее последние три цифры шестизначного числа. По сохранившемуся кусочку текста

я вспомнил: это была заметка, в которой сообщалось, что к концу минувшего года население нашего города возросло до этого числа. В заметке говорилось также о том, что это шестизначное число уникально среди шестизначных: оно делится на 2, 3, 4, 6, 7, 8 и 9. Ого! Не правда ли?

Чтобы восстановить все цифры этого числа, нет нужды обращаться в реставрационную лабораторию. Собственная сообразительность подскажет вам математический метод быстрого решения этой задачи.

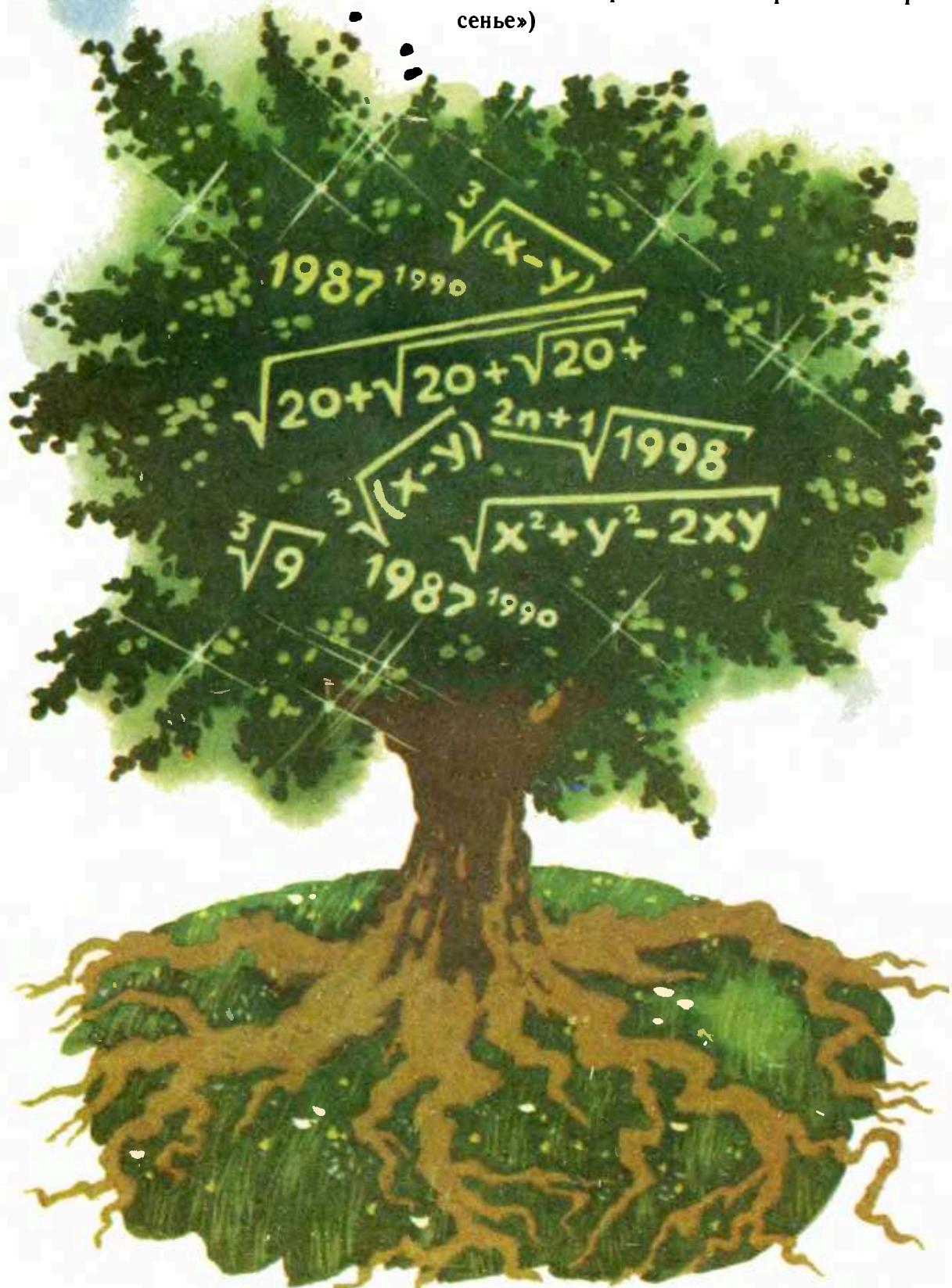
Елько недавно всезнающая стика зарегистрировала рождение 0000-го жителя нашего города. К концу минувшего года население города возросло до 566~~6~~666 человек.

Обращаем внимание читателей на удивительное свойство этого числа: оно делится на 2, 3, 4, 6, 8 и 9 без остатка.

но он
жется, съ
тия с учета,
вились. На
так быть, ч
учета
ч

...Кто разъяснял пичужке высший смысл
Единства содержания и формы?
О как абстрактны и корявы корни,
Но как прекрасен и логичен
лист...

(Из стихотворения Ю. Кобрина «Воскре-
сенье»)



СТЕПЕНЬ... КОРЕНЬ — ГЛЯДИ В КОРЕНЬ

1. Если запись числа a оканчивается цифрой 2, 4, 6 или 8, то запись произведения $6 \cdot a$ оканчивается той же цифрой:

$$6 \cdot 2 = 12, \quad 6 \cdot 4 = 24, \quad 6 \cdot 6 = 36, \quad 6 \cdot 8 = 48.$$

2. Последняя цифра в записи натуральной степени чисел. Всякое натуральное число имеет вид $4k$, или $4k+1$, или $4k+2$, или $4k+3$, $k \in N$. Тогда рассмотрим таблицу, в которой выделим последнюю цифру в натуральной степени чисел:

2^n	8^n	3^n
$2^1 = 2, \quad 2^2 = 4,$ $2^3 = 8, \quad 2^4 = 16,$ \dots $2^{4k} = (2^4)^k = \dots 6$ $2^{4k+1} = 2^{4k} \cdot 2 = \dots 2$ $2^{4k+2} = 2^{4k} \cdot 2^2 = \dots 4$ $2^{4k+3} = 2^{4k} \cdot 2^3 = \dots 8$	$8^1 = 8, \quad 8^2 = 64,$ $8^3 = 512, \quad 8^4 = 4096,$ \dots $8^{4k} = (8^4)^k = \dots 6$ $8^{4k+1} = 8^{4k} \cdot 8 = \dots 8$ $8^{4k+2} = 8^{4k} \cdot 8^2 = \dots 4$ $8^{4k+3} = 8^{4k} \cdot 8^3 = \dots 2$	$3^1 = 3, \quad 3^2 = 9,$ $3^3 = 27, \quad 3^4 = 81,$ \dots $3^{4k} = (3^4)^k = \dots 1$ $3^{4k+1} = 3^{4k} \cdot 3 = \dots 3$ $3^{4k+2} = 3^{4k} \cdot 3^2 = \dots 9$ $3^{4k+3} = 3^{4k} \cdot 3^3 = \dots 7$

1. КУБИЧЕСКОЕ ЧИСЛО

Найдите число, куб которого — данное число:

1) $M = 996\ 703\ 628\ 669$; 2) $N = 1\ 011\ 443\ 374\ 872$.

2. ПРОДУМАЙТЕ ПРОГРАММУ

1) Продумайте программу вычислительных операций для быстрого получения числового значения данного выражения:
 $1983^{2000} - 1984 \cdot 1983^{1999} + 1984 \cdot 1983^{1998} - 1984 \cdot 1983^{1997} + \dots + 1984 \cdot 1983^2 - 1983 \cdot 1983$.

2) Упростите выражение
 $1986 \cdot (1987^{1991} + 1987^{1990} + \dots + 1987^2 + 1988) + 1$.

3. ЕСЛИ ВЫЧИСЛИТЬ ДАННУЮ СТЕПЕНЬ...

Какая цифра будет последней в записи результата:
1) 1998^{1998} ; 2) 953^{99999} ?

4. НА ЧТО ДЕЛИМ, ТАКОВА И СТЕПЕНЬ

1) Найдите натуральное число — наименьшее из возможных — с таким свойством: если разделить его на 3, получится куб некоторого натурального числа; если разделить его на 5, получится пятая степень другого натурального числа; если разделить его на 7, получится седьмая степень натурального числа.

2) Найдите натуральное число — наименьшее из возможных — с таким свойством: половина его есть квадрат некоторого натурального числа, треть его есть куб натурального числа, $\frac{1}{5}$ часть его есть пятая степень, а $\frac{1}{7}$ часть его есть седьмая степень некоторых натуральных чисел.

5. «АНАТОМИЯ» ФАКТОРИАЛА

1) Найдите наивысшие степени простых чисел 2, 3, 5, 7 и 11 в составе числа $1990!$, представив его следующей цепочкой равенств:

$1990! = 2^{k_1} \cdot A_1 = 3^{k_2} \cdot A_2 = 5^{k_3} \cdot A_3 = 7^{k_4} \cdot A_4 = 11^{k_5} \cdot A_5$, где $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in N$. Требуется найти k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 .

2) Аналогично «анатомируйте» число $(10!)!$, представив его следующей цепочкой равенств:

$(10!)! = 1983^{k_1} \cdot A_1 = 1993^{k_2} \cdot A_2$, где A_1 и $A_2 \in N$. Требуется найти k_1 и k_2 . Для решения используйте возможность представить число $10! = 3628800$ сразу в форме $1983a + b$ и $1993m + n$, где $a, b, m, n \in N$.

6. ФАКТОРИАЛ И ЕГО СТЕПЕНЬ

Найдите t из уравнения

$$(1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! \cdot 6! \cdot 7! \cdot 8! \cdot 9!)! = ((10!)!)^t \cdot A, \text{ где } A \in N.$$

7. РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ

$$x^{x^{1991}} = 1991.$$

8. КАК УМЕНЬШИТЬ ЧИСЛО СОМНОЖИТЕЛЕЙ?

$$(1988+1) \cdot (1988^2+1) \cdot (1988^4+1) \cdots (1988^{2^k}+1), \text{ где } k \in N.$$

9. ДОКАЖИТЕ ИСТИННОСТЬ НЕРАВЕНСТВА

$$1) \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots + \sqrt{20}}} + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots + \sqrt{12}}}} + \\ + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots + \sqrt{30}}}} < 15.$$

$$2) \sqrt[25]{a + \sqrt[25]{a + \sqrt[25]{a + \sqrt[25]{a + \sqrt[25]{a + 3}}}} + \\ + \sqrt[5]{b + \sqrt[5]{b + \sqrt[5]{b + \sqrt[5]{b + \sqrt[5]{b + 7}}}}} > 8,$$

где $a = 33554430$, $b = 7770$.

$$3) \sqrt[9]{509} + \sqrt[8]{6557} + \sqrt[7]{16379} + \sqrt[6]{15619} + A < 2,$$

где $A = \sqrt[5]{7769} + \sqrt[4]{2393} + \sqrt[3]{503} + \sqrt{80}$.

$$4) \sqrt{89} - \sqrt[3]{519} - \sqrt[4]{2407} - \sqrt[5]{7781} - \sqrt[6]{15629} - B > 9,$$

где $B = \sqrt[7]{16387} - \sqrt[8]{6563} - \sqrt[9]{513}$.

10. СЕКРЕТ ВИРТУОЗНОГО ИЗВЛЕЧЕНИЯ КОРНЕЙ

Хотите выступить в кругу друзей в роли факира-виртуоза по извлечению «в уме» корней из некоторых целых чисел? Тогда пусть друзья тайно от вас возведут в куб, или пятую, или седьмую, или девятую степень задуманное ими двузначное число и сообщат результат. Вы быстро извлекаете корень соответствующей степени и называете число, задуманное вашими друзьями.

Секретом такого «искусства» овладеть нетрудно. Надо лишь знать таблицу степеней всех однозначных чисел и связь, существующую между последней цифрой основания степени и последней цифрой результата возведения в степень.

а) Для извлечения кубического корня:

Кубы чисел от 1 до 10

$1^3 = 1$,	$6^3 = 216$,
$2^3 = 8$,	$7^3 = 343$,
$3^3 = 27$,	$8^3 = 512$,
$4^3 = 64$,	$9^3 = 729$,
$5^3 = 125$,	$10^3 = 1000$.



Подмечаем свойство: все цифры, на которые могут оканчиваться кубы чисел, различны.

Последняя цифра куба числа совпадает с числом, возведенным в куб, для оснований степени 1, 4, 5, 6, 9 и равна разности числа 10 и числа, возведенного в куб, для остальных оснований: 2, 3, 7, 8.

Первую цифру результата извлечения кубического корня находим следующим образом: отбросим последние три цифры заданного числа и рассмотрим оставшееся число — между кубами каких чисел оно располагается в таблице кубов. Меньшее из них и дает первую цифру искомого числа.

Пример. Требуется извлечь кубический корень из 389 017.

Так как последняя цифра заданного числа 7 и $10 - 7 = 3$, то 3 — последняя цифра искомого числа. Отбрасывая последние три цифры заданного числа, получим число 389; оно располагается в таблице кубов между кубами чисел 7 и 8. Меньшее из этих чисел (7) и есть первая цифра искомого числа. Поэтому ответ: $\sqrt[3]{389\ 017} = 73$.

Пример. Вычислить $\sqrt[3]{636\ 056}$. Так как последняя цифра подкоренного числа 6, то и последняя цифра искомого числа 6. Отбрасывая последние три цифры заданного числа, получим 636; это число располагается между кубами чисел 8 и 9. Меньшее — 8, т. е. $\sqrt[3]{636\ 056} = 86$.

Для извлечения кубического корня из чисел свыше 1 млн. нужно держать в памяти (или «на шпаргалке») кубы чисел от 11 до 20:

$$11^3 = 1331, \quad 14^3 = 2744, \quad 17^3 = 4913,$$

$$12^3 = 1728, \quad 15^3 = 3375, \quad 18^3 = 5832,$$

$$13^3 = 2197, \quad 16^3 = 4096, \quad 19^3 = 6859, \quad 20^3 = 8000.$$

Пример. Вычислить $\sqrt[3]{1\ 860\ 867}$. Последняя цифра заданного числа 7, тогда $10 - 7 = 3$ — последняя цифра искомого числа. Отбрасывая последние три цифры заданного числа, получим число 1860, которое располагается в таблице кубов между кубами чисел 12 и 13. Меньшее из этих чисел (12) дает первые две цифры искомого результата. Итак, $\sqrt[3]{1\ 860\ 867} = 123$.

Задача. Проверьте степень собственной виртуозности в извлечении кубических корней:

$$\sqrt[3]{970\ 299}, \quad \sqrt[3]{7\ 545\ 373}.$$

б) Для извлечения корня пятой степени:

Пятые степени чисел от 1 до 10

$$1^5 = 1,$$

$$2^5 = 32,$$

$$3^5 = 243,$$

$$4^5 = 1024,$$

$$5^5 = 3125,$$

$$6^5 = 7776,$$

$$7^5 = 16\ 807,$$

$$8^5 = 32\ 768,$$

$$9^5 = 59\ 049,$$

$$10^5 = 100\ 000.$$



Подмечаем свойство: последняя цифра пятой степени числа совпадает с основанием степени.

Первую цифру искомого результата извлечения корня пятой степени находим следующим образом: отбросим последние пять цифр заданной пятой степени числа и рассмотрим оставшееся число — между какими числами в таблице пятых степеней оно располагается. Меньшее из соответствующих оснований степени покажет первую цифру искомого числа.

Пример. Извлечь корень пятой степени из числа 2 476 099. Последняя цифра искомого результата 9. Отбрасываем последние пять цифр заданного числа, остается число 24, которое располагается в таблице между пятыми степенями чисел 1 и 2. Значит, 1 — первая цифра результата. Поэтому $\sqrt[5]{2\ 476\ 099} = 19$.

Пример. Вычислить $\sqrt[5]{9\ 765\ 625}$. Последняя цифра результата 5. Отбрасываем последние пять цифр, остается число 97, которое располагается между пятыми степенями чисел 2 и 3.

Значит, $\sqrt[5]{9\ 765\ 625} = 25$.

Задача. Проявите быстроту в извлечении корней:

$$\sqrt[5]{312\ 500\ 000}, \sqrt[5]{5\ 277\ 319\ 168}, \sqrt[5]{12\ 762\ 815\ 605}.$$

в) Для извлечения корня седьмой степени:

Седьмые степени чисел от 1 до 10

$1^7 = 1,$	$6^7 = 279\ 936,$
$2^7 = 128,$	$7^7 = 823\ 543,$
$3^7 = 2187,$	$8^7 = 2\ 097\ 152,$
$4^7 = 16\ 384,$	$9^7 = 4\ 782\ 969,$
$5^7 = 78\ 125,$	$10^7 = 10\ 000\ 000.$



Подмечаем, что все цифры, на которые могут оканчиваться седьмые степени, различны. Последняя цифра седьмой степени совпадает с числом, возведенным в седьмую степень, для оснований степени 1, 4, 5, 6, 9 (как и у кубов) и равна разности числа 10 и числа, возведенного в седьмую степень, для остальных оснований: 2, 3, 7, 8 (то же, как у кубов).

Пример. Извлечь корень седьмой степени из числа 3 404 825 447. Последняя цифра заданного числа 7; так как $10 - 7 = 3$, то 3 — последняя цифра искомого числа. Найдем первую цифру корня: зачеркиваем последние семь цифр заданного числа, остается число 340, которое располагается в таблице между седьмыми степенями чисел 2 и 3. Меньшее из них (2) дает первую цифру искомого числа. Поэтому $\sqrt[7]{3\ 404\ 825\ 447} = 23$.

Пример. Вычислить быстро $\sqrt[7]{1\ 338\ 924\ 909\ 984}$. Последняя цифра искомого корня 4. Отбросим последние семь цифр заданного числа, останется число 133 892, которое располагается в

таблице между седьмыми степенями чисел 5 и 6. Меньшее — 5, поэтому $\sqrt[7]{1\ 338\ 924\ 909\ 984} = 54$.

Пример. Вычислить быстро $\sqrt[7]{93\ 206\ 534\ 790\ 699}$. Последняя цифра искомого числа 9. Первую цифру находим по числу 9 320 653 из таблицы: 9. Поэтому $\sqrt[7]{93\ 206\ 534\ 790\ 699} = 99$.

г) Для извлечения корня девятой степени:

Девятые степени чисел от 1 до 10

$1^9 = 1$,	$6^9 = 10\ 076\ 696$,
$2^9 = 512$,	$7^9 = 40\ 353\ 607$,
$3^9 = 19\ 683$,	$8^9 = 134\ 217\ 728$,
$4^9 = 262\ 144$,	$9^9 = 387\ 420\ 489$,
$5^9 = 1\ 953\ 125$,	$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$.



Видим, что последняя цифра девятой степени совпадает с цифрой основания степени (как у пятых степеней). Первую цифру корня девятой степени находим следующим образом: отбросим последние девять цифр заданного числа и рассмотрим оставшееся число — между какими числами оно располагается в таблице девятых степеней. Меньшее из соответствующих оснований степени укажет первую цифру искомого числа.

Пример. Вычислить быстро $\sqrt[9]{46\ 411\ 484\ 401\ 953}$. Последняя цифра искомого числа 3. Первая цифра 3, так как число 46 411 располагается в таблице между девятыми степенями чисел 3 и 4. Поэтому $\sqrt[9]{46\ 411\ 484\ 401\ 953} = 33$.

Пример. Вычислить быстро $\sqrt[9]{913\ 517\ 247\ 483\ 640\ 899}$. Последняя цифра искомого числа 9 и первая — 9, поэтому ответ 99.

11. ВИРТУОЗНОЕ ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЕЙ ВЫСОКИХ СТЕПЕНЕЙ

Каждому доступно быстрое и точное или грубо-приближенное извлечение корня высокой степени (m) из целого числа с большим количеством (n) цифр. Способ прост: надо отношение $\frac{n}{m}$ считать логарифмом искомого числа и по таблице логарифмов найти его.

Если $\frac{n}{m} \leqslant 1,30$, то практически достаточна следующая таблица десятичных логарифмов:

Число	Десятичный логарифм	Число	Десятичный логарифм
2	0,30	11	1,04
3	0,48	12	1,08
4	0,60	13	1,11
5	0,70	14	1,15
6	0,78	15	1,18
7	0,85	16	1,20
8	0,90	17	1,23
9	0,95	18	1,26
10	1,00	19	1,28
		20	1,30

Пример. Вычислить $\sqrt[5]{2\ 720\ 251\ 845\ 356\ 167\ 708\ 821\ 747}$.

Количество цифр (25) числа делим на показатель корня (на 5), получается 0,49. Это число находится в таблице между 0,48 и 0,60.

Более близким значением является 0,48. Это $\lg 3$. Значит, искомое число 3.

Пример. Извлечь корень 65-й степени из 20-значного числа 36 893 488 147 419 103 232.

Делим 20 на 65, получается $0,31 \approx \lg 2$. Искомое число 2.

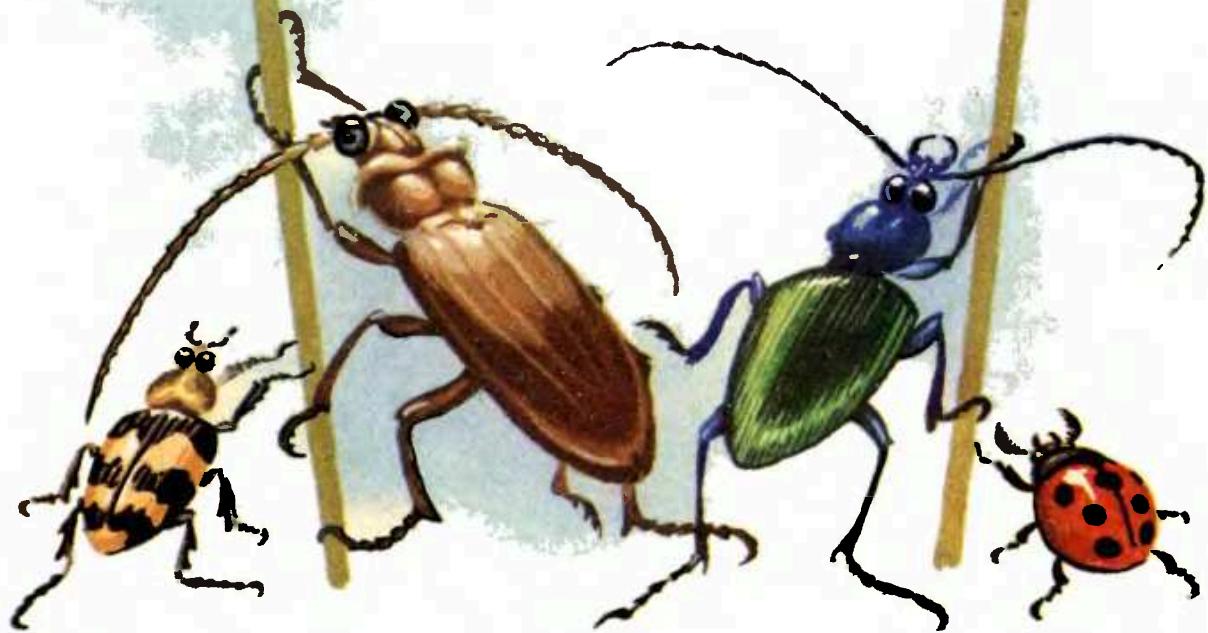
Пример. Извлечь корень 32-й степени из 38-значного числа 43 144 141 785 116 080 641 825 668 495 361 328 125.

Делим 38 на 32, получается приблизительно 1,187. В таблице логарифмов $1,18 < 1,187 < 1,20$. Берем меньшее значение логарифма — 1,18; ему соответствует число 15. Искомое число 15.

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt[49]{k}$, где k — 49-значное число. Решаем: $49:47 \approx 1,043$. В таблице логарифмов $1,04 < 1,043 < 1,08$. Берем значение 1,04, которому соответствует число 11. Искомое число ≈ 11 .

$$\frac{(*\cdot у \cdot к \cdot и) + ж \cdot у + к \cdot и + 1}{у \cdot к \cdot и + у + и} = \frac{577}{520}$$

Не всегда уравнения
Разрешают сомнения,
Но итогом сомнения
Может быть озарение!



**ТРУДНОСТЬ ЗАДАЧ ПОВЫШАЕМ,
РЕШЕНИЯ НАЙТИ ПРИГЛАШАЕМ**

1. Формула Виета (для кубического уравнения). Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$, тогда

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{a_1}{a_0}, \\x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{a_2}{a_0}, \\x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= -\frac{a_3}{a_0}.\end{aligned}$$

2. Формула k -го n -угольного числа.

$$(n)_k = \frac{k}{2}(n(k-1) - 2(k-2)), \quad k = 1, 2, \dots, n=3, 4, \dots.$$

3. Пример обращения простой дроби в цепную:

$$\frac{49}{38} = 1 + \frac{11}{38} = 1 + \frac{1}{\frac{38}{11}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{5}{11}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{11}{5}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{5}}}.$$

4. Всякое положительное целое число можно представить в виде произведения степеней различных простых чисел с целыми или нулевыми показателями.

Пример. $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, и если необходимо, то

$$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^0 \cdot 7 \cdot 11^0 \text{ и т. д.}$$

5. Любые два (и более) целых положительных числа можно разложить по степеням одних и тех же простых чисел.

Пример. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^0$ и $168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^0 \cdot 7$.

6. Наибольшее целое число, не превосходящее x , называется целой частью числа x и обозначается символом $[x]$.

Примеры. $\left[\frac{7}{3}\right] = 2$, $[5] = 5$, $[-3,5] = -4$.

7. Среди n сомножителей $(1, 2, 3, \dots, n)$ числа $n!$ содержится $\left[\frac{n}{p}\right]$ чисел, кратных числу p , $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ чисел, кратных числу p^2 , и т. д. Следовательно, в разложении числа $n!$ по степеням простых чисел наивысший показатель степени каждого простого числа p ,

с которым оно входит в произведение $n!$, равно

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots .$$

Пример. В разложении числа $14!$ по степеням простых чисел простое число 3 входит с показателем степени, равным $\left[\frac{14}{3} \right] + \left[\frac{14}{3^2} \right] = 4 + 1 = 5$; простое число 2 входит с показателем степени, равным $\left[\frac{14}{2} \right] + \left[\frac{14}{2^2} \right] + \left[\frac{14}{2^3} \right] = 11$.

Полное представление числа: $14! = 2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13$.

8. Свойство целой части числа: $[x+y] \geq [x]+[y]$.

Доказательство. По определению целой части числа $x = [x] + \alpha$, $0 \leq \alpha < 1$, $y = [y] + \beta$, $0 \leq \beta < 1$.

Тогда $x+y = [x]+[y]+\alpha+\beta$, откуда следует, что $[x]+[y]$ — целое число, не превосходящее $x+y$. А так как $[x+y]$ есть наибольшее из таких целых чисел, то $[x+y] \geq [x]+[y]$.

1. В СЕМЬЕ КВАДРАТНЫХ ЧИСЕЛ

1) Докажите, что

$$\sqrt{\underbrace{11\dots1}_k \underbrace{55\dots56}_{k-1}} = \frac{10^k + 2}{3}.$$

2) Путем преобразования выражений

- a) $\sqrt{1982 \cdot 1983 \cdot 1984 \cdot 1985 + 1}$,
б) $\sqrt{1979 \cdot 1986 \cdot 1993 \cdot 2000 + 2401}$,
в) $\sqrt{a(a+b)(a+2b)(a+3b) + b^4}$

найдите точные их значения.

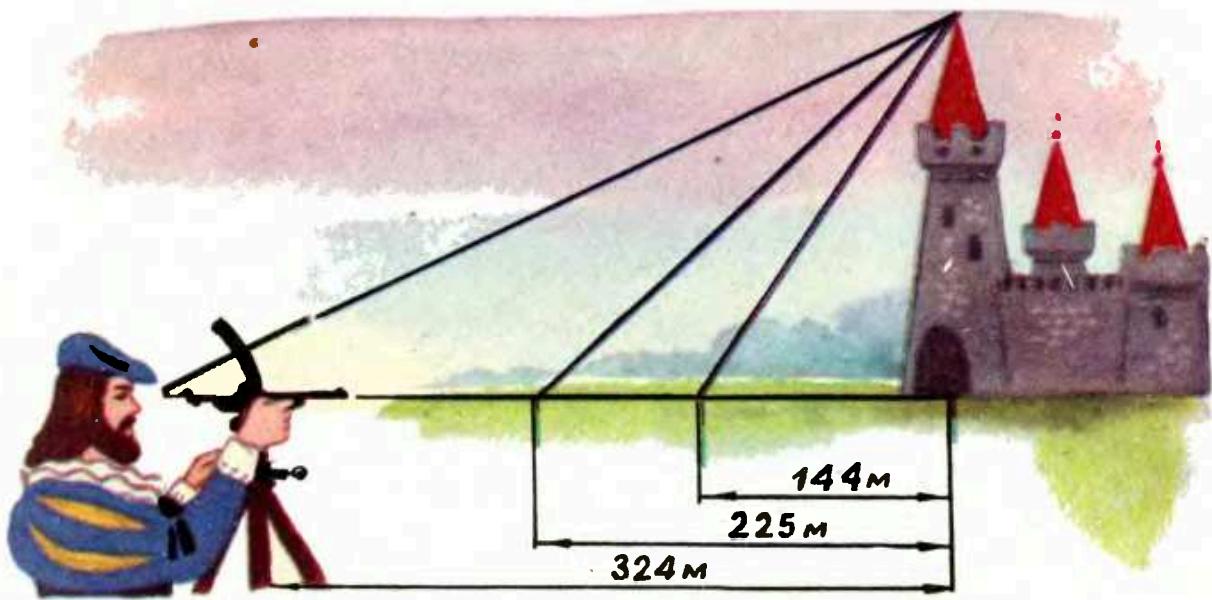
2. НЕ РЕШАЯ УРАВНЕНИЯ

Ребра прямоугольного параллелепипеда являются корнями уравнения $x^3 - 12x^2 + 46x - 56 = 0$.

Не решая уравнения, найдите объем, полную поверхность и диагональ параллелепипеда.

3. ВЫСОКА ЛИ БАШНЯ?

На горизонтальной плоскости стоит башня. Из трех точек плоскости, удаленных от центра основания башни на 144 м, 225 м и 324 м, измерили углы, под которыми видна вершина башни. В сумме эти углы составляют 270° . Какова высота башни?



4. КОНСТРУКЦИЯ ИЗ ДВУХ ДВОЕК

С помощью математических действий и символов сконструируйте запись числа 40 320, употребляя только одну цифру 2, причем не более чем два раза.

5. ИНТЕРЕСНОЕ СВОЙСТВО n -УГОЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Докажите, что $(n+1)$ -е n -угольное число больше, чем n -е $(n+1)$ -угольное число, $n \geq 3$, т. е.

$$(n)_n + 1 > (n+1)_n.$$

6. ТРИ ГРУППЫ ПЕРЕМЕННЫХ

Решите систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x+y+z} + \frac{1}{x+y+p} + \frac{1}{x+z+p} = \frac{73}{168}, \\ \frac{1}{x+y+z} + \frac{1}{x+y+p} + \frac{1}{y+z+p} = \frac{53}{126}, \\ \frac{1}{x+y+z} + \frac{1}{x+z+p} + \frac{1}{y+z+p} = \frac{29}{72}, \\ \frac{1}{x+y+p} + \frac{1}{x+z+p} + \frac{1}{y+z+p} = \frac{191}{504}. \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

7. РЕШИТЕ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} \sqrt[x]{x+y} = 2, \\ (x+y) \cdot 6^x = 248\,832. \end{cases}$$

8. ЧЕТЫРЕ «ПАРИ»

Как велико ПАРИ, если

$$\begin{cases} \frac{\text{П}\cdot\text{А}\cdot\text{Р}\cdot\text{И}}{\text{П}+\text{А}+\text{Р}} = 5, & \frac{\text{П}\cdot\text{А}\cdot\text{Р}\cdot\text{И}}{\text{И}+\text{Р}+\text{А}} = 3, \\ \frac{\text{П}\cdot\text{А}\cdot\text{Р}\cdot\text{И}}{\text{П}+\text{И}+\text{Р}} = \frac{10}{3}, & \frac{\text{П}\cdot\text{А}\cdot\text{Р}\cdot\text{И}}{\text{П}+\text{А}+\text{И}} = \frac{15}{4}. \end{cases}$$

9. КАКОВЫ ЖУКИ?

Решите уравнение в целых неотрицательных числах:

$$520 \cdot (\text{Ж}\cdot\text{У}\cdot\text{К}\cdot\text{И} + \text{Ж}\cdot\text{У} + \text{Ж}\cdot\text{И} + \text{К}\cdot\text{И} + 1) = 577 \cdot (\text{У}\cdot\text{К}\cdot\text{И} + \text{У} + \text{И}).$$

10. ЧИСЛА КАТАЛАНА

Числа последовательности с общим членом $k_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ называются числами Каталана. Вот они:

$$1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, \dots.$$

S_n — сумма n первых членов последовательности чисел Каталана:

$$S_n = k_1 + k_2 + \dots + k_n.$$

Докажите, что все числа Каталана целые, и выясните, при каком наименьшем значении n справедливо равенство

$$\sqrt{S_{n+2}} - \sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} = \log_{n+1} S_n,$$

причем S_n , S_{n+1} и S_{n+2} — квадратные числа.

11. ЕСТЬ НАД ЧЕМ ПОДУМАТЬ!

Какой путь вы предпочтете для решения таких уравнений (на множестве вещественных чисел):

а) $(x+2)(x+4)(x-6)(x-8)=2925;$

б) $\frac{x^6}{9} + \frac{1}{x^2} + \frac{2x^2}{3} = \frac{4x^4 + 12}{9x};$

в) $x \cdot \frac{50-x}{x+1} \left(x + \frac{50-x}{x+1} \right) = 578;$

- г) $44^x - 1 = \sqrt{1935^x}$;
 д) $x^2y^4 - 16xy^3 - 4xy + x^2 + 68y^2 = 0$;
 е) $50x^2 + 14xy + 50y^2 + 14xz + 50z^2 + 14yz = 0$;
 ж) $x^4 + y^4 + z^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 - 2(x^3y + y^3z + z^3x) = 0$.

12. ИЗОБРЕТАЙТЕ КРАСИВОЕ РЕШЕНИЕ

Только красивое решение обеспечит успех в поисках значений x , удовлетворяющих уравнению (на множестве вещественных чисел):

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \sqrt{6x^2 - 40x + 150} - \sqrt{4x^2 - 60x + 100} = 2x + 10; \\ \text{б)} \quad & x^3 - (\sqrt{7} + 1)x^2 + x + 7 - \sqrt{7} = 0; \\ \text{в)} \quad & 16^x - 2 \cdot 12^x + 9^x + 4 \cdot 6^x + 7 \cdot 4^x - 3 \cdot 3^x - 6 \cdot 2^x + 3 = \\ & = \frac{1}{3^x - 4^x + 2^{x+1}} + 4 \cdot 8^x. \end{aligned}$$

13. ТРЕУГОЛЬНАЯ ПЛОЩАДКА С НЕУДОБНЫМИ РАЗМЕРАМИ

Легко и просто вычисляется площадь треугольника по формуле Герона, когда стороны треугольника имеют, например, такие удобные размеры: 13 см, 14 см, 15 см. А вот необходимость вычислить площадь треугольника с такими «неудобными» сторонами, как $a = \sqrt{90}$, $b = \sqrt{416}$, $c = \sqrt{698}$, может по первому впечатлению повергнуть в уныние.

Решение этой задачи с применением формулы Герона потребовало бы неоправданно громоздких вычислений.

Однако можно предложить способ решения, безотказно применяемый к треугольнику с любыми заданными размерами сторон, основанный на использовании формул

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} ab \sin \angle C \quad (1), \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C \quad (2),$$

$$\sin^2 \angle C + \cos^2 \angle C = 1 \quad (3).$$

По формуле (2) мы вычислим $\cos \angle C$, по формуле (3) — $\sin \angle C$ и, наконец, по формуле (1) — площадь треугольника.

Но доступна ли эта задача тому, чьи знания продвинуты не далее теоремы Пифагора, а формулы (1—3) ему еще незнакомы?

Да, притом у него есть шанс найти короткое, красивое геометрическое решение, если он подметит, что $90 = 3^2 + 9^2$, $416 = 20^2 + 4^2$, $698 = 23^2 + 13^2 = (3 + 20)^2 + (9 + 4)^2$, и догадается построить простую геометрическую модель, отображающую подмеченные соотношения и связи.

Попробуйте и вы реализовать нашу подсказку. Несомненный результат успеха — удовольствие!

14. МОНОТОННОСТЬ — ИСТОЧНИК НЕРАВЕНСТВА

Докажите, что $2a + \frac{1}{a^2} > 5$ при $0 < a < 0,5$.

15. ЛЮБОПЫТНОЕ СВОЙСТВО ЧИСЕЛ

Возьмите какое-либо 6-значное число, делящееся на 7, например, 325 836. Перенесите последнюю цифру в начало записи числа. Образуется новое число 632 583. Оно также делится на 7.

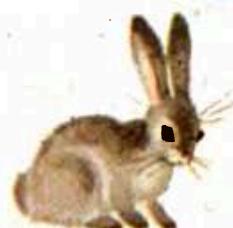
Докажите самостоятельно, что таким свойством обладает любое 6-значное число, делящееся на 7.

Рекомендация. Представьте заданное число так: $7k = 10a + b$ (1). Тогда новое число примет вид $100\ 000b + a$ (2). Используя (1), доказать делимость (2) на число 7.



РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ





250



490



84



ЗДЕСЬ ЗАГАДКИ И ШАРАДЫ. ЗА РАЗГАДКУ — ДВЕ НАГРАДЫ

1. Двое подошли к разным берегам реки. Поэтому сначала переправился один, а затем в той же лодке другой.

2. Из геометрии знаем, что три точки определяют единственную плоскость. Значит, трехногие аппараты или инструменты, поставленные даже на неровные места, не качаются.

3. У каждого из семи братьев одни и те же семь сестер. Значит, всего братьев и сестер в этой семье — 14 человек.

4. Нет. Уравнение $3a^2 + 14 = b^2$ не имеет решения в целых числах. Действительно, число $3a^2 + 14 = 3a^2 + 12 + 2 = 3(a^2 + 4) + 2$ имеет вид $3n + 2$, $n \in N$. Но квадрат целого числа (b^2) либо имеет вид $3n$, либо — $3n + 1$, но никогда $3n + 2$.

5. 32.

6. Кладем на чашки весов по 81 бриллианту. Это взвешивание выделяет 81 или 80 бриллиантов. Второй раз на чашки весов кладем по 27 бриллиантов из группы выделенных. Это взвешивание выделяет 27 или 26 бриллиантов. Третий раз на чашки весов кладем по 9 бриллиантов из группы выделенных. Так выделяем 9 или 8 бриллиантов. Четвертый раз на чашки весов кладем по 3 бриллианта и выделяется 3 или 2 бриллианта. Наконец, в пятый раз кладем на весы по одному бриллианту и определяем, какой из них природный.

7. Первоначально из емкости 400 г выливаем молоко в 200-граммовую емкость до наполнения. В 400-граммовой емкости осталось 200 г молока. Наклоняя цилиндр емкостью 200 г, выливаем молоко из него в 600-граммовую емкость до тех пор, пока уровень молока в цилиндре емкостью 200 г не совпадет с диагональю осевого сечения этого цилиндра. В результате в емкостях 200 г и 600 г получится по 100 г молока. Потом 100 г молока, содержащиеся в 200-граммовой емкости, выливаем в 800-граммовую емкость. Далее из 400-граммовой емкости выливаем молоко в 200-граммовую емкость до тех пор, пока уровень молока не совпадет с диагональю осевого сечения цилиндра емкостью 200 г. В этот раз цилиндр емкостью 200 г надо держать под углом так, чтобы диагональ осевого сечения цилиндра приняла горизонтальное положение.

Таким образом в каждой емкости получится по 100 г молока.



	P							
	R	Y	I	R				
	Z	O	Z	O				
	O	Z	O	Z				
		Y			Y			
P								

Рис. 31

8. См. рис. 31.

9. Пусть первая дробь x , тогда вторая $k \cdot x$. Из условия следует:

$$x^p + (kx)^p = x^n + (kx)^n, \text{ следовательно, } x^p(k^p + 1) = x^n(k^n + 1).$$

Пусть $p > n$, тогда делим обе части равенства на x^n и получаем $x^{p-n} = \frac{k^n + 1}{k^p + 1}$, откуда первое число $x = \sqrt[p-n]{\frac{k^n + 1}{k^p + 1}}$, второе $kx = k \sqrt[p-n]{\frac{k^n + 1}{k^p + 1}}$

Пусть $n > p$, тогда $x = \sqrt[n-p]{\frac{k^p + 1}{k^n + 1}}$; $k \cdot x = \sqrt[n-p]{\frac{k^p + 1}{k^n + 1}}$.

При $k=2$, $n=3$, $p=4$ из равенства $x^{p-n} = \frac{k^n + 1}{k^p + 1}$ следует $x = \frac{9}{17}$, $2x = \frac{18}{17}$.

10. Сорока живет у писателя в крайнем справа зеленом доме.

Логический анализ условия приводит к единственному возможному соответствуию:

Цвет дома	Желтый	Голубой	Красный	Белый	Зеленый
В доме живет	Критик	Поэт	Редактор	Журналист	Писатель
На завтрак пьет	Чай	Какао	Молоко	Сок	Кофе
Способы передвижения		Велосипед	Мотоцикл	Автомобиль	Пешком
Птица	Синица	Канарейка	Снегирь	Попугай	Сорока

11. Числовые данные, сообщенные папой, не могут соответствовать действительности. В самом деле, по условию задачи в поселке *В* домов меньше чем 13, следовательно, в поселке *С* не менее 18 домов. Но это невозможно, поскольку в *С* и *Е* вместе всего 17 домов.

12. Пусть буквы А, Б, В и Н условно являются количественным выражением силы Аркадия, Бориса, Владимира и Николая. Тогда в соответствии с рассказом

$$B > A + H \quad (1), \quad B + A = V + H \quad (2), \quad V + A > B + H \quad (3).$$

Из (1) следует $B > A$. Складывая (2) и (3), получаем $A > H$, а вычитая (2) из (3), получаем $V > B$. Окончательно: $V > B > A > H$.

13. 1) Из 12 спичек построим куб, его грани — 6 одинаковых квадратов.
- 2) Построим пирамиду с квадратом в основании. Боковые грани — 4 треугольника.
- 3) Из 9 спичек построим две треугольные пирамиды с общим основанием, образуется 7 одинаковых треугольников.
- 4) Из 12 спичек построим две пирамиды с общим квадратным основанием, образуются 8 треугольников и квадрат.
- 5) Сначала из 12 спичек построим куб, потом к каждой грани куба пристроим пирамиду. Образуются 6 квадратов и 24 треугольника.
- 6) См. рис. 32, а, б, в. Получилось: $545 + 5 = 550$.
- 7) См. рис. 33.
- 8) См. рис. 34.

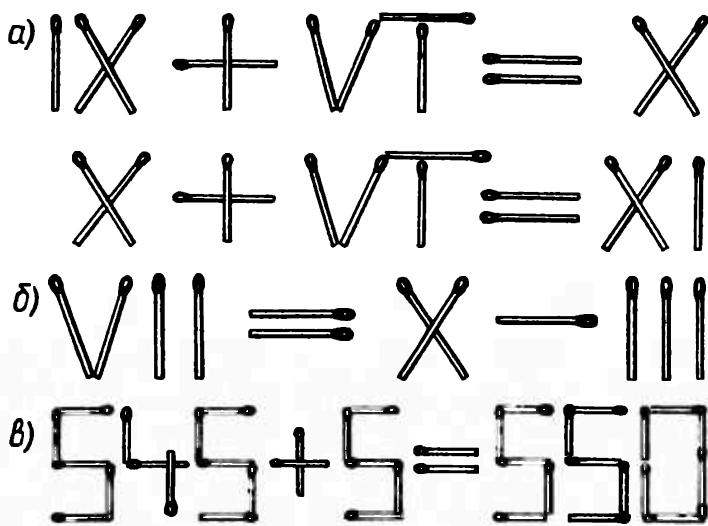


Рис. 32

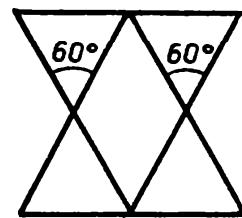


Рис. 33

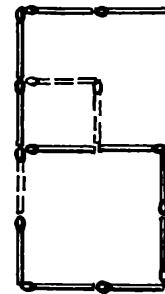


Рис. 34

14. Дробь $\frac{m}{n}$ ближе к числу 1, чем дробь $\frac{n}{m}$. В самом деле, $1 - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n}$, $\frac{n}{m} - 1 = \frac{n-m}{m}$.

Числители одинаковы, но $m < n$ по условию, следовательно,

$$\frac{n-m}{n} < \frac{n-m}{m}.$$

15. $6 = 2+2+2+2-2$, $7 = 22:2-2-2$, $8 = 2\cdot 2\cdot 2+2-2$, $9 = 2\cdot 2\cdot 2+2:2$, $10 = 2+2+2+2+2$, $11 = 22:2+2-2$, $12 = 2\cdot 2\cdot 2+2+2$, $13 = (22+2+2):2$, $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2-2 = 14$, $15 = 22:2+2+2$, $16 = (2+2)^2+2-2$, $17 = (2+2)^2+2:2$, $18 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2+2$, $19 = 22-2-2:2$, $20 = 22+2-2-2$, $21 = 22-2+2:2$, $22 = 22\cdot 2-22$, $23 = 22+2-2:2$, $24 = 22-2+2+2$, $25 = 22+2+2:2$, $26 = 2\cdot(22:2+2)$.

16. Например,

$$3+5-7+9:1=2\cdot 4+8-6 \text{ или}$$

$$3+5+7-9:1=8:2-4+6.$$

17. Из правила перекладывания следует, что число жемчужин, оказавшихся в каждой кучке после уравнивания, должно 64 раза делиться на 2. Наименьшее такое число — 2^{64} .

Рассмотрим процедуру перекладывания в обратном порядке: от конца к началу.

64-й раз: в каждой кучке 2^{64} жемчужин;

63-й раз: в каждой кучке, кроме первой, $2^{64}:2=2^{63}$ жемчужин, а в первой — $2^{64}+63\cdot 2^{63}=2^{63}\cdot 65$.

С 1-го по 63-е перекладывание число жемчужин, содержащихся в первой кучке, удваивалось 63 раза и достигло величины $2^{63}\cdot 65$. Следовательно, в первой кучке первоначально было $2^{63}\cdot 65:2^{63}=65=2^6+1$ жемчужин.

Аналогичные вычисления позволяют заключить, что первоначальное число жемчужин в каждой k -й кучке равно

$$2^{k+5}+1, k=1, 2, \dots, 64.$$

После первого перекладывания в первой кучке оказалось $65\cdot 2=130$ жемчужин, которые и получил Чохбилимиш в награду.

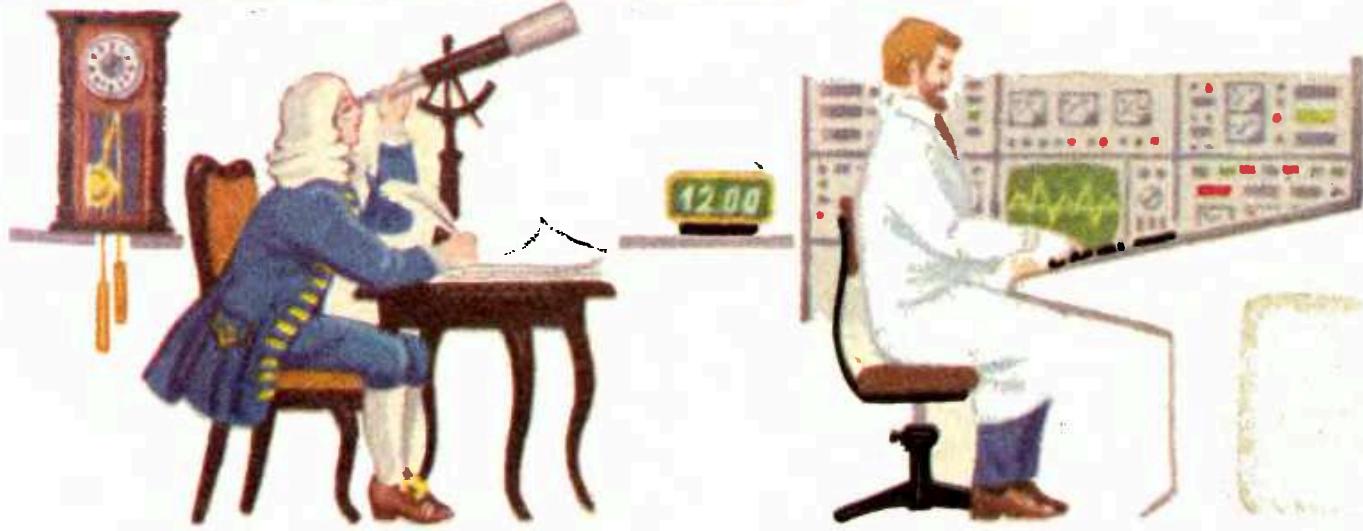
ПОСТОЯННЫЙ ТАБЕЛЬ -

ГОДЫ									СТОЛБЦЫ							ЯНВАРЬ						
									1	2	3	4	5	6	7	ОКТЯБРЬ						
1	18	35		68	85	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс				1	8	15	22	29		
2	19		52	69	86	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн				2	9	16	23	30		
3		36	53	70	87	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт				3	10	17	24	31		
	20	37	54	71		Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср				4	11	18	25			
4	21	38	55		88	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт				5	12	19	26			
5	22	39		72	89	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт				6	13	20	27			
6	23		56	73	90	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб				7	14	21	28			
СТОЛЕТИЯ НОВ.СТИЛЯ ^X →									21	20	19	18				АПРЕЛЬ						
7		40	57	74	91	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс				2	9	16	23	30		
	24	41	58	75		Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн				3	10	17	24			
8	25	42	59		92	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт				4	11	18	25			
9	26	43		76	93	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср				5	12	19	26			
10	27		60	77	94	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт				6	13	20	27			
11		44	61	78	95	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт				7	14	21	28			
	28	45	62	79		Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб				1	8	15	22	29		
СТОЛЕТИЯ СТ.СТИЛЯ [*] →									20	19	18	17	16	15	21	ИЮЛЬ (ЯНВАРЬ)						
12	29	46	63		96	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс				2	9	16	23	30		
13	30	47		80	97	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн				3	10	17	24	31		
14	31		64	81	98	Ср	Чт	Пн	Сб	Вс	Пн	Вт				4	11	18	25			
15		48	65	82	99	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср				5	12	19	26			
	32	49	66	83	100	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт				6	13	20	27			
16	33	50	67		100	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт				7	14	21	28			
17	34	51		84		Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб				1	8	15	22	29		



КАЛЕНДАРЬ

ФЕВРАЛЬ-МАРТ									
НОЯБРЬ					ДЕКАБРЬ				
	5	12	19	26		3	10	17	24
	6	13	20	27		4	11	18	25
	7	14	21	28	Фв	5	12	19	26
1	8	15	22	29		6	13	20	27
2	9	16	23	30	Нб	7	14	21	28
3	10	17	24	31	Мр	8	15	22	29
4	11	18	25			2	9	16	23
									30
МАЙ					ИЮНЬ				
	7	14	21	28		4	11	18	25
1	8	15	22	29		5	12	19	26
2	9	16	23	30		6	13	20	27
3	10	17	24	31		7	14	21	28
4	11	18	25			1	8	15	22
5	12	19	26			2	9	16	29
6	13	20	27			3	10	17	24
АВГУСТ (ФЕВРАЛЬ)					СЕНТЯБРЬ				
	6	13	20	27		3	10	17	24
	7	14	21	28		4	11	18	25
1	8	15	22	29	Фв	5	12	19	26
2	9	16	23	30		6	13	20	27
3	10	17	24	31		7	14	21	28
4	11	18	25			1	8	15	22
5	12	19	26			2	9	16	29





9. 10.

Рис. 35

18. Каждому сигнальному флагжу, из представленных на рисунке к задаче, соответствует определенное число: первому — 1, второму — 2, ..., восьмому — 8. Очевидно, нашу гирлянду должны продолжить флагжи, соответствующие числам 9 и 10 (рис. 35).

19. Шесть порядков: P_1 (Д У К), P_2 (Д К У), P_3 (У Д К), P_4 (У К Д), P_5 (К Д У), P_6 (К У Д).

Условия феи Д запрещают P_1 и P_6 . Условия феи У запрещают P_3 и P_5 . Условия феи К запрещают P_2 . Остается один порядок, удовлетворяющий пожеланиям всех фей,— P_4 : фея У подходит к новорожденной первой, фея К — второй и фея Д — последней.

20. Поскольку на избранном пути не должно быть одинаково расположенных дверей, т. е. правой и правой (П и П), или средней и средней (С и С), или левой и левой (Л и Л), то возможно лишь шесть маршрутов (рис. 36).

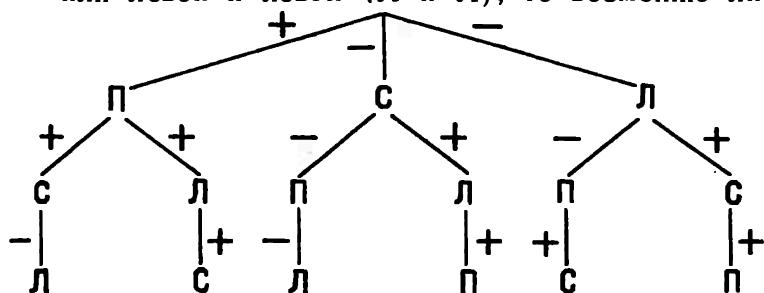


Рис. 36

С — сначала Иванушка прошел через левую дверь, из второй комнаты — через правую, а из третьей — через среднюю дверь.

21. Кто одноклассница Толи? Девочки решили 10 задач. Мальчики — 22. Пусть Саша решил m задач; Павел, Толя и Коля соответственно условию — $2n$, $3p$, $4q$ задач. В соответствии с тем, сколько задач решила каждая из девочек, значениями m , n , p и q могут быть только числа 1, 2, 3, 4, которые должны быть распределены между m , n , p и q так, чтобы было верным равенство $22 = 1 \cdot m + 2 \cdot n + 3 \cdot p + 4 \cdot q$. Простым перебором вариантов устанавливаем единственную возможную комбинацию: $22 = (1 \cdot 3) + (2 \cdot 4) + (3 \cdot 1) + (4 \cdot 2)$. По условию Толя решил втрое больше задач, чем его одноклассница, следовательно, он учится в одном классе с Машей.

22. Замечаем, что $1333 = 31 \cdot 43$, и догадываемся добрать сумму $31 + 43$ до числа 1331 единицами. Тогда в соответствии с условием $1333 = 31 \cdot 43 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{1259} = 31 + 43 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{1259}$.

Аналогично $2171 = 13 \cdot 167 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdots 1}_{1991} = 13 + 167 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{1991}$.

23. 1814—1841 — годы жизни М. Ю. Лермонтова.

24. В XXI веке. В феврале высокосного 2004 года пятью воскресными днями будут числа 1, 8, 15, 29. Тогда 19 февраля — четверг.

Далее пять воскресных дней в феврале и четверг 19 февраля образуются через каждые 28 лет, т. е. в 2032, 2060, 2088 годах.

Плюс на соединительном отрезке означает правильный, а минус — ложный совет принцессы. Так как верен только один совет, то правильный маршрут тот, который отмечен одним плюсом и двумя минусами, а именно: Л, П,

**НАШ КОНСТРУКТОР ЧИСЛОВОЙ,
ПОРАБОТАЙ ГОЛОВОЙ!**

1. 64 из двух четверок:

$$64 = \log_a 4, \text{ где } a = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}}}}}.$$

100 из шести четверок: $44 \cdot \sqrt{4} + 4 \sqrt[4]{4} - 4 = 100$

100 из семи четверок: $44 + 44 + 4 + 4 + 4 = 100$

113 из четырех четверок: $- \log_{\sqrt{4}} \log_{\sqrt{4}} \underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4 \cdot 4}}}}_{115 \text{ раз.}}$

2. Пусть M — четырехзначное число, тогда $10 < \sqrt[3]{M} < 22$. Вычислим $M = 11^3, 12^3, \dots, 21^3$ и сумму цифр у каждого результата сравним с $\sqrt[3]{M}$. Так обнаружатся два числа, обладающие данным свойством: 4913 и 5832.

$$4+9+1+3 = \sqrt[3]{4913}, \quad 5+8+3+2 = \sqrt[3]{5832}$$

Пусть M — трехзначное число. Тогда $5 < \sqrt[3]{M} < 10$. Действуя аналогично, находим единственное подходящее число: 512, $5+1+2 = \sqrt[3]{512}$.

3. 2) Судя по п. 1, можно предположить, что первыми цифрами искомых четырехзначных чисел будут 3 и 2. Последние две цифры должны образовать двузначное число, третья степень которого оканчивается теми же цифрами. Наверняка пригодны 0, 0 и 0,1. Так и образуются два последовательных числа: 3200 и 3201.

Пригодность первого очевидна, второго — доказываем проверкой:

$$3201^3 = 32 \ 798 \ 729 \ 001.$$

4) $12 \ 543^2 = 157 \ 326 \ 849$ — девять цифр и каждая по одному разу.

5) Ближайшее к 1 кубическое число — 2^3 . Его и следует считать третьим слагаемым к двум данным. Тогда $1737 = 1^3 + 12^3 + 2^3 = 9^3 + 10^3 + 2^3$. Четвертым слагаемым естественно взять 3^3 , тогда

$$1764 = 1^3 + 12^3 + 2^3 + 3^3 = 9^3 + 10^3 + 2^3 + 3^3, \text{ и, наконец,}$$

$$3034 = 1^3 + 2^3 + \dots + 8^3 + 12^3 = 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3.$$

6) Замечаем, что $343^2 = (7^3)^2 = 7^6$ и $49^3 = (7^2)^3 = 7^6$.

В общем случае искомое число $(7n)^6 = 117 \ 649n^6$, $n \in N$. Уже при $n=2$ это число больше миллиона.

7) Пусть искомое число $101+x$. Тогда $(101+x)^3 = 1 \ 367 \ 631$.

Вычитая 101^3 , получим $(101+x)^3 - 101^3 = 337 \ 330$. Так как в правой части последняя цифра — нуль, а последняя цифра числа 101^3 — единица, то последней цифрой числа $(101+x)^3$ также должна быть единица. Так как $x > 0$, то наименьшее подходящее его значение $x = 10$.

Непосредственной проверкой устанавливаем его пригодность.

Искомое число определилось: 111, $111^3 = 1 \ 367 \ 631$.

4. Надо написать самое большое шестизначное число, начинающееся с цифры 6, а именно 699 999, делить его на 11 до получения остатка и вычесть этот остаток из написанного числа. Получится 6 999 996. После поворота на 180° получаем 966 669. Оба числа палиндромические.

5. Если цифры последовательности 4, 3, 2, 1, 0 чередовать с цифрами после-

довательности 9, 8, 7, 6, 5, то после умножения образовавшегося числа на 2 получится 9 876 543 210 — наибольшее в множестве всех десятизначных чисел, содержащих каждую цифру по одному разу.

6. Сумма. Пусть a — среднее число в искомой тройке или пятерке последовательных чисел. Тогда по условию:

$$(1) (a-1)+a+(a+1)=(a-1)\cdot a\cdot(a+1) \text{ — для тройки искомых чисел,}$$

$$(2) (a-2)+(a-1)+a+(a+1)+(a+2)=(a-2)(a-1)\cdot a(a+1)(a+2) \text{ — для пятерки искомых чисел.}$$

Все корни уравнения (1) — целые: $a_1=0$, $a_2=-2$, $a_3=2$. Они определяют три тройки искомых чисел: $(-1; 0; 1)$, $(-3; -2; -1)$ и $(1; 2; 3)$.

Других искомых троек на числовой оси нет. Уравнение (2) имеет только один целый корень: $a_1=0$. Следовательно, на числовой оси находится всего одна пятерка последовательных точек с целочисленными координатами $-2, -1, 0, 1, 2$, сумма которых равна их произведению.

$$7. -n, -n+1, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n-1, n$$

8. Пусть число состоит из n троек и k семерок, тогда сумма его цифр равна $3n+7k$, и по условию она кратна произведению $3\cdot 7$. Легко понять, что наименьшие подходящие значения для n и k таковы: $n=7$ и $k=3$.

Напишем наименьшее число, состоящее из семи троек и трех семерок: 3 333 333 777. Но оно не делится на 7. Передвинем все семерки на разряд влево, а вытесненную из разряда тысяч тройку переместим в разряд единиц. Получившееся число 3 333 337 773 также не делится на 7. Выполнив еще раз аналогичное перемещение, получим 3 333 377 733.

Это число удовлетворяет всем пунктам условия задачи.

9. Полагая $x=1, 2, \dots$, уже на третьей подстановке получаем искомое значение для той и другой цепочки: $x=3$. Тогда $C_{\text{ц}}(3^6)=C_{\text{ц}}(729)=7+2+9=18=6\cdot 3$. Точно так же $C_{\text{ц}}(3^7)=C_{\text{ц}}(3^8)=C_{\text{ц}}(3^{12})=18=6\cdot 3$. Для второй цепочки сумма цифр каждого из указанных чисел равна $27=3^3$.

10. 1) Пусть a_k , $k=1, 2, \dots, 9$ — члены заданной прогрессии. Подмечаем, что $a_1+(a_2+a_9)=1986$. Тогда, основываясь на свойстве членов арифметической прогрессии, легко находим остальные группировки: $a_1+(a_3+a_8)=a_1+(a_4+a_7)=a_1+(a_5+a_6)=1986$.

Следовательно, $a_1=2$ надо поместить в центральный круг, а остальные слагаемые каждой тройки — на концах диаметра «колеса».

2) По числу отрезков получается 7 линейных уравнений с 14 неизвестными и еще восьмое уравнение: сумма всех неизвестных равна $\frac{(2+15)\cdot 14}{2}=119$. Решая систему уравнений методом «проб и ошибок», можно получить такую подборку: верхнее основание $—9+5+10=24$, средняя линия $—4+14+6=24$, нижнее основание $—7+2+12+3=24$. Дальнейшие действия очевидны.

11. Сумма $1!+2!+3!+4!=33$ — последняя цифра 3. Последняя цифра числа $n!$ при $n \geqslant 5$ — нуль ($5!=120, 6!=720$ и т. д.). Следовательно, последней цифрой числа $S=1!+2!+3!+4!+\dots+n!$ всегда будет 3 при любом $n \geqslant 5$. Поэтому ровно миллиона S не достигнет никогда.

$$12. a) 1!\cdot 2!\cdot (3!+4!)-5!+6!-(7!\cdot 8!):9!=100.$$

$$b) -\Sigma 1 + (\Sigma 2) \cdot (\Sigma 3) + \Sigma 4 + \Sigma 5 + \Sigma 6 + \Sigma 7 - \Sigma 8 + \Sigma 9 = 100$$

13. Клоун Шесть разместился слева и встал на голову. Образовалось число 975, оно делится на 13.

СИТУАЦИИ В ЖИЗНИ ТАКИЕ: ЛИБО СЛОЖНЫЕ, ЛИБО ПРОСТЫЕ

1. Пусть дети рождались через t лет, тогда сумма возрастов детей $S_1 = 10 + (10+t) + \dots + (10+11t) = 120 + \frac{1}{2} \cdot (t+11 \cdot t) \cdot 11 = 6 \cdot (20+11t)$. Пусть сумма возрастов родителей $S_2 = x+y$. По условию $\frac{1}{3}S_2 = \frac{6 \cdot (20+11t)}{7}$; $20+11t$ кратно 7 при $t=2$. Другие значения $t > 2$ нереальны. Определился возраст каждого из детей: 10, 12, ..., 32, $S_1 = 252$, $S_2 = \frac{3}{7} \cdot 252 = 108$

Сумма квадратов возрастов детей равна 5864. Принимая возраст Анны Савельевны за x , находим возраст родителей: $x^2 + (108-x)^2$ и по условию $x^2 + (108-x)^2 = 5864$ или $x^2 - 108x + 2900 = 0$, откуда $x_1 = 58$, $x_2 = 50$. Значит, Анне было 50, Максиму — 58 лет.

2. У двоих на покупку книги не хватило одной копейки, и у троих вместе также не хватило денег на покупку, значит, у третьего денег вообще не было. Зная, что третьему не хватило на покупку книги 2 р. 90 к., заключаем, что книга стоит 2 р. 90 к.

Первый и второй вместе имели 2 р. 89 к. Первый имел на 19 к. больше, чем второй. Значит, у второго было $\frac{289-19}{2} = 135$ к. 135 к. = 1 р. 35 к.; у первого — 1 р. 54 к.

3. Полагая, что в современном стандартном доме количество ступенек между этажами одинаково, находим наибольший общий делитель чисел 84, 126, 147, 189, 210, 231, показывающий количество ступенек между этажами: НОД = 21.

Имеем $84 = 4 \cdot 21$, $126 = 6 \cdot 21$, $147 = 7 \cdot 21$, $189 = 9 \cdot 21$, $210 = 10 \cdot 21$, $231 = 11 \cdot 21$. Учитывая, что до квартиры на первом этаже отсутствуют ступеньки, находим: Лайне живет на 5-м этаже, Майму — на 7-м, Юта — на 8-м, Белла — на 10-м. Елена — на 11-м и Элеонора — на 12-м этаже.

4. Так как все слагаемые стоимости купленных предметов делятся на 3, то должна делиться на 3 и сумма, указанная в чеке. Но 152 не делится на 3.

5. Если искомое время x , то, очевидно, x часов прошло после полуночи, а до полудня осталось $12-x$ часов.

По условию $12-x + \frac{2}{5}x = x$, следовательно, $x = \frac{60}{8}$ (ч). Итак, времени 7 ч 30 мин

6. Каждая лягушка в последний день поднимается на 18 м и выходит из колодца А в предшествующие дни первая лягушка поднималась ежедневно на $18-12=6$ (м) ($\frac{60-18}{6} = 7$ (дней)), вторая — на $18-16=2$ (м)

($\frac{60-18}{2} = 21$ (день)), а третья — на $18-17=1$ (м) ($\frac{60-18}{1} = 42$ (дня)). Учитывая еще последний день, заключаем, что первая лягушка выйдет из колодца через 8 дней, вторая — через 22 дня, а третья — через 43 дня.

7. Пусть x , y , k — соответственно стоимости одного килограмма орехов, фейхоа и гранат. По условию $9x+2y=6k$ и $6x+5y+4k=43$, откуда получаем $18x+9,5y=64,5$.

Видно, что y может быть только нечетным числом, $y=2n+1$, $n=0, 1, 2, \dots$.
Теперь имеем $18x+19n=55$.

Целое положительное $x=2$ получается только при $n=1$

Теперь $y=3$ и $k=4$. Значит, орехи стоят 2 р., фейхоа — 3 р. и гранаты — 4 р. килограмм.

8. 1) Пусть a — длина стороны квадратной дощечки, тогда по условию $a+a=a \cdot a$. Решением последнего уравнения будет число $a_1=0$, что невозможно, и число $a_2=2$ — это ответ. 2) Для пары (a, b) имеем по условию $(a+b)=ab$, т. е. $b=\frac{a}{a-1}$. Значит, если первое число пары — a , то второе — $\frac{a}{a-1}$.

3) а) Нет ни одной В самом деле, пусть длина дощечки a — число целое, тогда $a-1$ — также целое, но противоположной четности, следовательно, ширина $\frac{a}{a-1}$ — число не целое.

б) Да, есть только одна такая дощечка Ее размер $11 \times 1,1$ ($11+1,1=11 \cdot 1,1$). В самом деле, пусть все цифры в записи числа a одинаковы. Они сохраняются при делении a на $a-1$ в единственном случае, когда $a-1=10$, т. е. $a=11$. Цифры числа a сохраняются также при делении на 100 или на 1000 и т. д., но тогда $a=101$ или $a=1001, \dots$, т. е. в записи числа a не все цифры одинаковы.

9. Пусть 15 лет назад Тунзале было x лет, Нушабе $y=5x$ лет. Через $(15+20)$ лет будет по условию $5x+35=(x+35) \cdot 1,5$, т. е. $x=5$, $y=25$.

Теперь Тунзале 20 лет, а Нушабе 40 лет.

10. Пусть внучке x месяцев, а дедушке x лет, тогда $\frac{x}{12}+x=91$, $13x=91 \cdot 12$, $x=84$

Дедушке 84 года, внучке 7 лет.

11. Если $19x$ — количество скачков овчарки, а $29y$ — количество скачков лисы, то $19 \cdot 2,2x - 29 \cdot 1,1y = 99$ или $38x - 29y = 90$, откуда наиболее реальные значения $x=10$, $y=10$. Тогда $19x=190$ (скачков), $29y=290$ (скачков).

Овчарка проскачет 418 м, лиса — 319 м

12. Пусть x — число фазанов, y — число зайцев. Тогда $2x+4y=1980$ и $x+y=740$, откуда $x=490$, $y=250$. Итак, на ферме имеется 490 фазанов и 250 зайцев

13. Пусть команда D получила x очков, запишем как $D(x)$, тогда имеем $B(3x)$, $A(3x+6)$, G и $H(x+4)$, $C(x+2)$, $F(3x+10)$, $E(3x+14)$ и $16x+40=31k$, $x, k \in \mathbb{N}$. Решая последнее уравнение, например, методом проб и ошибок, получаем $k=8$ и $x=13$. Следовательно, команды набрали:

$A=45$, $B=39$, $C=15$, $D=13$, $E=53$, $F=49$, G и H по 17 очков.

Суммарное число очков, набранное всеми командами, равно 248, и единственное распределение 8 команд по двум группам с равным суммарным числом очков (по 124) дается равенством

$$\begin{array}{ccccccccc} 53 & + & 39 & + & 17 & + & 15 & = & 49 + 45 + 17 + 13 \\ E & & B & & G & & C & & F & A & H & D \end{array}$$

Итак, команды G и H играют в разные игры.

14. Пусть x — расстояние между городами Сальяны и Кутаиси, тогда к

моменту первой встречи оба автомобиля вместе прошли x км за время t , а к моменту второй встречи прошли вместе $3x$ км за время $3t$.

Так как грузовик за время t прошел 385 км, то за время $3t$ он прошел $385 \cdot 3 = 1155$ км; $1155 = x + 327$, т. е. $x = 828$ км.

15. Так как каждый мальчик получил на 2 штуки фейхоа больше, чем каждая девочка, а $35 = 7 \cdot 5$, то заключаем, что в семье было 7 дочерей и 5 сыновей.

16. Находим наименьшее общее кратное чисел 21, 35, 15, а именно 105. Значит, велосипедисты впервые после старта вновь окажутся вместе в пункте старта через 105 мин, т. е. через 1 ч 45 мин.

17. Пусть в момент, когда появлялась Она, минутная стрелка указывала на x мин (рис. 37). Угол (в градусах) между минутной стрелкой и биссектрисой, направленной к цифре 6, в этот момент равен $\frac{(30-x)180}{30} = (30-x) \cdot 6^\circ$. Угол между этой же биссектрисой и часовой стрелкой равен $\frac{5 \cdot 180}{30} +$

$$+ \frac{5x \cdot 180}{30 \cdot 60} = 30 + \frac{x}{2}. \text{ Из уравнения } (30-x) \cdot 6 = 30 + \frac{x}{2} \text{ находим } x \approx \frac{300}{13} \approx 23'.$$

Она появилась в 19 ч 23 мин.

18. Пусть $\frac{A}{B}$ — данная дробь.

$$\text{Тогда } \frac{A}{B} = \frac{A-x}{B-K}, \text{ отсюда } X = \frac{K \cdot A}{B}.$$

Пример. Возьмем дробь $\frac{4}{5}$; если из знаменателя вычтем $K=1$, то из числителя надо вычесть $\frac{4}{5}$, чтобы полученная дробь равнялась данной:

$$\frac{4 - \frac{4}{5}}{5 - 1} = \frac{4}{5}.$$

19. Если ширина озера x , то $\frac{x}{60} = \frac{x}{90} + \frac{1}{4}$, откуда $x = 45$ км.

20. Имеем $\frac{5}{8} = \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$; отсюда видно, что 4 яблока надо разделить пополам и только одно яблоко разделить на 8 частей.

Таким образом, каждый мальчик получит одну вторую и одну восьмую части яблока.

21. Ответ содержится в равенстве $\frac{13}{42} = \frac{1}{7} + \frac{1}{6}$. Оно указывает на то, что каждый из шести арбузов надо разделить на 7 частей, а каждый из остальных семи арбузов разделить на 6 частей, тогда получится 42 части одного объема и 42 части другого. Каждый ученик получит по одной части каждого из двух объемов.

22. Так как количества фейхоа, полученных девочками и мальчиками, одинаковы и Иrena получила 3, Белла — 8, Кай — 9 фейхоа, то Света и Ира



Рис. 37

вместе получили $98:2 - (3+8+9) = 29$ фейхоя. Пусть x и y — соответственно количества фейхоя, которые получили братья Светы и Иры, тогда $2x+3y=29$, откуда $x_1=7$, $y_1=5$; $x_2=13$, $y_2=1$; $x_3=10$, $y_3=3$; $x_4=4$, $y_4=7$; $x_5=1$, $y_5=9$.

Вова, Миша и Оскар вместе получили $98:2 - (5+7) = 37$ фейхоя.

Пусть k , p , t — соответственно количества фейхоя, которые получили их сестры, тогда $k! + \sqrt[3]{p^2} + \sqrt{t^3} = 37$.

Удовлетворяют этому уравнению $k_1=3$, $p_1=8$, $t_1=9$ или $k_2=1$, $p_2=27$, $t_2=9$. Только одна комбинация этих решений $x_1=7$, $y_1=5$, $k_1=3$, $p_1=8$, $t_1=9$ удовлетворяет всем условиям задачи.

Девочки получили $3+8+9+15+14=49$ фейхоя, мальчики получили $6+4+27+7+5=49$ фейхоя.

Сопоставляя полученные результаты с условием задачи, устанавливаем фамилии: Ирина Терехина, Белла Элькинд, Кай Корьюс, Андрей Совков и Дима Рыбалько.

23. У каждого ученика задуманная пара шестизначных чисел имеет вид:

$$\sum_{k=1}^6 10^{k-1} \cdot a_k \text{ и } \sum_{k=1}^5 10^k \cdot a_k + a_6.$$

$$\text{Их сумма } 11 \cdot (9091a_6 + \sum_{k=1}^5 10^{k-1} \cdot a_k), \text{ разность } 9 \cdot (11111a_6 - \sum_{k=1}^5 10^{k-1} \cdot a_k).$$

Чохбильмиш сразу обнаружил, что результаты сложения и вычитания, полученные учениками, не были кратными соответственно числам 11 и 9.

24. Пусть год рождения Дефурнеля $1601+x$. Тогда для года рождения первого сына имеем:

$$1601+x+19 < 1701, \text{ т. е. } x < 81. \quad (1)$$

Для года рождения второго сына:

$$1701 \leq 1601+x+19+38 < 1801, \text{ или } 43 \leq x < 143. \quad (2)$$

Третий сын родился через 63 года после второго сына, но $19+38+63 > 100$, следовательно, он родился в XIX веке, и для его года рождения имеем:

$$1801 \leq 1601+x+19+38+63 < 1901, \text{ т. е. } 80 \leq x < 180. \quad (3)$$

Сопоставляя (1), (2) и (3), получим $80 \leq x < 81$, или $x=80$. Итак, Пьер Дефурнель родился в 1681 году и жил 128 лет. Остальные сведения легко получить из условия задачи.

25. 1) Пусть масса стакана с водой m_1 , а без воды — m_2 , тогда $V = \frac{m_1 - m_2}{\rho}$, где ρ — плотность; для воды $\rho=1$.

2) Пусть D — диаметр мяча, l — длина наибольшей окружности на поверхности мяча, найденная с помощью нитки и линейки, тогда

$$V = \frac{1}{6} \pi D^3 = \frac{\pi}{6} \left(\frac{l}{\pi} \right)^3 = \frac{l^3}{6\pi^2} (\pi \approx 3,14).$$

3) Пусть t — искомый промежуток времени, A — определенное по счетчику количество израсходованной электроэнергии, N — мощность электропотребителей, тогда $t = \frac{A}{N}$.

4) С помощью мензурки находим V — объем шара, а его радиус вычисляем по формуле $R = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}.$

5) Пусть m_1 и m_2 — длины медиан AD и BE ; катеты $AC=a$, $BC=b$, гипотенуза $AB=c$. Из $\triangle BEC$: $\frac{a^2}{4} + b^2 = m_1^2$, из $\triangle ADC$: $a^2 + \frac{b^2}{4} = m_2^2$. Складывая, находим $\frac{5}{4}(a^2 + b^2) = m_1^2 + m_2^2$, или $\frac{5}{4}c^2 = m_1^2 + m_2^2$, следовательно, $c = AB = 2\sqrt{\frac{m_1^2 + m_2^2}{5}}.$

6) Пусть a — сторона первоначального квадрата. Его площадь $S=a^2$, и после увеличения на 44% площадь нового квадрата $S_1=1,44a^2$, его сторона $a_1=\sqrt{S_1}=1,2a$. Удлинение стороны — 0,2a; в процентах относительно a получается 20%.

26. Если $7k$, $k \in N$, — длина стороны каждого из квадратных участков, первоначально выделенных для кемпинга, x — длина стороны нового прямоугольного участка, $x \in N$, то $2 \cdot (7k)^2 = x(x-1)$, или $49 \cdot 2k^2 = x(x-1)$.

Можно предположить, что либо $x=49$ и $x-1=48$, либо $x-1=49$ и $x=50$. Подходит второе, тогда при $x=50$ имеем $2k^2=50$ и $k=5$; длина стороны квадратного участка равна 35 м. Периметр первоначально выделенных квадратных участков равен $35 \cdot 8=280$ м; периметр нового прямоугольного участка $2 \cdot (50+49)=198$ м. Разность периметров равна 82 м.

Четырехугольный участок спортивной площадки имеет площадь $2870,25 - 2450 = 420,25$ м² и периметр, равный 82 м. Следовательно, спортивная площадка имеет форму квадрата, так как всякий другой четырехугольник с периметром 82 м охватывает площадь меньшую, чем 420,25 м².

27. Если недельный прирост соли на 1 га любого озера принять за x , то на первом озере он составит $3x$, а за 4 недели — $12x$. Это равносильно тому, как если бы первоначальная площадь озера увеличилась и достигла бы $(3+12x)$ га.

За одну неделю 8 грузовых автомобилей как бы освободят от соли $\frac{1}{4}$ часть этой площади, а одна грузовая машина — $\frac{1}{32}$ часть, т. е. $\frac{3+12x}{32}$ га.

Так выясняется норма (в долях площади) количества соли, перевозимого одной грузовой автомашиной за одну неделю.

По данным, относящимся ко второму озеру, получится: недельный прирост соли в процессе ее созреваемости на 1 га — x , шестинедельный прирост соли на 1 га — $6x$, шестинедельный прирост соли на 9 га — $54x$. Это равносильно тому, как если бы площадь второго озера увеличилась и достигла $(9+54x)$ га.

Площадь, освобождаемая от соли при перевозке одним грузовым автомобилем в течение недели, равна $\frac{9+54x}{6 \cdot 18}$ га.

Обе нормы перевозки должны быть одинаковы:

$$\frac{3+12x}{32} = \frac{9+54x}{108}, \text{ откуда } x = \frac{1}{12}.$$

Определим (в долях площади) недельную норму перевозки соли одной грузовой автомашиной: $\left(3 + 12 \cdot \frac{1}{12}\right) : 32 = \frac{1}{8}$ га

Наконец, составим уравнение для окончательного решения задачи. Обозначим искомое число недель через y , тогда

$$\left(21 + 21y \cdot \frac{1}{12}\right) : 28y = \frac{1}{8}, \text{ откуда } y = 12.$$

Всю соль, добываемую из третьего озера, можно перевезти в течение 12 недель с помощью 28 грузовых автомашин.

28. Возраст дочерей определяется сразу: Эльзе 3 года, Изе 6 лет, Лизе 9 лет, Лиде 12 лет, Тунзале 15 лет, Нушабе 18 лет.

Возраст Низами по условию $\frac{2 \cdot 3 \cdot 6}{3+6} = 4$ Возраст Камала $\frac{2 \cdot 6 \cdot 18}{6+18} = 9$. Возраст Наримана $\frac{2 \cdot 6 \cdot 12}{6+12} = 8$. Возраст Эльшана $\frac{2 \cdot 9 \cdot 18}{9+18} = 12$. Возраст матери $\sqrt{4 \cdot 9}^2 = 36$. Возраст отца $\sqrt{\frac{3^2 + 9^2}{2}}^2 = 45$. Возраст дедушки $\frac{\sqrt{4 \cdot 45}^2}{3} = 60$. Возраст бабушки $\frac{60 + 3 \cdot 18}{2} = 57$. Возраст прабабушки $36 + 45 = 81$. Возраст прадедушки $2 \cdot \sqrt{36 \cdot 81} = 108$ лет.

29. Пусть веревка α раз проходит вдоль ребра длиной x , β раз вдоль ребра длиной y и γ раз вдоль ребра длиной z . Длину веревки обозначим l . Тогда

$$l = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

Чтобы найти максимум $V = x \cdot y \cdot z$, найдем максимум площади $S = yz$ при постоянном $\beta y + \gamma z = k$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{k - \gamma z}{\beta}, \quad S = \frac{kz}{\beta} - \frac{\gamma z^2}{\beta}; \\ S'_z &= \frac{k}{\beta} - \frac{2\gamma z}{\beta} = 0 \Rightarrow z = \frac{k}{2\gamma}; \quad \gamma z = \frac{k}{2}; \\ \beta y &= \gamma z. \end{aligned}$$

Аналогично $\alpha x = \beta y = \gamma z = \frac{l}{3}$, откуда

$$x = \frac{l}{3\alpha}, \quad y = \frac{l}{3\beta}, \quad z = \frac{l}{3\gamma}, \quad xyz = \frac{l^3}{27\alpha\beta\gamma}.$$

У нас $\alpha = 4$, $\beta = 6$, $\gamma = 10$, $l = 900$ см. Таким образом,

$$x = \frac{900}{3 \cdot 4} = 75 \text{ см}, \quad y = \frac{900}{3 \cdot 6} = 50 \text{ см}.$$

$$z = \frac{900}{3 \cdot 10} = 30 \text{ см}. \quad V = xyz = 112500 \text{ см}^3 \approx 0,1 \text{ м}^3.$$

30. Пусть S — пройденный путь, t и t_1 — продолжительность остановок первого и второго автобусов соответственно, u и u_1 — время их движения. По условию $u + t = u_1 + t_1$ и $t = \frac{1}{4}u_1$, $t_1 = \frac{2}{5}u$. Отсюда $u + \frac{1}{4}u_1 = u_1 + \frac{2}{5}u$, т. е.

$u : u_1 = \frac{5}{4}$. Средняя скорость движения машин соответственно $v = \frac{s}{u}$ и $v_1 =$

$$= \frac{s}{u_1}, \text{ или } \frac{v_1}{v} = \frac{u}{u_1} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

Второй автобус шел со скоростью, в 1,25 раза большей скорости первого автобуса.

31. Пусть в каждой из прибывших групп было x человек. Приняли участие в походе y болгар и z поляков, а всего $y+z+\frac{1}{3}x+(x-y)$ человек. По условию это число равно $\frac{1}{3} \cdot 4x$. Из уравнения $y+z+\frac{1}{3}x+(x-y)=\frac{4}{3}x$ находим $z=0$.

Значит, из польской группы никто не пошел в турпоход.

32. Пусть было n кружковцев и m гостей. Драматург получил $12+1$ цветков, дирижер — $12+2$ цветков и т. д., молодая актриса — $12+m$ цветков. Этой актрисе все кружковцы преподнесли по цветку, поэтому $12+m=n$. На встрече присутствовало 26 человек, поэтому $m+n=26$. Решив систему уравнений, получим $n=19$, $m=7$. Кружковцев — 19, гостей — 7 человек.

33. Докажем, что пути спортсменов были равными. Пусть N и P — точки касания катетов с окружностью (рис. 38). Тогда $|CN|=|CP|=|MO|$, $|AM|=|AN|$ и $|BM|=|BP|$.

Маршрут Д: $|AN| + |NC| + |CP| + |PB|$.

Маршрут Т: $|AM| + |MO| + |OM| + |MB|$.

Итак, пути Д и Т равные, скорости одинаковые, значит, оба спортсмена придут к финишу одновременно. Попутно выяснилась интересная геометрическая закономерность: в любом прямоугольном треугольнике сумма длин катетов превышает длину гипотенузы на величину диаметра окружности, вписанной в треугольник.

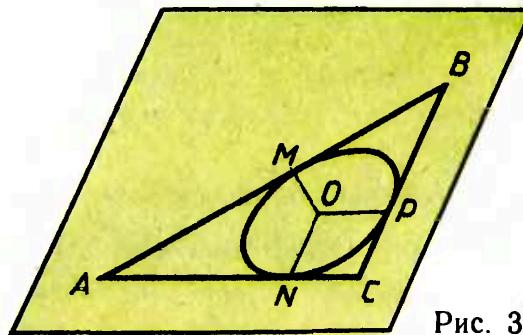


Рис. 38

НАТУРАЛЬНОЕ ЧИСЛО В АРИФМЕТИКУ ВОШЛО, ТАЙН НЕМАЛО ПРИНЕСЛО

1. Пусть x — число десятков, y — число единиц, тогда

$$10x+y=x^2+y^2-xy.$$

Второе число на 11 больше первого, поэтому

$$10(x+1)+(y+1)=(x+1)^2+(y-1)^2-(x+1)(y+1).$$

Вычитая из второго равенства первое, получим $x+y=10$. Условию задачи удовлетворяют только $x=3$ и $y=7$. Искомые числа 37 и 48.

2. Пусть x — число десятков, y — число единиц, тогда

$$10x+y=x^2+y^2+xy \text{ и}$$

$$(10(x+5)+y)=(x+5)^2+y^2+(x+5)y.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим $2x+y=5$. Условию задачи удовлетворяют только $x=1$, $y=3$. Искомые числа 13 и 63.

3. Из условия следует, что число сотен на 8 меньше числа единиц. Этому условию удовлетворяют только два числа: 1 — для сотен и 9 — для единиц. Пусть y — число десятков, тогда искомое число $\overline{1y9}$. Вычислим $\overline{9y1} - \overline{1y9} = 792$ соответствует условию, а это значит, что цифра десятков (y) может быть любой. Получается 10 возможных чисел: 199, 189, 179, 169, 159, 149, 139, 129, 119, 109.

Из этих чисел только число 159 удовлетворяет первому условию задачи.

4. 1) Из уравнения $10x + y = 19y$ следует $5x = 9y$, откуда $x = 9$, $y = 5$. Искомое двузначное число 95.

2) Пусть первое число — x , тогда второе — $\frac{5x}{4}$, третье — $\frac{25x}{8}$ и четвертое — $\frac{125x}{8}$. Из уравнения $x + \frac{5x}{4} + \frac{25x}{8} + \frac{125x}{8} = 336$ следует $x = 16$ — первое число, второе — 20, третье — 50 и четвертое — 250.

3) Если x и y — искомые простые числа и $x > y$, то $x - \frac{y}{2} = 5\left(y - \frac{x}{2}\right)$, или $35x = 55y$, откуда $x = 11 \cdot k$, $y = 7 \cdot k$, $k \in N$. Простые числа получаются только при $k = 1$. Искомыми числами являются 7 и 11.

4) Пусть x и y — искомые натуральные числа, тогда $x^2 + y = 57$, следовательно, $x < \sqrt{57} < 8$, т. е. $y \geqslant 8$, и $x + y^2 = 71$, следовательно, $y < \sqrt{71} < 9$, т. е. $x \geqslant 7$.

Очевидно, что единственны пригодные значения $x = 7$, $y = 8$.

5. Для набора девяти однозначных чисел потребовалось 9 цифр, для набора 90 двузначных чисел потребовалось 180 цифр. Для набора последующих чисел, начиная с трехзначных, использовано $2529 - (9 + 180) = 2340$ цифр. Этого количества цифр достаточно, чтобы набрать $2340 : 3 = 780$ трехзначных чисел. Значит, книга содержит $9 + 90 + 780 = 879$ страниц.

6. Объяснение способа наборщика. Предположим, что все порядковые числа, которыми нумеруем 1000 страниц книги, трехзначные. Тогда потребовалось бы 3000 цифровых литер. Но из этого числа следует вычесть 90 потому, что в действительности было 90 чисел двузначных, а не трехзначных, еще вычесть 18 потому, что 9 чисел было однозначных, а не трехзначных, и, наконец, прибавить 1, так как одна страница нумеруется не трехзначным числом, а четырехзначным. Получаем $3000 - 90 - 18 + 1 = 2893$.

7. По условию (см. рис. 22) $x^2y + xy^2 = 3900$, или $(x + y)xy = 3900$. Комбинируя произведения простых делителей числа 3900, находим единственное удовлетворяющее условию разложение: $3900 = 12 \cdot 13 \cdot 25$. Здесь $12 + 13 = 25$, значит, высота сооружения $x + y = 25$ (дм) $< 2,75$ (м).

Сооружение, поставленное на пол, в потолок не упрется.

8. Так как при перенесении цифры 3 на первое место число утраивается, то предпоследняя цифра должна быть 9, поскольку $3 \cdot 3 = 9$; предшествующая ей цифра должна быть 7, поскольку $9 \cdot 3 = 27$; следующая влево — цифра 3, поскольку $2 + 7 \cdot 3 = 23$; еще левее — цифра 1, поскольку $2 + 3 \cdot 3 = 11$, затем цифра 4, поскольку $1 + 1 \cdot 3 = 4$; затем цифра 2, поскольку $4 \cdot 3 = 12$; затем цифра 7, поскольку $1 + 2 \cdot 3 = 7$, и т. д. Искомое число, очевидно, должно начинаться с цифры 1, поэтому следует остановиться в нашем продвижении налево тогда,

когда после утроения очередной цифры и добавления числа, перешедшего из предыдущего разряда, мы получим 1.

Так образуется 28-значное число 1 034 482 758 620 689 655 172 413 793.

9. Надо выяснить, с какими показателями степени входят числа 5 и 2 в произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots \cdot 1992 \cdot 1993 = 1993!$

В последовательности чисел 1, 2, ..., 1993 каждое пятое делится на 5, а поскольку $1993 = 5 \cdot 398 + 3$, то между 1 и 1993 заключено 398 чисел, которые делятся на 5. Среди этих чисел каждое пятое делится по крайней мере на 25. Поскольку $398 = 5 \cdot 79 + 4$, то среди 398 чисел, делящихся на 5, имеется 79 таких, которые делятся на 25.

Продолжая делить на 5, получим $79 = 5 \cdot 15 + 4$, $15 = 5 \cdot 3 + 0$. Итак, в последовательности натуральных чисел от 1 до 1993 имеются 15 таких, которые делятся по крайней мере на 125, и 3 числа, делящиеся на 625. Таким образом, число 5 входит в произведение с показателем степени, равным $398 + 79 + 15 + 3 = 495$.

Показатель степени, с которым входит в рассматриваемое произведение число два, больше 996. Следовательно, запись результата вычисления $1993! = A \cdot 10^{495}$, $A \in N$.

10. Единицей может оканчиваться квадрат такого числа, последняя цифра которого 1 или 9. Рассматривая строение чисел $(10n+1)^2$ и $(10n+9)^2$, $n \in N$, легко заметить, что цифра десятков у таких чисел всегда четная. Например, $a = (10n+9)^2 = 100n^2 + 180n + 81 = 100n^2 + 10 \cdot (18n+8) + 1$.

Цифра десятков числа a определяется последней цифрой суммы $18n+8$, а она, очевидно, четная.

11. Очевидно, что любая из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 встречается в любом разряде всех составленных пятизначных чисел столько раз, сколькими способами можно разместить остальные пять цифр по другим четырем разрядам. Подсчитаем число способов.

Предположим, что первый разряд закреплен за цифрой 1. Остальные пять цифр претендуют занять место во втором разряде. Вместе с единицей образуется 5 двузначных чисел. Приписывая к ним по одной цифре из оставшихся четырех, получим 5 · 4 трехзначных чисел. Приписывая к ним по одной цифре из оставшихся трех, получим 5 · 4 · 3 четырехзначных чисел и, приписывая к ним по одной цифре из оставшихся двух, получим $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ пятизначных чисел с единицей в первом разряде.

Значит, каждая цифра из шести заданных встретится в любом разряде всех обусловленных пятизначных чисел 120 раз.

Тогда сумма цифр, стоящих в каждом из пяти разрядов, взятая по всем составленным пятизначным числам, равна

$$120 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 120 \cdot 21 = 2520,$$

а сумма самих пятизначных чисел

$$2520 \cdot (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0) = 2520 \cdot 11\,111 = 27\,999\,720.$$

12. Цифры искомых четырехзначных чисел вида $xyzt$ определяются положительными целочисленными решениями уравнения

$$1000x + 100y + 10z + t - 999 = 1000t + 100z + 10y + x,$$

которое сводится к такому:

$$3 \cdot 37(x - t - 1) = 10 \cdot (z - y).$$

При целых значениях x, y, z, t это равенство будет иметь место в единственном случае, когда $x-t-1=0$ и $z-y=0$. Значит, число тысяч на 1 больше числа единиц, а числа сотен и десятков одинаковы. Получается, следовательно, 8 серий искомых четырехзначных чисел, по 10 чисел в каждой серии:

9998	8997	7996	6995	5994	4993	3992	2991
9888	8887	7886	6885	5884	4883	3882	2881
9778	8777	7776	6775	5774	4773	3772	2771
...
9118	8117	7116	6115	5114	4113	3112	2111
9008	8007	7006	6005	5004	4003	3002	2001

Всего 80 искомых чисел, образующих 8 прогрессий по 10 членов с одной и той же разностью $d=110$. Разность между последним членом первой прогрессии и первым членом второй, между последним членом второй прогрессии и первым членом третьей и т. д. также одна и та же ($d_1=11$). Поэтому их сумму можно вычислить коротко:

$$(9998 + 2001) \cdot 40 = 479\ 960.$$

Для пятизначных чисел аналогичным способом выявляются 8 десятков прогрессий по 10 членов с разностью $d=100$ для каждой прогрессии. В каждом десятке прогрессий разности (d_1) между последним членом любой прогрессии и первым членом следующей одинаковы: $d_1=110$.

При переходе от последней прогрессии в любом их десятке к первой прогрессии в следующем десятке аналогичные разности (d_2) другие, но также однаковые: $d_2=11$. Поэтому для вычисления суммы всех 800 членов последовательности «избранных» пятизначных чисел достаточно знать ее первый (a_1) и последний (a_{800}) члены.

Так как $a_1=99\ 998$, $a_{800}=20\ 001$, то сумма равна $S_{800}=(99\ 998+20\ 001) \times 400 = 47\ 999\ 600$

13. Вычисляем: $1\ 000\ 000 = 6 \cdot 166\ 666 + 4$, $166\ 666 = 6 \cdot 27\ 777 + 4$, $27\ 777 = 6 \cdot 4\ 629 + 3$ и т. д.

Искомое разложение: $1\ 000\ 000 = 3 \cdot 6^7 + 3 \cdot 6^6 + 2 \cdot 6^5 + 3 \cdot 6^4 + 3 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 6^0$.

14. 1) а) В четверичной, так как $2 \cdot 2 = 4 = (10)_b = 1 \cdot b^1 + 0 \cdot b^0$, т. е. $b=4$

б) В пятеричной, так как $3b + 1 - (b+3) = b+3$, или $b=5$.

в) В пятеричной, так как $4b + 3 + 2 = b^2$, т. е. $b=5$.

г) В троичной, так как $2b^3 + 2b + 2 + 2b + 2 = 2b^3 + b^2 + 2b + 1$, т. е. $b=3$.

д) В двоичной.

Имеем $b^7 = b^6 + b^5 + b^4 + b^3 + b^2 + b + 1 + 1$, или

$$b^7 - 1 = b^6 + b^5 + b^4 + b^3 + b^2 + b + 1$$

Легко убедиться в справедливости тождества

$$b^7 - 1 = (b-1) \cdot (b^6 + b^5 + b^4 + b^3 + b^2 + b + 1)$$

С его помощью уравнение приводим к виду

$$(b^6 + b^5 + b^4 + b^3 + b^2 + b + 1) \cdot (b-2) = 0$$

Первый множитель положительных корней иметь не может, значит, $b=2$.

е) Очевидно, что $b \geqslant 8$. При $b=8$ имеем $\frac{(16)_b}{(61)_b} = \frac{8+6}{6 \cdot 8 + 1} = \frac{14}{49} = \frac{2}{7}$ — верно.

2) Ясно, что $2^n < 1\ 000\ 000\ 000 < 2^{n+1}$. Теперь надо положить $n = 30$ и убедиться в справедливости записанных неравенств. Но если считать n неизвестным, то найти его легко, применяя логарифмирование записанных неравенств:

$$n \lg 2 < \lg 10^9 < (n+1) \lg 2, \text{ или } n < \frac{9}{\lg 2} < n+1,$$

$$n < \frac{9}{0,3010} < n+1, n < 29,9 < n+1.$$

Так как n — число натуральное, то $n = 29$, и, следовательно, для записи одного миллиарда в двоичной системе надо употребить $n+1 = 30$ цифр.

15. Подмечаем, что числа, выражающие годовую экономию, являются целыми степенями пяти. Поэтому для быстрого решения задачи целесообразно использовать пятеричную систему счисления. В пятеричной системе число 8350 записывается как $(231\ 400)_5$, т. е. $8350 = 2 \cdot 5^5 + 3 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^2 = 2 \cdot 3125 + 3 \cdot 625 + 1 \cdot 125 + 4 \cdot 25$. Из этой записи сразу следует, что премия Андрея — 12,5 р., Бориса — $312,5 \cdot 2 = 625$ р., Василия — $62,5 \cdot 3 = 187,5$ р., Григория — $2,5 \cdot 4 = 10$ р.

16. Пусть начальная четверка состоит из трех четных чисел и следующего за ними одного нечетного, $R_0 = \text{ЧЧЧН}$.

Последовательные разности будут иметь вид: $R_1 = \text{ЧЧНН}$, $R_2 = \text{ЧНЧН}$, $R_3 = \text{НННН}$, $R_4 = \text{ЧЧЧЧ}$. Замечаем, что уже четвертые разности (R_4) состоят только из четных чисел. Легко убедиться, что такое заключение верно для любой начальной комбинации четырех исходных чисел.

Обозначим через $\frac{1}{2} R_4$ четверку чисел, каждое из которых составляет половину соответствующего элемента четверки R_4 . Очевидно, что такое же соотношение сохранится и между разностями из элементов четверок R_4 и $\frac{1}{2} R_4$, т. е. первые, вторые, ..., k -е разности из элементов четверки R_4 будут вдвое больше соответственно первых, вторых, ..., k -х разностей из элементов «четверки» $\frac{1}{2} R_4$.

Но мы знаем, что четвертые разности четверки $\frac{1}{2} R_4$ непременно состоят только из четных элементов (ЧЧЧЧ), следовательно, четвертыми разностями из чисел R_4 , т. е. элементами четверки R_8 , будут числа, вдвое большие четных элементов четвертых разностей четверки $\frac{1}{2} R_4$. Другими словами, каждый элемент четверки R_8 будет делиться на 4.

Аналогичные рассуждения позволяют заключить, что элементы R_{12} будут делиться на 8, элементы R_{16} будут делиться на 16 и вообще элементы R_{4k} будут делиться на 2^k .

Положим теперь, что в исходной четверке $R_0 = a_1, a_2, a_3, a_4$ нет элементов, превышающих 1000. Ясно, что в четверках разностей R_1, R_2, \dots не могут образоваться элементы большие, чем наибольший элемент в исходной четверке. Следовательно, ни один из элементов, например, сороковой разности (R_{40}) не превзойдет 1000. Но, как показано, элементы R_{40} кратны числу $2^{10} = 1024 > 1000$ и есть только одно число меньшее, чем 1000, и делящееся на 1024, это нуль. Значит, четверка R_{40} должна состоять только из нулей.

Характер рассуждений не изменится, если 1000 заменить любым натуральным n . Итак, существует конечное число шагов, ведущих к нулевым разностям.

**ЭТО РЕБУСЫ ИЗ ЦИФР,
БУКВЫ, ЗВЕЗДОЧКИ — ИХ ШИФР**

1. По свойству чисел 625 и 376 (их квадраты оканчиваются теми же цифрами) три цифры, зашифрованные в ребусе буквами Я, Т, Ъ, выявляются сразу: Я Т Ъ = 625 или Я Т Ъ = 376. Поэтому заменим сначала Я Т Ъ на 625 и выполним умножение «столбиком»:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \text{Д} \qquad \text{Е} \qquad \text{В} \qquad \begin{matrix} 6 & 2 & 5 \\ 6 & 2 & 5 \end{matrix} \\
 \text{Д} \qquad \text{Е} \qquad \text{В} \\
 \hline
 \begin{array}{ccccccc}
 & (5\text{Д}) & (5\text{Е}) & (5\text{В}+3) & 1 & 2 & 5 \\
 & (2\text{Е}) & (2\text{В}+1) & 2 & 5 & 0 \\
 & (6\text{В}+3) & 7 & 5 & 0 \\
 & (6\text{В}) & (2\text{В}) & (5\text{В}) \\
 & (2\text{Е}) & (5\text{Е}) \\
 & (5\text{Д}) & & & & & \\
 \hline
 \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{§} \\
 & \text{Д} & & \text{Е} & & \text{В} & \\
 & & & & & \text{(10В+10)} & 6 \ 2 \ 5 \\
 & & & & & \text{В} & \text{Я} \ \text{T} \ \text{Ь} \\
 \end{array}
 \end{array}$$

По условию $10\text{В}+10=\text{В}+10n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) — возможно только при $n=1$, тогда $\text{В}=0$. При $\text{В}=0$ сумма чисел в разряде тысяч ($10\text{В}+10$) равна 10; нуль записываем, а 1 прибавляем к сумме десятков тысяч. Тогда по условию $5\text{Е}+2\text{В}+1+7+2\text{В}+5\text{Е}+1=\text{Е}+10n$ ($n=0, 1, 2, \dots$), или при $\text{В}=0$ $10\text{Е}+9=\text{Е}+10n$, — возможно только при $n=9$, тогда $\text{Е}=9$.

При $\text{Е}=9$ сумма в разряде десятков тысяч равна 99, оставляем 9 (десятков тысяч), а 9 (сотен тысяч) прибавляем к сумме в разряде сотен тысяч. Тогда по условию $5\text{Д}+2\text{Е}+6\text{В}+3+6\text{В}+2\text{Е}+5\text{Д}+9=\text{Д}+10n$ ($n=0, 1, 2, \dots$), или при $\text{В}=0$ и $\text{Е}=9$ $10\text{Д}+48=\text{Д}+10n$. Так как Д — цифра, то это равенство возможно только при $n=12$, тогда $\text{Д}=8$.

Искомое число определилось: ДЕВЯТЬ = 890 625.

Заменим теперь Я Т Ъ на 376 и будем действовать аналогично предыдущему:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 \text{Д} & \text{Е} & \text{В} \\
 \text{Д} & \text{Е} & \text{В} \\
 \hline
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 3 \ 7 \ 6 \\
 3 \ 7 \ 6
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & (6\text{Д}) & (6\text{Е}) & (6\text{В}+2) & 2 & 5 & 6 \\
 & (7\text{Е}) & (7\text{В}+2) & 6 & 3 & 2 \\
 & (3\text{В}+1) & 1 & 2 & 8 \\
 & (3\text{В}) & (7\text{В}) & 6\text{В} \\
 & (7\text{Е}) & 6\text{Е} \\
 & (6\text{Д}) & & & & & \\
 \hline
 \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{§} & \text{§} \\
 & \text{Д} & & \text{Е} & & \text{В} & \\
 & & & & & \text{(12В+11)} & 3 \ 7 \ 6 \\
 & & & & & \text{В} & \\
 \end{array}
 \end{array}$$

По условию $12\text{В}+11=\text{В}+10n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) — возможно только при $n=10$, тогда $\text{В}=9$.

При $B=9$ сумма чисел в разряде тысяч ($12B+11$) равна 119; оставляем в разряде тысяч 9, а 11 (десятков тысяч) прибавляем к сумме в разряде десятков тысяч. Тогда по условию $6E+7B+2+1+7B+6E+11=E+10n$ ($n=0, 1, 2, \dots$), или при $B=9$ $12E+140=E+10n$; единственное возможное значение $E=0$ (при $n=14$).

При $E=0$ и $B=9$ сумма чисел в разряде десятков тысяч равна 140; оставляем 0 в разряде десятков тысяч, а 14 (сотен тысяч) прибавляем к сумме в разряде сотен тысяч. Тогда $6D+7E+3B+1+3B+7E+D+14=D+10n$ ($n=0, 1, 2, \dots$), или при $B=9$ и $E=0$ $12D+69=D+10n$; единственное возможное значение $D=1$.

Определилось второе число: Д Е В Я Т Ъ = 109 376.

Окончательно: Д Е В Я Т Ъ = 890 625, $890\ 625^2 = 793\ 212\ 890\ 625$;
Д Е В Я Т Ъ = 109 376; $109\ 376^2 = 11\ 063\ 109\ 376$.

Попутно: из наблюдений над получившимися результатами можно заключить, что есть только одно четырехзначное число (9376) и только одно пятизначное число (90 625), квадраты которых оканчиваются теми же цифрами. Убедитесь!

2. Например, $319 + 527 = 846$ ($8 + 4 + 6 = 18$), $738 + 216 = 954$ ($9 + 5 + 4 = 18$). В общем случае:

1) пусть каждая частная сумма (единиц с единицами, десятков с десятками) меньше десяти, тогда $\underbrace{L+O+B+T+P+I}_{x} = \underbrace{C+A+M}_{y}$ и $x+y=1+2\dots+9=45$, последнее равенство невозможно в целых числах при $x=y$;

2) пусть $M > 10$ и $A > 10$, тогда $B+I=10+M$, $O+P+1=10+A$, $L+T+1=C$ и при прежних обозначениях имеем $x=y+18$, $x+y=45$, что вновь приводит к нецелым значениям x и y ;

3) пусть только $M > 10$ либо только $A > 10$, тогда $x=y+9$, $x+y=45$, откуда $x=27$, $y=C+A+M=18$.

Итак, в любом решении данного числового ребуса $C+A+M=18$.

3. $\mathbf{\dot{Ж}} - \mathbf{\dot{Ж}} - \mathbf{\dot{Ж}} \dots$! Так как $(\mathbf{\dot{Ж}} - 1)^5$ — четырехзначное число, то $5 \leq \mathbf{\dot{Ж}} \leq 7$. Подходит только $\mathbf{\dot{Ж}}=7$, так как $6^5=7776$.

4. а) Есть только два трехзначных числа, любая степень которых оканчивается теми же тремя цифрами: 376 и 625

Подходит только 625 при $I=3$.

б) Подходит только 376 при $I=4$

5. а) Пусть p, q, r, t — цифры второго множителя. Запишем заданное произведение:

$$\begin{array}{r} \text{Б А К У} \\ \times \\ p \quad q \quad r \quad t \\ \hline \dots & \dots & \dots & \text{У} \\ & & . & \text{К} \\ & & . & \text{А} \\ & & . & \text{Б} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

По условию $\text{Б} > \text{А} > \text{К} > \text{У}$ и $p > q > r > t$. Структура записи действия показывает, что $U \neq 0$ и $t \neq 0$. Так как строка «частного» произведения БАКУ на t состоит из пяти цифр, то $t > 1$, откуда следует, что $U \cdot t = U$ невозможно и что $U > 1$. Значит, $U \cdot t$ равно двузначному числу с последней цифрой U . Все возможные случаи такого произведения сведены в таблицу (первый множитель — U , второй — t):

$$\begin{array}{ll}
 2 \cdot 6 = 12 & 5 \cdot 3 = 15 \\
 4 \cdot 6 = 24 & 5 \cdot 5 = 25 \\
 6 \cdot 6 = 36 & 5 \cdot 7 = 35 \\
 8 \cdot 6 = 48 & 5 \cdot 9 = 45
 \end{array}$$

Покажем непригодность случаев $Y=5$, $t=3, 5, 7$ или 9 .

Рассмотрим все эти случаи на одной схеме:

$B \ A \ K \ 5$

$$\begin{array}{r}
 p \ q \ r \ 3 \ (5, 7, 9) \\
 \hline
 5 \\
 . \quad . \quad 5r \\
 . \quad . \quad 5q \\
 . \quad . \quad 5p
 \end{array}$$

По условию $r > 3$ и $5r = K + 10n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), откуда при $r = 4, 6, 8$, $K = 0$; примем пока это значение K . Далее, при $r = 5, 7, 9$, $K = 5$ — непригодно, так как $Y = 5$.

К аналогичному заключению приводят соотношения $5q = A + 10n$ и $5p = B + 10n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Получается, что либо $B = A = K = Y = 5$, либо $K = 5$, $B = A = K = 0$ — то и другое непригодно.

Остаются для испытания пары $(2; 6)$, $(4; 6)$, $(6; 6)$ и $(8; 6)$.

В любом случае $t = 6$, $Y = 2, 4, 6$ или 8 . Тогда из соотношений $Y \cdot r = K + 10n$, $Y \cdot q = A + 10n$ и $Y \cdot p = B + 10n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) следует, что K , A и B также четные — $2, 4, 6$ или 8 , т. е. все цифры, скрытые в БАКУ, принадлежат семейству (вот она — семейственность!) четных чисел.

Теперь при условии $B > A > K > Y$ и $p > q > r > t$, где $t = 6$, возможна единственная дешифровка сомножителей: БАКУ = 8642 и $\overline{pqrt} = 9876$.

При этом $\overline{BANKU} \cdot \overline{pqrt} = 85\ 348\ 392$.

б) Установлено, что БАКУ = 8642 и $t = 6$. Требуется найти цифры p, q и r , такие, чтобы второй цифрой слева в произведении $8642 \cdot \overline{pqrb}$ была цифра 0.

Запишем:

$$\begin{array}{r}
 8 \ 6 \ 4 \ 2 \\
 \times \\
 \hline
 p \ q \ r \ 6 \\
 5 \ 1 \ 8 \ 5 \ 2 \\
 . \quad . \quad 2r \\
 . \quad . \quad 2q \\
 . \quad . \quad 2p
 \end{array}$$

По условию $2r = 4 + 10n$, $2q = 6 + 10n$, $2p = 8 + 10n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Пригодны лишь следующие решения: $r = 2$ или 7 , $q = 3$ или 8 , $p = 4$ или 9 .

Комбинируя каждое значение r с каждым значением p и q , образуем 8 чисел вида \overline{pqrb} . Вычислив произведение каждого из них на 8642, найдем единственный результат, удовлетворяющий условию: в произведении $8642 \cdot \overline{pqrb}$ вторая цифра слева — 0, т. е. $8642 \cdot 9326 = 80\ 595\ 292$.

6. Решая методом проб и ошибок получим:

$$\begin{array}{l}
 (5 \ . \ \boxed{2} \ + \ \boxed{4} \ - \ \boxed{6}) : \ 2 \ + \ \boxed{1} = \boxed{5} \\
 \cdot \ . \ . \ + \ : \ . \ + \ + \\
 \boxed{4} \ + \ 6 \ . \ \boxed{4} \ + \ \boxed{3} \ . \ 4 \ - \ \boxed{8} = 32 \\
 : \ - \ - \ . \ . \ + \ + \\
 2 \ . \ \boxed{8} \ + \ \boxed{3} \ . \ 10 \ + \ \boxed{5} \ + \ \boxed{4} = 55
 \end{array}$$

$$\boxed{10} \ + \ \boxed{4} \ + \ \boxed{5} \ + \ 20 \ + \ 40 \ + \ 13 = 92$$

7. 1) Придадим заданному уравнению вид $\frac{x+y}{k} = \frac{10x+y}{10}$, откуда следует $10 \cdot (x+y - x \cdot k) = y \cdot k$, или $x = \frac{y \cdot (10-k)}{10 \cdot (k-1)}$. Замечаем, что $y \cdot k$ кратно 10; составим таблицу возможных значений y и k :

y	2	5	4	5	6	5	8	5
k	5	2	5	4	5	6	5	8

Отбросив непригодные значения, находим, что при $k=2$ $x=4$, $y=5$, при $k=4$ $x=1$, $y=5$ и при $k=5$ $x=1$, $y=8$.

2) Преобразовав заданное уравнение, получаем $\frac{5}{x} + \frac{5}{y} = 6$.

Если $x > 1$, то $y < 1$, что невозможно, следовательно, $x=1$ и $y=5$. Если $y > 1$, то $x < 1$ — невозможно, следовательно, $y=1$ и $x=5$.

3) Преобразуем заданное уравнение: $x = -\log_y \log_y y \frac{1}{32}$, или $x = -\log_y \frac{1}{32}$,

т. е. $x = \log_y 32$, следовательно, $y^x = 2^5$.

Так как x и y — цифры, то единственное подходящее решение $x=5$, $y=2$.

8. Известно, что любая натуральная степень числа вида \overline{zt} оканчивается теми же двумя цифрами z и t только в случаях $\overline{zt} = 00$, $\overline{zt} = 01$, $\overline{zt} = 25$ и $\overline{zt} = 76$.

Первые два случая исключены условием ребуса. Остаются два возможных окончания искомых четырехзначных чисел: $\overline{zt} = 25$ и $\overline{zt} = 76$.

Две первые цифры (x и y) надо искать подбором, комбинируя девять значений x (от 1 до 9) с десятью значениями y (от 0 до 9). Получится 90 комбинаций.

Присоединяя к каждой один из двух «хвостов», получим всю последовательность испытуемых четырехзначных чисел:

(1025, 1076, 1125, 1176, ..., 9925, 9976)

Сначала испытаем наименьшее (1025) и наибольшее (9976) числа, затем вторые от начала и конца последовательности и т. д.

Оказывается, $1025^2 = 1050\,625$ и $1025^3 = 1076\,890\,625$,

$9976^2 = 99\,520\,576$ и $9976^3 = 992\,817\,266\,176$.

Нам повезло! Искомые числа обнаружились сразу!

С помощью калькулятора желающие могут испытать остальные 178 чисел нашей последовательности, чтобы выяснить, содержит ли она другие числа, удовлетворяющие условию ребуса.

9. В (5) произведения А·Г (слева) и А·Я (справа) должны быть одинаковой четности, но А·Г — произведение чисел разной четности, следовательно, оно четное, поэтому и А·Я четное. Значит, под гласными буквами укрылись четные числа, под согласными — нечетные.

Из (2) и (4) следует, что произведения Е·Г и И·Г оканчиваются цифрой Я. Это возможно только при Г=5 и Я=0.

Из (3) следует Ж≠1, из (1) — Д≠1. Значит, либо Б=1, либо В=1.

Из (1) следует, что Б — первая цифра произведения Д·5, тогда при Д=3 ($3 \cdot 5 = 15$) Б=1, при Д=7 ($7 \cdot 5 = 35$) Б=3.

Других подходящих вариантов произведения $D \cdot J$ нет.

Возникают четыре предположения: при $B=1$, $D=3$, $G=5$ а) $V=9$, $J=7$,

б) $V=7$, $J=9$;

при $B=3$, $D=7$, $G=5$ в) $V=1$, $J=9$, г) $V=9$, $J=1$. Но $J \neq 1$, следовательно, предположение (г) отпадает.

Из (4) следует, что E — первая цифра произведения $D \cdot J$. Тогда к предположениям (а) и (б) присоединяется $E=2$ ($3 \cdot 7=21$ и $3 \cdot 9=27$), к (в) присоединяется $E=6$ ($7 \cdot 9=63$). Если $E=2$ и $D=3$, то из (1) следует $A=4$ (а и б); если $E=6$ и $D=7$, то из (1) следует $A=8$ (в).

Рассмотрим (3) в предположении (а): $27 \cdot 594 = \overline{1\text{У}\text{O}\text{З}\text{И}}$, следовательно, $I=8$ и $U=6$. Определились все цифры:

$$Я=0, E=2, A=4, U=6, I=8, B=1, D=3, G=5, J=7, V=9.$$

Остальные предположения (б и в) приводят к противоречию. Убедитесь!

10. 1) Так как $23:7 < 4$, то $(\overline{a2} + b)^3$ — четырехзначное число с первой цифрой 3. Но уже $16^3 = 4096$, следовательно, $\overline{a2} + b < 16 \Rightarrow a=1$ и $b < 4$. Полагая $b=3$, находим $7(\overline{a2} + b)^3 = 7 \cdot 15^3 = 23625 \Rightarrow c=6, k=5$.

Значения $b=2; 1; 0$ не дают верного равенства, значит, решение единственное: $a=1, b=3, c=6, k=5$.

2) Так как $37037 = 37 \cdot 1001$ и $19019 = 19 \cdot 1001$, то $37 \cdot 1001 \overline{ab} = 19 \cdot 1001 \overline{ck} \Rightarrow 37 \cdot \overline{ab} = 19 \cdot \overline{ck}$. Но \overline{ab} и \overline{ck} — двузначные числа, следовательно, $\overline{ab}=19$ или 38 и $\overline{ck}=37$ или 74.

Значит, равенство верно при $a=1, b=9, c=3, k=7$ или при $a=3, b=8, c=7, k=4$.

РЕБУСЫ «КРОССНАМБЕР», А ЕЩЕ — «ЧАЙННАМБЕР»

1. Рис. 39 по горизонтали: А. Трехзначное простое число Мерсенна $M_7 = 2^7 - 1 = 127$. Г. 953; обращенное число 359 тоже простое. Д. 671.

По вертикали: А. $196 = 14^2$. Б. $F_2 = 2^2 + 1 = 257$. В. $(3)_{38} - (3)_4 = 731$.

2. Рис. 40 по горизонтали: А. $8192 = 2^{13}$; обращенное число 2918. Г. 997. Е. $F_2 = 2^2 + 1 = 257$; обращенное число 752. И. $6915 = 19 \cdot 3 \cdot 5^3$.

По вертикали: А. $2976 = 6 \cdot 496$; 6 = 1 + 2 + 3 — первое по величине совершенное число, получается по формуле Евклида при $k=2$; $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 +$

А 1	Б 2	В 7
Г 9	5	3
Д 6	7	1

Рис. 39

А 2	Б 9	1	В 8
Г 9	9	Д 7	7
Е 7	Ж 5	2	6
И 6	9	1	5

Рис. 40

А 6	3	9	0	Б 3
5	5		7	4
7		5		5
0	7		3	6
В 3	7	7	7	7

Рис. 41

A	1	9	8	3	0	3	B	6
0	1				4	2		
4		1		6		9		
8			4			4		
5		6		1		1		
7	4				2	3		
B	6	1	4	5	1	4	9	

Рис. 42

A	2	Б	3	В	4	Г	5	2	Д	3	Е	4	Ж	5
И	3	1	3	6				К	4	8	4			
0			Л	4	4	М	5	6	0	0				
Н	5	П	4	9	7	1			2					
Р	1	1	6	0	6	С	5				Т	1		
У	9	5	2			Ф	6	7	Х	8	6			
0			Ц	2	Ш	7	0	6	2	2	2			
Э	7	1			Ю	3	6		Я	4	9			

Рис. 43

$+31+62+124+248$ — третье по величине совершенное число, получается по формуле Евклида при $k=5$. **Б.** 99. **В.** 8765. **Д.** Четвертое простое число Мерсенна $M_7=2^7-1=127$. Обращенное число 721. **Ж.** 59.

3. Рис. 41 по диагоналям: **А.** $F_3=2^2+1=65537$. **Б.** 37573, причем $3+7+5+7+3=5^2$.

По горизонтали: от **А** до **Б.** $(3)_{357}=63\ 903$. **С.** $37\ 777=77\ 777-40\ 000$.

По вертикали: **А.** $(5)_{121}=21\ 901$. Утроенное число 65 703. **Б.** 34 567.

4. Рис. 42 по диагоналям: **А.** Три первых простых числа таковы: $F_1=17$. $F_2=257$, $F_3=65\ 537$. Подходит произведение $F_1 \cdot F_3=1\ 114\ 129$. **Б.** 6 464 646, $6+4+6+4+6+4+6=36$.

По горизонтали: от **А** до **Б.** $(3)_{1991}=1\ 983\ 036$. **Б.** $3 \cdot 127^3=6\ 145\ 149$.

По вертикали: **А.** $2^{20}=1\ 048\ 576$. **Б.** $2 \cdot 167^3=9\ 314\ 926$; обращенное число 6 294 139.

5. Рис. 43 по диагоналям: **А.** $3^{16}+2^3=21\ 476\ 729$. **Ж.** Количество нулей равно $53\ 282 \cdot 11=586\ 102$.

По горизонтали: от **А** до **Ж.** Единственное восьмизначное число, удовлетворяющее условию, $365 \cdot 64\ 253=23\ 452\ 345$. **И.** $(4)_{56}=56^2=3136$. **К.** 484. **Л.** $(92)_{100}=445\ 600$. **Н.** $(1001)_{11}=54\ 956$; $(6)_3=15$. Сумма этих чисел 54 971. **Р.** $(28)_{95}=-(3)_{15}=116\ 065$. **У.** $(3)_{41}+(3)_{13}=952$. **Ф.** $(3)_{116}=6786$. **Ц.** $(8)_{304}=276\ 640$, $(7)_3=18$. Их разность равна 270 622. **Э.** $F_1=17$; обращенное число 71. **Ю.** Из двузначных треугольных чисел только восьмое число является точным квадратом, $(3)_8=36$. **Я.** 49.

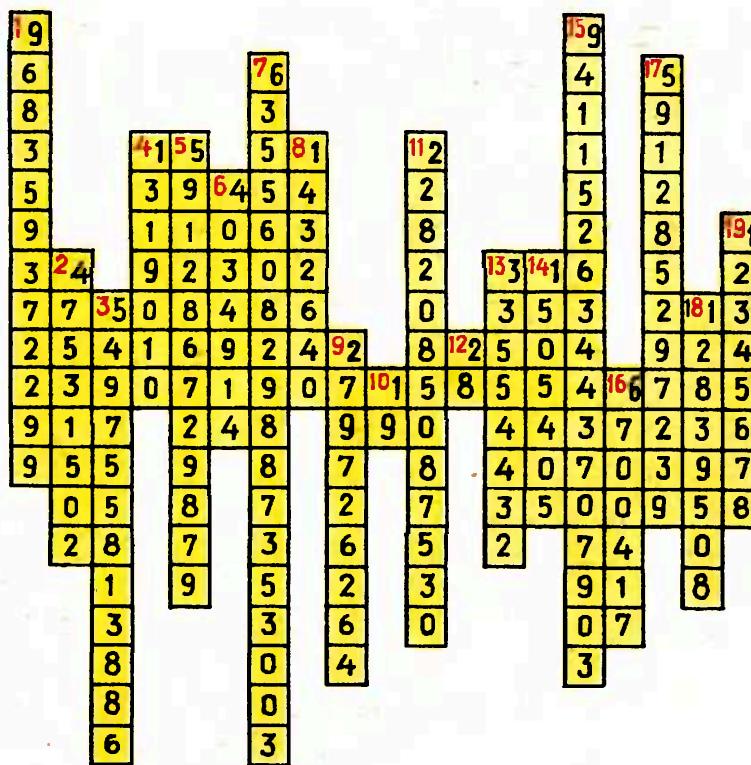
По вертикали: от **А** до **Э.** Количество нулей равно $2\ 561\ 323 \cdot 9=23\ 051\ 907$.

Б. 31. От **В** до **Ц.** 4 349 622. **Г.** 56 470. **Д.** 346. **Е.** $2 \cdot 7^4=4802$. **Ж.** $555-15=540$. **М.** 516 606. **П.** 415. **С.** $(3 \cdot 2^3)^2=576$. **Т.** 1629. **Х.** 824. **Ш.** 73.

6. Рис. 44. 1. $999^2 \cdot 99^3=968\ 359\ 372\ 299$. 2. $(21)_{1001}+(21)_{2001}=47\ 531\ 502$.

3. Подходит число $2^{39}-1=549\ 755\ 813\ 886$. Оно не простое, так как $2^{39}-1=(2^{13})^3-1^3=(2^{13}-1) \cdot (2^{26}+2^{13}+1)$. 4. $(222)_{110}=1\ 319\ 010$. 5. 58-е число Фибоначчи равно 591 286 729 879. 6. Наибольшее целое число, записанное тремя двойками, $2^{22}=4\ 194\ 304$, обращенное 4 034 914. 7. 635 560 829 887 353 003.

8. Наименьшие числа, образующие дружественную пару, 220 и 284. Вторая



дружественная пара: $1184 = 2^5 \cdot 37$, $1210 = 2 \cdot 5 \cdot 11^2$. Искомое произведение $1\ 432\ 640 \cdot 9\ 654^3 = 279\ 726\ 264 \cdot 10 \cdot 3^3 - 2^3 = 19 \cdot 11 \cdot 2\ 282\ 085\ 087\ 530 \cdot 12 \cdot (3)_7 = 28$. 13. При $K = 26$ получается $2^{25} = 33\ 554\ 432$. 14. $(1001)_{101} = 5\ 045\ 051$, а обращенное $1\ 505\ 405$. 15. Седьмое простое число Мерсенна $M_{19} = 2^{19} - 1 = 524\ 287$. Куб этого числа равен $94\ 115\ 263\ 443\ 707\ 903$. 16. 6 700 417. Таков один из делителей числа F_4 . 17. 591 285 297 239. 18. $2 \cdot (9\ 876\ 543 - 3\ 546\ 789) = 12\ 839\ 508$. 19. Возможны только два восьмизначных числа: 12 345 678 или 23 456 789. Сумма квадратов цифр равна 204 только у первого числа.

7. Рис. 45. 1—2. 12-е простое число Мерсенна $M_{127} = 2^{127} - 1 = 170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727$. 2—3. Подходящее 12-значное число $M_{39} = 2^{39} - 1 = 549\ 755\ 813\ 887$, оно составное, а обращенное 788 318 557 945. 3—4. $709^2 = 602\ 681$. 4—5. «Шахматным» называют число 18 446 744 073 709 551 615. Таким количеством зерен пшеницы по легенде должен был бы шах наградить изобретателя игры в шахматы, удовлетворяя его «скромное» желание положить на первую клетку шахматной доски одно зернышко, на вторую два, на третью 2^2 , ..., на 64-ю, последнюю, 2^{63} . Но такое количество зерен в тысячи раз больше годового урожая пшеницы во всем мире того времени. 5—6. Есть 10 полных квадратов, в каждом из которых все цифры различны; наибольшим из них является $9\ 814\ 072\ 356 = 99\ 066^2$. Уменьшенное на 1 и обращенное $5\ 532\ 704\ 189$. 6—7. 971. 7—8. $(1001)_{101} = 5\ 045\ 051$, а обращенное $1\ 505\ 405$. 8—9. 54 321. 9—10. Седьмым простым числом Мерсенна является $M_{19} = 2^{19} - 1 = 524\ 287$. Удвоенный куб этого числа — 188 230 526 887 415 806. 10—11. $F_4 = 2^{2^5} + 1 = 641$. 6 700 417 составное. Берем второй множитель. 11—12. 765 432. 12—13. $654^3 = 279\ 726\ 264$. 13—14. 4 294 967 297 — наименьшее не простое число Ферма F_4 . 14—15. 733. 15—16. $\lg 2^{11211} = 11\ 211 \cdot \lg 2 = 11\ 211 \cdot 0,30\ 103 = 3374,84\ 733$, и так как характеристика логарифма равна 3374, то число 2^{11211} имеет 3375 цифр. 16—17. 5 221 225. 17—18. 54 321. 18—19. $11^8 = 214\ 358\ 881$, обращенное 188 853 412. 19—20. $17^2 = 289$. 20—21. 52-е

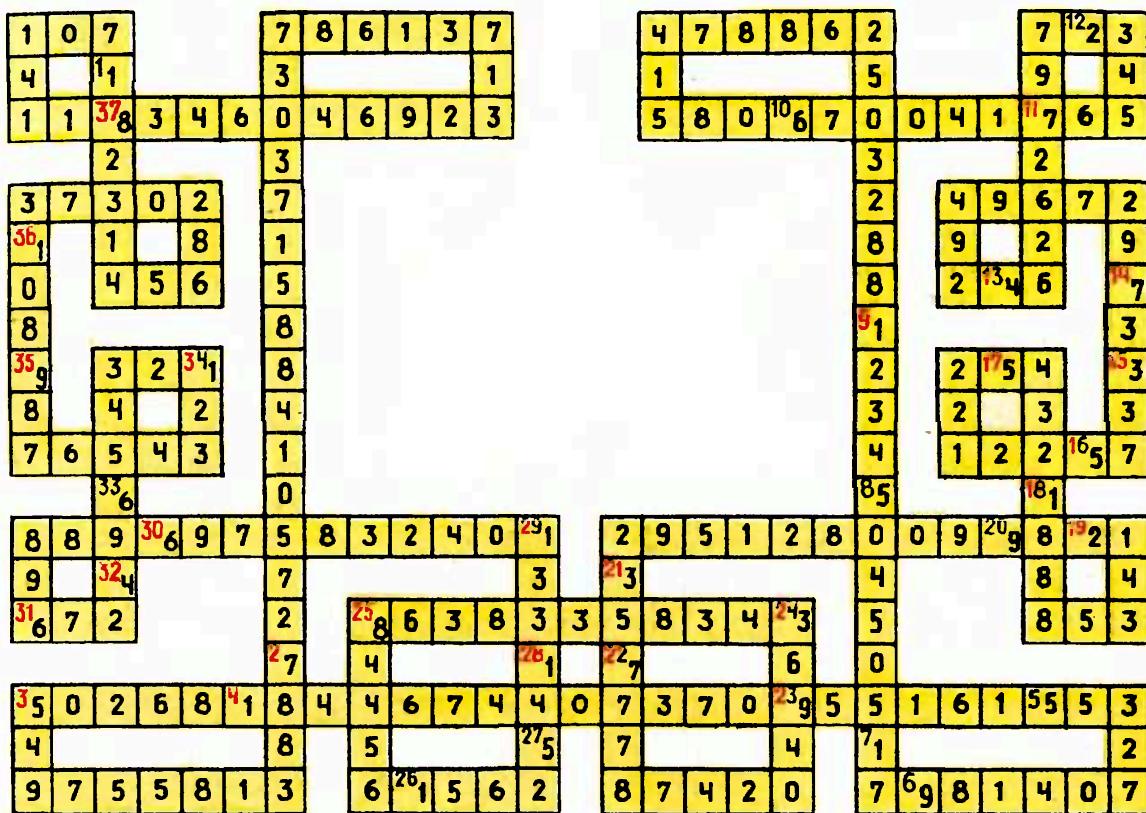


Рис. 45

число Фибоначчи $32\ 951\ 280\ 099$, обращенное $99\ 008\ 215\ 923$. $21-22.$ 357. $22-23.$ 7 778 742 049. $23-24.$ 963. $24-25.$ $34\ 385\ 338\ 368 = 2^{35}$. $25-26.$ $919^2 = 844\ 561$. $26-27.$ $5^6 = 15\ 625$. $27-28.$ 541. $28-29.$ $11^3 = 1331$. $29-30.$ 1 042 385 796. $30-31.$ 698 896. $31-32.$ $82^2 = 6724$. $32-33.$ Три первых совершенных числа 6; 28; 496. $33-34.$ 654 321. $34-35.$ 123 456 789. $35-36.$ $99^2 = 9801$. $36-37.$ Седьмое совершенное число $Q_7 = 137\ 438\ 691\ 328$, $100Q_7 - 13\ 582\ 591\ 472 = 13\ 730\ 286\ 541\ 328$. $37-1.$ $3^4 = 81$.

ЕСЛИ ДЕЛИТСЯ ЧИСЛО, ТО РЕШЕНЬЕ ПОДОШЛО

1. Очевидно, что задуманное число должно делиться на 7, 19, 17 и дважды на 11. Наименьшим таким числом является $19 \cdot 17 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 7 = 273\ 581$. Легко проверить, что его делимость на свои множители сохраняется как при увеличении на 7 или 19, так и при уменьшении на 17.

2. Запишем искомое число в виде $77k$, $k \in N$, и расчленим его на два слагаемых: $77k = 74k + 3k$. Наименьшее подходящее значение $k = 16$, тогда $3k = 48$.

Значит, искомое число $77k = 77 \cdot 16 = 1232$.

3. Имеем $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$. Это есть произведение трех последовательных натуральных чисел, из которых одно обязательно кратно 3 и хотя бы одно четное. Произведение делится на 3 и на 2, следовательно, и на 6.

4. 1) $\overline{aba} = 101 \cdot a + 10 \cdot b$ и $a + b = 7 \cdot k$, $k \in N$. Тогда $\overline{aba} = 101 \cdot a + 10 \cdot (7k - a) = 91a + 70k = 7 \cdot (13a + 10k)$ делится на 7.

2), 3), 4) Доказательство аналогично.

5. Представим $k^3 + 17k = (k-1)k(k+1) + 18k$. Так как в правой части равенства первое слагаемое есть произведение трех последовательных натуральных чисел, то обязательно одно из них делится на 2, а другое — на 3. Второе слагаемое делится на 6.

Значит, $k^3 + 17k$ делится на 6.

Представим $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2 + 1)$.

Любое натуральное $n > 1$ можно представить как $5k-3$, или $5k-2$, или $5k-1$, или $5k$, или $5k+1$, $k \in N$. Произведение трех последовательных натуральных чисел $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ всегда кратно 6, а при $n=5k-1$, $5k$ и $5k+1$ оно, кроме того, кратно 5, следовательно, оно кратно 30. При остальных значениях $n=5k-3$ и $n=5k-2$ произведение, оставаясь кратным 6, не будет кратным 5, но зато становится кратным 5 последний множитель заданного числа, а именно $n^2 + 1 = 25k^2 - 30k + 10$ и $n^2 + 1 = 25k^2 - 10k + 5$. Таким образом, оказывается, что $n^5 - n$ делится на 30 при любом значении $n \in N$.

6. Применяем последовательно признак делимости на 19 (см. с. 83).

$$\begin{array}{r}
 1y44674407370955161 \quad | 8 \\
 \underline{-} \quad 16 \\
 \dots 517 \quad 7 \\
 \quad | 14 \\
 \dots 553 \quad 1 \\
 \quad | 2 \\
 \dots 955 \quad 5 \\
 \quad | 10 \\
 \dots 096 \quad 5 \\
 \quad | 10 \\
 \dots 710 \quad 6 \\
 \quad | 12 \\
 \dots 372 \quad 2 \\
 \quad | 4 \\
 \dots 737 \quad 6 \\
 \quad | 12 \\
 \dots 074 \quad 9 \\
 \quad | 18 \\
 \dots 409 \quad 2 \\
 \quad | 4 \\
 \dots 441 \quad 3 \\
 \quad | 6 \\
 \dots 744 \quad 7 \\
 \quad | 14 \\
 \dots 675 \quad 8 \\
 \quad | 16 \\
 \dots 469 \quad 1 \\
 \quad | 2 \\
 \hline
 \dots 1y6 \quad 2 \\
 \quad | 4
 \end{array}$$

$$\dots 1(y+1)0$$

Получилось трехзначное число, у которого 0 единиц, $y+1$ десятков и одна сотня. Такое число делится на 19 только тогда, когда $y=8$ (190 делится на 19). Другое выражение «шахматного» числа: $M_{64}=2^{64}-1$.

7. Применяем признак делимости на 13 (см. с. 83): разбиваем число на грани слева — направо, по 3 цифры в каждой грани, и вычисляем $(170+183+469+x\bar{31}+303+884+730)-(141+460+231+687+715+105)=(2770+100\cdot x)-2339=431+100\cdot x$.

В этой сумме при любом значении цифры x , $0 \leq x \leq 9$, изменяется только число сотен от 4 до 13. Из всех получающихся чисел: 431, 531, .., 1331 — только 1131 делится на 13. Отсюда $x=7$.

8. Пусть $7k$, $k \in N$, — искомое число. Вычислим НОК чисел 2, 3, 4, 5, 6. Оно равно 60. Исходя из условия, заключаем, что при делении числа $7k$ на 60 в остатке также будет 1. Значит, $7k=60n+1$, $n \in N$. Наименьшее из чисел вида $60n+1$, кратных семи, получается при $n=5$, следовательно, искомое число $7k=60\cdot 5+1=301$.

9. Достаточно найти остаток от деления на 997 суммы остатков слагаемых (см. с. 83) Искомый остаток равен 348.

10. 1) Пользуясь понятием арифметического вычета по модулю 9 (см. с. 83), запишем:

$$\begin{array}{ll} 9991 \equiv 1 \pmod{9} & 9995 \equiv 5 \pmod{9} \\ 9992 \equiv 2 \pmod{9} & 9996 \equiv 6 \pmod{9} \\ 9993 \equiv 3 \pmod{9} & 9997 \equiv 7 \pmod{9} \\ 9994 \equiv 4 \pmod{9} & 9998 \equiv 8 \pmod{9} \end{array}$$

Тогда, как известно (см. с. 83), $9991 \cdot 9992 \cdot 9993 \cdot 9994 \cdot 9995 \cdot 9996 \cdot 9997 \times 9998 \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \pmod{9} = 0 \pmod{9}$, т. е. искомый остаток равен нулю.

2) $\frac{1990!}{1980!} = 1981 \cdot 1982 \cdot \dots \cdot 1989 \cdot 1990$ Пользуясь понятием арифметического вычета, запишем $1981 \equiv 1 \pmod{11}$, $1982 \equiv 2 \pmod{11}$, ..., $1989 \equiv 9 \pmod{11}$, $1990 \equiv 10 \pmod{11}$

$\frac{1990!}{1980!} \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \pmod{11} = 3628800 \equiv 10 \pmod{11}$. Искомый остаток равен десяти.

11. 1) Преобразуем:

$$7777^{2222} + 2222^{7777} = (7777^{2222} - 1^{2222}) + (2222^{7777} + 1^{7777}).$$

Число в первой скобке делится на $7777 - 1 = 7776$, а число во второй скобке делится на $2222 + 1 = 2223$ (см. с. 83)

Оба эти числа кратны девяти, следовательно, и заданное число делится на девять.

2) Так как $2222 \equiv 2 \pmod{3}$, то $2222^2 \equiv 4 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$, а $2222^{2222} \equiv (2222^2)^{1111} \equiv 1^{1111} \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$.

Так как $4444 \equiv 1 \pmod{3}$, то $4444^{4444} \equiv 1 \pmod{3}$, $8888 \equiv 2 \pmod{3}$, $8888^2 \equiv 4 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$, $8888^{8888} = (8888^2)^{4444} \equiv 1^{4444} \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$. Следовательно, $2222^{2222} + 4444^{4444} + 8888^{8888} \equiv 1 \pmod{3} + 1 \pmod{3} + 1 \pmod{3} \equiv 3 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$, т. е. делится на 3.

3) Преобразуем заданную сумму:

$$2^{2145} + 3^{2145} = (2^{15})^{143} + (3^{15})^{143} \text{ — делится на } 2^{15} + 3^{15} = 32768 + 14348907 = 14381675 = 175 \cdot 241 \cdot 341.$$

Чтобы доказать делимость заданного числа на 11, заметим, что $3^5 \equiv 1 \pmod{11}$, т. е. что число 3^5 при делении на 11 дает остаток, равный 1. Отсюда следует: $3^{2145} = 3^5 \cdot 3^{429} \equiv 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{11}$.

Подобным образом из $2^5 \equiv -1 \pmod{11}$ следует, что $2^{2145} \equiv (-1)^{429} \pmod{11} \equiv -1 \pmod{11}$.

Так как $3^{2145} \equiv 1 \pmod{11}$ и $2^{2145} \equiv -1 \pmod{11}$, то $3^{2145} + 2^{2145} \equiv 1 + (-1) \equiv 0 \pmod{11}$.

Так доказана делимость заданной суммы на 241, на 341 и на 11.

12. Преобразуем заданное выражение к виду:

$$M = (17\ 557^k - 9593^k) - (13\ 213^k - 7240^k).$$

Известно (см. с. 83), что

$$17\ 557^k - 9593^k \text{ делится на } 17\ 557 - 9593 = 7964 = 44 \cdot 181,$$

$$13\ 213^k - 7240^k \text{ делится на } 13\ 213 - 7240 = 5973 = 33 \cdot 181.$$

Следовательно, число M делится на 181.

Представим его иначе: $M = (17\ 557^k - 13\ 213^k) - (9593^k - 7240^k)$.

Вновь заключаем, что $17\ 557^k - 13\ 213^k$ делится на $17\ 557 - 13\ 213 = 4344 = 24 \cdot 181$, $9593^k - 7240^k$ делится на $9593 - 7240 = 2353 = 13 \cdot 181$. Следовательно, число M еще раз делится на 181, т. е. оно делится на $181^2 = 32\ 761$.

13. Пусть x и y — целые числа, тогда $M = xy(x^2 - y^2) = xy(x+y)(x-y)$. Если x или y делится на 3, то M кратно трем. Если же ни x , ни y не делится на 3, то возможны четыре случая:

- 1) $x = 3n+1$, $y = 3m+1$, $n, m \in N$, тогда $x - y$ делится на 3;
- 2) $x = 3n+1$, $y = 3m+2$, $n, m \in N$, тогда $x + y$ делится на 3;
- 3) $x = 3n+2$, $y = 3m+1$, $n, m \in N$, тогда $x + y$ делится на 3;
- 4) $x = 3n+2$, $y = 3m+2$, $n, m \in N$, тогда $x - y$ делится на 3.

В каждом случае какой-либо множитель числа M делится на 3, следовательно, M кратно 3.

14. Перемножив 7, 8 и 9, получим 504. Деление числа 566 000 на 504 дает остаток 8. Вычитая 8 из 504, получаем 496. Восстановленное число 566 496.

СТЕПЕНЬ... КОРЕНЬ— ГЛЯДИ В КОРЕНЬ

1. 1) Замечаем, что заданное число M близко к $10^{12} = (10^4)^3$. Выскажем гипотезу: не возникло ли оно как результат возвведения в куб разности $10^4 - a$? Вычислим разность $10^{12} - M = 3\ 296\ 371\ 331 = M_1$, и сопоставим M_1 с числом, которое вычитается из 10^{12} в формуле $(10^4 - a)^3 = 10^{12} - 3 \cdot 10^8 \cdot a + 3 \cdot 10^4 \cdot a^2 - a^3$. Замечаем, что M_1 близко к числу $33 \cdot 10^8 = 3 \cdot 10^8 \cdot 11$. Сопоставление этого числа с числом $3 \cdot 10^8 \cdot a$ приводит к следующей гипотезе: $a = 11$. Непосредственная проверка подтверждает догадку.

Значит, число M действительно является кубом числа $10^4 - 11 = 9989$; $M = 9989^3$.

2) Выскажем гипотезу: $N = (10^4 + a)^3 = 10^{12} + 3 \cdot 10^3 \cdot a + 3 \cdot 10^4 a^2 + a^3$. $N - 10^{12} = 11\ 443\ 374\ 872$ близко к $114 \cdot 10^8 = 3 \cdot 38 \cdot 10^8$. Предполагаем, что $a = 38$. Проверка подтверждает. Значит, $N = (10^4 + 38)^3$.

2. 1) Складываем числа последовательно «от конца к началу»: $1984 \cdot 1983^2 - 1983^2 = 1983^2 \cdot (1984 - 1) = 1983^3$; прибавляем к этому числу третью «с конца» слагаемое; $1983^3 - 1984 \cdot 1983^3 = -1983^4$; следующий результат $+1983^5$ и т. д.

Поднявшись до предпоследнего «с конца» слагаемого, получим -1983^{2000} и, наконец, $1983^{2000} - 1983^{2000} = 0$ — ответ.

2) Выражение в скобках — сумма членов геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = 1987$. По формуле $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$ получаем

$$S_n = \frac{1987^{1991} \cdot 1987 - 1}{1987 - 1} = \frac{1987^{1992} - 1}{1986}.$$

Заданное выражение принимает вид

$$\frac{1986 \cdot (1987^{1992} - 1)}{1986} + 1 = 1987^{1992} — \text{ответ.}$$

3. 1) Представим $1998 = 4 \cdot 499 + 2$, тогда $1998^{1998} = 1998^{4 \cdot 499} \cdot 1998^2$. Так как последняя цифра основания рассматриваемой степени 8, то по свойству 2 (см. с. 89) последняя цифра в записи данного числа 4.

2) Представим $99\ 999 = 4 \cdot 24\ 999 + 3$, тогда $953^{99999} = 953^{4 \cdot 24999} \cdot 953^3$. Так как последняя цифра основания рассматриваемой степени 3, то по свойству 2 (см. с. 89) последняя цифра в записи заданного числа 7.

4. 1) Числа, обладающие свойствами, указанными в условии задачи, имеют вид $M = 3^x 5^y 7^z$.

Поскольку $M:3$ есть третья степень некоторого числа, то

a) $y \equiv z \equiv 0 \pmod{3}$; $x \equiv 1 \pmod{3}$, тогда $x = 1, 4, 7, \dots, 34, 37, \dots, 70, \dots$.

Поскольку $M:5$ есть пятая степень некоторого числа, тогда

б) $x \equiv z \equiv 0 \pmod{5}$; $y \equiv 1 \pmod{5}$, тогда $y = 1, 6, 11, 16, 21, \dots$.

Поскольку $M:7$ есть седьмая степень числа, то

в) $x \equiv y \equiv 0 \pmod{7}$; $z \equiv 0 \pmod{7}$, тогда $z = 1, 8, 15, \dots$.

По условиям б) и в) число x должно делиться на 5 и 7. Из п. а) находим, что наименьшее подходящее значение $x = 70$.

По условиям а) и в) число y должно делиться на 3 и 7. Из п. б) находим, что наименьшее подходящее значение $y = 21$.

По условиям а) и б) число z должно делиться на 5 и 3. Из п. в) находим, что наименьшее подходящее значение $z = 15$.

Следовательно, наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условиям задачи, $M = 3^{70} \cdot 5^{21} \cdot 7^{15}$.

2) Искомое число имеет вид $M = 2^x \cdot 3^y \cdot 5^z \cdot 7^k$.

Поскольку $M:2$ есть квадрат натурального числа, то $y \equiv z \equiv k \equiv 0 \pmod{2}$; $x \equiv 1 \pmod{2}$, тогда $x = 1, 3, 5, \dots, 105, \dots$.

Поскольку $M:3$ есть куб числа, то $x \equiv z \equiv k \equiv 0 \pmod{3}$; $y \equiv 1 \pmod{3}$, тогда $y = 1, 4, 7, \dots, 70, \dots$.

Поскольку $M:5$ есть пятая степень числа, то $x \equiv y \equiv k \equiv 0 \pmod{5}$; $z \equiv 1 \pmod{5}$, тогда $z = 1, 6, 11, \dots, 126, \dots$.

Поскольку $M:7$ есть седьмая степень числа, то $x \equiv y \equiv z \equiv 0 \pmod{7}$; $k \equiv 1 \pmod{7}$, тогда $k = 1, 8, 15, \dots, 120, \dots$.

Пригодны значения x , кратные произведению $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$; наименьшее из возможных значений $x = 105$; значения y , кратные произведению $2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$;

наименьшее из возможных значений $y=70$; значения z , кратные произведению $2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$; наименьшее из них $z=42 \cdot 3 = 126$; значения k , кратные числу $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$; наименьшее из них $k=30 \cdot 4 = 120$. Следовательно, наименьшее искомое число $M=2^{105} \cdot 3^{70} \cdot 5^{126} \cdot 7^{120}$.

5. 1) Число $1190!$ состоит из 1990 множителей, $1990! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \cdot 1989 \cdot 1990$. Из этих множителей каждый второй делится на 2, $1990 = 2 \cdot 995$, следовательно, между 1 и 1990 заключено 995 чисел, делящихся на 2. Из этих чисел каждое второе делится на 4; $995 = 2 \cdot 497 + 1$, следовательно, среди 995 чисел, делящихся на 2, имеется 497 таких, которые делятся на $4 = 2^2$. Продолжая выделять степени числа 2, получим:

$$\begin{aligned} 497 &= 2 \cdot 248 + 1, & 248 \text{ чисел делятся на } 8 = 2^3, \\ 248 &= 2 \cdot 124, & 124 \text{ числа делятся на } 2^4, \\ 124 &= 2 \cdot 62, & 62 \text{ числа делятся на } 2^5, \\ 62 &= 2 \cdot 31, & 31 \text{ число делится на } 2^6, \\ 31 &= 2 \cdot 15 + 1, & 15 \text{ чисел делятся на } 2^7, \\ 15 &= 2 \cdot 7 + 1, & 7 \text{ чисел делятся на } 2^8, \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1, & 3 \text{ числа делятся на } 2^9, \\ 3 &= 2 \cdot 1 + 1, & \text{одно число делится на } 2^{10}. \end{aligned}$$

Таким образом, в разложение числа $1990!$ по степеням простых чисел множитель 2 входит с показателем степени, равным $995 + 497 + 248 + 124 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 1983$. Отсюда $k_1 = 1983$.

Далее: $1990 = 3 \cdot 663 + 1$, $663 = 3 \cdot 221$, $221 = 3 \cdot 73 + 2$, $73 = 3 \cdot 24 + 1$, $24 = 3 \cdot 8$, $8 = 3 \cdot 2 + 2$.

Значит, в разложение числа $1990!$ множитель 3 входит с показателем степени, равным $663 + 221 + 73 + 24 + 8 + 2 = 991$. Отсюда $k_2 = 991$.

Аналогично $1990 = 5 \cdot 398$, $398 = 5 \cdot 79 + 3$, $79 = 5 \cdot 15 + 4$, $15 = 5 \cdot 3$. Значит, $k_3 = 398 + 79 + 15 + 3 = 495$.

Далее, $1990 = 7 \cdot 284 + 2$, $284 = 7 \cdot 40 + 4$, $40 = 7 \cdot 5 + 5$, $k_4 = 329$, $1990 = 11 \cdot 180 + 10$, $180 = 11 \cdot 16 + 4$, $16 = 11 \cdot 1 + 5$, $k_5 = 197$.

2) Так как $10! = 3\ 628\ 800$ и $3\ 628\ 800 = 1983 \cdot 1829 + 1883$, то $k_1 = 1829$. Так как $3\ 628\ 800 = 1993 \cdot 1820 + 1540$, то $k_2 = 1820$.

6. Вычисляем: $1! \cdot 2! \cdots \cdot 9! = M = 18\ 349\ 334\ 722\ 510\ 848 \cdot 10^5$ и $10! = 3\ 628\ 800$. Заданное уравнение принимает вид $M! = (3\ 628\ 800)^t \cdot A$.

Вычисляем: $M = 3\ 628\ 800 \cdot 505\ 658\ 474\ 496\ 000$, $505\ 658\ 474\ 496\ 000 = 3\ 628\ 800 \cdot 139\ 345\ 920$, $139\ 345\ 920 = \overline{3\ 628\ 800} \cdot 38 + 145\ 152$. Значит,

$$t = 505\ 658\ 474\ 496\ 000 + 139\ 345\ 920 + 38 = 505\ 658\ 613\ 841\ 958.$$

7. Пусть $x^{1991} = y$, тогда $x = \sqrt[1991]{y}$ и $(\sqrt[1991]{y})^y = 1991$ или $y^y = 1991^{1991}$, отсюда $y = 1991$ и $x = \sqrt[1991]{1991}$.

8. Заданное произведение умножим на 1, представленную дробью $\frac{1988 - 1}{1987}$, и получим:

$$\frac{1}{1987} \cdot (1988 - 1) \cdot (1988 + 1) \cdot (1988^2 + 1) \cdots \cdot (1988^{2^k} + 1) = \frac{1988^{2^k+1} - 1}{1987}$$

9. 1) Если прибавим 5 к последнему числу (к 20) в первом слагаемом, 4 — к последнему числу (к 12) во втором слагаемом и 6 — к последнему числу (к 30) в третьем, то после извлечения всех корней получим $5 + 4 + 6 = 15$.

Следовательно, без добавочного увеличения левая часть данного выражения меньше 15.

2) Если из последнего числа (33 554 433) в первом слагаемом и из последнего числа (7777) во втором слагаемом вычтем по 1, то после извлечения всех корней получим $2+6=8$. Следовательно, без произведенного уменьшения левой части данного выражения она больше 8.

3) Если к последнему числу (к 80) в левой части неравенства прибавим 1, то после извлечения всех корней получим 2. Следовательно, неувеличенная левая часть неравенства меньше 2.

4) Если из последнего числа (из 513) левой части неравенства вычтем 1, то после извлечения всех корней получим 9. Следовательно, неуменьшенная левая часть неравенства больше 9.

10. а) 99 и 197; б) 50, 88, 105.

ТРУДНОСТЬ ЗАДАЧ ПОВЫШАЕМ, РЕШЕНИЯ НАЙТИ ПРИГЛАШАЕМ

$$\begin{aligned}
 1. 1) \quad & \underbrace{11\dots1}_k \underbrace{55\dots56}_{k-1} = \underbrace{11\dots1}_k \cdot 10^k + 5 \cdot \underbrace{11\dots1}_k + 1 = \frac{10^k - 1}{9} \cdot 10^k + 5 \cdot \frac{10^k - 1}{9} + 1 = \\
 & = \frac{1}{9} (10^{2k} + 4 \cdot 10^k + 4) = \left(\frac{10^k + 2}{3} \right)^2 \\
 & \text{Извлекая квадратный корень, получим } \frac{10^k + 2}{3}.
 \end{aligned}$$

2) Сначала рассмотрим более общий случай 2.в. Пусть $a+2b=x$, тогда $a(a+b)(a+2b)(a+3b)+b^4=(x-2b)(x-b)x(x+b)+b^4=x^4-b^2x^2+b^4-2bx^3-b^2x^2=(x^2-bx-b^2)^2$.

Извлекая квадратный корень, получим x^2-bx-b^2 .

Задачи 2, а и 2, б — частные случаи задачи 2, в. В первой при $a=1982$ и $b=1$ получаем $x=1982+2=1984$; ответ: $1984^2-1984-1$. Во второй задаче при $a=1979$ и $b=7$ получаем $x=1979+14=1993$; ответ: $1993^2-7 \cdot 1993-49$.

2. По теореме Виета (см. с. 97) $x_1+x_2+x_3=12$ (1), $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=46$ (2), $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3=56$ (3). Тогда объем параллелепипеда $V=x_1 \cdot x_2 \cdot x_3=56$, площадь полной поверхности $S_{\text{п}}=2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=92$, диагональ

$$d=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}=\sqrt{(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}=\sqrt{144-92}=2\sqrt{13}$$

3. Пусть x — высота башни в метрах, α, β, γ — углы, под которыми видна вершина башни из точек, указанных в условии, тогда $\tan \alpha = \frac{x}{144}, \tan \beta = \frac{x}{225},$

$\tan \gamma = \frac{x}{324}$. По условию задачи $\alpha+\beta+\gamma=270^\circ$, поэтому $\tan \gamma = \tan(270^\circ -$

$$-(\alpha+\beta))=\cot(\alpha+\beta)=\frac{1-\tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}=\frac{1-\frac{x}{144} \cdot \frac{x}{225}}{\frac{x}{144} + \frac{x}{225}}=\frac{144 \cdot 225 - x^2}{369x}$$

Решая уравнение $\frac{144 \cdot 225 - x^2}{369x} = \frac{x}{324}$, находим:
 $x = \frac{1080}{\sqrt{77}} \approx 123$ м.

4. Замечаем, что $40320 = 8!$, а $8 = \log \sqrt{\sqrt{2}}$, тогда $40320 = (\log \sqrt{\sqrt{2}})!$.

5. По формуле, выражающей k -е n -угольное число,

$$(n)_{n+1} = \frac{n+1}{2} (n^2 - 2(n-1)) = \frac{1}{2} (n^3 - n^2 + 2).$$

По той же формуле $(n+1)_n = \frac{1}{2} (n^3 - 2n^2 + 3n)$.

Требуется доказать, что $\frac{1}{2} (n^3 - n^2 + 2) > \frac{1}{2} (n^3 - 2n^2 + 3n)$ при $n \geq 3$.

Положим, что оно верно. Тогда, упрощая, получаем $n^2 - 3n + 2 > 0$ или $(n-2)(n-1) > 0$, что действительно верно при $n \geq 3$.

Теперь для завершения доказательства следует осуществить «обратный ход» преобразований. Для этого к обеим частям заведомо справедливого (при $n \geq 3$) неравенства $n^2 - 3n + 2 > 0$ прибавляем по $n^3 - 2n^2 + 3n$, а затем, умножая на $\frac{1}{2}$, получаем доказываемое неравенство.

6. Складывая левые и правые части заданных уравнений, получаем:

$$\frac{1}{x+y+z} + \frac{1}{x+y+p} + \frac{1}{x+z+p} + \frac{1}{y+z+p} = \frac{275}{504}.$$

Вычитая из этого уравнения поочередно заданные уравнения, получим систему

$$\frac{1}{y+z+p} = \frac{1}{9}, \quad \frac{1}{x+z+p} = \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{x+y+p} = \frac{1}{7}, \quad \frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{6},$$

и, наконец, $x=1$, $y=2$, $z=3$, $p=4$.

7. Из первого уравнения системы следует $x+y=2^x$. Подставляя во второе уравнение, получим $2^x \cdot 6^x = 248832$, или $12^x = 12^5$, тогда $x=5$, $y=27$.

8. Придадим системе уравнений другой вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi + A + P = \frac{1}{5} \cdot \Pi \cdot A \cdot P \cdot I \\ I + P + A = \frac{1}{3} \cdot \Pi \cdot A \cdot P \cdot I \\ \Pi + I + P = \frac{3}{10} \cdot \Pi \cdot A \cdot P \cdot I \\ \Pi + A + I = \frac{4}{15} \cdot \Pi \cdot A \cdot P \cdot I \end{array} \right. \quad (1)$$

Складывая эти уравнения, находим $\Pi + A + P + I = \frac{11}{30} \cdot \Pi \cdot A \cdot P \cdot I$. (2)

Сопоставляя (1) и (2), получим $I = \frac{1}{6} \cdot \Pi \cdot A \cdot P \cdot I$; $\Pi = \frac{1}{30} \cdot \Pi \cdot A \cdot P \cdot I$; $A = \frac{1}{15} \cdot \Pi \cdot A \cdot P \cdot I$; $P = \frac{1}{10} \cdot \Pi \cdot A \cdot P \cdot I$. Отсюда $I \cdot P \cdot A = 30$; $\Pi \cdot I \cdot P = 15$; $\Pi \cdot A \cdot I = 10$; $\Pi \cdot A \cdot P = 6$. (3)

Перемножая уравнения системы (3), получим $(\Pi \cdot A \cdot P \cdot I)^3 = 27000$. Отсюда $\Pi \cdot A \cdot P \cdot I = 30$. (4)

Сопоставляя (3) и (4), находим $\Pi = 1$, $A = 2$, $P = 3$, $I = 5$.

9. Придадим заданному уравнению такой вид:

$$\frac{577}{520} = \frac{\mathbf{Ж}\cdot\mathbf{У}\cdot\mathbf{К}\cdot\mathbf{И} + \mathbf{Ж}\cdot\mathbf{У} + \mathbf{Ж}\cdot\mathbf{И} + \mathbf{К}\cdot\mathbf{И} + 1}{\mathbf{У} + \mathbf{К}\cdot\mathbf{И} + \mathbf{У} + \mathbf{И}}.$$

Обе дроби преобразуем в цепные (см. с. 97):

$$1 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{7}}} = \mathbf{Ж} + \cfrac{1}{\mathbf{У} + \cfrac{1}{\mathbf{К} + \cfrac{1}{\mathbf{И}}}}$$

Полагаем, что $\mathbf{Ж}=1$, $\mathbf{У}=9$, $\mathbf{К}=8$, $\mathbf{И}=7$. Проверка подтверждает правильность.

10. Требуется доказать, что $k_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ — целое число. Покажем сначала, что $\frac{(2n)!}{a!b!}$ — целое число, если $2n \geq a+b$. (1)

Пусть числа $(2n)!$, $a!$ и $b!$ разложены по степеням одних и тех же простых чисел: $(2n)! = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, $a! = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}$, $b! = p_1^{\gamma_1} \dots p_k^{\gamma_k}$, $i=1, 2, \dots, k$, где $\alpha_i = \left[\frac{2n}{p_i} \right] + \left[\frac{2n}{p_i^2} \right] + \dots$, $\beta_i = \left[\frac{a}{p_i} \right] + \left[\frac{a}{p_i^2} \right] + \dots$,

$$\gamma_i = \left[\frac{b}{p_i} \right] + \left[\frac{b}{p_i^2} \right] + \dots, i=1, 2, \dots, k.$$

Тогда

$$\frac{(2n)!}{a!b!} = \frac{p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}}{p_1^{\beta_1+\gamma_1} \dots p_k^{\beta_k+\gamma_k}}.$$

Так как $2n \geq a+b$, то (см. с. 97)

$$\begin{aligned} \left[\frac{2n}{p} \right] &\geq \left[\frac{a}{p} + \frac{b}{p} \right] \geq \left[\frac{a}{p} \right] + \left[\frac{b}{p} \right], \\ \left[\frac{2n}{p^2} \right] &\geq \left[\frac{a}{p^2} + \frac{b}{p^2} \right] \geq \left[\frac{a}{p^2} \right] + \left[\frac{b}{p^2} \right], \dots \end{aligned}$$

Значит, в числителе дроби (2) каждое p_i входит в большей степени, чем в знаменатель, откуда следует, что (2) — целое число. В частности, числа $c_1 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ и $c_2 = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$ целые ($2n = n+n$ и $2n = (n-1)+(n+1)$ — условие (1) выполнено).

Преобразуем c_2 и k_n : $c_2 = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!n}{(n!)^2 \cdot (n+1)} = \frac{c_1 \cdot n}{n+1}$,

$$k_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot (n+1)} = \frac{c_1}{n+1}.$$

Так как c_2 — число целое, то $c_1 \cdot n$ должно делиться на $n+1$, но n не делится на $n+1$, значит, c_1 делится на $n+1$, откуда следует также, что и k_n — целое число.

Отыскать наименьшее значение n , делающее справедливым равенство, приведенное в условии задачи, проще всего непосредственной проверкой: пробуя значения $n=1, 2, 3, \dots$, скоро наталкиваемся на подходящее значение $n=5$. При $n=5$ получается $S_5=64=8^2$, $S_6=196=14^2$, $S_7=625=25^2$, и заданное равенство подтверждается.

Вопрос о существовании других подходящих значений n оставим открытым

11. а) Подмечаем: числа -8 и 4 , -6 и 2 располагаются на числовой оси симметрично относительно числа -2 , поэтому, положив $x-2=y$, мы сразу получим удобный для решения вид уравнения 4-й степени — биквадратное:

$$(y^2 - 16) \cdot (y^2 - 36) - 2925 = 0.$$

Оно имеет два вещественных корня: $y_{1,2} = \pm 9$ или $x_1 = -7$, $x_2 = 11$.

б) Подмечаем, что левая сторона уравнения есть квадрат суммы $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} = y$. Уравнение принимает вид $y^2 = \frac{4}{3}y$, откуда следует $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{4}{3}$, тогда $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} = 0$ не имеет вещественных корней и $\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow x^4 - 4x + 3 = 0$ (*)

Легко догадываемся, что этому уравнению удовлетворяет $x_1 = 1$.

Делим $x^4 - 4x + 3$ на $x - 1$, чтобы представить левую сторону уравнения (*) в виде произведения. Получаем:

$$(x-1)(x^3+x^2+x-3)=0.$$

Вновь путем пробы легко находим, что $x=1$ — корень многочлена во второй скобке. Разделив x^3+x^2+x-3 на $x-1$, получаем x^2+2x+3 . Этот трехчлен вещественных корней не имеет.

Окончательно. $x_1 = x_2 = 1$

в) Очевидная подстановка $y = \frac{50-x}{x+1}$ приводит к системе

$$\begin{cases} (x+y) + xy = 50, \\ (x+y) \cdot xy = 578, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y = 32 \\ xy = 18, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y = 18, \\ xy = 32 \end{cases}$$

Окончательно: $x_{1,2} = 16 \pm \sqrt{238}$, $x_3 = 16$, $x_4 = 2$.

г) Запишем уравнение, равносильное заданному:

$$\left(\frac{1}{44}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{1935}}{44}\right)^x = 1.$$

Напрашивается подстановка $\sin \alpha = 1/44$, тогда $\cos \alpha = \sqrt{1935}/44$ и уравнение принимает вид $\sin^x \alpha + \cos^x \alpha = 1$ (**)

Опираясь на определение функций $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ и теорему Пифагора, легко обосновать, что уравнение (**) имеет единственное решение: $x=2$.

д) Преобразуем первые два слагаемых заданного уравнения:

$$y^2(x^2y^2 - 16xy) = y^2(x^2y^2 - 16xy + 64 - 64) = y^2(xy - 8)^2 - 64y^2.$$

Уравнение принимает вид $y^2(xy - 8)^2 + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$, т. е. $(y(xy - 8))^2 + (x - 2y)^2 = 0$, откуда следует $y(xy - 8) = 0$,

$$x - 2y = 0,$$

тогда $x_1 = y_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 4$, $y_{2,3} = \pm 2$

е), ж) Сама конструкция уравнений подсказывает предположение о том, что их левая сторона есть развернутая сумма квадратов некоторых алгебраических сумм. Выполненные преобразования приводят к следующим уравнениям, равносильным заданным:

$$e) (7x + y)^2 + (x + 7z)^2 + (7y + z)^2 = 0$$

Ответ: $x = y = z = 0$

$$\text{ж}) \quad x^2(x-y)^2 + y^2(y-z)^2 + z^2(z-x)^2 = 0.$$

Ответ: $x=y=z$ — произвольные равные числа.

12. а) Разделив обе стороны уравнения на $x-5$, получим:

$$-\sqrt{\frac{6x^2 - 40x + 150}{(x-5)^2}} - \sqrt{\frac{4x^2 - 60x + 100}{(x-5)^2}} = 2,$$

$$-\sqrt{\frac{5(x-5)^2 + (x+5)^2}{(x-5)^2}} - \sqrt{\frac{5(x-5)^2 - (x+5)^2}{(x-5)^2}} = 2,$$

$$-\sqrt{5 + \left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2} - \sqrt{5 - \left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2} = 2.$$

Полагая $\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2 = y$, получим $\sqrt{5+y} - \sqrt{5-y} = 2$, откуда $y=4$,

$$\text{ответ: } x_1 = 15, x_2 = \frac{5}{3}.$$

б) Положим, что на месте числа $\sqrt{7}$ находится некоторый параметр p , $p=\sqrt{7}$, тогда уравнение принимает вид $x^3 - x^2p - x^2 + x + p^2 - p = 0$, или $p^2 - (x^2 + 1)p + (x^3 - x^2 + x) = 0$.

Решая это квадратное уравнение относительно p , получим $p_1 = x$, $p_2 = x^2 - x + 1$. Заменяя p числом $\sqrt{7}$, получим $x_1 = \sqrt{7}$ и $x^2 - x + 1 - \sqrt{7} = 0$, откуда

$$x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{7}-3}}{2}.$$

в) Сопоставление целой части заданного уравнения и знаменателя дробной части дает надежду выделить в составе уравнения квадрат знаменателя. Поэтому полагаем $3^x - 4^x + 2^{x+1} = y$ (*).

Возводим в квадрат правую и левую стороны этого равенства:

$$9^x + 16^x + 4^{x+1} - 2 \cdot 12^x + 4 \cdot 6^x - 4 \cdot 8^x = y^2.$$

Производя замену, получим $y^2 - 3(y-1) = \frac{1}{y}$, или $y^3 - 3y^2 + 3y - 1 = 0$, тогда $(y-1)^3 = 0$, $y = 1$.

Возвращаясь к (*), получим уравнение:

$$3^x - 4^x + 2^{x+1} = 1, \quad 3^x = 4^x - 2 \cdot 2^x + 1, \\ (\sqrt{3^x})^2 = (2^x - 1)^2, \quad \sqrt{3^x} = |2^x - 1|.$$

Пусть $2^x - 1 \geq 0$, тогда $x \geq 0$, или $\sqrt{3^x} = 2^x - 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x = 1$, т. е.

$$\sin^x \frac{\pi}{6} + \cos^x \frac{\pi}{6} = 1, \text{ следовательно, } x = 2.$$

Корень единственный, так как графики функций $y = 2^x$ и $y = \sqrt{3^x} + 1$ пересекаются только в одной точке (рис. 46).

Пусть $2^x - 1 < 0 \Rightarrow x < 0$. Тогда $\sqrt{3^x} = 1 - 2^x$.

Это уравнение можно решить только приближенно. Графическое решение (рис. 47) дает корень $x \approx -1$. Окончательно: $x_1 = 2$; $x_2 \approx -1$.

13. Стороны данного треугольника можно считать гипотенузами трех вспомогательных треугольников, «цепленных» с заданным, катеты которых 3 и 9,

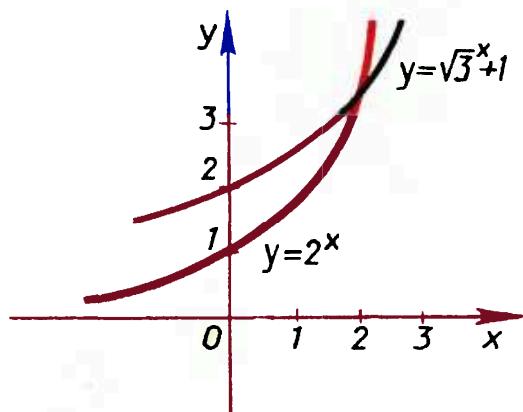


Рис. 46

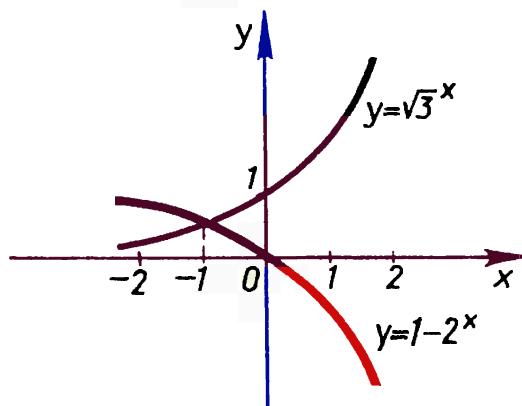


Рис. 47

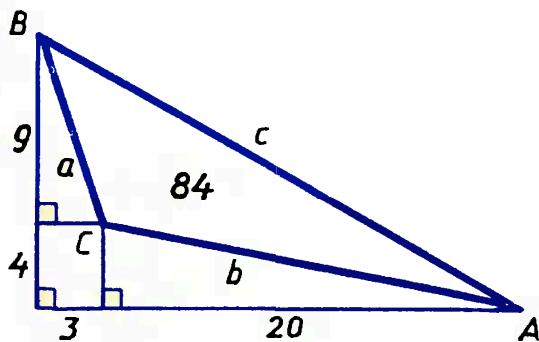


Рис. 48

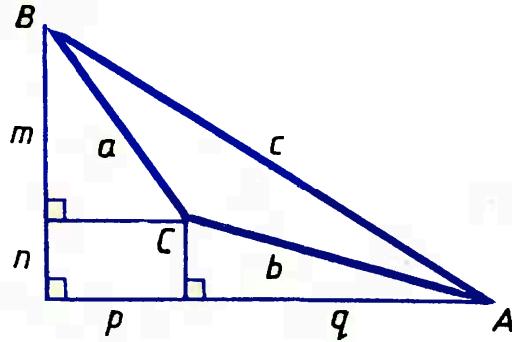


Рис. 49

20 и 4, 3+20 и 9+4. Тогда естественно возникает подходящая геометрическая модель, отображающая подмеченные соотношения (рис. 48).

Вычисляем площадь заданного треугольника:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{23 \cdot 13}{2} - \frac{3 \cdot 9}{2} - \frac{4 \cdot 20}{2} - 3 \cdot 4 = 84.$$

Если подмеченные числовые связи выразить буквенно, т. е. положить, что $a = \sqrt{m^2 + p^2}$, $b = \sqrt{n^2 + q^2}$, $c = \sqrt{(m+n)^2 + (p+q)^2}$, то, очевидно, для вычисления площади треугольника, и с такими «устрашающими» сторонами, пригодна такая же геометрическая модель (рис. 49).

Треугольник с заданными сторонами a , b и c будет всегда тупоугольным, так как $c^2 > a^2 + b^2$. Поэтому

$$S_{\triangle ABC} = \frac{(m+n)(p+q)}{2} - \frac{mp}{2} - \frac{nq}{2} - np,$$

или окончательно:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |mq - np|.$$

Формула площади треугольника с такими «несимпатичными» сторонами оказалась вполне симпатичной!

14. Полагая a переменным, рассмотрим $f(a) = 2a + \frac{1}{a^2}$ при $0 < a \leq 0,5$. Так как $f'(a) = 2 - \frac{2}{a^3} < 0$ при $0 < a \leq 0,5$, то $f(a)$ — убывающая функция на заданном интервале, поэтому $f(a) > f(0,5) = 5$, тогда $2a + \frac{1}{a^2} > 5$ при $0 < a < 0,5$.

СОДЕРЖАНИЕ

В математику тропинки Одолейте без запинки	4	
Здесь загадки и шарады. За разгадку — две награды	17	
И фокусы покажем, И секрет расскажем	33	
Наш конструктор числовой, Поработай головой!	41	
Ситуации в жизни такие: Либо сложные, либо простые	49	
Натуральное число в арифметику вошло, Тайн немало принесло	63	
Это ребусы из цифр, Буквы, звездочки — их шифр	69	
Ребусы «кросснамбер», А еще — «чайнамбер»	75	
Если делится число, То решенье подошло	83	
Степень... корень — Гляди в корень	89	
Трудность задач повышаем, Решенья найти приглашаем	97	
Решения и ответы	103	



**Борис Анастасьевич Кордемский,
Аскер Абас-оглы Ахадов**

УДИВИТЕЛЬНЫЙ МИР ЧИСЕЛ

(Математические головоломки
и задачи для любознательных)

Зав. редакцией *Р. А. Хабиб*

Редактор *Т. В. Автономова*

Младший редактор *Л. Е. Козырева*

Художники: *Ж. В. Варенцова,*

М. А. Салин, Е. П. Титков

Художественный редактор *Е. Н. Карасик*

Технический редактор *С. С. Якушкина*

Корректоры *Л. А. Ежова,*

Н. В. Красильникова

ИБ № 9598

Сдано в набор 05.11.85 Подписано к печати 26.08.86
Формат 60×90¹/₁₆ Бум офс № 2 Гарнитура литературная
Печать офсетная Усл. печ л 9,0+0,25 форз
Усл. кр -отт 37,31 Уч -изд л 8,46+0,47 форз Тираж
500 000 экз Заказ 581 Цена 90 коп

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Пропаганда» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

Отпечатано с диапозитивов Смоленского полиграфкомбината Росглобполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли на Калининском ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинате детской литературы им. 50-летия СССР Росглобполиграфпрома Госкомиздата РСФСР 170040, Калинин, проспект 50-летия Октября, 46



Вопрос: „0“



„Пицца“
„Пицца“
„Пицца“
„Пицца“

„Пицца“
„Пицца“
„Пицца“
„Пицца“

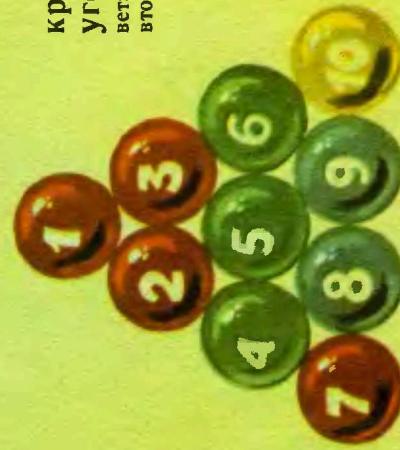


Приготовьте 4 одинаковых кубика и раскрасьте, как показано.

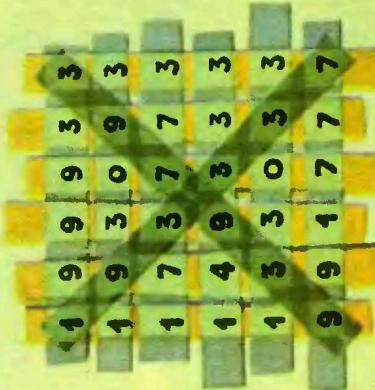
Кто быстрее поставит их «столбиком» так, чтобы на каждой из четырех боковых граней были представлены все 4 цвета.



Это не очень просто.



Изменив положение трех кружков, опрокиньте «треугольник» вниз вершиной. (Ответ: красные № 1 и № 7 — к красным во втором ряд; желтый № 10 — вниз.)



Числовой супер-квадрат А.Шинкина

При чтении строк вправо и влево, столбиков — вниз и вверх, каждой из двух диагоналей — вниз и вверх, получается 28 шестизначных чисел. Все — простые, кроме одного 907307.

