А. Д. АЛЕКСАНДРОВ
А. Л. ВЕРНЕР
В. И. РЫЖИК

Геометрия

8 класс

Учебник

для общеобразовательных организаций

Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации

4-е издание

Москва
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2019

УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721
А46

На учебник получены **положительные экспертные заключения** по результатам **научной** (заключение РАН № 10106-5215/577 от 14.10.2011 г.), **педагогической** (заключения РАО № 302 от 29.01.2014 г. и № 098 от 05.02.2015 г.) и **общественной** (заключения РКС № 325 от 07.02.2014 г. и № 755 от 20.03.2015 г.) экспертиз.

Авторы:
А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик

Условные обозначения

▲▼ — начало и конец дополнительного материала внутри пункта

□ ■ — начало и конец доказательства

★ ★ — начало и конец материала повышенной трудности, необязательного для всех

Александров А. Д.

А46 Геометрия. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — 4-е изд. — М. : Просвещение, 2019. — 176 с. : ил. — ISBN 978-5-09-069699-9.

Учебник является второй частью трёхлетнего курса геометрии для общеобразовательных школ. Учебник написан в соответствии с требованиями ФГОС. В текстах имеются справки словесника с переводами и пояснениями геометрических терминов, комментарии с интересными фактами. Задачный материал разнообразен и представлен в рубриках по видам деятельности, позволяющим формировать познавательные универсальные учебные действия. После каждой главы предлагаются задачи на повторение и задачи под рубрикой «Применяем компьютер», рассчитанные на работу с компьютерной средой *Живая математика*.

УДК 373:514+514(075.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-5-09-069699-9

Оглавление

Введение
Повторение

Повторим важнейшие результаты, с которыми вы знакомились в 7 классе и на которые опирается курс 8 класса. Они относятся к треугольникам и к параллельности прямых.

1. Треугольники

Равенство треугольников можно определить по-разному. Проще всего определить равные треугольники как треугольники, у которых соответственные стороны равны (рис. 1). Конечно, у равных треугольников равны и все другие соответственные элементы. В частности, **соответственные углы равных треугольников равны** (рис. 2).

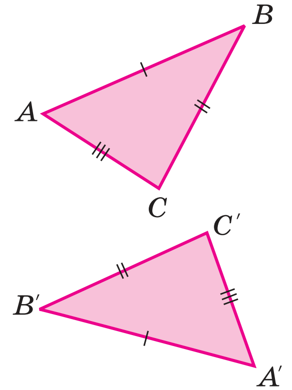
Устанавливают равенство треугольников не только по равенству их сторон, но и по признакам равенства треугольников.

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК *равенства треугольников*. **Если две стороны и угол, заключённый между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, заключённому между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны** (рис. 3).

ВТОРОЙ ПРИЗНАК *равенства треугольников*. **Если два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника соответственно равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника, то такие треугольники равны** (рис. 4).

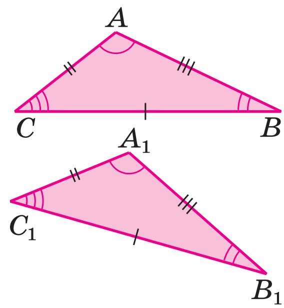
Доказывая равенство двух треугольников, можно говорить, что «треугольники равны по трём сторонам (или ... по двум сторонам и углу между ними, или ... по стороне и двум прилежащим к ней углам)».

Признаки равенства треугольников позволяют доказать *теорему о внешнем угле*. **Внешний угол треугольника больше не смежного с ним угла треугольника** (сделайте рисунок).



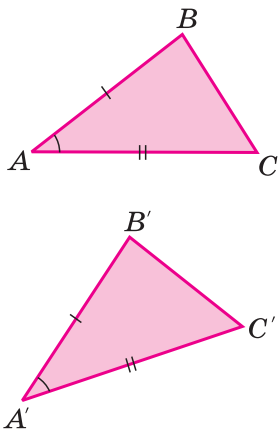
Если $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ и $B'C' = BC$, то $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$.

Рис. 1



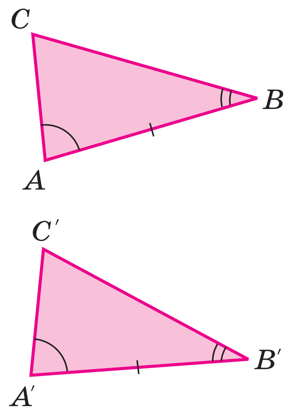
Если $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Рис. 2



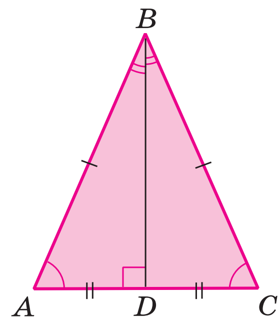
Если $A'B' = AB$, $A'C' = AC$ и $\angle A' = \angle A$, то $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$.

Рис. 3



Если $A'B' = AB$, $\angle A' = \angle A$ и $\angle B' = \angle B$, то $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$.

Рис. 4



1) Если $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$.
2) Если $AB = BC$ и $AD = DC$, то $\angle ABD = \angle CBD$ и $BD \perp AC$.

Рис. 5

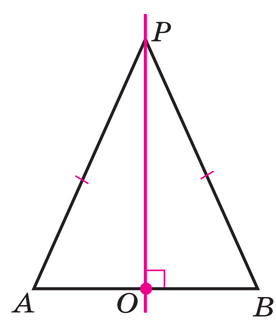
Напомним теоремы о равнобедренном треугольнике.

Теорема (*о свойствах равнобедренного треугольника*). **В равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2) медиана, проведённая к его основанию, является биссектрисой и высотой** (рис. 5).

Из теоремы о свойствах равнобедренного треугольника следует характерное свойство точек серединного перпендикуляра:

ХАРАКТЕРНОЕ СВОЙСТВО *точек серединного перпендикуляра*. **Точка равноудалена от концов отрезка тогда и только тогда, когда она лежит на его серединном перпендикуляре.**

Напомним, что **характерным** (или **характеристическим**) **свойством** некоторой фигуры называется такое её свойство, которое является также признаком этой фигуры. Словесный оборот *тогда и только тогда* употребляют, объединяя в одном утверждении два **взаимно обратных утверждения.** Например, в утверждении о характерном свойстве точек серединного перпендикуляра объединены два следующих взаимно обратных утверждения:

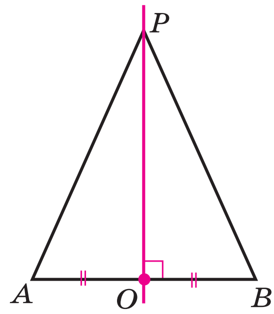


Если $PA = PB$ и $PO \perp AB$, то $AO = OB$.

Рис. 6

ПРИЗНАК *серединного перпендикуляра*. **Если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру этого отрезка** (рис. 6).

СВОЙСТВО *серединного перпендикуляра*. **Если точка принадлежит серединному перпендикуляру отрезка, то она равноудалена от его концов** (рис. 7).



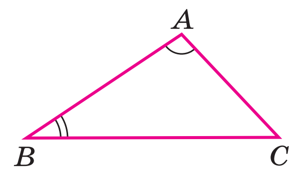
Если $PO \perp AB$ и $AO = OB$, то $PA = PB$.

Рис. 7

Условие и заключение теоремы, связанные оборотом *тогда и только тогда,* равноправны, или, как говорят в математике, **равносильны.**

Два взаимно-обратных утверждения содержатся и в

Теореме (*о сравнении сторон и углов треугольника*). **В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол,** и обратно: **2) против большего угла лежит бо́льшая сторона** (рис. 8).

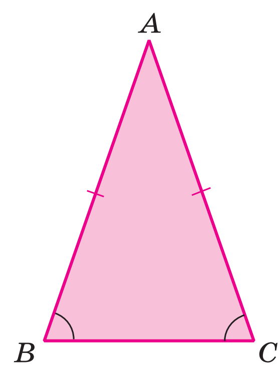


1) *Если $BC > AC$, то $\angle A > \angle B$.*
2) *Если $\angle A > \angle B$, то $BC > AC$.*

Рис. 8

Следствием этой теоремы является

ПРИЗНАК *равнобедренного треугольника*. **Если два угла треугольника равны, то этот треугольник равнобедренный** (рис. 9).



Если $\angle B = \angle C$, то $AB = AC$.

Рис. 9

Тем самым равенство двух углов треугольника является характерным свойством равнобедренного треугольника.

Опираясь на теорему о сравнении сторон и углов треугольника, можно доказать *неравенство треугольника*: **сумма двух сторон треугольника больше его третьей стороны.**

После изучения параллельности прямых была доказана

Теорема (*о сумме углов треугольника*). **Сумма углов треугольника равна 180°.**

Отметим два важных следствия этой теоремы:

Теорема (*о сумме углов четырёхугольника*). **Сумма углов четырёхугольника равна 360°.**

ПРИЗНАК *прямоугольника*. **Четырёхугольник, у которого три прямых угла, является прямоугольником.**

Вопросы для самоконтроля

1. Как можно установить равенство двух треугольников?
2. Какие вы знаете свойства равнобедренного треугольника?
3. Какой признак равнобедренного треугольника вы знаете?
4. Что вы знаете о свойстве точек серединного перпендикуляра отрезка?
5. Чему равна сумма углов треугольника?
6. Что вы знаете о внешнем угле треугольника?
7. Чему равна сумма углов четырёхугольника?
8. Какой признак прямоугольника вы знаете?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

1. Дайте развёрнутые формулировки и докажите следующие *признаки равенства прямоугольных треугольников*: а) по двум катетам; б) по гипотенузе и острому углу; в) по катету и прилежащему острому углу; г) по катету и противолежащему острому углу; д) по катету и гипотенузе.

2. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является его медианой и высотой. Докажите.

3. В равнобедренном треугольнике высота, проведённая к основанию, является его медианой и биссектрисой. Докажите.

4. Треугольник является равнобедренным, если в нём совпадают: а) высота и медиана; б) высота и биссектриса. Докажите.

5. Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы. Докажите.

6. Если AB — диаметр окружности, а C — некоторая точка окружности (отличная от A и B), то треугольник ABC прямоугольный. Докажите.

7. Докажите характерное свойство биссектрисы: точка внутри угла принадлежит биссектрисе угла тогда и только тогда, когда она равноудалена от сторон угла. (Напомним, что расстояние от точки до прямой — это длина перпендикуляра из этой точки на данную прямую.)

Разбираемся в решении

8. Из пяти признаков прямоугольных треугольников, перечисленных в задаче 1, докажем последний.

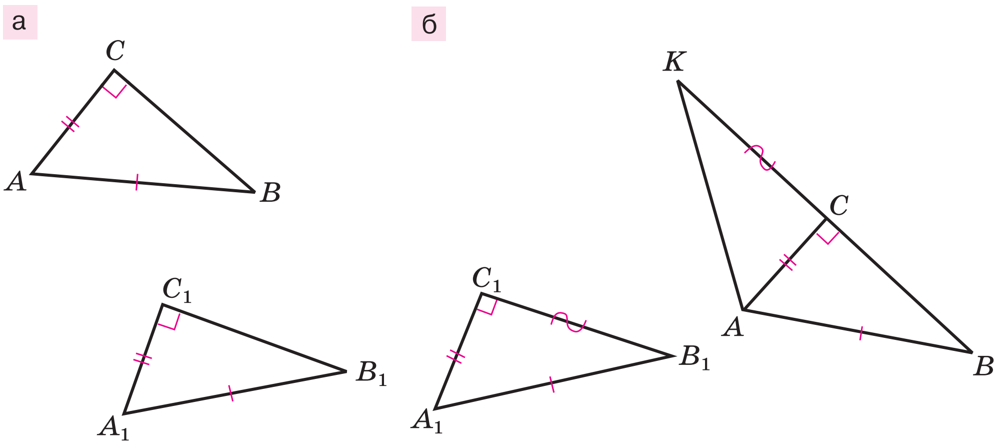


Рис. 10

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 10, *а*).

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство. На луче, дополнительном к лучу CB, отложим отрезок $CK = B_1C_1$ и построим треугольник ACK (рис. 10, *б*). Так как $AC = A_1C_1$ и $CK = B_1C_1$, то $\triangle AKC = \triangle A_1B_1C_1$ (по двум катетам). Следовательно, $AK = A_1B_1$. Поскольку $AB = A_1B_1$, то $AK = AB$, треугольник ABK равнобедренный и $\angle K = \angle B$. А тогда прямоугольные треугольники ABC и AKC равны (по гипотенузе и острому углу). Так как $\triangle AKC = \triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle AKC = \triangle ABC$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. ■

Смотрим

9. На рисунке 11 укажите равные друг другу треугольники.

10. На рисунке 12 укажите равные друг другу прямоугольные треугольники.

11. На рисунке 13 найдите равные друг другу углы.

12. На рисунке 14 укажите равнобедренные треугольники. Какие из них являются равносторонними? (На рисунке из пункта *ж* изображён куб.)

13. Вычислите величины углов, обозначенных буквой x на рисунке 15.

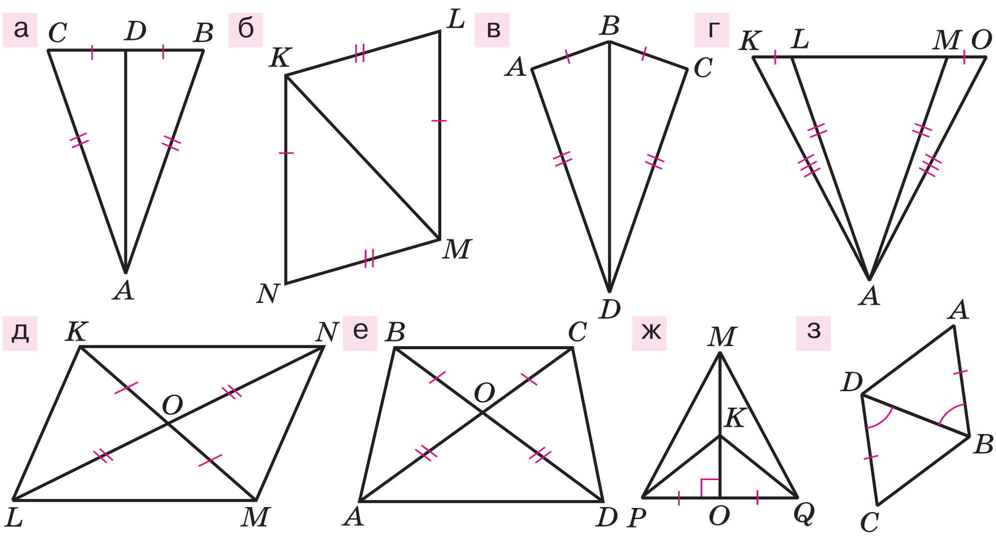


Рис. 11

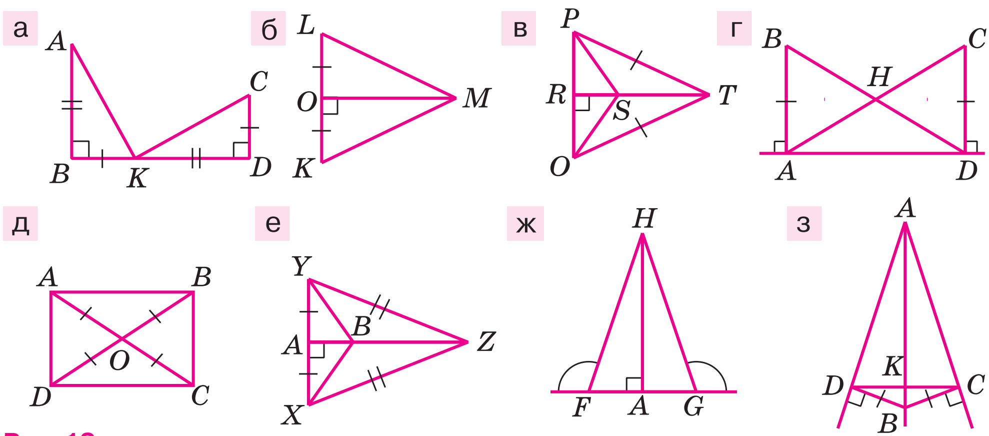


Рис. 12

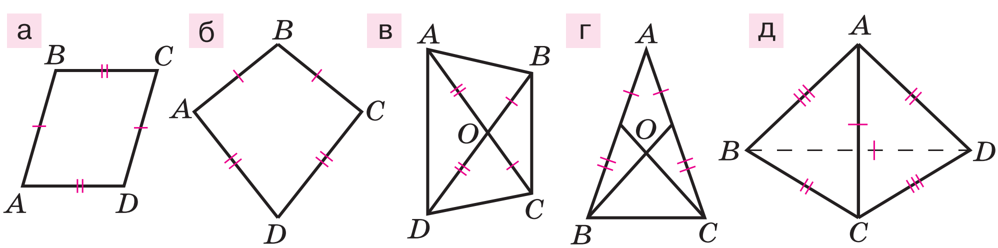


Рис. 13

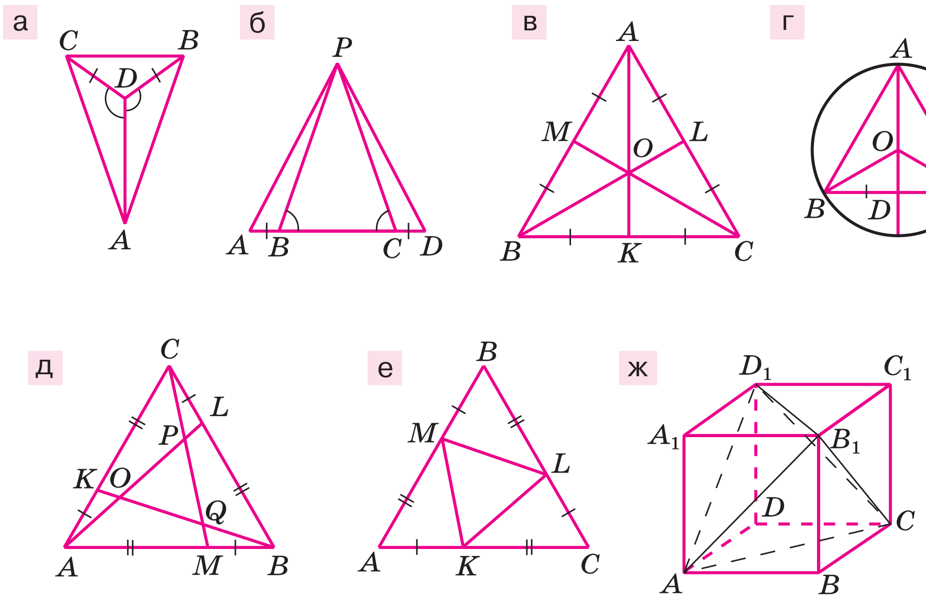

а
C B D A
б
P A B C D
в
A M L O B K C
г
A O B D C
д
C L P K O Q A M B
е
B M L A K C
ж
D_1 C_1 A_1 B_1 D C A B

Рис. 14

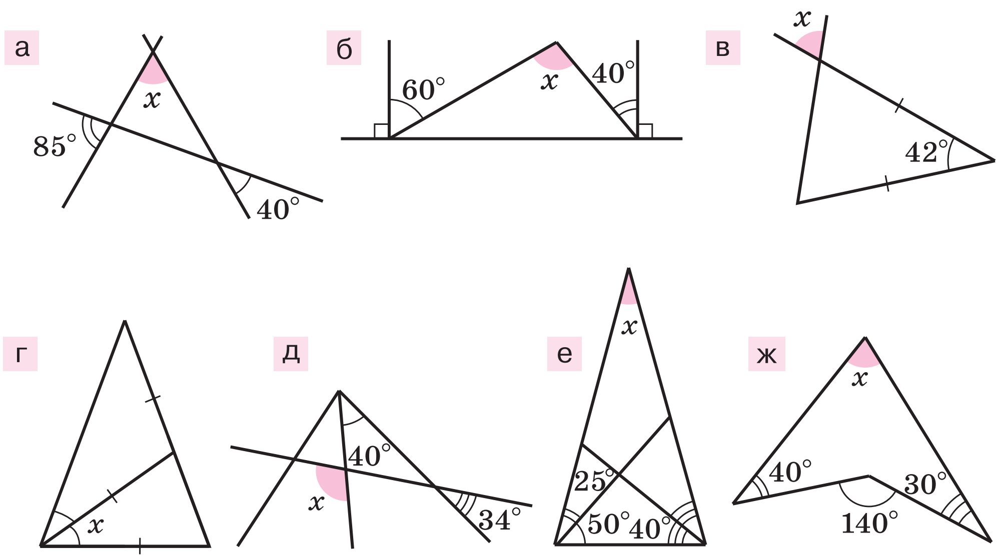

а
x 85° 40°
б
60° x 40°
в
x 42°
г
x
д
40° x 34°
е
x 25° 50° 40°
ж
x 40° 30° 140°

Рис. 15

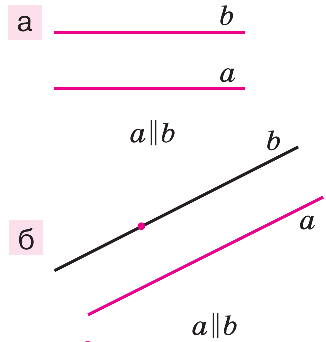


Рис. 16

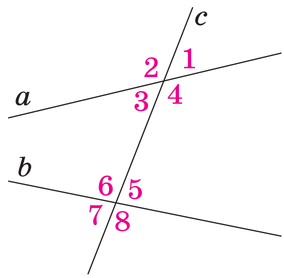
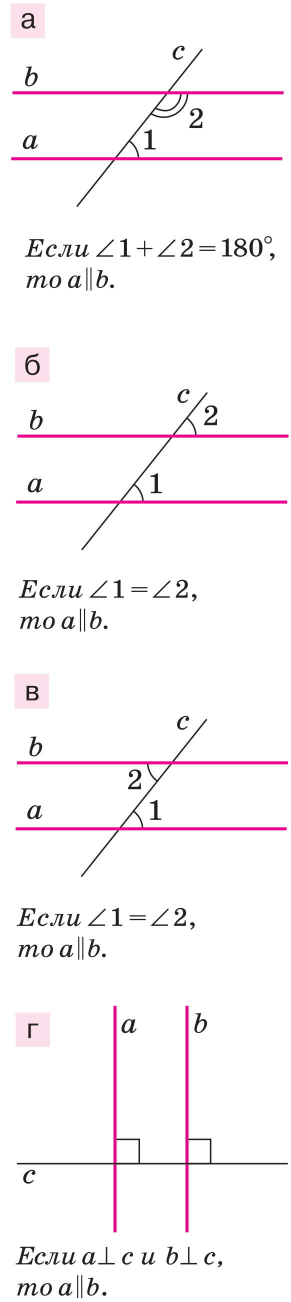


Рис. 17



Если $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, то $a \parallel b$.

Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$.

Если $\angle 1 = \angle 2$, то $a \parallel b$.

Если $a \perp c$ и $b \perp c$, то $a \parallel b$.

Рис. 18

2. Параллельность

Напомним, что две прямые называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 16, *а*). **Через данную точку, не лежащую на данной прямой, проходит лишь одна прямая, параллельная данной прямой** (рис. 16, *б*).

Параллельность двух прямых распознают по углам, которые они образуют с пересекающей их третьей прямой (рис. 17). Напомним, как называются углы, входящие в пары этих углов.

Углы 4 и 5 (а также углы 3 и 6) называются **внутренними односторонними**. Углы 3 и 5 (а также углы 4 и 6) называются **внутренними накрест лежащими**. Углы в парах 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8 называются **соответственными**.

Перечислим

ПРИЗНАКИ *параллельности прямых*:

1) Если при пересечении двух прямых *a* и *b* третьей прямой *c* окажется, что сумма двух внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые *a* и *b* параллельны (рис. 18, *а*).

2) Если при пересечении двух прямых *a* и *b* третьей прямой *c* окажется, что соответственные углы равны, то прямые *a* и *b* параллельны (рис. 18, *б*).

3) Если при пересечении двух прямых *a* и *b* третьей прямой *c* окажется, что накрест лежа-

щие углы равны, то прямые *a* и *b* параллельны (рис. 18, *в*).

Частным случаем каждого из этих трёх признаков параллельности является утверждение о *параллельности перпендикуляров на плоскости*:

на плоскости две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны (рис. 18, *г*).

Утверждения, обратные признакам параллельности прямых, говорят о *свойствах углов, образованных параллельными и секущей*:

СВОЙСТВО 1. Если две параллельные прямые пересекают третью прямую, то сумма образованных ими внутренних односторонних углов равна 180° (рис. 19, *а*).

СВОЙСТВО 2. Если две параллельные прямые пересекают третью прямую, то образованные ими соответственные углы равны (рис. 19, *б*).

СВОЙСТВО 3. Если две параллельные прямые пересекают третью прямую, то образованные ими внутренние накрест лежащие углы равны (рис. 19, *в*).

Частным случаем каждого из этих свойств является следующее утверждение: **прямая, пересекающая параллельные прямые и перпендикулярная одной из них, перпендикулярна и другой из них** (рис. 19, *г*).

Вопросы для самоконтроля

1. Какие прямые называются параллельными?
2. Как называются различные пары углов, образующихся при пересечении двух прямых третьей прямой?
3. Какие признаки параллельности двух прямых вы знаете?
4. Какими свойствами обладают различные пары углов, образующихся при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой?

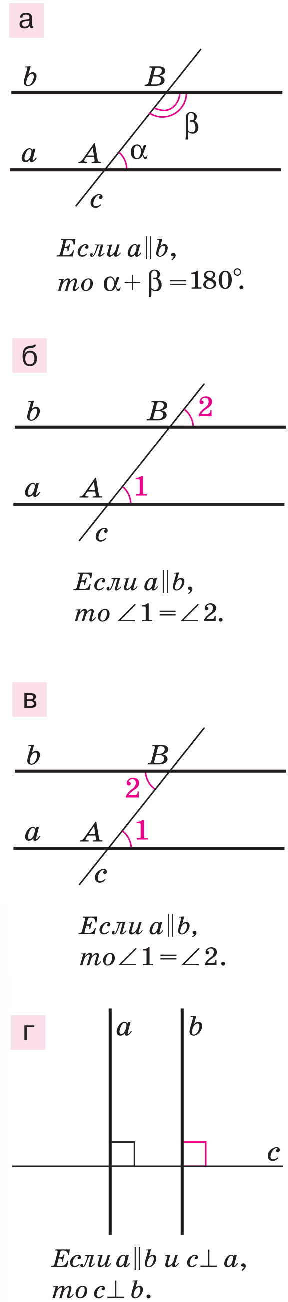


Рис. 19

3. Множество (геометрическое место) точек.

Пусть фигура имеет характерное свойство, определяющее, какие точки принадлежат этой фигуре, а какие не принадлежат. Тогда про эту фигуру говорят, что она является **множеством точек, обладающих данным свойством** (или **геометрическим местом точек, обладающих данным свойством**).

Например, окружность — это множество точек на плоскости, удалённых от данной точки плоскости (центра окружности) на данное расстояние (радиус окружности). А сфера — это множество точек в пространстве, удалённых от данной точки (центра сферы) на данное расстояние (радиус сферы). Геометрическое место точек на плоскости, равноудалённых от двух точек A и B, — это серединный перпендикуляр отрезка AB (см. рис. 6 и 7). Докажем, что **геометрическое место точек, принадлежащих некоторому углу и равноудалённых от сторон этого угла, — это биссектриса этого угла.**

□ Пусть точка X принадлежит биссектрисе угла A (рис. 20). Опустим из точки X перпендикуляры XB и XC на стороны угла A. В прямоугольных треугольниках AXB и AXC общая гипотенуза AX и равные острые углы A. Следовательно, $\triangle AXB = \triangle AXC$, а потому $XB = XC$. Итак, любая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон. Докажем обратное утверждение.

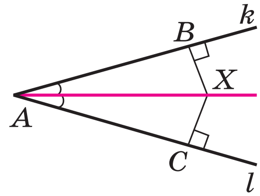


Рис. 20

Пусть точка X угла A равноудалена от сторон этого угла. Тогда равны друг другу перпендикуляры XB и XC, опущенные из точки X на стороны угла A: $XB = XC$ (рис. 21). В прямоугольных треугольниках AXB и AXC общая гипотенуза AX и равные катеты XB и XC. Поэтому эти треугольники равны (см. решение задачи 8 п. 1). Следовательно, равны их острые углы A, т. е. луч AX — биссектриса угла A. ■

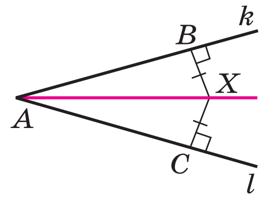


Рис. 21

Чтобы установить, что некоторая фигура F является множеством точек, имеющих некоторое характерное свойство, надо доказать два взаимно обратных утверждения: во-первых, доказать, что каждая точка фигуры F обладает этим свойством, и, во-вторых, доказать, что каждая точка, обладающая таким свойством, принадлежит фигуре F.

Термин *множество* имеет общематематический характер: говорят о множестве чисел, о множестве функций, о множестве фигур и т. п. А понятие *геометрическое место точек* вы можете встретить лишь в пособиях по геометрии.

Если точка X принадлежит множеству F, то пишут $X \in F$.

Анализируя задачи на построение, рассмотренные в 7 классе (например, решение задачи о построении треугольника по трём сторонам), мы убеждаемся, что их решения сводятся к построениям искомых точек как точек пересечения некоторых геометрических мест. В этом суть *метода геометрических мест*. Проиллюстрируем его решением такой задачи.

Задача. Построить точку, равноудалённую от вершин данного треугольника ABC.

Решение. Все точки, равноудалённые от вершин A и B, лежат на серединном перпендикуляре F_1 отрезка AB (рис. 22). Все точки, равноудалённые от вершин A и C, лежат на серединном перпендикуляре F_2 отрезка AC (рис. 23). Точка O, равноудалённая от всех вершин треугольника ABC — это точка пересечения перпендикуляров F_1 и F_2. ■

Решите методом геометрических мест такую *задачу*: построить точку, равноудалённую от всех сторон данного треугольника.

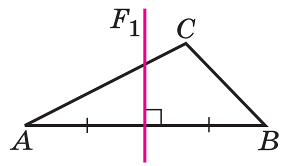


Рис. 22

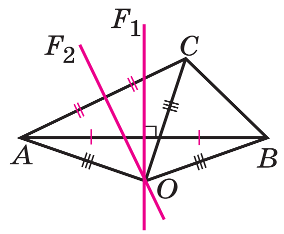


Рис. 23

Вопросы для самоконтроля

1. Как установить, что некоторая фигура является геометрическим местом точек, обладающих некоторым характерным свойством?
2. Перечислите известные вам геометрические места точек. Какими характерными свойствами они задаются?
3. В чём суть метода геометрических мест?

ЗАДАЧИ

Рисуем

14. Нарисуйте квадрат $ABCD$. Нарисуйте множество точек этого квадрата, равноудалённых от вершин: а) A и B; б) A и C.

Строим

15. Постройте треугольник: а) по стороне, высоте и медиане; б) по стороне, прилежащему к ней углу, и медиане, проведённой к этой стороне.

16. Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведённой к этому катету.

Глава I

Площади многоугольных фигур

Площадь — одно из важнейших понятий геометрии. С измерения площадей в древности и начиналась геометрия. Самая знаменитая (и самая важная) теорема геометрии — теорема Пифагора — это тоже теорема о площадях. Измерением площадей многоугольных фигур мы займёмся в этой главе.

§ 1. Многоугольники

1.1. Ломаные и многоугольники

Ломаной линией, или, короче, ломаной, называется фигура, состоящая из отрезков (рис. 24). Эти отрезки следуют друг за другом: один из концов первого отрезка служит концом второго, другой конец второго служит концом третьего и т. д. При этом соседние отрезки не лежат на одной прямой. Ломаную обозначают (и называют) по последовательным концам её отрезков. Так, на рисунке 24, *а* изображена ломаная $ABCDEFG$. Отрезки, составляющие ломаную, называются её **звеньями**.

Концы ломаной могут совпадать. Тогда ломаная называется **замкнутой** (рис. 24, *б*, *в*). Ломаная может пересекать сама себя, как на рисунке 24, *г*, коснуться сама себя, как на рисунке 24, *д*, а

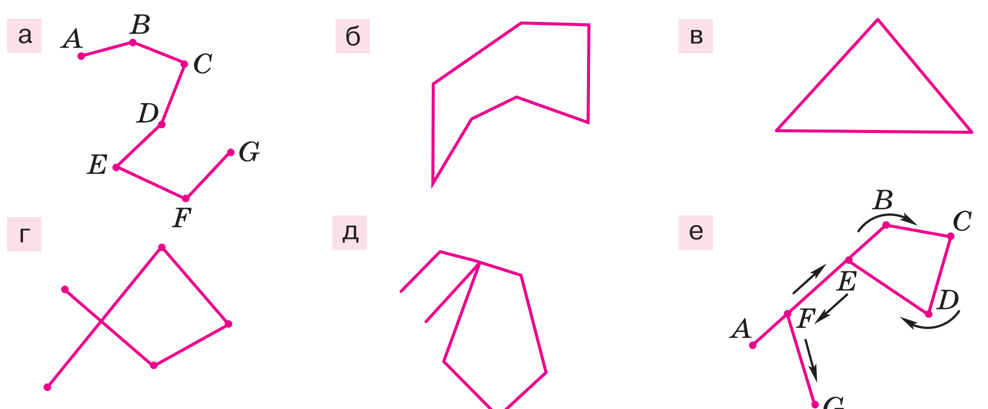


Рис. 24

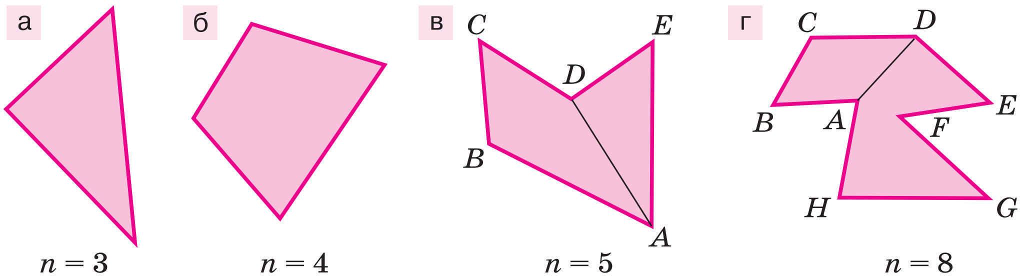


Рис. 25

также налегать на себя, как на рисунке 24, *е*. Если таких особенностей у ломаной нет, то она называется **простой** (рис. 24, *а*—*в*).

Простая замкнутая ломаная вместе с конечной частью плоскости, ограниченной ею, называется **многоугольником** (рис. 25). Сама ломаная называется **границей** этого **многоугольника**, составляющие её отрезки — его **сторонами**, а концы этих отрезков — его **вершинами**.

В каждой вершине многоугольника его стороны задают некоторый **угол многоугольника.** Он может быть как меньше развёрнутого (рис. 26, *а*), так и больше развёрнутого (рис. 26, *б*).

Число сторон многоугольника равно числу его вершин, т. е. числу его углов. Многоугольник называют по числу его углов: треугольник, четырехугольник и т. д. Когда число углов равно n, то говорят «n-угольник» (читается «эн-угольник»). Стороны и углы многоугольника называют его **элементами**.

О точках многоугольника, не лежащих на его границе, говорят, что они лежат **внутри многоугольника.** Например, точка M на рисунке 26, *б* лежит внутри многоугольника.

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий его несоседние вершины (например, отрезок AD на рисунке 25).

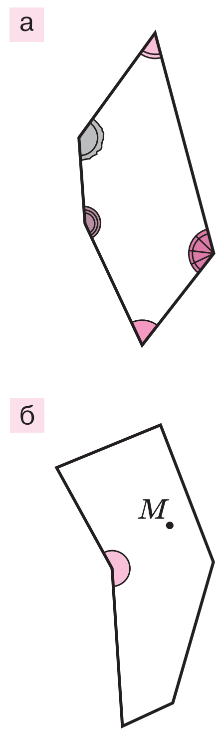


Рис. 26

Вопросы для самоконтроля

1. Как строят ломаную? Что такое замкнутая ломаная? простая ломаная?
2. Что такое многоугольник? Назовите элементы многоугольника.

ЗАДАЧИ

Смотрим

1.1. На рисунке 27 изображены различные ломаные. Назовите их. Назовите простые ломаные, замкнутые ломаные.

1.2. На рисунке 28 изображены ломаные, расположенные на поверхности куба. Какие из этих ломаных являются плоскими, а какие — неплоскими?

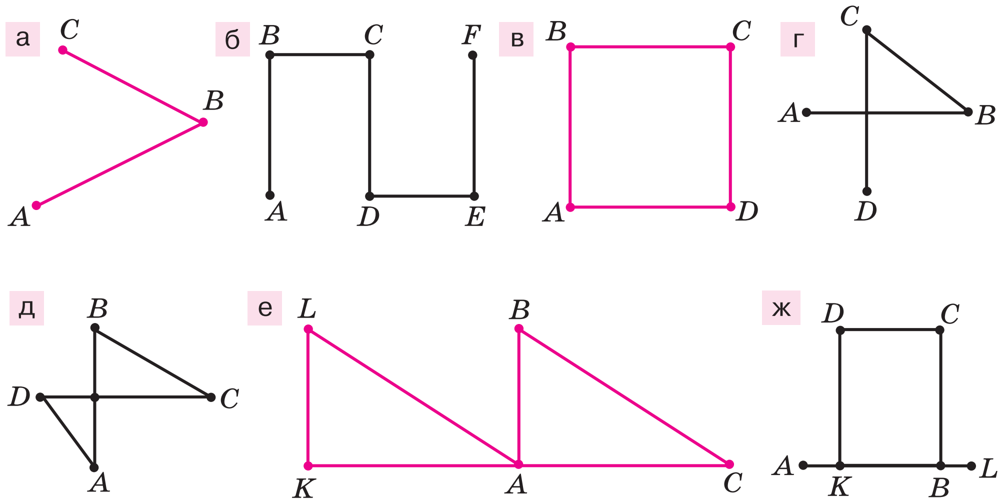


Рис. 27

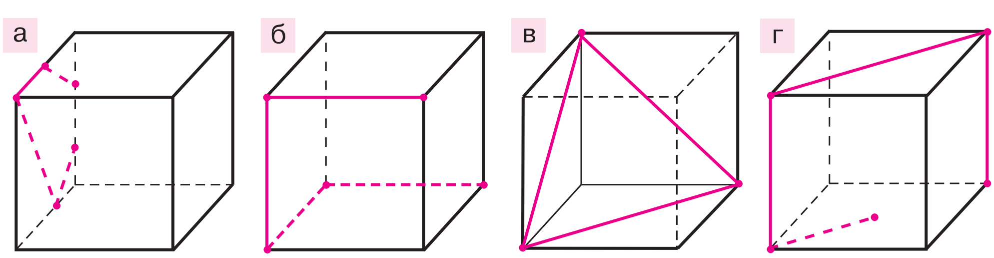


Рис. 28

Рисуем

1.3. Нарисуйте ломаные с такими названиями: а) AKM; б) $BCDB$; в) $ABCADB$.

1.4. а) Нарисуйте произвольный треугольник ABC. Продолжите его сторону AB за точку B, сторону BC за точку C, сторону CA за точку A. Полученные концы отрезков соедините между собой. Какая получилась фигура? б) Снова нарисуйте треугольник. Теперь каждую сторону продолжите за оба конца. Полученные концы отрезков соедините последовательно без самопересечений отрезками. Какая фигура получилась теперь?

1.5. Нарисуйте пятиугольник, все диагонали которого лежат внутри этого пятиугольника. Проведите все его диагонали и выделите цветом получившуюся пятиконечную звезду.

1.6. Снова нарисуйте пятиугольник, внутри которого лежат все его диагонали. Разбейте его на треугольники такими способами: а) соединив одну из вершин диагоналями со всеми остальными; б) соединив точку внутри одной из сторон отрезками со всеми вершинами; в) соединив внутреннюю точку пятиугольника отрезками со всеми вершинами. Сколько получилось треугольников в каждом случае?

1.7. Нарисуйте виды спереди, слева и сверху ломаных, изображённых на рисунке 28.

Представляем

1.8. а) План крепости имеет вид треугольника. Внутри её требуется установить прожектор так, чтобы им можно было осветить все стены. Где установить прожектор? б) Где установить прожектор, которым надо осветить все стены, если план крепости имеет вид четырёхугольника? в) Нарисуйте план крепости такой формы, которую нельзя осветить изнутри одним прожектором.

1.9. а) По рёбрам куба идёт простая четырёхзвенная ломаная. Спереди она выглядит так, как на рисунке 29. Нарисуйте куб и на

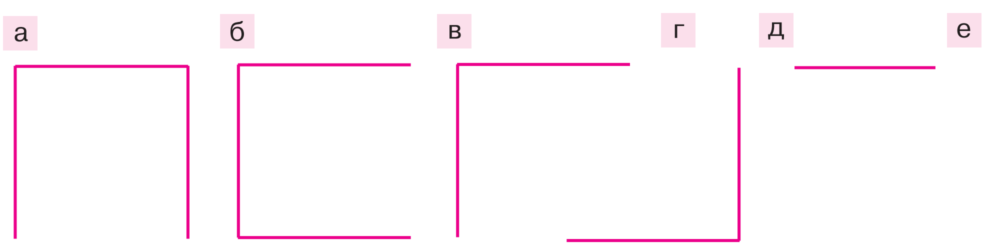


Рис. 29

его поверхности нарисуйте такую ломаную. б) Пусть теперь по рёбрам куба идёт простая пятизвенная ломаная. Может ли она спереди выглядеть так, как на рисунке 29?

1.2. Выпуклые и невыпуклые многоугольники

Из всех многоугольников самые важные — выпуклые. **Многоугольник** называется **выпуклым**, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону (рис. 30). Таким образом, выпуклый многоугольник лежит в одной из двух полуплоскостей, ограниченных этими прямыми.

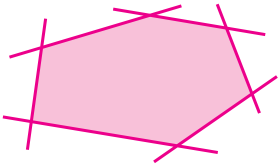


Рис. 30

Каждый треугольник является выпуклым многоугольником (рис. 31). Но, например, для четырехугольников это уже не всегда так (рис. 32). Многоугольники, которые не являются выпуклыми, так и называются — невыпуклые многоугольники.

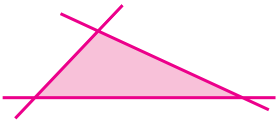


Рис. 31

Выпуклые многоугольники обладают многими интересными свойствами. Эти свойства составляют целый раздел современной геометрии. До сих пор находят новые свойства выпуклых многоугольников. Укажем два наглядно очевидных свойства выпуклых многоугольников.

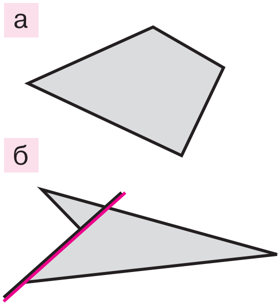


Рис. 32

СВОЙСТВО 1. **Выпуклый многоугольник можно вырезать из плоскости, разрезая её по прямым** (как из листа бумаги, разрезая его до краёв, рис. 33, *а*).

СВОЙСТВО 2. **У выпуклого многоугольника все углы меньше 180°** (рис. 33, *б*).

Докажем ещё два свойства выпуклых многоугольников.

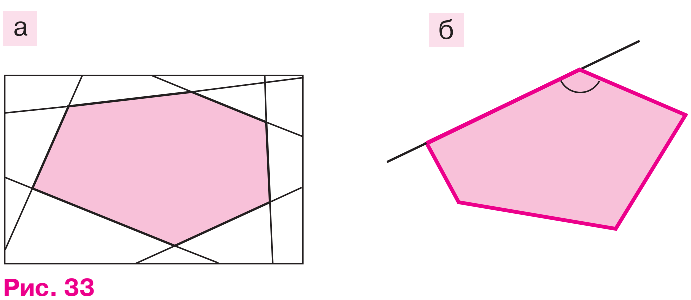


Рис. 33

СВОЙСТВО 3. **Отрезок, соединяющий любые две точки выпуклого многоугольника** (в частности, любая его диагональ), **содержится в этом многоугольнике.**

Доказательство. Возьмём любые две точки A и B выпуклого многоугольника P (рис. 34). Многоугольник P является пересечением нескольких полуплоскостей. Отрезок AB содержится в каждой из этих полуплоскостей. Поэтому он содержится и в многоугольнике P. ■

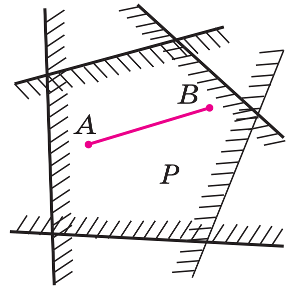


Рис. 34

СВОЙСТВО 4. **Сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)180°$.**

Доказательство. Пусть дан выпуклый n-угольник P. Возьмём внутри его точку O и соединим её отрезками с вершинами многоугольника (рис. 35). Отрезки эти «разрежут» многоугольник на треугольники с общей вершиной O и противолежащими ей основаниями на сторонах n-угольника. Число треугольников (по числу сторон) будет n. У каждого треугольника сумма углов равна 180°. Поэтому общая сумма их углов равна $180°n$. Чтобы получить сумму углов n-угольника, надо из $180°n$ вычесть 360° — сумму всех углов треугольников при вершине O. Стало быть, сумма углов n-угольника равна

$$180°n - 360° = (n-2)180°. ■$$

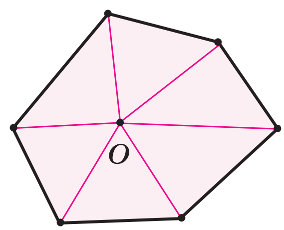


Рис. 35

Вопросы для самоконтроля

1. Какие бывают многоугольники? Чем они отличаются?
2. Перечислите свойства выпуклых многоугольников.
3. Чему равна сумма углов выпуклого n-угольника? Подумайте, верно ли это для невыпуклого многоугольника.

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

1.10. Докажите, что сумма углов любого четырёхугольника равна 360°.

1.11. Докажите, что сумма внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному в каждой вершине, равна 360°.

Рисуем

1.12. Нарисуйте: а) четырёхугольник с тремя тупыми углами; б) пятиугольник с четырьмя острыми углами; в) шестиугольник с двумя острыми и тремя тупыми углами; г) семиугольник без острых углов; д) восьмиугольник с шестью прямыми углами.

Представляем

1.13. Многоугольник с каким числом сторон можно получить в объединении двух треугольников, если они: а) не имеют общих внутренних точек; б) имеют общие внутренние точки?

1.14. Сколько диагоналей исходит из каждой вершины выпуклого n-угольника в остальные его вершины? На сколько треугольников разбивают эти диагонали выпуклый n-угольник? Используя это разбиение, дайте ещё одно доказательство свойству 4 о сумме углов выпуклого n-угольника.

Вычисляем

1.15. Чему равен каждый угол равноугольного: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) восьмиугольника; г) десятиугольника; д) n-угольника?

Доказываем

1.16. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике найдутся соседние два угла, сумма которых больше 180°.

Исследуем

1.17. Какое наибольшее число острых углов может быть в выпуклом многоугольнике?

1.18. В выпуклом n-угольнике провели все диагонали. а) Сколько этих диагоналей? б) Сколько получилось треугольников, все вершины которых находятся в вершинах данного n-угольника?

1.19. В каком выпуклом n-угольнике все углы могут быть: а) острыми; б) прямыми; в) тупыми?

1.20. Можно ли плоскость покрыть (без перекрытий) равноугольными: а) треугольниками; б) шестиугольниками; в) восьмиугольниками; г) четырёхугольниками и восьмиугольниками?

1.3. Четырёхугольники

Четырёхугольник — это многоугольник, границей которого является простая четырёхзвенная замкнутая ломаная (рис. 36). Четырёхугольники бывают как выпуклые (рис. 36, *а*), так и невыпуклые (рис. 36, *б*). У четырёхугольника четыре угла, четыре вершины, четыре стороны. Стороны четырёхугольника, имеющие общие концы, называются **смежными**, а не имеющие общих концов — **противоположными**. Вершины, соединённые стороной, называются **соседними**, а не соединённые стороной — **противоположными**. Отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырёхугольника, называется его **средней линией**.

У каждого четырёхугольника две диагонали — это отрезки, соединяющие противоположные вершины четырёхугольника. Диагонали выпуклого четырёхугольника пересекаются (рис. 37, *а*), а невыпуклого не пересекаются (рис. 37, *б*). Поскольку одна из диагоналей любого четырёхугольника разбивает его на два треугольника, то *сумма углов любого четырёхугольника равна* 360°.

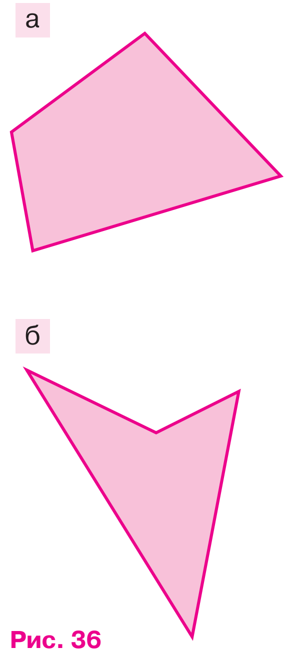


Рис. 36

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите элементы четырёхугольника.
2. Чему равна сумма углов четырёхугольника?

ЗАДАЧИ

Представляем

1.21. Многоугольник с каким числом сторон можно получить в объединении двух выпуклых четырёхугольников, если: а) они не имеют общих внутренних точек; б) они имеют общие внутренние точки?

Исследуем

1.22. Какими свойствами обладает выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором: а) все

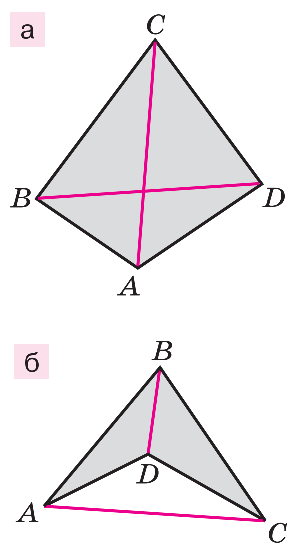


Рис. 37

стороны равны; б) $AB = CD$, $AD = BC$; в) $AB = BC$, $AD = CD$; г) $AB = CD$, $\angle A = \angle D$; д) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$; е) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$?

1.23. а) Может ли в четырёхугольнике один из углов равняться 359°? б) Могут ли углы четырёхугольника иметь целое число градусов и отличаться на одну и ту же величину?

1.24. Сколько острых углов может быть в четырёхугольнике? А тупых?

1.25. Может ли быть в четырёхугольнике: а) один из углов меньше суммы остальных; б) каждый из углов меньше суммы остальных; в) один из углов больше суммы остальных?

Строим

1.26. Постройте четырёхугольник по: а) четырём сторонам и одной из диагоналей; б) трём сторонам и двум диагоналям; в) трём сторонам и двум углам между ними; г) четырём сторонам и одному углу между ними; д) диагонали и четырём углам, которые она образует со сторонами.

Применяем геометрию

1.27. а) В вершинах четырёхзвенной замкнутой ломаной сделаны шарниры. Будет ли такая фигура жёсткой? б) Сколько различных четырёхугольников можно построить по четырём сторонам?

1.4. Правильные многоугольники

Будем прикладывать друг к другу на плоскости боковыми сторонами одинаковые равнобедренные треугольники с общей вершиной O (рис. 38). Зададим несколько вопросов.

1) Можно ли так подобрать треугольники, чтобы они заполнили вокруг точки O полный угол (360°) и не перекрывались?

2) Если можно, то каково может быть их число (обозначим это число n)?

3) Каким должен быть угол φ при вершине таких треугольников в зависимости от n?

Ответы на первые два вопроса просты: да, можно и число таких треугольников может быть любым, начиная с трёх. Обсудим ответ на третий вопрос.

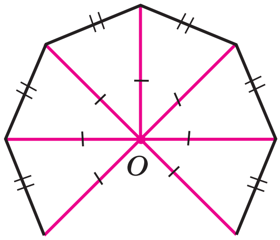


Рис. 38

Если $n = 3$, то $\varphi = \dfrac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ (рис. 39, *а*);

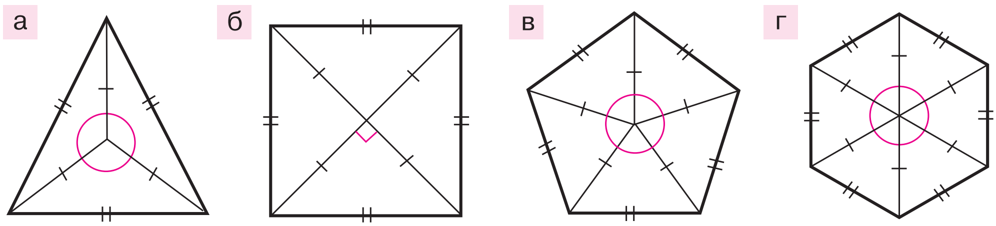


Рис. 39

если $n = 4$, то $\varphi = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ (рис. 39, *б*);

если $n = 5$, то $\varphi = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ (рис. 39, *в*);

если $n = 6$, то $\varphi = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ (рис. 39, *г*).

На этом значении n остановимся. В результате таких построений получатся многоугольники, у которых равны друг другу все стороны и все углы. Такие многоугольники называются **правильными**.

Итак, **многоугольник, в котором равны все стороны и все углы, называется правильным.** Мы уже встречались с некоторыми правильными многоугольниками: это равносторонний треугольник и квадрат.

Прежде всего заметим, что все углы правильного многоугольника меньше 180°, поскольку *у каждого многоугольника есть хотя бы один угол, меньший* 180°. Докажем это.

□ Пусть дан многоугольник P. Проведём какую-нибудь прямую, не пересекающую его (рис. 40, *а*). Будем перемещать её параллельно самой себе в сторону многоугольника P. В некоторый момент мы получим прямую a, имеющую с многоугольником P хотя бы одну общую точку, от которой многоугольник P лежит по одну сторону (рис. 40, *б*, *в*). На прямой a лежит хотя бы одна вершина A много-

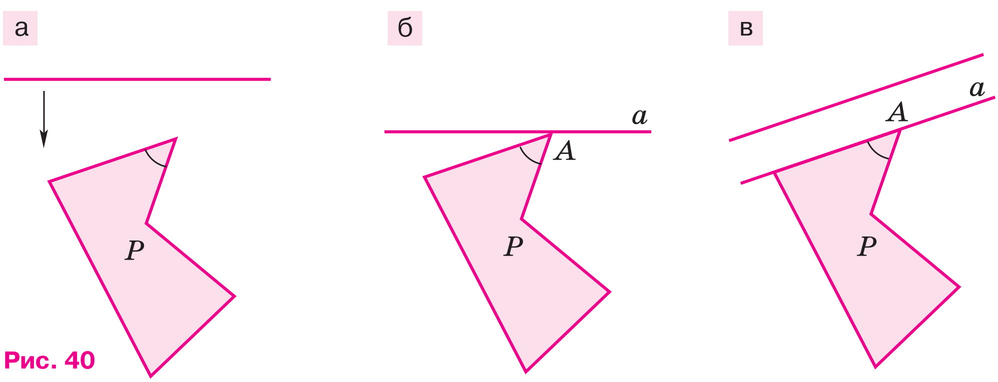


Рис. 40

угольника P. Угол с вершиной A в многоугольнике P меньше развёрнутого. ■

Мы построили некоторые правильные многоугольники, составляя их из одинаковых равнобедренных треугольников. Следующая теорема показывает, что любой правильный многоугольник можно разбить на одинаковые равнобедренные треугольники.

Теорема 1 (*о центре правильного многоугольника*). **У каждого правильного многоугольника существует точка, равноудалённая от его вершин. (Её называют центром правильного многоугольника.)**

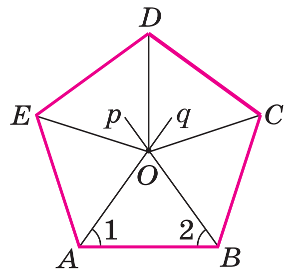


Рис. 41

Доказательство. Это доказательство не зависит от числа сторон правильного многоугольника. Поэтому проведём его для правильного пятиугольника.

Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник. Проведём биссектрисы p и q углов A и B (рис. 41). Они пересекутся в некоторой точке O (так как $\angle 1 + \angle 2 < 180°$). Треугольник OAB — равнобедренный (так как $\angle BAO = \angle ABO$). Поэтому $OA = OB$.

Соединим точку O и точку C отрезком OC. Тогда $\triangle OBA = \triangle OBC$ по первому признаку равенства треугольников ($BA = BC$, сторона OB общая и $\angle OBA = \angle OBC$, так как луч BO — биссектриса угла ABC). Следовательно, $OC = OA = OB$. Отметим также, что луч CO — биссектриса угла BCD.

Повторяя эти рассуждения, получим, что $OD = OC$ и $OE = OD$, т. е. $OA = OB = OC = OD = OE$. Так как $AB = BC = CD = DE = EA$, то равнобедренные треугольники OAB, OBC, OCD, ODE, OEA равны друг другу. ■

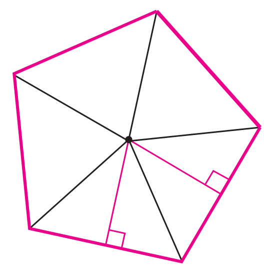


Рис. 42

Замечание. Равнобедренные треугольники, основаниями которых являются стороны правильного многоугольника, а вершина которых находится в его центре, равны друг другу (рис. 42).

СЛЕДСТВИЕ. Центр правильного многоугольника равноудалён от его сторон.

□ Действительно, расстояния от центра правильного многоугольника до его сторон равны высотам равных друг другу равнобедренных треугольников, имеющих общую вершину в центре правильного многоугольника, а основаниями — стороны правильного многоугольника (рис. 42). Поэтому эти высоты равны друг другу. Их называют **апофемами** правильного многоугольника. ■

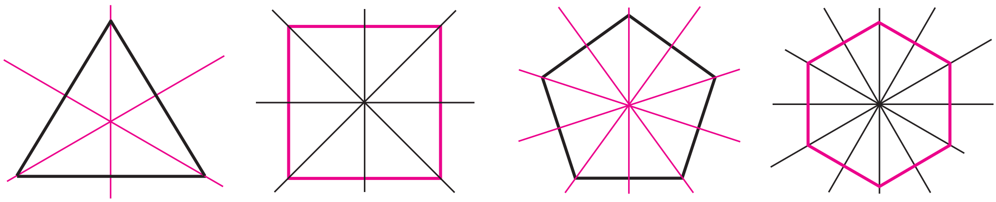


Рис. 43

У каждого правильного n-угольника *n осей симметрии* (рис. 43). Общая вершина равнобедренных треугольников, из которых составлен правильный многоугольник, является центром этого многоугольника. *Если число сторон многоугольника чётно, то его центр является также его центром симметрии* (как, например, у квадрата). *Если же число сторон правильного многоугольника нечётно, то у него центра симметрии нет* (так, например, у правильного треугольника нет центра симметрии).

▲Мы с вами рассмотрели только такие правильные многоугольники, у которых число сторон 3, 4, 5 или 6. Это не случайно. Те правильные многоугольники, которые изображены на рисунке 39, можно построить циркулем и линейкой. Правильный же семиугольник построить циркулем и линейкой нельзя. Мы уже встречались с задачей на построение, которая не может быть решена с помощью только циркуля и линейки: это была задача о трисекции угла. Какие правильные многоугольники можно построить циркулем и линейкой, а какие нельзя, выяснил в 1796 г. великий немецкий математик Карл Гаусс (1777—1855), когда был ещё совсем молодым учёным. Но приближённо и с необходимой степенью точности можно построить любой правильный n-угольник.▼

К. Гаусс

Вопросы для самоконтроля

1. Какой многоугольник называется правильным?
2. Как построить правильный многоугольник?
3. С какими правильными многоугольниками вы уже знакомы?
4. Какими свойствами обладают правильные многоугольники?
5. Любой ли правильный многоугольник строится циркулем и линейкой?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

1.28. Найдите формулу для угла правильного n-угольника.

1.29. Докажите следующие теоремы о свойствах правильного многоугольника: а) все вершины правильного многоугольника лежат на одной окружности; б) середины всех сторон правильного многоугольника лежат на одной окружности; в) биссектрисы углов правильного многоугольника проходят через его центр.

Представляем

1.30. Представьте себе, что на окружности лежат n точек так, что все расстояния между соседними точками равны друг другу. Являются ли эти точки вершинами правильного n-угольника?

Планируем

1.31. а) Построили правильный треугольник, а где его центр — забыли. Как его восстановить? б) Как решить аналогичную задачу для других правильных многоугольников?

1.32. Построили на доске правильный многоугольник, а потом стёрли все его стороны, кроме двух сторон. Как восстановить рисунок?

Вычисляем

1.33. Вычислите в правильном шестиугольнике: а) угол между диагоналями, выходящими из одной вершины; б) углы между пересекающимися диагоналями.

1.34. Вычислите в правильном пятиугольнике: а) угол между диагоналями, выходящими из одной вершины; б) угол между пересекающимися диагоналями.

Доказываем

1.35. а) Докажите, что середины сторон правильного треугольника являются вершинами другого правильного треугольника. б) Составьте аналогичную задачу для других правильных многоугольников. в) Найдите сами какой-либо способ получения правильного многоугольника, используя уже построенный правильный многоугольник.

1.36. Дан правильный шестиугольник. Докажите, что: а) для каждой его диагонали есть равная ей диагональ; б) среди его диагоналей есть перпендикулярные; в) среди его диагоналей есть параллельные.

1.37. Дан правильный пятиугольник. Докажите, что: а) все его диагонали равны; б) каждая его диагональ параллельна какой-либо его стороне.

Исследуем

1.38. Может ли быть неправильный шестиугольник, у которого: а) все стороны равны; б) все углы равны?

Рассуждаем

1.39. а) Центр правильного многоугольника лежит на серединном перпендикуляре любой его стороны. Из чего это следует? б) Серединные перпендикуляры всех сторон правильного многоугольника имеют общую точку. Из чего это следует?

1.5. Многоугольные фигуры

Многоугольной фигурой называется объединение конечного числа многоугольников (рис. 44). Многоугольная фигура может состоять из многоугольников, вовсе не имеющих общих точек (рис. 44, *а*) или имеющих только отдельные общие точки на границе (рис. 44, *б*). (Аналогично архипелаг состоит из островов, земли фермы слагаются из отдельных её полей, а жилое помещение многокомнатной квартиры — из нескольких комнат.)

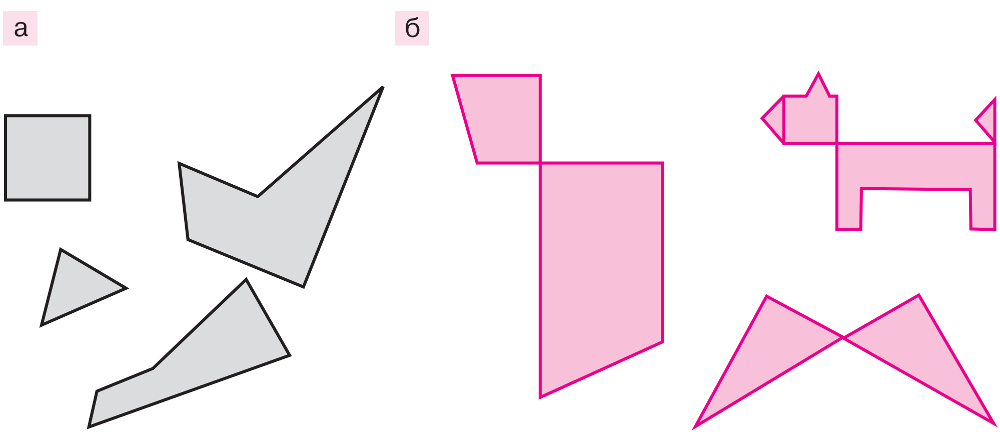


Рис. 44

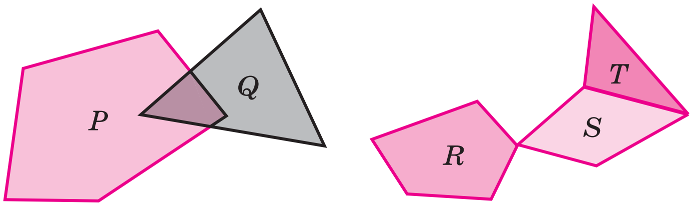


Рис. 45

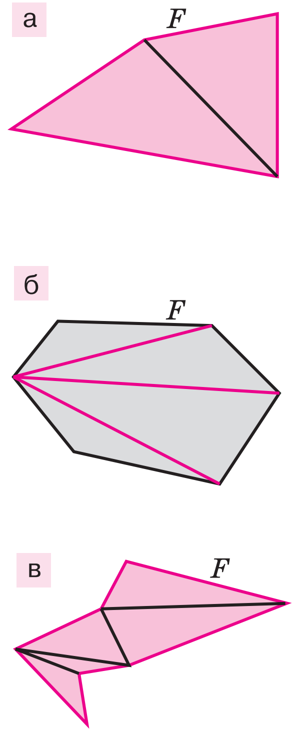


Рис. 46

Будем говорить, что многоугольные фигуры **не перекрываются**, если они не имеют общих внутренних точек (на рисунке 45 фигуры P и Q перекрываются, а фигуры R, S и T не перекрываются).

Говорят, что многоугольная фигура F **составлена** (или **состоит**) из данных многоугольных фигур, если она является их объединением, а сами эти фигуры не перекрываются (рис. 46). В этом случае говорят также, что многоугольная фигура **разбита** на данные многоугольные фигуры.

Например, каждый четырёхугольник можно разбить на два треугольника диагональю (см. рис. 46, *а*). Выпуклый многоугольник разбивается на треугольники диагоналями, проведёнными из любой его вершины (см. рис. 46, *б*).

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется многоугольной фигурой?
2. Является ли многоугольник многоугольной фигурой? Любая ли многоугольная фигура является многоугольником?
3. Что значит, что многоугольная фигура разбита на многоугольные фигуры?

ЗАДАЧИ

Смотрим

1.40. Какие из закрашенных фигур на рисунке 47 являются многоугольными фигурами?

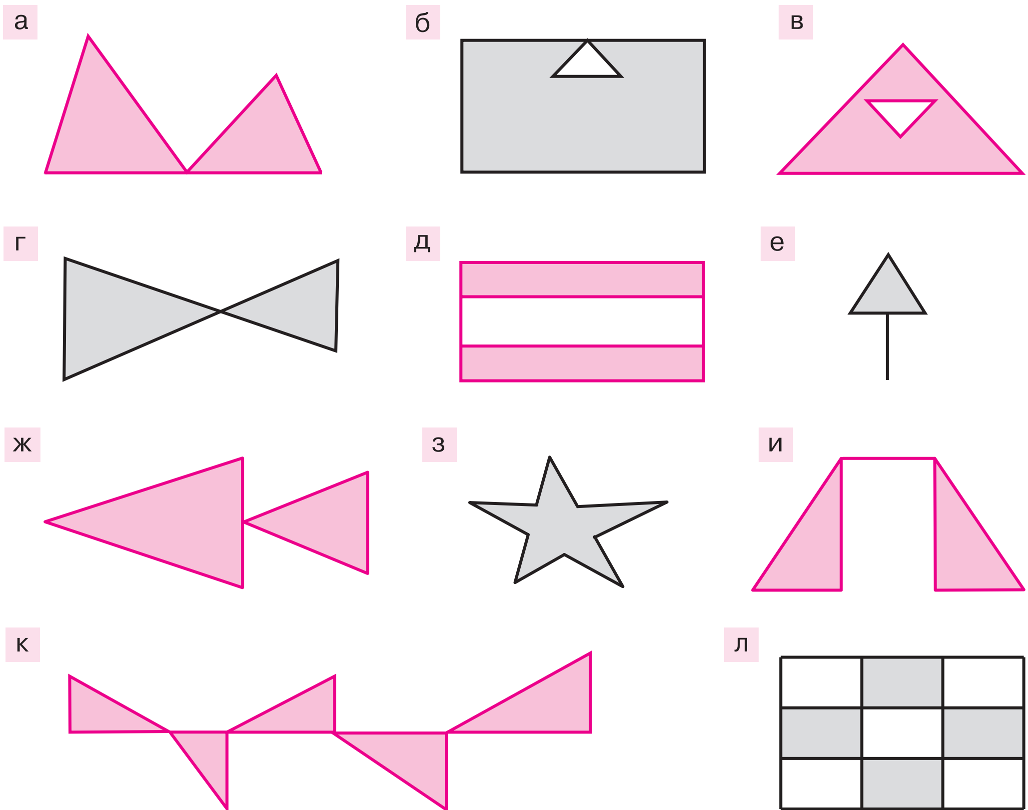


Рис. 47

Рисуем

1.41. Нарисуйте равносторонний треугольник. Разбейте его: а) на два прямоугольных треугольника; б) на три прямоугольных треугольника; в) на шесть равных прямоугольных треугольников; г) на четыре равных равносторонних треугольника.

1.42. Нарисуйте различные многоугольные фигуры, которые можно составить из двух равных треугольников: а) равносторонних; б) равнобедренных; в) прямоугольных.

Планируем

1.43. Как разбить правильный n-угольник на равные прямоугольные треугольники? Сколько их?

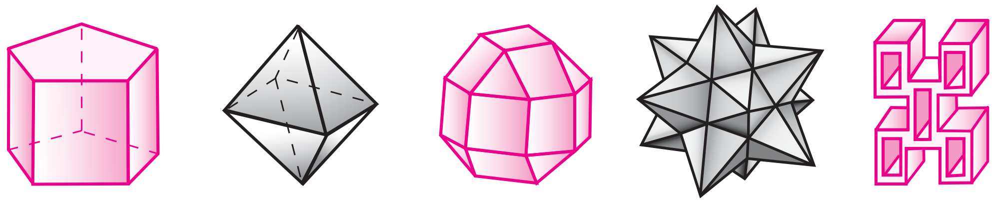


Рис. 48

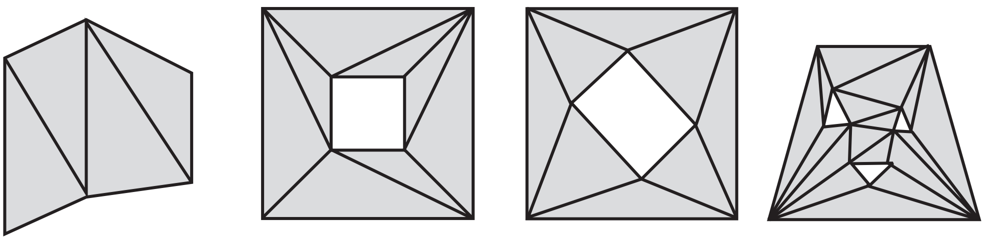


Рис. 49

1.6. Многогранники. Пирамиды

Напомним, что многоугольником мы назвали конечную часть плоскости, ограниченную простой замкнутой ломаной. **Многогранником** можно назвать конечную часть пространства, ограниченную конечным числом многоугольников (рис. 48). Многоугольнику можно было бы дать более общее определение и определить его как фигуру на плоскости, составленную из треугольников, прилегающих друг к другу по сторонам (рис. 49). Аналогично многогранником можно назвать фигуру в пространстве, составленную из тетраэдров, прилегающих друг к другу по граням (рис. 50). Например, с одной стороны, куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — это часть пространства, ограниченная шестью квадратами (рис. 51, *а*, назовите их), а с другой стороны, этот же куб составлен из пяти тетраэдров (рис. 51, *б*, назовите их).

Тетраэдр является простейшим среди любых многогранников, а также простейшим среди пирамид (рис. 52). Тетраэдр — это треугольная пирамида. В тетраэдре любая грань может считаться основанием пирамиды. Тогда три остальные его грани будут боковыми гранями.

Произвольную пирамиду можно построить так.

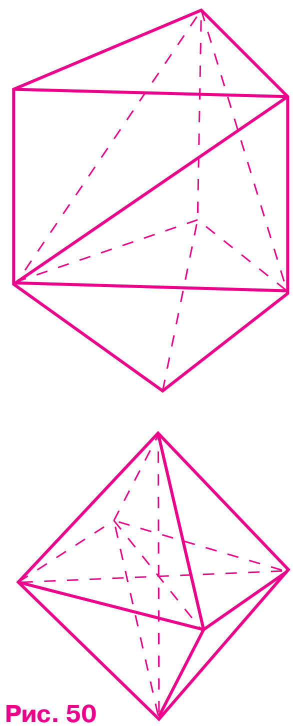


Рис. 50

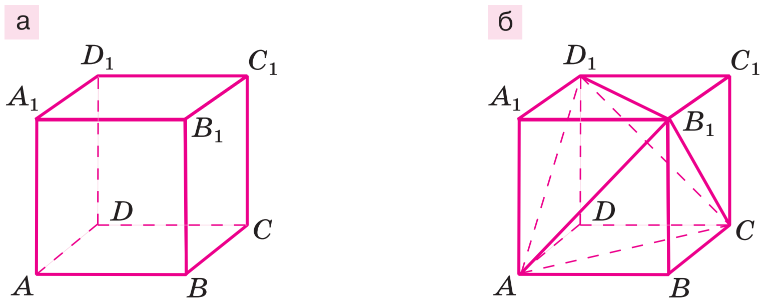


Рис. 51

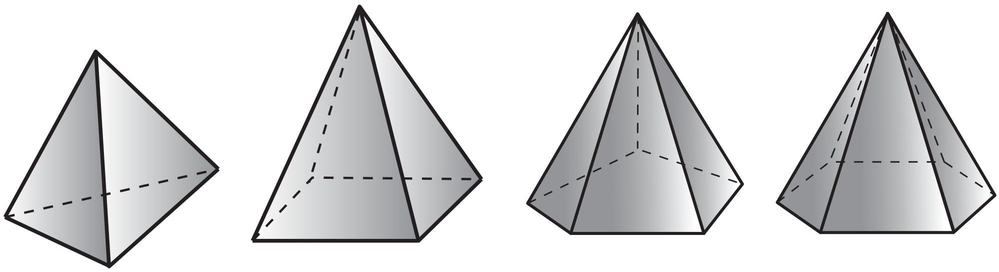


Рис. 52

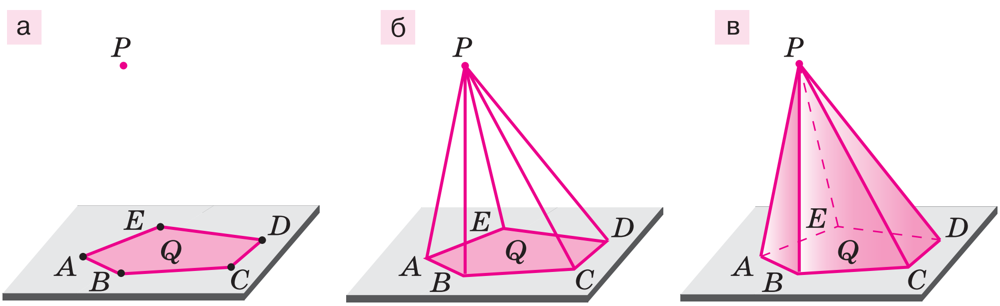


Рис. 53

Возьмём некоторый многоугольник Q (например, пятиугольник $ABCDE$) и какую-нибудь точку P вне плоскости многоугольника Q (рис. 53, *а*). Соединим отрезками точку P со всеми вершинами многоугольника Q (рис. 53, *б*). Если теперь на полученный «каркас» из отрезков «натянуть» треугольники PAB, PBC, PCD, PDE, PEA, то вместе с многоугольником Q они в пространстве ограничат **пирамиду** (рис. 53, *в*). Многоугольник Q называется **основанием пирамиды**, точка P — её **вершиной**, треугольники PAB, PBC, PCD, PDE, PEA — **боковыми гранями пирамиды**, а отрезки PA, PB, PC, PD, PE — **боковыми рёбрами пирамиды**. Мы построили пятиугольную пирамиду $PABCDE$.

Если же в основании пирамиды лежит n-угольник, то пирамиду называют ***n*-угольной**.

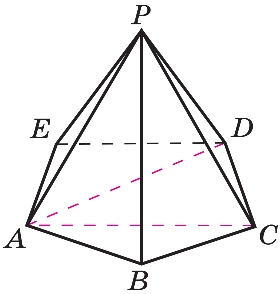


Рис. 54

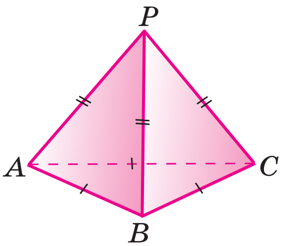


Рис. 55

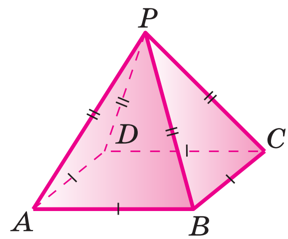


Рис. 56

Ясно, что разбиению диагоналями основания пирамиды на треугольники соответствует разбиение самой пирамиды на тетраэдры с общей вершиной — вершиной пирамиды (рис. 54).

Пирамида называется правильной, если её основание — правильный многоугольник, а все боковые рёбра пирамиды равны друг другу. Основание правильной треугольной пирамиды — равносторонний треугольник (рис. 55), а основание правильной четырёхугольной пирамиды — квадрат (рис. 56). Знаменитые египетские пирамиды — правильные четырёхугольные пирамиды (рис. 57).

Важный частный случай правильной треугольной пирамиды — **правильный тетраэдр:** у него все четыре грани — равносторонние треугольники. Правильный тетраэдр можно определить как тетраэдр, все рёбра которого равны.

Рис. 57

Рисовать пирамиду всегда начинайте с основания (считая его горизонтальным), а вершину выбирайте над основанием.

Отметим, что любой тетраэдр можно изображать любым выпуклым четырёхугольником с проведёнными диагоналями (одна из которых — штриховая линия). Поэтому при изображении правильных треугольных пирамид следует указывать нужные равенства их рёбер.

? Вопросы для самоконтроля

1. Какие многогранники вы знаете?
2. Как построить шестиугольную пирамиду?
3. Какие элементы пирамиды вы знаете?
4. Каким свойством тетраэдр выделяется среди пирамид?
5. Какую пирамиду называют правильной?
6. Какой тетраэдр называют правильным?

ЗАДАЧИ

Рисуем

1.44. Нарисуйте треугольную и четырёхугольную пирамиды так, чтобы все их рёбра были видимыми.

1.45. Нарисуйте четырёхугольную пирамиду так, чтобы у неё было одно невидимое ребро. Можно ли нарисовать её так, чтобы невидимыми были два ребра? три ребра?

1.46. Нарисуйте какой-нибудь многогранник, у которого 6 (8, 10) граней и все они треугольники. Сколько у вас получилось видимых и сколько невидимых рёбер? граней?

Представляем

1.47. Центр куба соединён отрезками со всеми его вершинами. На сколько правильных пирамид разбился при этом куб?

Исследуем

1.48. Сколько рёбер имеют четырёхугольная, пятиугольная, шестиугольная пирамиды? Может ли пирамида иметь нечётное число рёбер? Почему?

1.49. Из куба вырезали (удалили) куб меньших размеров. Сколько граней имеет получившийся многогранник? Зависит ли ответ на вопрос от того, в каком месте был вырезан куб?

1.50. Какие многоугольники могут получиться в пересечении куба с плоскостью?

1.51. Вы уже знаете, что многогранник с четырьмя вершинами и четырьмя гранями — это тетраэдр. а) Расскажите, какими могут быть многогранники, у которых пять вершин. Какими многоугольниками могут быть их грани? Сколько у них может быть рёбер? б) А каким может быть многогранник, у которого пять граней?

1.52. Верно ли, что правильной пирамидой является такая пирамида, все боковые грани которой — равные между собой равнобедренные треугольники?

1.53. У каких правильных пирамид боковые грани могут быть: а) прямоугольными треугольниками; б) равносторонними треугольниками?

§ 2. Площадь многоугольной фигуры

2.1. Понятие площади. Измерение площади

Представления о площадях имеются у каждого из вас. И находить их в простейших случаях вы уже умеете: например, вы знаете, как найти площадь прямоугольника — скажем, комнаты, где вы живёте. Подсчитывая жилую площадь квартиры, в которой несколько комнат, складывают площади этих комнат, а если требуется найти полную площадь квартиры, то складывают площади всех её помещений. Ясно также, что у одинаковых квартир одна и та же площадь. Эти представления о площади и кладутся в основу определения площади многоугольных фигур.

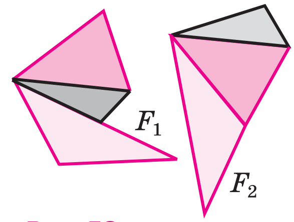


Рис. 58

Определение. Для многоугольных фигур площадью называется положительная величина с такими основными свойствами:

1) площадь фигуры, составленной из нескольких фигур, равна сумме площадей этих фигур;

2) равные треугольники имеют одну и ту же площадь.

Площадь фигуры F мы будем обозначать через $S(F)$.

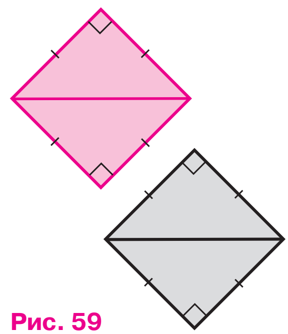


Рис. 59

Площадь поверхности многогранника — это сумма площадей всех его граней.

Фигуры, имеющие равные площади, называются **равновеликими**.

Простейший пример равновеликих фигур дают равные треугольники: они равновелики по свойству 2. Используя свойство 1, получаем более общее утверждение: *если фигуры составлены из попарно равных треугольников, то они равновелики* (рис. 58). В частности, равные квадраты (квадраты с равными сторонами) равновелики. Действительно, диагонали разбивают их на равные прямоугольные треугольники (рис. 59).

Измерение площади состоит в сравнении площади данной фигуры с площадью фигуры, принятой за единицу измерения. В результате получится **численное значение площади** данной фигуры.

За единицу измерения площади принимают площадь квадрата, стороной которого является некоторая единица длины. Например, жилую площадь измеряют в квадратных метрах, площадь государства — в квадратных километрах. Тогда пишут, например, 20 м^2 или 156 000 км^2. Когда наименование единицы длины не указано, о численном значении площади фигуры F пишем, например, так: $S(F) = 15$ кв. ед. Запись $S(F) = 15$ является сокращением записи $S(F) = 15$ кв. ед.

Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите основные свойства площади.
2. Что такое единичный квадрат? В чём состоит измерение площади?
3. Какие фигуры называются равновеликими?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

2.1. Пусть F_1 и F_2 — две многоугольные фигуры, фигура G_1 — их объединение, а фигура G_2 — их пересечение. Докажите, что

$$S(F_1) + S(F_2) = S(G_1) + S(G_2).$$

Напомним, что *объединением фигур* называется фигура, состоящая из всех точек данных фигур; *пересечением фигур* называется фигура, состоящая из всех общих точек данных фигур.

Смотрим

2.2. Среди многоугольников на рисунке 60 найдите равновеликие.

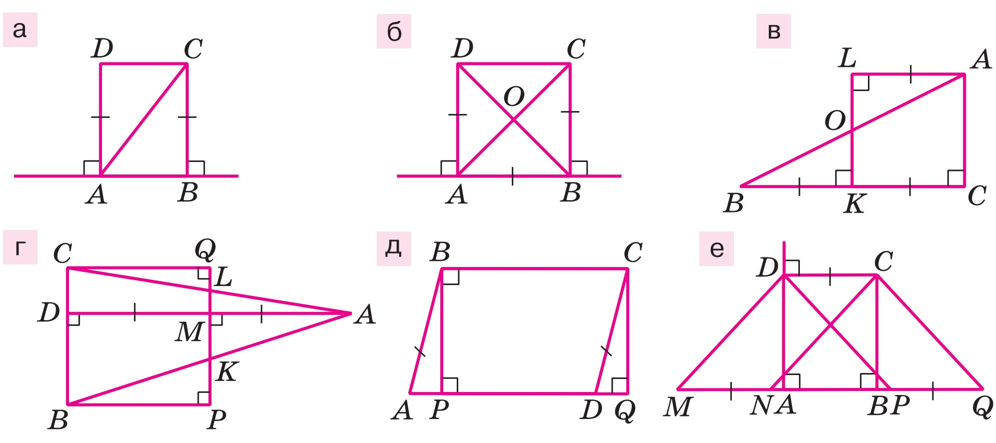


Рис. 60

2.3. На рисунке 61 изображён прямоугольный параллелепипед. Найдите среди изображённых там многоугольников равновеликие.

2.4. На рисунке 62 изображена правильная четырёхугольная пирамида $PABCD$. Найдите среди изображённых там многоугольников равновеликие.

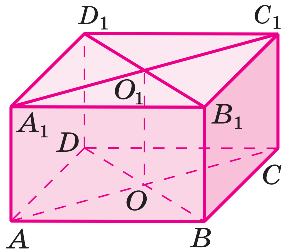


Рис. 61

Рисуем

2.5. Нарисуйте прямоугольник. Затем нарисуйте второй прямоугольник, площадь которого: а) в 3 раза больше площади первого; б) в 4 раза меньше площади первого.

2.6. Нарисуйте квадрат. Затем нарисуйте второй квадрат, площадь которого: а) в 2 раза больше площади первого квадрата; б) в 2 раза меньше площади первого квадрата.

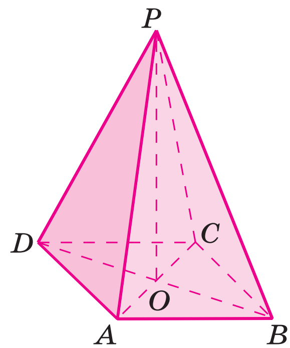


Рис. 62

Планируем

2.7. Как одним отрезком разбить на две равновеликие части: а) квадрат; б) прямоугольник; в) равносторонний треугольник?

2.8. Как разбить произвольный треугольник на фигуры, из которых можно составить прямоугольник?

2.2. Площадь прямоугольника

Вам давно известно, что **площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон.** А именно если P — прямоугольник со сторонами a и b, то его площадь

$$S(P) = ab. \qquad (1)$$

Следует только помнить, что длины сторон прямоугольника должны быть выражены с помощью одной и той же единицы длины. (Точнее было бы сказать, что *численное значение площади прямоугольника равно произведению численных значений длин его сторон*, но мы, упрощая формулировки, здесь и в дальнейшем будем допускать аналогичные сокращения.)

В частности, когда прямоугольник P является квадратом со стороной a, его площадь равна a^2.

□ Как измеряется площадь прямоугольника P и как происходит её сравнение с площадью единичного квадрата Q в том случае, когда длины сторон прямоугольника P выражаются натуральными числами a и b, вы знаете ещё из начальной школы: прямоугольник P разбивают на ab единичных квадратов (рис. 63). Следовательно, в этом случае $S(P) = ab$.

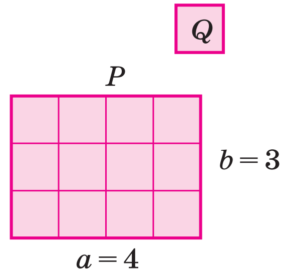


Рис. 63

Если же a и b — дробные числа, то можно считать (приведя их к общему знаменателю), что $a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{q}{n}$ (числа p, q, n — натуральные). Это означает, что на отрезке a укладывается p раз отрезок $\frac{1}{n}e$, а на отрезке b он укладывается q раз (e — единичный отрезок). Прямоугольник P разбивается на pq одинаковых квадратов Q_n со стороной $\frac{1}{n}e$ (рис. 64). Единичный квадрат Q разбивается на n^2 таких квадратов Q_n (рис. 65). Поэтому $S(Q) = n^2S(Q_n)$, и так как $S(Q) = 1$, то $S(Q_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2$. Поскольку $S(P) = pqS(Q_n)$, то $S(P) = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = ab$.

Наконец, числа a и b могут быть иррациональными (одно или оба). Можно доказать, что и в этом случае равенство (1) справедливо.

★ Убедиться в этом можно так. Каждое из чисел a и b может быть представлено бесконечной десятичной дробью. Рациональные числа a_n и b_n получим, отбросив все цифры в десятичных представлениях чисел a и b, начиная с $(n + 1)$-й после запятой. Отложим от одной из вершин прямоугольника P на его сторонах отрезки длиной a_n и b_n и построим прямоугольник P_n со сторонами a_n и b_n (рис. 66). Как уже установлено,

$$S(P_n) = a_n\, b_n.$$

Числа $S(P_n)$ являются сколь угодно точными приближёнными значениями числа $S(P)$. И числа a_nb_n являются сколь угодно точными приближёнными значениями числа ab. А так как

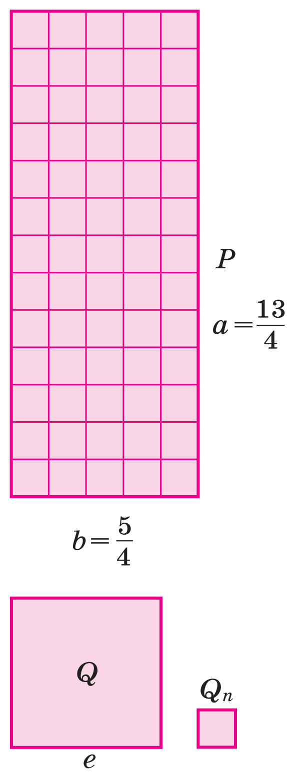


Рис. 64

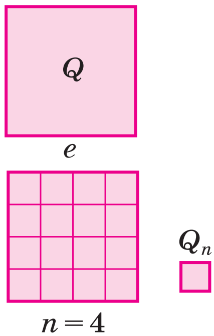


Рис. 65

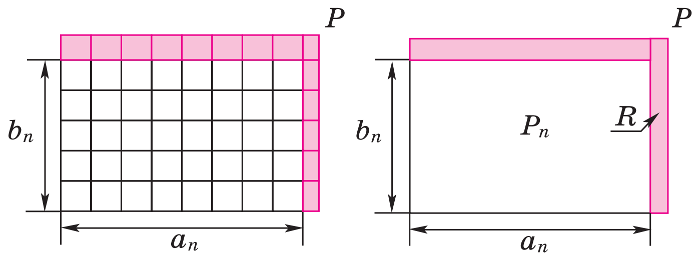


Рис. 66

сколь угодно точные приближённые значения чисел $S(P)$ и ab равны ($S(P_n) = a_n\, b_n$), то и сами эти числа равны, т. е. справедливо равенство (1).■★

Комментарий. Отметим, что слова *а квадрат* и *а куб*, которые говорят о второй и третьей степенях числа a, имеют геометрическое происхождение. Геометрически можно истолковать величины a^2 и a^3 как площадь квадрата со стороной a и объём куба с ребром a.

Справка словесника. Люди придумали много различных единиц измерения площадей. Например, в Древнем Риме единица измерения площади поля называлась *югер* — от латинского слова, означающего «ярмо». Югер — это площадь участка земли, который можно было вспахать за день на паре волов. Аналогичная мера земли существовала и у славян. Она называлась *плугом*. Знаете ли вы другие меры площади?

Вопросы для самоконтроля

1. По какой формуле вычисляется площадь прямоугольника?
2. Какие единицы измерения площади вам известны?

ЗАДАЧИ

Планируем

2.9. На клетчатой бумаге, разбитой на единичные квадраты, нарисованы треугольники с вершинами в узлах сети квадратов (рис. 67). Как найти их площади? Вычислите их.

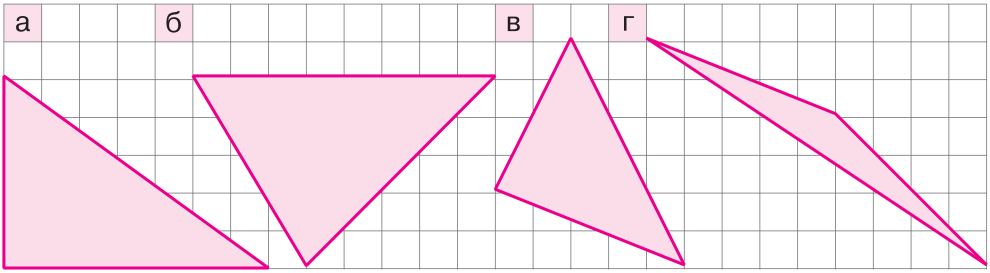


Рис. 67

2.10. На клетчатой бумаге, разбитой на единичные квадраты, нарисованы многоугольные фигуры с вершинами в узлах сети квадратов или в их центрах (рис. 68). Как найти площади фигур?

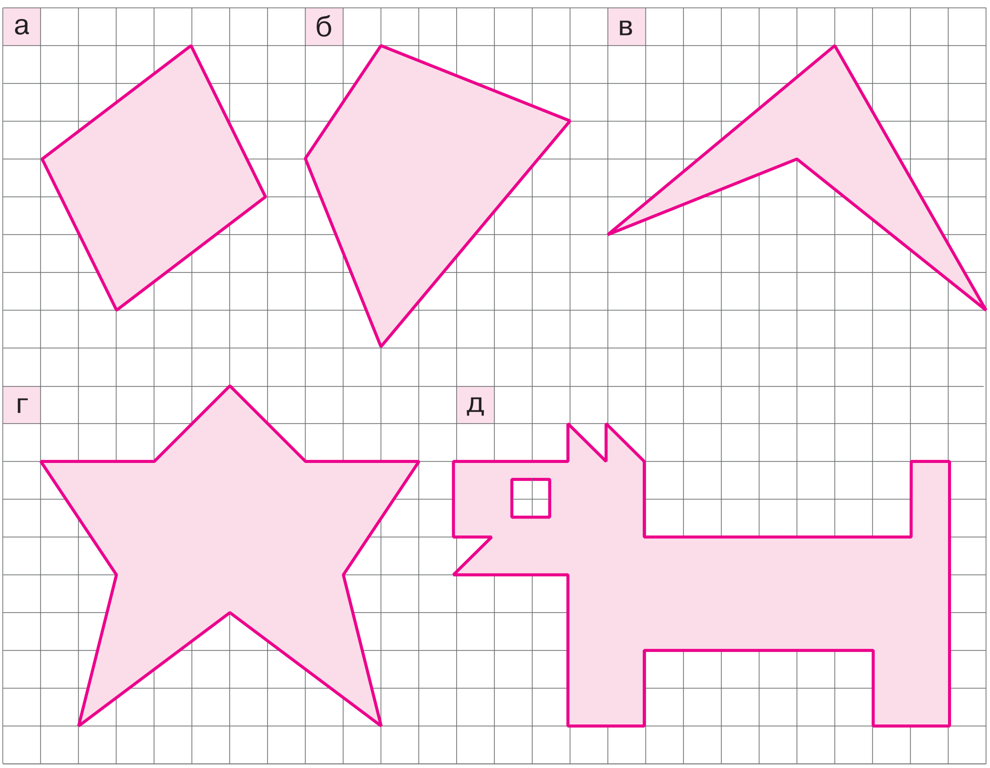


Рис. 68

Работаем с формулой

2.11. Нарисуйте прямоугольник. Пусть его основание равно d, а высота — h. Запишите формулу его площади. а) Пусть основание увеличилось в 2 раза, а высота не изменилась. Что произошло с площадью? б) Пусть основание уменьшилось в 5 раз, а высота не изменилась. Что произошло с площадью? в) Пусть основание изменяется, а высота остаётся постоянной. Объясните, почему зависимость между площадью и основанием является прямой пропорциональностью. г) Какая зависимость существует между площадью и высотой при постоянном основании? д) Пусть основание прямоугольника увеличилось в 3 раза. Что нужно сделать с его высотой, чтобы его площадь не изменилась? е) Объясните, почему при постоянной площади прямоугольника его основание и высота являются обратно пропорциональными величинами. ж) Может ли прямоугольник иметь одну из сторон 1 км, а площадь меньше чем 1 кв. мм?

2.12. Длину стороны квадрата увеличили в 4 раза. Как изменятся его периметр и площадь? Обобщите результаты.

2.13. Что произойдёт с площадью прямоугольника, если: а) основание увеличить в 2 раза, а высоту увеличить в 3 раза; б) основание уменьшить в 4 раза, а высоту увеличить в 8 раз; в) основание и высоту увеличить в 1,5 раза; г) основание и высоту увеличить на 10%?

Вычисляем

2.14. Вычислите площадь прямоугольника, длины сторон которого равны: а) 28 см и 18 мм (выразите площадь в квадратных миллиметрах); б) 2,5 м и 78 см (выразите площадь в квадратных метрах); в) 3,8 км и 500 м (выразите площадь в гектарах).

2.15. Чему равна площадь прямоугольника, если его периметр равен 4 м и: а) отношение размеров равно 2; б) длина больше ширины на 0,5 м; в) одна из сторон равна x метров?

2.16. Чему равен периметр прямоугольника, если его площадь равна 20 кв. м и: а) одна из сторон равна 5 м; б) длина составляет 125% от ширины; в) одна из сторон равна x метров?

2.17. Выразите как функцию от величины x площади таких фигур: а) квадрата со стороной x; б) квадрата с периметром x; в) прямоугольника с одной стороной x, а другой — на 1 больше; г) прямоугольника с одной стороной x, а другой — в 2 раза больше; д) прямоугольника с периметром 1 и одной из сторон x; е) объединения двух равных квадратов со стороной x, которые пересекаются по квадрату со стороной 1.

2.18. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: а) 3, 4, 5; б) 8 см, 1,5 см и 30 см; в) 20 см, 3 дм и 1,2 м; г) 1, 1, x; д) a, b, c.

2.19. Найдите площадь поверхности куба, ребро которого равно: а) 0,6; б) 3 см; в) x.

2.20. Выразите через x площадь поверхности таких фигур: а) прямоугольного параллелепипеда, у которого основанием является квадрат со стороной x, а боковое ребро в 2 раза больше ребра основания; б) объединения двух равных кубов с ребром 1, которые пересекаются по кубу с ребром x.

Ищем границы

2.21. В каких границах лежит площадь: а) квадрата со стороной больше 11 мм, но меньше 12 мм; б) прямоугольника с одной стороной больше 15 и меньше 16, а другой больше 12 и меньше 13?

Доказываем

2.22. Прямая, перпендикулярная одной из сторон прямоугольника, делит пополам его площадь. Докажите, что она делит пополам и его периметр. Верно ли обратное?

Исследуем

2.23. Куб с ребром 6 разрезали на кубы с рёбрами 2. Сравните суммарную площадь поверхностей полученных кубов с площадью поверхности исходного куба. Обобщите результаты.

2.24. Куб с ребром 1 м распилили на кубики с ребром 1 дм, а потом все эти кубики поставили один на другой. Чему равна высота получившегося столба? А если распилить его на кубики с ребром 1 см? А если на кубики с ребром 1 мм?

2.25. Какая зависимость существует между площадью и периметром квадрата? Существует ли зависимость и для произвольного прямоугольника?

2.26. Можно ли сделать прямоугольник площадью 4, если периметр его равен: а) 8; б) 10^6; в) 10^{-6}?

2.27. Нарисуйте два квадрата так, чтобы они имели общий центр и параллельные стороны. а) Пусть сторона меньшего квадрата составляет $\frac{2}{3}$ стороны большего квадрата. Какая площадь больше: маленького квадрата или оставшейся части большого квадрата без маленького? б) Пусть сторона маленького квадрата составляет 0,9 стороны большого квадрата. Сколько процентов от площади исходного квадрата находится в оставшейся части?

Применяем геометрию

2.28. Перед вами страница книги. Сколько процентов составляет площадь, занятая текстом, от общей площади страницы? Сначала попробуйте дать ответ на глаз, а затем проверьте его вычислениями.

2.29. Для облицовки стены дома имеются равные квадратные плитки. Как вы узнаете, сколько понадобится плиток для выполнения работы?

2.30. Требуется узнать, сколько деревьев можно посадить на данном прямоугольном участке земли для обустройства сада. Как вы будете действовать?

Рассуждаем

2.31. Имеются два прямоугольника. Какие из следующих утверждений верны: а) если прямоугольники равны, то их площади равны; б) если площади прямоугольников равны, то равны и прямоугольники; в) если равны их площади, то равны и периметры; г) если равны их периметры, то равны и площади; д) если один из них имеет бóльшую площадь, то он имеет и больший периметр; е) если один из них имеет больший периметр, то он имеет и бóльшую площадь?

Занимательная геометрия

2.32. Китайская игра танграм представляет собой квадрат, разрезанный на треугольники и четырёхугольники так, как показано на рисунке 69. Найдите их площади, если сторона квадрата равна 2.
Составьте из этих частей разные фигуры.

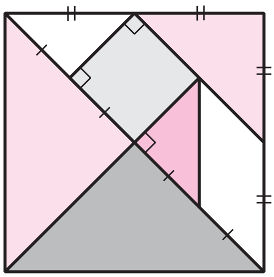


Рис. 69

§ 3. Теорема Пифагора

3.1. Важнейшая теорема геометрии

В самой знаменитой теореме геометрии — теореме Пифагора — говорится о площадях: **площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах этого треугольника** (рис. 70). Известно много различных доказательств этой теоремы. Вот одно из них.

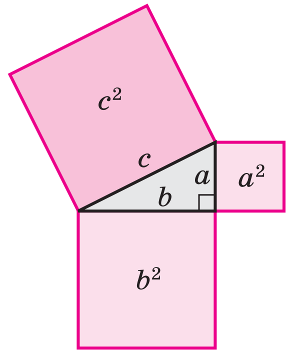


Рис. 70

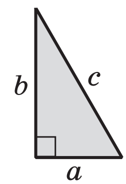


Рис. 71

Доказательство. Рассмотрим прямоугольный треугольник T с катетами a и b и гипотенузой c (рис. 71). Построим два равных квадрата, стороны которых равны $a + b$: квадрат P с вершинами A, B, C, D и квадрат Q с вершинами K, L, M, N (рис. 72). На сторонах этих квадратов отмечены точки, разбивающие эти стороны на отрезки, равные отрезкам a и b (двумя способами). Соединяя последовательно точки разбиения сторон в квадрате P отрезками, получим разбиение квадрата P на четыре треугольника, равные треугольнику T, и на четырёхугольник F, все стороны которого равны c (рис. 73, *а* на с. 46). Четырёхугольник F является квадратом, так как все его углы прямые: они равны разности 180° и 90° (суммы острых углов прямоугольного треугольника T), т. е. равны 90°. Итак, F — квадрат со стороной c.

Соединив отрезками точки разбиения противоположных сторон квадрата Q, разобьём его на квадрат G со стороной a, квадрат H со стороной b и два прямоугольника со сторонами a и b (рис. 73, *б*). Каждый из этих прямоугольников диагональю разобьём на два треугольника, равные треугольнику T (рис. 73, *в*).

Из свойств площади следуют равенства

$$S(P) = S(F) + 4S(T),$$
$$S(Q) = S(G) + S(H) + 4S(T)$$
$$\text{и} \quad S(P) = S(Q).$$

Поэтому $S(F) = S(G) + S(H)$.■

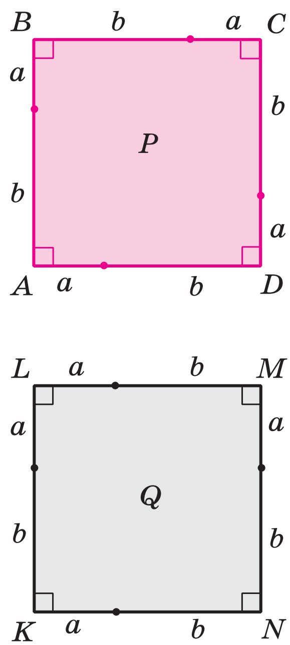


Рис. 72

Для применений теоремы Пифагора удобнее её другая, алгебраическая формулировка. Эта алгебраическая формулировка получится из первой, чисто геометрической формулировки, если

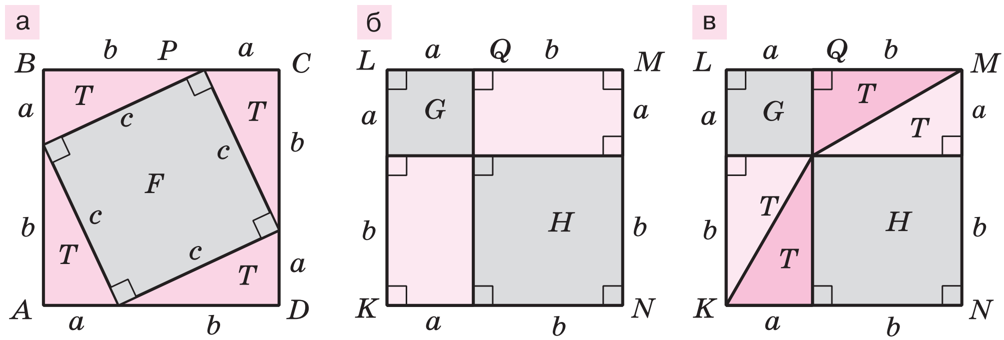


Рис. 73

вспомнить, что площадь квадрата равна квадрату его стороны. И тогда имеем такую теорему:

Теорема 2 (*теорема Пифагора*). **В прямоугольном треугольнике квадрат длины гипотенузы равен сумме квадратов длин катетов.**

Используя традиционные обозначения для катетов a, b и для гипотенузы c, имеем такое равенство:

$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad (1)$$

Часто теорему Пифагора формулируют ещё короче: *квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов,* имея в виду длины катетов и гипотенузы.

Замечание. В дальнейшем, когда в формулировках теорем речь идёт о длинах некоторых отрезков (сторон, диагоналей, наклонных, проекций и т. п.), мы, как и в этом случае, будем ради краткости речи опускать слово *длина*.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие вы знаете формулировки теоремы Пифагора?
2. На какие свойства площадей опирается доказательство теоремы Пифагора?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

3.1. Теорема Пифагора выражает *свойство прямоугольного треугольника*. Обратное ей утверждение является *признаком прямоугольного треугольника*. Этим утверждением Евклид завершил первую книгу своих «Начал». Сформулируем и докажем его.

Если в треугольнике квадрат одной из его сторон равен сумме квадратов двух других его сторон, то такой треугольник прямоугольный.

Доказательство. Действительно, пусть в треугольнике ABC выполняется равенство $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (рис. 74). Построим прямоугольный треугольник KLM с прямым углом M и катетами KM и LM, равными соответственно сторонам AC и BC. По теореме Пифагора $KL^2 = KM^2 + LM^2$. Так как $AC = KM$ и $BC = LM$, то $AB^2 = KL^2$, а потому $AB = KL$. Значит, в треугольниках ABC и KLM стороны равны, т. е. эти треугольники равны. А в равных треугольниках и соответственные углы равны. Поэтому угол C равен углу M, т. е. угол C прямой. ■

Итак, *равенство* (1) *является характерным свойством прямоугольного треугольника.*

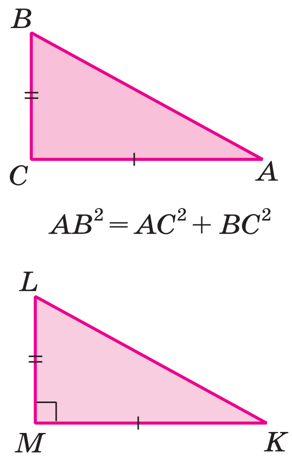


Рис. 74

Работаем с формулой

3.2. Три натуральных числа a, b, c называют **пифагоровой тройкой**, если выполняется равенство (1). Проверьте, что тройки чисел $(2n,\ n^2 - 1,\ n^2 + 1)$ и $(2pq,\ p^2 - q^2,\ p^2 + q^2)$ — пифагоровы (числа n, p, q — натуральные). Напишите несколько пифагоровых троек. Почему треугольник, длины сторон которого — пифагоровы тройки, является прямоугольным?

Доказываем

3.3. Глядя на рисунки 75—78, найдите различные доказательства теоремы Пифагора.

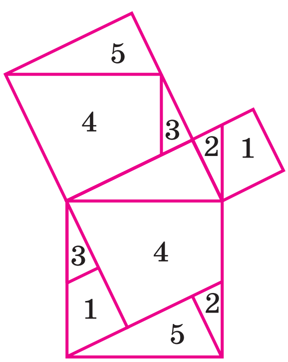


Рис. 75

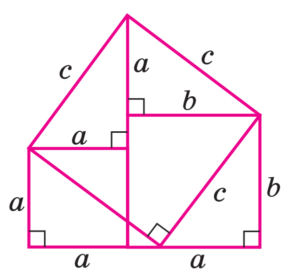


Рис. 76

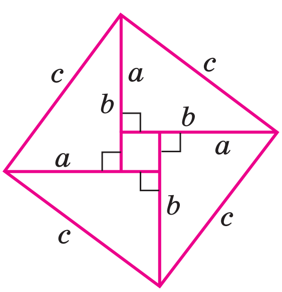


Рис. 77

Исследуем

3.4. Стороны прямоугольного треугольника умножили на одно и то же положительное число. Являются ли полученные отрезки сторонами прямоугольного треугольника?

3.5. Каждую сторону прямоугольного треугольника увеличили на один и тот же отрезок. Являются ли полученные отрезки сторонами прямоугольного треугольника?

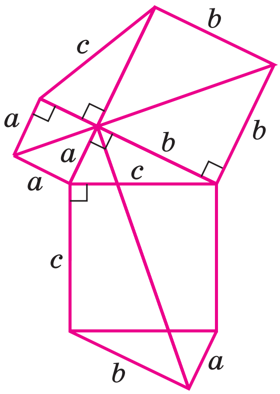


Рис. 78

3.2. Пифагор

Знаменитый древнегреческий учёный, именем которого названа важнейшая теорема геометрии, жил в VI в. до н. э. (ок. 570—ок. 500 гг. до н. э.). Он родился и провёл свою юность на острове Самосе в Эгейском море, в молодые годы много странствовал, долго жил в Египте, затем в Вавилоне, может быть, побывал и в Индии.

Пифагор

Последний период своей жизни (примерно с 530 г. до н. э.) Пифагор прожил в городе Кротоне — греческой колонии на юге Италии. Здесь он создал знаменитую пифагорейскую школу. Его исследования охватывали и арифметику («Всё есть число» — девиз пифагорейцев), и музыку (Пифагором создана теория гармонии), и, конечно, геометрию. От пифагорейцев идёт и слово *математика*: греческое μαθημα — познание, учение. Μαθημα у пифагорейцев состояла из четырёх разделов: арифметики, геометрии, музыки и астрономии. Эти же разделы составили и средневековый *квадривиум*. Вместе с *тривиумом*, включавшим грамматику, риторику и диалектику, квадривиум составлял «семь свободных искусств», которым обучали молодёжь в Средние века.

Символом пифагорейцев была **пентаграмма** — пятиконечная звезда из диагоналей правильного пятиугольника (рис. 79). В этой фигуре таится много красивых геометрических и арифметических соотношений. Мы подробно расскажем о них в п. 10.5.

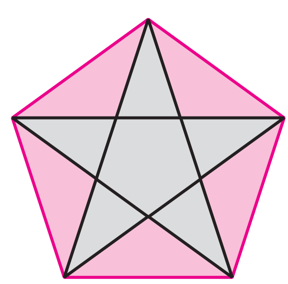
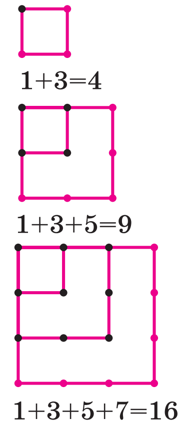


Рис. 79

Сейчас, конечно, ясно, что числами выражаются основные закономерности в арифметике, геометрии и астрономии. Пифагорейцы искали такие закономерности, используя геометрический язык. На рисунке 80 выражена геометрически одна из арифметических закономерностей, открытая пифагорейцами. Но Пифагор нашёл, что и теория гармонии покоится на арифметических соотношениях, и впервые выразил математически физическую закономерность.

О том, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах, знали в Египте и Вавилоне задолго до Пифагора, но лишь как факт, выведенный из измерений. Пифагор же нашёл доказательство этого утверждения, и факт, взятый из отдельных измерений, стал необходимым законом: ведь если утверждение доказано, то «иначе быть не может».



$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

Рис. 80

3.3. Равносоставленные фигуры

Ясно, что фигурки, составленные из всех частей танграма (рис. 81 и 82), имеют одинаковую площадь, равную площади заполненного ими квадрата (задача 2.32, рис. 69). Действительно, ведь фигуры на этих рисунках **равносоставлены**, т. е. составлены из соответственно равных друг другу частей. Пары соответственных частей имеют равные площади. Когда вычисляют площадь всей фигуры, то площади её частей складывают, а потому *площади двух равносоставленных фигур равны*, так как, вычисляя их, складывают соответственно равные слагаемые. Этим свойством равносоставленных фигур вы пользовались и когда доказывали теорему Пифагора, глядя на рисунки 75 и 76: на этих рисунках ясно, что квадрат, построенный на гипотенузе, равносоставлен с фигурой, состоящей из квадратов, построенных на катетах.

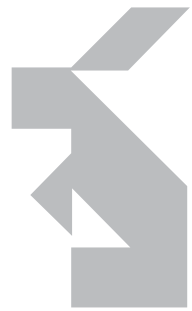


Рис. 81

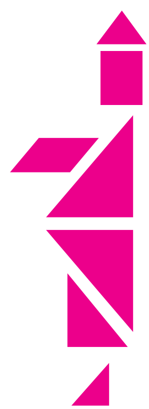


Рис. 82

Вопросы для самоконтроля

1. Когда и в какой стране жил Пифагор?
2. Что еще вы знаете о Пифагоре?

3.4. Вычисление длин. Квадратный корень

Теорема Пифагора будет для нас основным средством не только в теории курса 8 класса, но и при решении вычислительных задач. Так, теорема Пифагора позволяет по любым двум сторонам прямоугольного треугольника найти его третью сторону.

Найдём, например, гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны 6 и 8. По теореме Пифагора квадрат гипотенузы равен $6^2 + 8^2 = 100$. И чтобы завершить решение задачи, надо найти сторону квадрата, площадь которого равна 100. Ясно, что она равна 10, так как $10^2 = 100$.

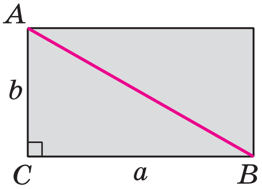
Если известны гипотенуза и один из катетов, то можно найти другой катет. Например, если гипотенуза равна 13, а катет равен 12, то по теореме Пифагора квадрат другого катета равен $13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25$. И мы снова приходим к той же задаче: найти положительное число, квадрат которого известен. В данном случае, когда квадрат равен 25, ясно, что это число равно 5. Следовательно, второй катет треугольника равен 5.

В обеих рассмотренных задачах нам пришлось по известному квадрату положительного числа находить само это число. А именно, зная некоторое положительное число a, мы находим такое положительное число b, что $b^2 = a$. Найденное положительное число b обозначается так: $b = \sqrt{a}$, читается: **«*b* равно корню квадратному из *a*»**.

Операцию нахождения квадратного корня называют **извлечением квадратного корня**.

Нахождение положительного квадратного корня можно геометрически истолковать как нахождение стороны квадрата, площадь которого известна. Подробно об извлечении квадратного корня говорится в курсе алгебры.

В тех случаях, когда нельзя найти точное значение квадратного корня в виде отношения натуральных чисел (например, для $\sqrt{2}$), мы будем искать его приближённо по таблице или с помощью микрокалькулятора (например, $\sqrt{2} \approx 1{,}414$) либо оставлять в ответе знак квадратного корня (например, $\sqrt{2}$).



$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Рис. 83

Вернёмся к вычислению длин. Прямоугольный треугольник всегда можно достроить до прямоугольника, а прямоугольник, наоборот, всегда можно разбить на два равных прямоугольных треугольника. При этих преобразованиях катеты прямоугольного треугольника становятся сторонами прямоугольника, а гипотенуза — его диагональю (рис. 83). Поэтому теореме Пифагора можно дать ещё одну формулировку, в которой речь уже пойдёт о сторонах и диагонали прямоугольника.

Теорема (*теорема Пифагора*). **Квадрат длины диагонали прямоугольника равен сумме квадратов его измерений.**

Вопросы для самоконтроля

1. Какую еще формулировку теоремы Пифагора вы теперь знаете?
2. По какой формуле можно вычислить диагональ прямоугольника?

Теорема Пифагора позволяет находить высоту треугольника, зная длины его сторон. Как это можно сделать, мы рассказываем в рубрике «Разбираемся в решении» среди задач к этому пункту.

ЗАДАЧИ

Разбираемся в решении

3.6. Найдите высоты треугольника, зная его стороны.

Решение. Пусть заданы стороны a, b, c треугольника ABC и требуется найти его высоты h_a, h_b, h_c. Например, пусть $a = 8$, $b = 7$, $c = 9$. Как здесь быть? Теорема Пифагора позволяет решить такую задачу на вычисление. Пусть AD — искомая высота (рис. 84, *а*).

Обозначим через x отрезок BD. Тогда $CD = 8 - x$. Так как

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 \text{ и } AD^2 = AC^2 - CD^2,$$

$$\text{то } AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2, \text{ т. е.}$$

$$81 - x^2 = 49 - (8 - x)^2. \qquad (2)$$

Из уравнения (2) получаем, что $x = 6$. Так как $BD = 6$, то

$$AD^2 = 81 - 36 = 45,$$

$$\text{т. е. } AD = 3\sqrt{5}.$$

Две другие высоты этого треугольника найдите самостоятельно.

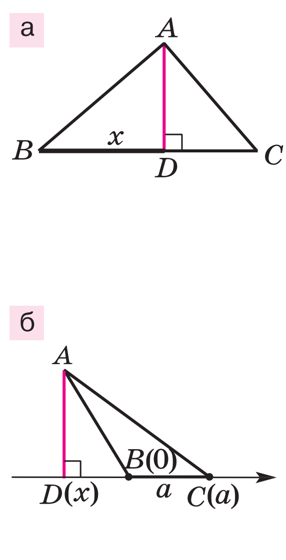


Рис. 84

★ Если повторить проведённое нами решение в общем виде (т. е. в буквенных обозначениях) с тем же чертежом, то для отрезка x получим такое выражение:

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}. \qquad (3)$$

Если $a^2 + c^2 < b^2$, то по этой формуле $x < 0$. Что же это значит? Вспомним, что $CD = a - x$, и если $x < 0$, то $CD > a$! Это неравенство подсказывает нам, что точка B лежит внутри отрезка CD и угол B тупой (рис. 84, *б*). Объединить в решении все случаи расположения точки D на прямой BC можно так. Эту прямую считать числовой осью с началом в точке B, идущей от B к C. Точка C будет иметь координату a, точка D — координату x. Тогда $BD = |x|$, $CD = |a - x|$ и уравнение относительно x будет иметь вид $c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2$. Решая его, получаем выражение (3) для x. Далее,

$$AD^2 = c^2 - x^2 = c^2 - \frac{1}{4a^2}(a^2 + c^2 - b^2)^2 =$$

$$= \frac{1}{4a^2}(4a^2c^2 - (a^2 + c^2)^2 + 2(a^2 + c^2)b^2 - b^4)$$

и для высоты h_a получаем такую формулу:

$$h_a^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2}. ★ \qquad (4)$$

Смотрим

3.7. Найдите длину отрезка x на рисунке 85.

3.8. а) На рисунке 86 выберите какой-нибудь прямоугольный треугольник. Найдите в нём гипотенузу и выразите её через другие стороны этого же треугольника. б) Затем найдите такой треугольник, в котором эта же гипотенуза является стороной другого прямоугольного треугольника. Выразите её ещё раз, но уже через стороны второго треугольника.

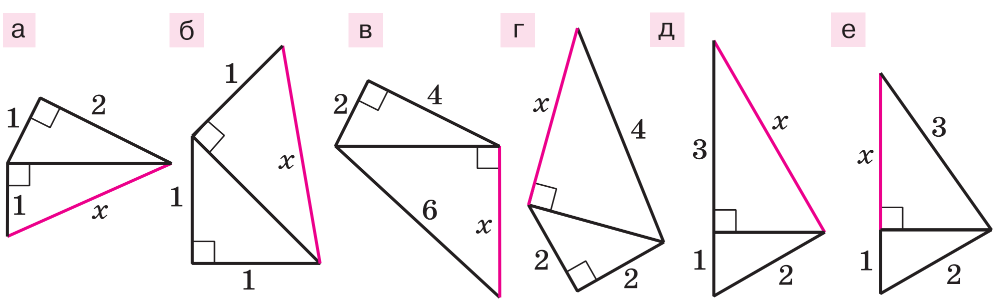


Рис. 85

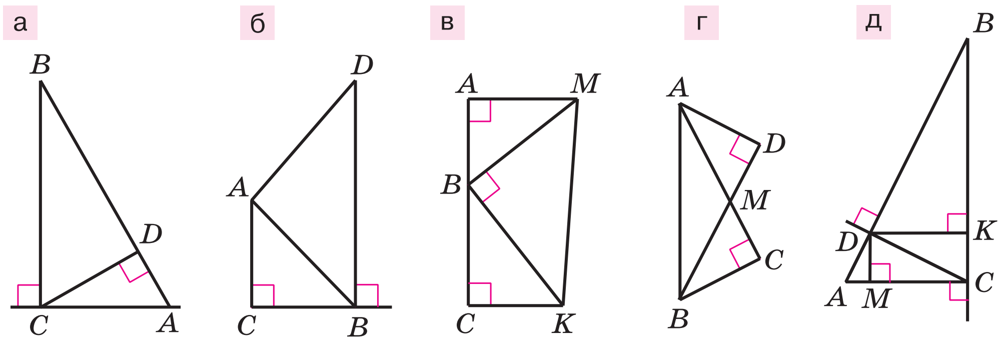


Рис. 86

Планируем

3.9. Точки A и B лежат на биссектрисах смежных углов с общей вершиной O. Как найти расстояние между ними, если известны их расстояния от точки O?

3.10. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой. а) В этом треугольнике провели медиану BK. Как найти её длину, если известны катеты? б) Известны длины медианы BK и катета BC. Как найти другой катет? другие медианы? в) Известны длины медианы BK и катета AC. Как найти другой катет? другие медианы? г) Известны гипотенуза AC и медиана BK. Как найти катеты и другие медианы?

3.11. Пусть известны расстояния от некоторой точки квадрата до прямых, содержащих стороны квадрата. Как найти расстояния от этой точки до вершин квадрата?

Вычисляем

3.12. Вычислите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 8 и 6; б) 0,4 и 0,3; в) 1 и 2; г) 1,5 и 2,5.

3.13. Вычислите катет прямоугольного треугольника, если известны другой его катет и гипотенуза: а) 1,2 и 1,3; б) 1,5 и 2,5.

3.14. Найдите диагонали прямоугольника: а) стороны которого равны 3 и 4; б) периметр которого равен 10, а одна из сторон прямоугольника равна 2; в) площадь которого равна 12, а одна из сторон прямоугольника равна 4.

3.15. Найдите: а) диагональ квадрата, сторона которого равна 6; б) стороны квадрата, диагональ которого равна a.

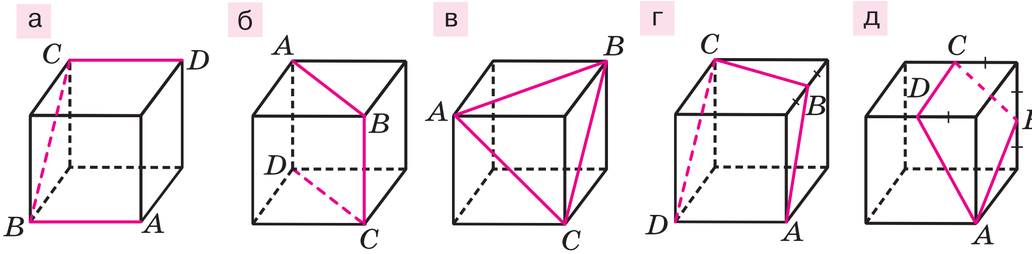


Рис. 87

3.16. Найдите: а) высоту равнобедренного треугольника, у которого боковая сторона и основание равны соответственно 13 и 10; б) основание равнобедренного треугольника, боковая сторона и высота которого равны соответственно a и h.

3.17. Найдите: а) высоту равностороннего треугольника, сторона которого равна 6; б) сторону равностороннего треугольника, высота которого равна h.

3.18. Найдите медианы прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8.

3.19. AB и CD — два перпендикуляра в одной плоскости к прямой BD, лежащие с одной стороны от неё. Вычислите: а) AC, если $BD = 1$, $AB = 1$, $CD = 2$; б) BD, если $AC = 3$, $CD = 3$, $AB = 2$; в) CD, если $AB = BD = 3$, $AC = 5$.

3.20. Найдите длины ломаных на поверхности единичного куба, изображённых на рисунке 87.

3.21. Найдите: а) диагональ куба, ребро которого равно a; б) расстояние от центра единичного куба до его вершины.

3.22. Найдите ребро куба, диагональ которого равна 1.

3.23. Найдите: а) гипотенузу прямоугольного треугольника с катетами x и $2x$; б) катеты прямоугольного треугольника, в котором гипотенуза равна 1, если известно, что один из катетов в 2 раза больше другого.

3.24. Выразите через x диагональ прямоугольника, в котором: а) измерения равны $1+x$ и $1-x$; б) одно измерение равно x, а периметр равен 1; в) площадь равна 1, а одно измерение равно x.

3.25. Найдите: а) диагональ прямоугольного параллелепипеда с измерениями x, $1 - x$, $1 + x$; б) ребро прямоугольного параллелепипеда с диагональю x и двумя другими рёбрами 1 и 2.

$\mathcal{X}$ Выводим формулу

3.26. Найдите зависимость между отрезками x и y на рисунке 88.

3.27. В плоскости два круга с радиусами R_1 и R_2 имеют общую хорду длины d. Расстояние между центрами кругов равно a. Пусть три из этих четырёх величин известны. Как найти четвёртую?

Исследуем

3.28. В плоскости задан прямоугольник. Известно расстояние от некоторой точки этой плоскости до трёх его вершин. Сможете ли вы найти расстояние от этой точки до четвёртой вершины прямоугольника?

3.29. а) Из одной точки окружности проведены две перпендикулярные между собой хорды с длинами a и b. Можете ли вы найти радиус этой окружности? б) В окружности радиуса R проведены две равные, пересекающиеся и перпендикулярные хорды длиной d. Чему равно расстояние от центра окружности до точки пересечения этих хорд?

3.30. В окружности проведены диаметр и хорда, перпендикулярная ему. Она делит диаметр на отрезки длиной a и b. Можете ли вы найти длину хорды?

Применяем геометрию

3.31. Скорость гребца, плывущего поперёк реки, 3 км/ч, а скорость течения реки 4 км/ч. Гребец плыл на другой берег 40 мин. а) Какое расстояние он преодолел? б) С какой результирующей скоростью он передвигался?

3.32. Бревно имеет диаметр у тонкого конца 450 мм. Из него нужно выпилить доски шириной 360 мм и толщиной 30 мм. Сколько получится досок? А сколько их будет, если надо изготовить доски шириной 270 мм?

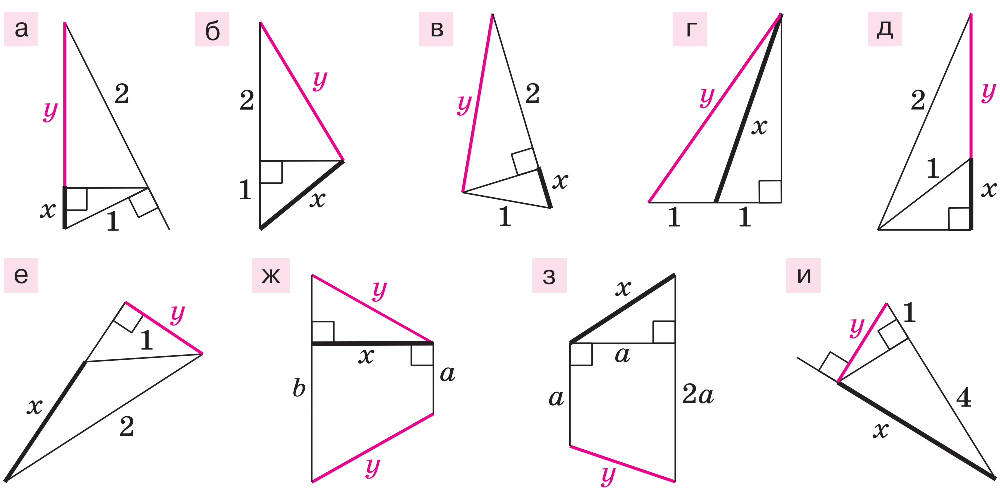


Рис. 88

3.33. Как найти длину провода, натянутого между вершинами двух вертикальных мачт, если известны высоты мачт и расстояния между их основаниями?

Занимательная геометрия

3.34. Эта задача взята из древнего китайского трактата «Математика в 9 книгах»: «Имеется квадратный водоём со стороной 1 чжан. В центре его растёт камыш, который выступает над водой на 1 чи. Если потянуть камыш к берегу, то он как раз коснётся его. Спрашивается: какова глубина водоёма и какова длина камыша?» (Чжан и чи — меры длины, 1 чжан = 10 чи.)

3.35. Этой задаче 4000 лет — её решали ещё в Вавилоне. «Шест длиной $\frac{1}{2}$ прислонён вертикально к стене. Его верхний конец опустили на $\frac{1}{10}$. Как далеко отодвинется его нижний конец?»

3.36. Задан отрезок a. Придумайте способ построения циркулем и линейкой отрезка $\sqrt{na}$, где n — натуральное число, например $n = 11$.

3.5. Наклонные и проекции

Пусть точка A не лежит на прямой p. **Наклонной**, проведённой из точки A к прямой p, называется любой отрезок AB, соединяющий точку A с точкой B на прямой p и не перпендикулярный прямой p (рис. 89). Если из точки A проведён также перпендикуляр AC на прямую p, то появляется прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB и катетами AC и BC. Отрезок BC называется **проекцией наклонной** AB на прямую p. Теорема Пифагора связывает длины наклонной AB, перпендикуляра AC и проекции BC равенством

$$AB^2 = AC^2 + BC^2. \qquad (5)$$

Поэтому **если из одной точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, то: 1) перпендикуляр короче наклонной ($AC < AB$) и 2) проекция короче наклонной ($BC < AB$).**

Часто эти утверждения формулируют более кратко: **перпендикуляр короче наклонной** и **проекция короче наклонной** (подразумевая, что перпендикуляр и наклонная проведены из одной точки и к одной прямой).

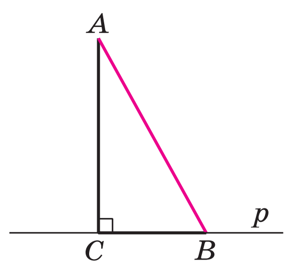


Рис. 89

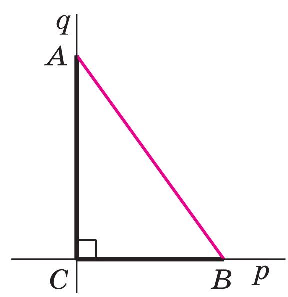


Рис. 90

▲*Формулировка теоремы Пифагора в терминах проекций отрезка на две взаимно перпендикулярные прямые*. Вернёмся к рисунку 89 и пополним его прямой AC, которую обозначим через q (рис. 90). Тогда катеты AC и BC прямоугольного треугольника ABC — это проекции отрезка AB на прямые q и p соответственно. Поэтому равенство (5) можно сформулировать как теорему о проекциях: **на плоскости квадрат длины отрезка равен сумме квадратов длин его проекций на две взаимно перпендикулярные прямые.**

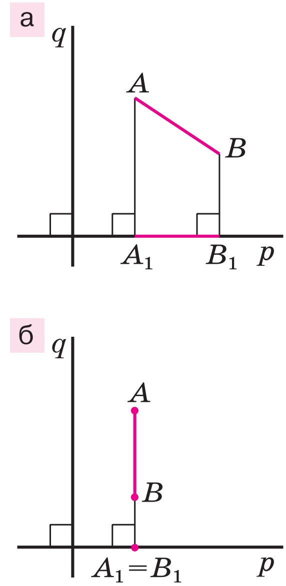


Рис. 91

В формулировке не сказано, что концы отрезка лежат на данных прямых, потому что это и неважно: теорема верна без этих ограничений.

Действительно, пусть на плоскости заданы две взаимно перпендикулярные прямые p и q, а также некоторый отрезок AB (рис. 91, *а*). Опустив из точек A и B перпендикуляры AA_1 и BB_1 на прямую p, получим отрезок A_1B_1, который называется **проекцией отрезка AB на прямую p**. Проекция отрезка AB на прямую p может выродиться в точку, если $A_1 = B_1$, т. е. в случае, когда $AB \perp p$ (рис. 91, *б*).

Спроектируем отрезок AB на обе прямые p и q: в отрезок A_1B_1 на p и в отрезок A_2B_2 на q (рис. 92). Тогда теорема о проекциях утверждает, что

$$AB^2 = {A_1B_1}^2 + {A_2B_2}^2. \qquad (6)$$

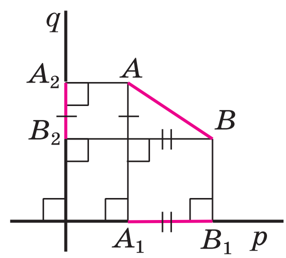


Рис. 92

Равенство (6) является обобщением равенства (1), а потому теорема о проекциях является обобщением теоремы Пифагора. Доказательство равенства (6) проведите самостоятельно, глядя на рисунок 92 и разбирая, кроме того, частные случаи.▼

Справка словесника. Латинское слово *проекция* (*projectio*) означает *бросание вперёд*. Сравните его с латинским словом *инъекция (injectio)*, которое означает *вбрасывание*.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется наклонной из данной точки к прямой?
2. Что такое проекция наклонной на прямую?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

3.37. Из точки A к данной прямой проведены перпендикуляр AC и две наклонные AB и AD. Докажите, что: а) $BC = CD$, если $AB = AD$; б) $AB = AD$, если $BC = CD$; в) $BC > CD$, если $AB > CD$; г) $AB > AD$, если $BC > CD$.
Дайте различные словесные формулировки этих утверждений. Как формулируются соответствующие утверждения в пространстве?

3.38. В прямоугольном треугольнике провели высоту на гипотенузу. Докажите, что: а) квадрат этой высоты равен произведению проекций катетов на гипотенузу; б) квадрат каждого катета равен произведению гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

Смотрим

3.39. На рисунке 93 укажите проекцию каждой наклонной на прямую a.

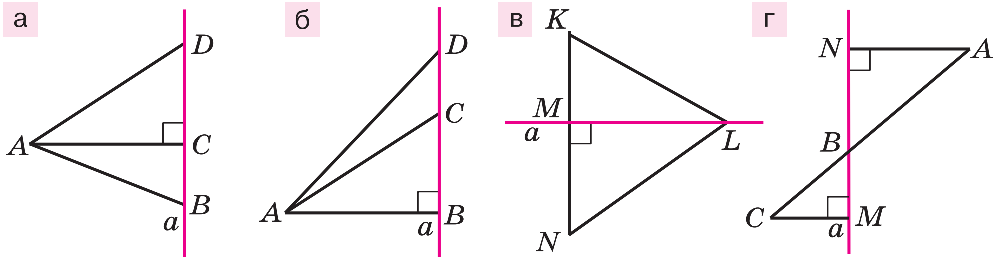


Рис. 93

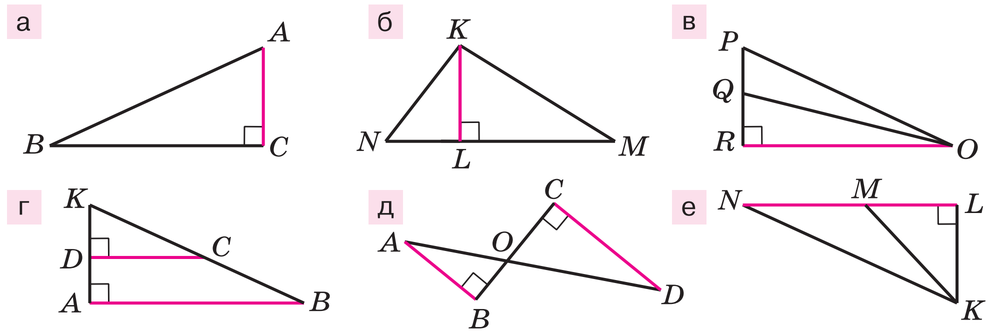


Рис. 94

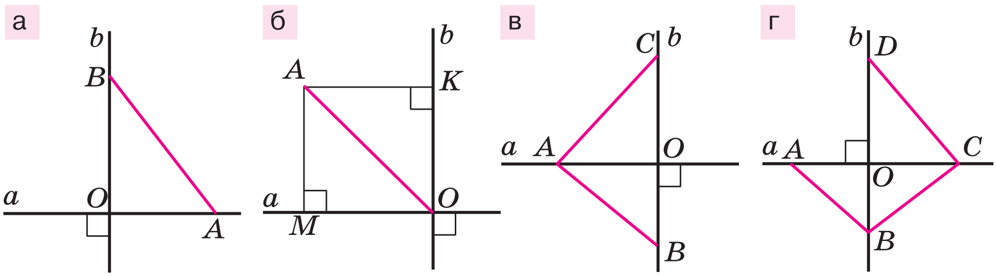


Рис. 95

3.40. На рисунке 94 для каждого малинового отрезка укажите те наклонные, для которых этот отрезок является проекцией.

3.41. На рисунке 95 укажите проекцию каждой наклонной на горизонтальную прямую a и вертикальную прямую b. Укажите наклонную, проекцией которой является каждый вертикальный или горизонтальный отрезок на этом рисунке.

Доказываем

3.42. Из точки к данной прямой проведены перпендикуляр и две наклонные. Докажите, что разность квадратов наклонных равна разности квадратов их проекций. Проверьте обратное утверждение.

3.43. Докажите, что в равнобедренном треугольнике равны проекции: а) боковых сторон на основание; б) боковых сторон на прямые, проходящие через другие боковые стороны; в) основания на прямые, проходящие через боковые стороны; г) высоты к основанию на боковые стороны; д) высот к боковым сторонам на основание; е) высот к боковым сторонам на прямые, проходящие через другие боковые стороны.

Исследуем

3.44. Нарисуйте прямую a, на ней точку A и наклонную AB к ней. Всегда ли можно провести из точки B к прямой a другую наклонную, которая: а) равна данной; б) больше данной; в) меньше данной? А сколько таких наклонных можно провести?

3.45. Нарисуйте окружность с центром O и два взаимно перпендикулярных диаметра. Пусть некоторая точка X движется по окружности. Понаблюдайте за проекцией радиуса OX на каждый из диаметров. Какие выводы вы можете сделать?

§ 4. Площадь треугольника и площадь трапеции

4.1. Площадь треугольника

Многоугольники составлены из треугольников. Поэтому, узнав, как вычисляется площадь треугольника, мы сумеем найти площадь любого многоугольника.

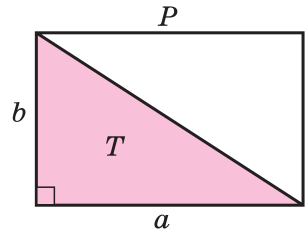


Рис. 96

Площадь любого прямоугольного треугольника найти совсем просто — она *равна половине произведения его катетов.*

Действительно, любой прямоугольный треугольник T с катетами a и b можно достроить до прямоугольника P со сторонами a и b (рис. 96). Этот прямоугольник диагональю разбивается на два равных треугольника, один из которых — исходный треугольник T. Поэтому $S(P) = 2S(T)$. А так как $S(P) = ab$, то $S(T) = \frac{1}{2}ab$.

Отметим, что каждый из катетов прямоугольного треугольника является высотой, опущенной на другой катет.

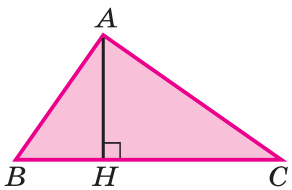


Рис. 97

Рассмотрим теперь произвольный треугольник ABC. Проведём его высоту AH. Если высота AH лежит внутри треугольника ABC, то она разбивает его на два прямоугольных треугольника AHB и AHC (рис. 97). Площадь S треугольника ABC равна сумме площадей S_1 и S_2 треугольников AHB и AHC. Как вычисляются площади S_1 и S_2, мы уже знаем:

$$S_1 = \frac{1}{2}BH \cdot AH, \ S_2 = \frac{1}{2}CH \cdot AH.$$

Поэтому

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2}(BH + CH) \cdot AH = \frac{1}{2}BC \cdot AH. \quad (1)$$

Итак, для уже рассмотренных случаев мы доказали, что **площадь треугольника равна половине произведения стороны треугольника и высоты, опущенной на эту сторону.**

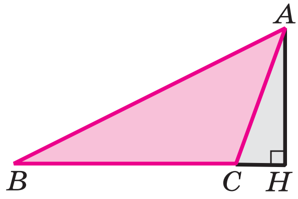


Рис. 98

Докажем, что это утверждение справедливо и для оставшегося ещё случая, когда высота AH лежит вне треугольника ABC (рис. 98).

Будем считать, что точка C лежит между точками B и H. В этом случае площадь треугольника ABC равна разности площадей S_1 и S_2 треугольников ABH и ACH, а потому

$$S = S_1 - S_2 = \frac{1}{2}(BH - CH) \cdot AH = \frac{1}{2}BC \cdot AH,$$

т. е. мы снова пришли к формуле (1).

Мы рассмотрели все возможные случаи. В результате мы доказали следующую важную теорему:

Теорема 3 (*о площади треугольника*). **Площадь треугольника равна половине произведения любой из его сторон и высоты, проведённой к этой стороне, т. е. вычисляется по формуле**

$$\boldsymbol{S(T) = \frac{1}{2}ah_a.} \qquad (2)$$

Замечание. Обычно одну из сторон треугольника рисуют горизонтальной и тогда её называют *основанием*, а под *высотой треугольника* понимают ту его высоту, которая проведена к основанию. Тогда теорему о площади треугольника формулируют совсем коротко: *площадь треугольника равна полупроизведению его основания и высоты.*

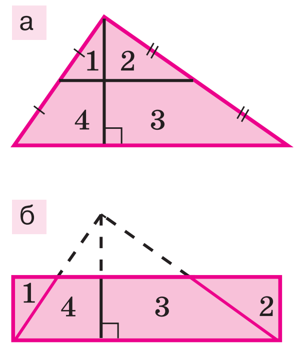


Рис. 99

Комментарий. Можно доказать теорему о площади треугольника различными способами. Например, с помощью «перестраивания» треугольника в равновеликий ему прямоугольник. На рисунке 99, *а*, *б* показан возможный вариант такого «перестраивания». Используя этот рисунок, самостоятельно проведите соответствующие доказательства. Подумайте о том, какие трудности могут возникнуть при проведении доказательства, если высота треугольника будет проведена не на бóльшую сторону. Как можно эти трудности преодолеть?

Вопросы для самоконтроля

1. По какой формуле вычисляют площадь прямоугольного треугольника?
2. По какой формуле вычисляют площадь произвольного треугольника?
3. Можно ли считать формулу для площади прямоугольного треугольника частным случаем формулы для площади произвольного треугольника?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

4.1. а) Докажите, что в прямоугольном треугольнике произведение катетов равно произведению гипотенузы и высоты, проведённой к ней. б) Каждую из величин в полученной в пункте «а» формуле выразите через остальные. в) Запишите формулу из пункта «а» в виде пропорции.

4.2. Пусть a и b — стороны треугольника, h_a и h_b — высоты, проведённые к ним. а) Докажите, что $a \cdot h_a = b \cdot h_b$. б) Запишите эту формулу в виде пропорции. в) Докажите, что $a = b$ тогда и только тогда, когда $h_a = h_b$. г) Докажите, что в треугольнике к большей стороне проводится меньшая высота. д) Сформулируйте и проверьте утверждение, обратное утверждению «г».

Смотрим

4.3. Какую часть от площади треугольника ABC составляет площадь S (рис. 100)? Точки K, L, M — середины сторон треугольника.

4.4. Сравните площади треугольников, изображённых на рисунке 101.

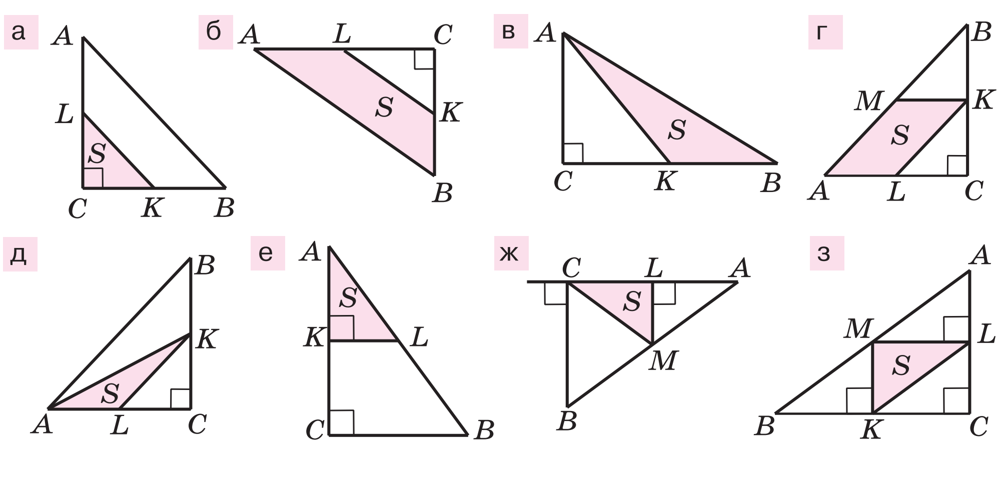


Рис. 100

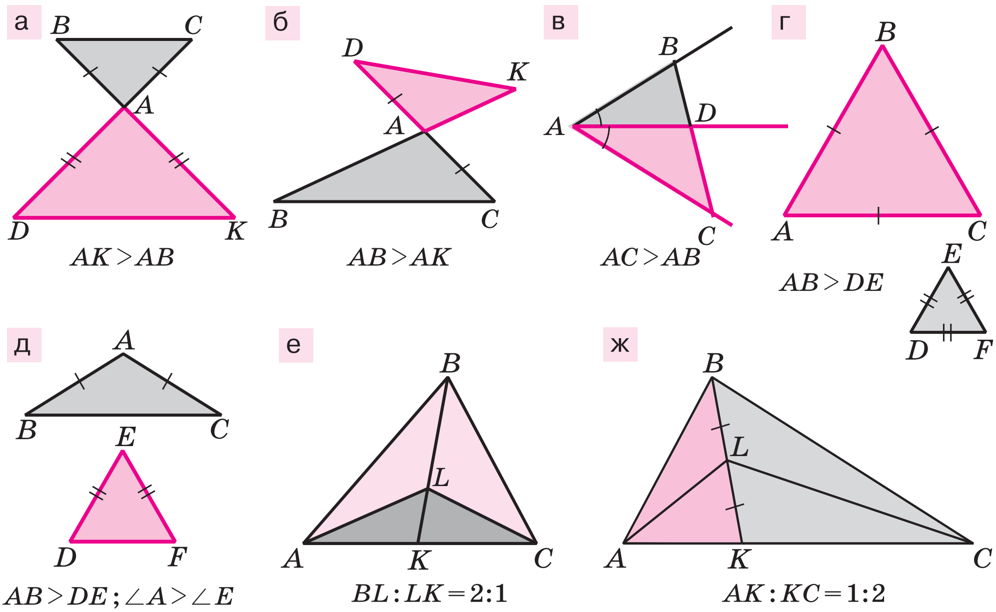


Рис. 101

Планируем

4.5. Как найти площадь закрашенных частей единичного квадрата, изображённых на рисунке 102?

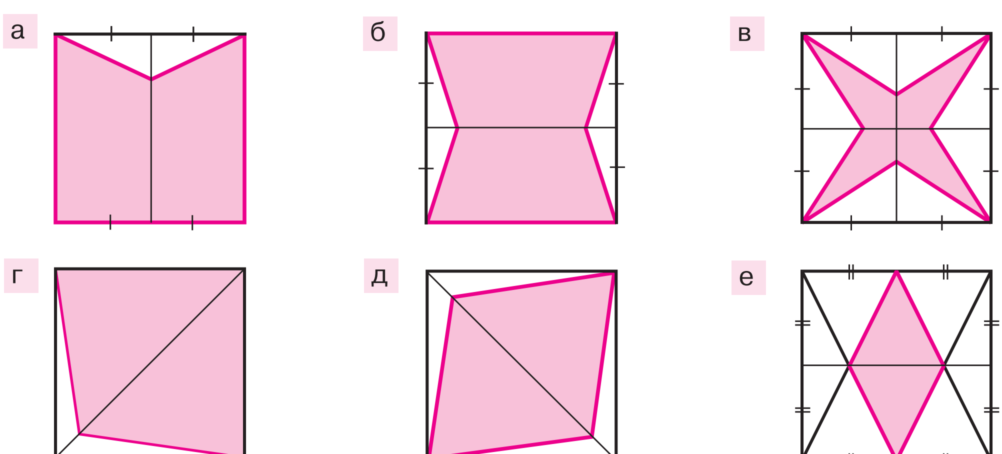


Рис. 102

4.6. Как найти площадь поверхности: а) правильного тетраэдра, если известно его ребро; б) правильной треугольной пирамиды, если известны её рёбра; в) правильной четырёхугольной пирамиды, если известны её рёбра?

Представляем

4.7. Площадь одного треугольника больше площади другого. Следует ли из этого, что и периметр его больше?

Работаем с формулой

4.8. Запишите формулу площади прямоугольного треугольника через длины его катетов. а) Что произойдёт с площадью, если, не меняя один из катетов, другой увеличить в 2 раза? уменьшить в 3 раза? б) Пусть один из катетов не меняется. Какой будет зависимость между площадью треугольника и другим катетом? в) Пусть один из катетов увеличился в 10 раз. Что нужно сделать с другим катетом, чтобы площадь треугольника не изменилась? г) Пусть площадь треугольника не меняется. Какой зависимостью связаны между собой катеты?

4.9. Как изменилась площадь прямоугольного треугольника, если: а) один катет увеличили в 2 раза, другой — в 3 раза; б) один катет уменьшили в 2 раза, другой — в 3 раза; в) один катет увеличили в 4 раза, другой уменьшили в 3 раза; г) один катет увеличили на 20%, другой уменьшили на 20%?

4.10. Запишите формулу площади треугольника. Составьте и решите задачу, аналогичную задаче 4.8, для произвольного треугольника.

4.11. Запишите формулу для площади равностороннего треугольника, сторона которого равна a. а) Как называется такая зависимость площади от стороны? б) Выразите из этой формулы сторону треугольника. в) Приведите пример вычисления его стороны по заданной площади.

Вычисляем

4.12. Вычислите площадь прямоугольного треугольника, катеты которого: а) 62 см и 25 мм; б) 64 дм и 58 см. Выразите полученную площадь в квадратных сантиметрах.

4.13. Вычислите площадь треугольника, у которого: а) основание 16 см, а высота к нему 12 дм (выразите площадь в квадратных сантиметрах); б) основание 1,2 км, а высота к нему 230 м (выразите площадь в квадратных метрах).

4.14. Вычислите площадь равнобедренного треугольника, у которого: а) высота равна 5, а боковая сторона — 13; б) основание равно 16, а боковая сторона — 10.

4.15. Вычислите площадь равностороннего треугольника, у которого: а) сторона равна 6; б) высота равна 4.

4.16. В тетраэдре $PABC$ рёбра $PB = BA = BC = 2$. Вычислите площадь его поверхности, если ребро PB перпендикулярно плоскости грани ABC и угол ABC равен: а) $90°$; б) $120°$; в) $60°$.

4.17. Выразите через x площадь прямоугольного треугольника, в котором: а) каждый катет равен x; б) гипотенуза равна x, а один из острых углов равен $30°$; в) один из катетов равен x, причём он на единицу меньше гипотенузы; г) один из катетов равен x, а другой в 3 раза меньше гипотенузы.

4.18. Выразите через x площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, у которого: а) катет равен x; б) гипотенуза равна x; в) высота, опущенная на гипотенузу, равна x.

4.19. Выразите через x площадь равностороннего треугольника, у которого: а) сторона равна x; б) высота равна x.

Ищем границы

4.20. В каких границах находится площадь треугольника, у которого две стороны равны: а) 1 и 1; б) 2 и 3; в) a и b?

Доказываем

4.21. а) Основания двух треугольников равны. Докажите, что их площади относятся, как высоты, проведённые к этим основаниям. б) Высоты двух треугольников равны. Докажите, что их площади относятся, как основания, на которые проведены эти высоты.

4.22. Два треугольника имеют общий угол. Докажите, что их площади относятся, как произведения сторон, заключающих этот угол.

4.23. В треугольнике ABC провели медиану AA_1. а) Докажите, что площади полученных частей треугольника одинаковы. б) Возьмите на медиане какую-нибудь точку и соедините её с вершинами B и C. Укажите равновеликие треугольники. в) Докажите, что на медиане треугольника есть такая точка, соединив которую с вершинами треугольника отрезками мы разобьём данный треугольник на три равновеликие части.

4.24. Докажите, что из всех равнобедренных треугольников с данной боковой стороной наибольшую площадь имеет прямоугольный.

4.25. Докажите, что площадь правильного многоугольника равна половине произведения периметра этого многоугольника и его апофемы. (Напомним, что **апофема правильного многоугольника** равна расстоянию от его центра до его сторон.)

Разбираемся в решении

4.26. а) Докажите, что биссектриса угла треугольника разбивает его противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам. б) Используя результат задачи «а», предложите способ деления произвольного отрезка в некотором заданном отношении только циркулем и линейкой.

Решение. а) Рассмотрим треугольник ABC. Проведём его биссектрису AM (рис. 103, *а*). Из точки M проведём высоты MH и MK треугольников ABM и ACM (рис. 103, *б*). Так как точка M равноудалена от лучей AB и AC, то $MH = MK$. Поэтому отношение площадей S_1 и S_2 треугольников ABM и ACM равно отношению их сторон AB и AC, т. е. $S_1 : S_2 = AB : AC$. С другой стороны, треугольники ABM и ACM имеют одну и ту же высоту — высоту треугольника ABC, опущенную из вершины A. Поэтому их площади относятся, как их основания BM и CM (задача 4.21 б), т. е. $S_1 : S_2 = BM : CM$. Из этих двух равенств и следует, что $AB : AC = BM : CM$.■

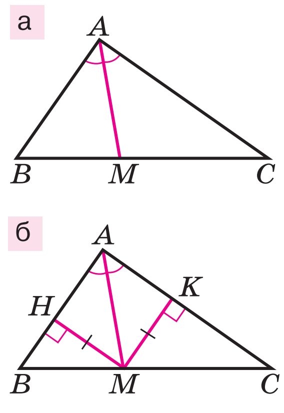


Рис. 103

Исследуем

4.27. Нарисуйте несколько равновеликих друг другу треугольников с одним и тем же основанием AB. а) Где лежат их вершины, противолежащие стороне AB? б) Где лежат вершины X равновеликих треугольников ABX, если рассматривать эти треугольники в пространстве?

4.28. Нарисуйте несколько треугольников с одним и тем же основанием AB, имеющих равные друг другу медианы, проведённые к стороне AB. Какой из таких треугольников имеет наибольшую площадь?

4.29. Нарисуйте равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Возьмите точку X на основании. Из неё на боковые стороны проведите перпендикуляры. Докажите, что их сумма не зависит от выбора точки X на стороне AC. Останется ли верным это утверждение для точки X, взятой внутри треугольника ABC? А что получится, если взять точку внутри равностороннего треугольника и проводить из неё перпендикуляры на все его стороны?

4.30. а) Диагонали выпуклого четырёхугольника равны a и b. Они взаимно перпендикулярны. Чему равна площадь этого четырёхугольника? б) Изменится ли полученный результат, если: 1) четырёхугольник не будет выпуклым; 2) диагонали не будут взаимно перпендикулярны?

4.31. На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника построили равносторонние треугольники. Будет ли для площадей этих фигур выполняться утверждение, аналогичное теореме Пифагора?

Рассуждаем

4.32. Два треугольника имеют равные площади. Следует ли из этого, что они равны?

★ 4.2. Формула Герона

Легко найти площадь треугольника, если уже известны одна из его сторон и опущенная на неё высота. А если высота ещё не известна, то приходится её искать, выражать через другие данные треугольника, например через его стороны. Делать это достаточно сложно, как вы, наверное, уже убедились решая задачи. Но если воспользоваться формулой (4) для квадрата высоты h_a треугольника (решение задачи 3.6 п. 3.3) и вспомнить, что числитель в этой дроби равен $4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2$, то, дважды разложив его на множители как разности квадратов, получим такое равенство:

$$4a^2h_a^2 = (a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a).$$

Правую часть этого равенства можно представить как $16p(p - a)(p - b)(p - c)$, где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$, а слева в этом равенстве стоит $16S(T)^2$. Поэтому площадь $S(T)$ треугольника T выражена через его стороны a, b, c формулой

$$S(T) = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}\,. \tag{3}$$

Выразить площадь треугольника через его стороны смог ещё в I в. греческий геометр Герон, а до него Архимед решал эту задачу для частного случая. Поэтому формулу (3) называют формулой Герона.★

Вопросы для самоконтроля

1. Разложите на множители числитель в выражении (4) из п. 3.4 на с. 52.
2. Выведите формулу Герона.

ЗАДАЧИ

Работаем с формулой

4.33. Найдите из формулы Герона выражение для площади: а) равностороннего треугольника со стороной a; б) равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b.

Вычисляем

4.34. Найдите площади треугольников, стороны которых равны: а) 5, 6, 7; б) 5, 11, 12; в) 5, 8, 11.

4.35. Найдите площадь поверхности четырёхугольной пирамиды, основанием которой является квадрат со стороной 4, а боковые рёбра имеют длины 3, 3, 5, 5.

4.3. Трапеция. Площадь трапеции

Мы уже говорили, что, зная, как найти площадь треугольника, можно найти площадь любого многоугольника, разбивая его на треугольники. Но для некоторых многоугольников этого каждый раз не делают, а выводят формулы, по которым сразу вычисляют их площадь. Например, вы давно знаете, что площадь прямоугольника равна произведению его измерений, а решив задачу 4.25, вы вывели формулу для вычисления площади правильного многоугольника. Мы рассмотрим два вида четырёхугольников — трапецию и параллелограмм, площади которых вычисляют по простым формулам. Они определяются парами параллельных сторон: в трапеции одна такая пара, а в параллелограмме две (рис. 104).

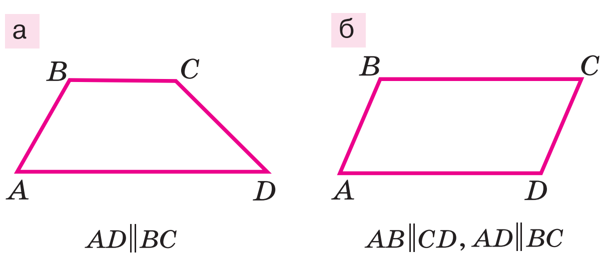


Рис. 104

Рис. 105

Итак, **трапецией** называется четырёхугольник, у которого только одна пара параллельных сторон (рис. 104, *а*). Параллельные стороны трапеции называются её **основаниями**, а две другие — **боковыми сторонами**. Трапеция, боковые стороны которой равны, называется **равнобедренной** (или **равнобокой**, рис. 105). **Высотой трапеции** называется общий перпендикуляр её оснований (или прямых, содержащих основания, рис. 106). Высотой называется также длина этого перпендикуляра.

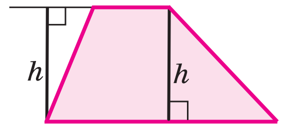


Рис. 106

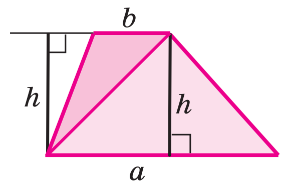


Рис. 107

Теорема 4 (*о площади трапеции*). **Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований и высоты, т. е. если a и b — основания трапеции, h — её высота и S — площадь трапеции, то**

$$S = \frac{a+b}{2}h. \qquad (4)$$

Доказательство. □ Проведя диагональ трапеции (рис. 107), получим два треугольника с основаниями a и b и одной высотой h. Их площади будут равны $S_1 = \frac{1}{2}ah$ и $S_2 = \frac{1}{2}bh$. $S = S_1 + S_2 = \frac{a+b}{2}h$. ■

Замечание. Треугольник можно считать вырожденной трапецией, когда одно из её оснований «стянулось» в точку. В этом случае можно считать $b = 0$ и из равенства (4) получается равенство $S = \frac{1}{2}ah$ для площади треугольника.

Справка словесника. Греческое слово *трапеция* обозначает *обеденный стол*. Однокоренные слова — *трапеза*, *трапезная*.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое трапеция и равнобедренная трапеция?
2. По какой формуле вычисляют площадь трапеции? Можно ли из этой формулы получить формулу для площади треугольника?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

4.36. Докажите следующие *свойства равнобедренной трапеции:*
а) углы, прилежащие к основанию равнобедренной трапеции, равны (другими словами, боковые стороны равнобедренной тра-

пеции равнонаклонены к её основанию); б) диагонали равнобедренной трапеции равны; в) равнобедренная трапеция имеет ось симметрии, которая проходит через середины её оснований.

4.37. Докажите *признак равнобедренной трапеции:* если углы, прилежащие к основанию трапеции, равны, то она равнобедренная.

4.38. Докажите, что диагональ трапеции равнонаклонена к её основаниям.

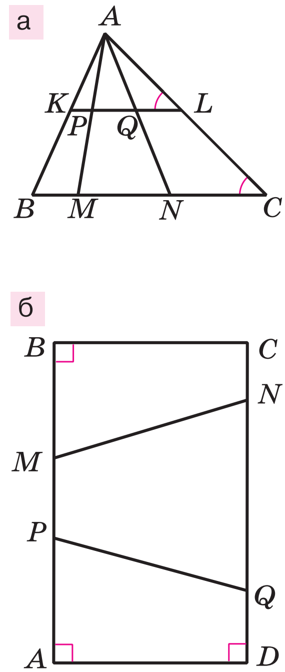


Рис. 108

Смотрим

4.39. Назовите трапеции на рисунке 108. Укажите равные углы на этом рисунке.

Работаем с формулой

4.40. Можно ли из формулы площади трапеции получить формулу площади прямоугольника?

Планируем

4.41. Как найти площадь трапеции, если известны длины всех её сторон? Приведите численные примеры (результат получите с точностью до двух знаков после запятой).

Вычисляем

4.42. В прямоугольной трапеции острый угол равен 45°. Найдите площадь этой трапеции, если её основания равны: а) 4 и 6; б) a и b. (У прямоугольной трапеции есть прямой угол.)

4.43. Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой: а) основания равны 6 и 14, а наклонная к ним боковая сторона равна 10; б) основания равны a и b, а наклонная к ним боковая сторона равна c.

4.44. Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой: а) основания равны 8 и 20, а боковая сторона равна 10; б) основания равны a и b, а боковая сторона равна c.

4.45. В равнобедренной трапеции острый угол равен 60°. Найдите площадь трапеции, если её основания равны: а) 2 и 1; б) 4 и 10; в) a и b.

4.46. Вычислите площадь трапеции, у которой: а) основания 1,2 см и 8 мм, а высота 0,02 м; б) основания 1,5 м и 9 дм, а высота 60 см. Выразите полученную площадь в квадратных сантиметрах.

4.47. Выразите через x площадь равнобедренной трапеции, у которой: а) меньшее основание равно 1, большее равно 2, а боковые стороны равны x; б) большее основание равно x, а все другие стороны равны 1; в) большее основание в 2 раза больше меньшего основания и при этом три стороны трапеции равны x.

Доказываем

4.48. Докажите, что диагональ правильного пятиугольника отсекает от него равнобедренную трапецию. Найдите её углы.

4.49. Докажите свойства точки пересечения диагоналей равнобокой трапеции. а) Она равноудалена от вершин каждого основания. б) Она равноудалена от её боковых сторон. в) Она ближе к меньшему основанию трапеции, чем к большему.

Рассуждаем

4.50. Сколько острых, прямых и тупых углов может иметь трапеция?

4.51. Верно ли утверждение: если два угла трапеции равны, то она равнобедренная?

§ 5. Параллелограмм и его площадь

5.1. Параллелограмм. Свойства параллелограмма

Напомним, что **параллелограммом** называется четырёхугольник, имеющий две пары параллельных сторон (рис. 109). С частными случаями параллелограммов — прямоугольниками и квадратами и с их свойствами вы уже знакомы. Параллелограммы вы рисовали каждый раз, когда рисовали куб или прямоугольный параллелепипед — их грани изображались параллелограммами. Познакомимся теперь с общими свойствами параллелограммов.

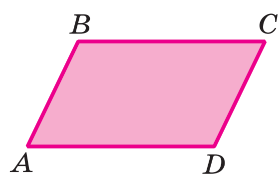


Рис. 109

Во-первых, отметим, что параллелограмм является пересечением двух полос между параллельными прямыми (рис. 110, *а*). Ширина каждой из этих полос называется **высотой параллелограмма** (рис. 110, *б*). Таким образом, у параллелограмма две высоты. Высотой параллелограмма называют также любой общий перпендикуляр двух параллельных прямых, на которых лежат противоположные стороны параллелограмма.

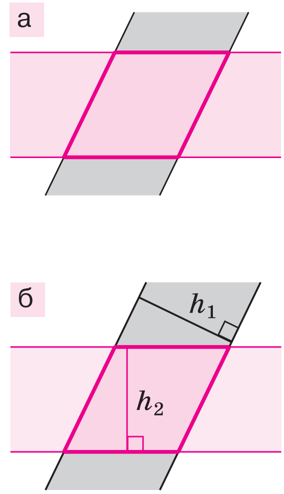


Рис. 110

Разнообразные свойства параллелограмма мы объединим в одной теореме.

Теорема 5 (*о свойствах параллелограмма*). **Параллелограмм обладает следующими свойствами: 1) диагональ разбивает параллелограмм на равные треугольники; 2) противоположные стороны параллелограмма равны; 3) противоположные углы параллелограмма равны; 4) точка пересечения диагоналей параллелограмма делит их пополам.**

Доказательство. 1) Рассмотрим параллелограмм $ABCD$. Проведём его диагональ AC (рис. 111, *а*). В треугольниках ABC и ACD общая сторона AC и соответственно равные углы, прилежащие к этой стороне: $\angle 1 = \angle 3$ (как накрест лежащие при параллельных AD и BC и секущей AC) и $\angle 2 = \angle 4$ (как накрест лежащие при параллельных AB и CD и секущей AC). Следовательно, треугольники ABC и ACD равны (по второму признаку равенства треугольников). Первое свойство параллелограмма доказано.

2—3) Второе и третье свойства вытекают из первого свойства: $AB = CD$, $BC = DA$ и $\angle B = \angle D$ как соответственные элементы равных треугольников ABC и CDA.

4) Проведём вторую диагональ BD параллелограмма $ABCD$ и обозначим через O точку пересечения диагоналей AC и BD (рис. 111, *б*). Треугольники AOD и COB равны по второму признаку равенства треугольников, так как в этих треугольниках $AD = CB$, $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 5 = \angle 6$ (как накрест лежащие). Поэтому $AO = OC$ и $BO = OD$. ■

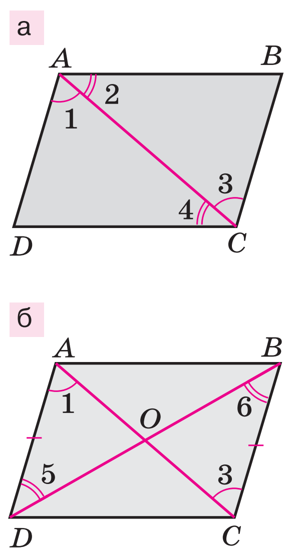


Рис. 111

Отметим, что из свойства 4 вытекает, что *точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии.*

Вопросы для самоконтроля

1. Какие определения вы можете дать параллелограмму?
2. Что такое высота параллелограмма?
3. Перечислите свойства параллелограмма.

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

5.1. Докажите ещё два свойства параллелограмма: а) сумма его соседних углов равна 180°; б) диагональ параллелограмма образует с противоположными сторонами равные углы.

5.2. Докажите *два признака прямоугольника*: прямоугольником является параллелограмм, у которого: а) диагонали равны и б) один из углов прямой.

Смотрим

5.3. На рисунке 112 обозначены некоторые величины параллелограмма *ABCD*. Какие ещё величины можно найти?

Рисуем

5.4. Нарисуйте параллелограмм *ABCD*, в котором: а) *AD* меньше *AB* и угол *A* тупой; б) *BC* меньше *CD* и угол *B* тупой; в) *AD* больше *AB* и угол *C* острый; г) *BC* больше *AB* и угол *D* прямой.

5.5. Нарисуйте параллелограмм, имеющий диагональ, которая: а) короче каждой стороны; б) длиннее каждой стороны; в) равна одной из сторон; г) равна каждой стороне.

Планируем

5.6. Как разбить параллелограмм на две центрально-симметричные друг другу трапеции?

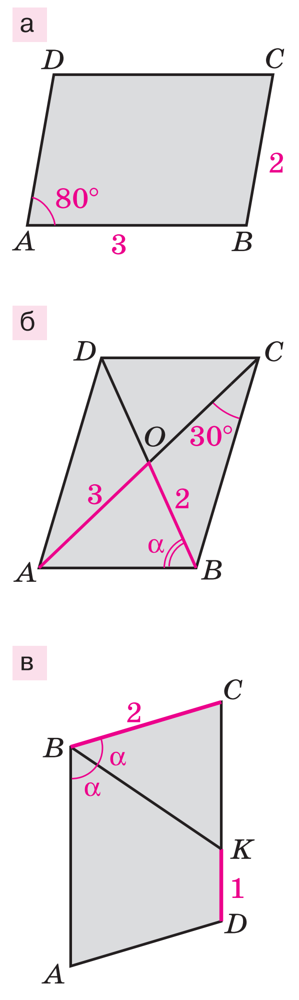


Рис. 112

Представляем

5.7. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Не рисуя его, постарайтесь ответить на такие вопросы: а) Пусть AD больше AB. Что больше: AD или CD? BC или AB? б) Пусть угол B тупой. Какой угол больше: угол C или угол D?

Вычисляем

5.8. Чему равны стороны параллелограмма, если его периметр равен 2 м и: а) разность соседних сторон равна 1 см; б) отношение соседних сторон равно 2; в) параллелограмм составлен из двух равнобедренных треугольников периметры которых равны 1,6 м?

5.9. Вычислите все углы параллелограмма, если один из его углов: а) $20°$; б) $100°$; в) в 2 раза больше другого; г) на $90°$ больше другого.

Доказываем

5.10. Докажите, что в параллелограмме: а) биссектрисы соседних углов перпендикулярны; б) биссектрисы противоположных углов параллельны (или лежат на одной прямой).

5.11. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма провели прямую. Она пересекает стороны параллелограмма в точках M и P. Докажите, что точка O — середина отрезка MP.

Строим

5.12. Постройте параллелограмм по сторонам и высоте.

Рассуждаем

5.13. Сколько углов каждого вида может быть в параллелограмме? А в трапеции?

5.14. Сформулируйте и проверьте утверждения, обратные утверждениям о свойствах параллелограмма: 1) диагональ разбивает параллелограмм на равные треугольники; 2) противоположные стороны параллелограмма равны; 3) противоположные углы параллелограмма равны; 4) точка пересечения диагоналей параллелограмма делит их пополам.

5.2. Признаки параллелограмма

Три из четырёх свойств параллелограмма, доказанных в теореме 5 (свойства 2–4), являются *характерными свойствами параллелограмма*. Это значит, что верны обратные им утверждения, которые являются *признаками параллелограмма*. Сформулируем и докажем их.

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК *параллелограмма.* **Четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно равны, является параллелограммом.**

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB = CD$ и $AD = BC$ (рис. 113, *а*). Проведём его диагональ AC (рис. 113, *б*). Получим два равных треугольника ABC и CDA (они равны, поскольку соответственно равны их стороны). В этих треугольниках равны углы, лежащие против равных сторон. Следовательно, $\angle 1 = =\angle 3$, а потому стороны AD и BC параллельны (по равенству накрест лежащих углов). Аналогично $\angle 2 = \angle 4$ и $AB \parallel CD$. ■

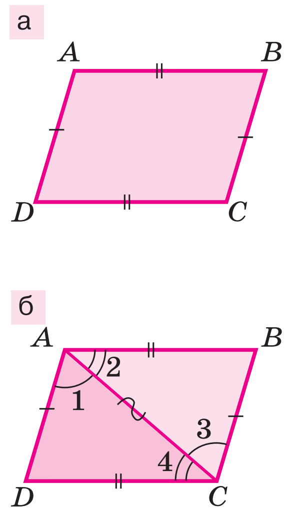


Рис. 113

ВТОРОЙ ПРИЗНАК *параллелограмма.* **Четырёхугольник, противоположные углы которого попарно равны, является параллелограммом.**

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$ (рис. 114). Так как $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$, то $\angle A + \angle B + \angle A + \angle B = 360°$. Поэтому $\angle A + $ $+ \angle B = 180°$ и $AD \parallel BC$ (по первому признаку параллельности прямых). ■

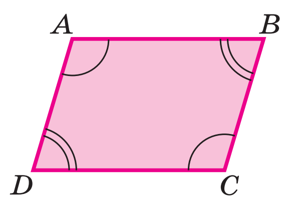


Рис. 114

ТРЕТИЙ ПРИЗНАК *параллелограмма.* **Четырёхугольник, в котором диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, является параллелограммом.**

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, в котором диагонали AC и BD пересекаются в точке O и выполняются равенства $AO = OC$ и $BO = OD$ (рис. 115). Ясно, что $\triangle AOB =$ $= \triangle COD$ и $\triangle BOC = \triangle DOA$ (по первому признаку равенства треугольников). Поэтому $AB = CD$ и $BC = AD$ и четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм (по первому признаку). ■

К доказанным трём признакам добавим ещё один.

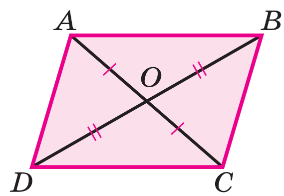


Рис. 115

Четвёртый признак *параллелограмма.* **Четырёхугольник, в котором две противоположные стороны равны и параллельны, является параллелограммом.**

Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCD$, у которого $AD = BC$ и $AD \parallel BC$ (рис. 116, *а*). Проведём диагональ AC и рассмотрим треугольники ABC и CDA (рис. 116, *б*). В этих треугольниках сторона AC общая, $AD = CB$ и $\angle 1 = \angle 2$ (как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC). Поэтому треугольники ABC и CDA равны, $AB = CD$ и четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм (по первому признаку).■

Замечание. Теперь, опираясь на четвёртый признак параллелограмма, мы можем утверждать, что основания трапеции равными быть не могут.

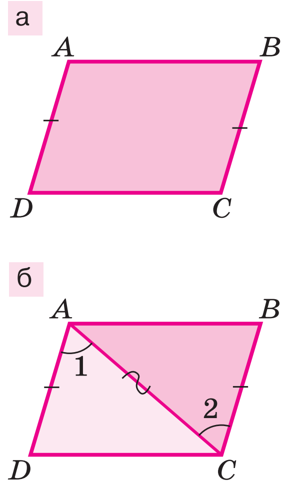


Рис. 116

Вопросы для самоконтроля

1. Какие вы знаете признаки параллелограмма?
2. Какие характерные признаки параллелограмма вам известны?
3. Почему прямоугольник является параллелограммом?

ЗАДАЧИ

Смотрим

5.15. Объясните, откуда следует, что четырёхугольник $ABCD$ на рисунке 117 — параллелограмм.

5.16. Назовите параллелограммы, изображённые на рисунке 118.

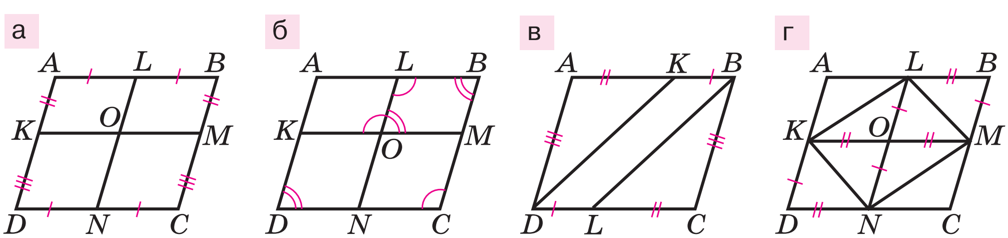


Рис. 117

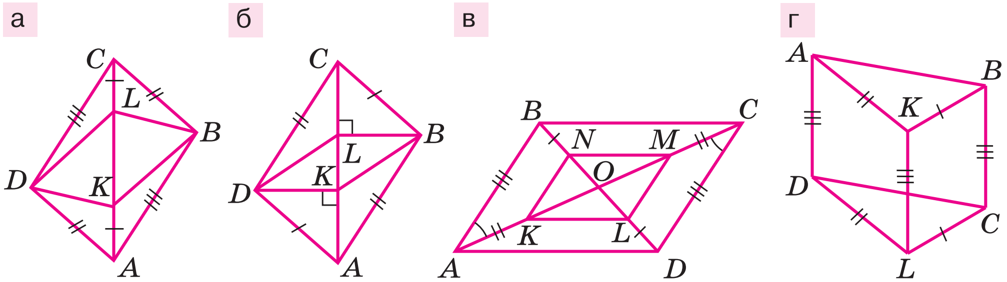


Рис. 118

Рисуем

5.17. Нарисуйте параллелограмм как результат пересечения двух: а) углов; б) треугольников; в) параллелограммов; г) трапеций.

5.18. Нарисуйте параллелограмм как объединение: а) двух треугольников; б) двух параллелограммов; в) прямоугольника и двух треугольников; г) треугольника и трапеции; д) двух трапеций.

Планируем

5.19. Как построить параллелограмм: а) по двум сторонам и одной из диагоналей; б) по диагоналям и углу между диагоналями; в) по стороне и диагоналям?

5.20. а) Как разбить трапецию на параллелограмм и треугольник? б) Как построить трапецию по четырём сторонам?

Доказываем

5.21. Медиану AO треугольника ABC продолжили на отрезок OP, равный медиане AO. Докажите, что четырёхугольник $ABPC$ — параллелограмм.

5.22. Сформулируйте и докажите признак равенства треугольников по двум сторонам и медиане между ними.

5.23. Напомним, что **средней линией четырёхугольника** называется отрезок, соединяющий середины его противоположных сторон. Докажите, что средняя линия параллелограмма параллельна его стороне и равна ей.

5.24. Нарисуйте два параллелограмма $ABCD$ и $ABKM$. Докажите, что или CD и KM лежат на одной прямой, или четырёхугольник $CKMD$ — параллелограмм.

5.25. Нарисуйте два параллелограмма $ABCD$ и $AMCP$. Докажите, что: а) отрезки AC, BD и MP проходят через одну точку; б) четырёхугольник $BMDP$ — параллелограмм.

Представляем

5.26. Всегда ли четырёхугольник, у которого имеются две пары равных сторон, является параллелограммом?

Исследуем

5.27. Параллелограмм нарисовали мелом на доске. Потом часть его стёрли. Сможете ли вы восстановить параллелограмм, если от него остались: а) две стороны; б) сторона и диагональ; в) диагональ и вершина, не лежащая на ней; г) сторона и точка пересечения диагоналей; д) три вершины; е) середины трёх сторон?

Применяем геометрию

5.28. Как получить параллелограмм (не прямоугольник) одними только сгибаниями тетрадного листа?

5.29. Используя свойства и признаки параллелограмма, придумайте способ нахождения расстояния между двумя пунктами на одном берегу реки, находясь на другом её берегу. (Расстояния до этих пунктов вы знаете.)

5.3. Частные виды параллелограмма

С одним из частных видов параллелограмма — прямоугольником (рис. 119) — вы знакомы с первых классов.

Рис. 119

Прямоугольник можно определить как четырёхугольник, все углы которого равны.

□ Действительно, сумма всех углов четырёхугольника равна 360°. Поэтому если все углы четырёхугольника равны, то каждый из них равен 90°. Такой четырёхугольник является прямоугольником. ■

Прямоугольник, конечно, является параллелограммом (например, по второму признаку). Среди всех параллелограммов прямоугольники выделяются следующим характерным свойством:

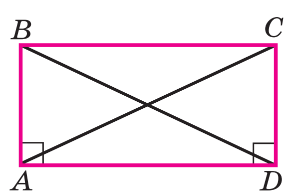


Рис. 120

ХАРАКТЕРНОЕ СВОЙСТВО *прямоугольника*: 1) **диагонали прямоугольника равны; 2) параллелограмм, диагонали которого равны, является прямоугольником.**

□ Докажем первое утверждение. Пусть $ABCD$ — прямоугольник (рис. 120). Проведём его диагонали AC и BD. Прямоугольные треугольники ACD и DBA равны (по двум катетам). Поэтому равны их гипотенузы: $AC = BD$. Первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть в параллелограмме $ABCD$ равны диагонали AC и BD. Тогда $\triangle ABC = \triangle BAD$ (по трём сторонам: $BC = AD$, $AC = BD$, сторона AB — общая). Поэтому углы ABC и BAD равны. А так как их сумма равна $180°$, то они прямые. Следовательно, параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник. ■

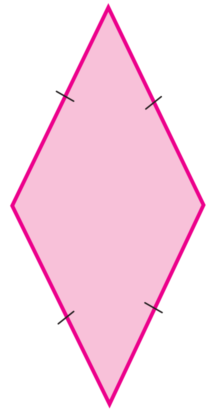


Рис. 121

Мы рассмотрели четырёхугольники с равными углами — прямоугольники. Теперь рассмотрим четырёхугольники, все стороны которых равны друг другу (рис. 121). Они называются ромбами. Итак, **ромбом** называется четырёхугольник, все стороны которого равны друг другу.

Ромб является параллелограммом (согласно признаку 1). Среди всех параллелограммов ромбы выделяются следующими двумя характерными свойствами:

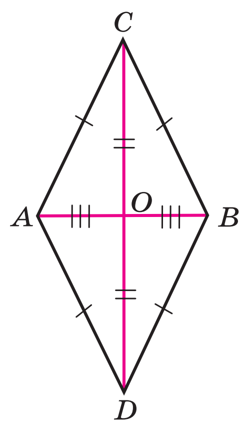


Рис. 122

СВОЙСТВО 1. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

□ Действительно, четыре треугольника, на которые разбивают ромб $ABCD$ его диагонали, равны друг другу (по трём сторонам, рис. 122). Поэтому равны друг другу их углы с вершиной в точке пересечения диагоналей. Следовательно, каждый из этих углов равен $90°$. ■

СВОЙСТВО 2. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.

□ Из равенства четырёх треугольников ACO, BCO, BDO и DAO (рис. 122) следует равенство их соответственных углов. А это означает, что выполняется свойство 2. ■

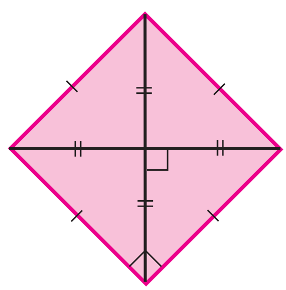


Рис. 123

Утверждения, обратные этим свойствам, докажите, решив задачи к этому пункту.

Как вы знаете, у квадрата все углы прямые и все стороны равны друг другу. Поэтому квадрат является и прямоугольником и ромбом одновременно. Следовательно, *диагонали квадрата равны и взаимно перпендикулярны* (рис. 123).

Справка словесника. Слово *ромб* происходит от греческого слова *rhombos*, означающего *бубен*. Оказывается, в древности бубны — музыкальные инструменты — были не круглыми, как сейчас, а имели форму четырёхугольника с равными сторонами. Такие бубны сохранились в игральных картах.

Вопросы для самоконтроля

1. Каким свойством выделяются прямоугольники среди четырёхугольников?
2. Каким свойством выделяются прямоугольники среди параллелограммов? Выделяет ли это свойство прямоугольник среди четырёхугольников?
3. Какое свойство выделяет ромбы среди четырёхугольников?
4. Какие свойства выделяют ромбы среди параллелограммов?
5. Какой четырёхугольник является одновременно прямоугольником и ромбом?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

5.30. Докажите, что точка пересечения диагоналей прямоугольника равноудалена от его вершин.

5.31. Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от его сторон.

Рисуем

5.32. Нарисуйте ромб как пересечение двух: а) углов; б) треугольников.

5.33. а) Нарисуйте четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями, но не ромб. б) Нарисуйте четырёхугольник с равными диагоналями, но не прямоугольник.

Представляем

5.34. Как разбить ромб на: а) два равных треугольника; б) четыре равных треугольника?

Работаем с формулой

5.35. Выразите сторону a ромба через его диагонали b и c. Вычислите сторону ромба, если его диагонали равны 6 и 8.

5.36. Выразите диагональ c ромба через его сторону a и другую диагональ b. Вычислите эту диагональ, если $a = 13$ и $b = 10$.

Планируем

5.37. Как восстановить ромб, если на рисунке остались такие его элементы: а) две стороны; б) сторона и диагональ; в) диагональ и вершина, не принадлежащая ей; г) сторона и точка на противоположной стороне?

5.38. Как построить ромб, у которого периметр равен 80 см и: а) острый угол равен 30°; б) одна из диагоналей равна стороне; в) диагонали равны?

5.39. Как построить ромб по: а) стороне и углу; б) стороне и диагонали; в) двум диагоналям; в) одной из диагоналей и углу?

Исследуем

5.40. Можно ли восстановить прямоугольник, если на рисунке остались такие его элементы: а) сторона и точка на его противоположной стороне; б) диагональ и точка на другой диагонали; в) точка пересечения диагоналей и по одной точке на противоположных сторонах?

5.41. У каких параллелограммов имеются оси симметрии? Сколько осей симметрии эти параллелограммы могут иметь? Как идут эти оси?

Строим

5.42. Постройте ромб: а) по стороне и одной из диагоналей; б) по диагоналям; в) по углу и одной из диагоналей; г) с вершинами на сторонах данного прямоугольника; д) с вершинами на сторонах данного равнобедренного треугольника.

Применяем геометрию

5.43. Как из прямоугольного листа бумаги одними только его сгибаниями получить ромб? А квадрат?

5.44. Лист бумаги имеет форму ромба. Как из него склеить конверт?

5.45. Прямоугольный лист бумаги согнули вчетверо — пополам и ещё раз пополам в другом направлении. Взяв ножницы, вы хотите отрезать угол полученного листа так, чтобы после разворачивания обратно в центре исходного листа получилась дыра в форме квадрата. Как вы сделаете отрез? А как сделать отрез, если нужна дыра в форме ромба?

Рассуждаем

5.46. В каком ромбе диагональ равна его стороне?

5.47. Объясните, почему вершины ромба, не являющегося квадратом, не лежат на одной окружности.

5.4. Площадь параллелограмма

Теорема 6 **Площадь параллелограмма равна произведению стороны параллелограмма и его высоты, проведённой к этой стороне, т. е. вычисляется по формуле**

$$S = ah_a, \qquad (1)$$

где a — сторона параллелограмма и h_a — проведённая к ней высота (рис. 124).

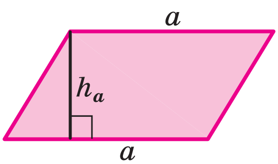


Рис. 124

Доказательство. Проведём диагональ параллелограмма. Она разбивает параллелограмм на два равных треугольника со стороной a и высотой h_a (рис. 125). Площади этих треугольников равны $\frac{1}{2}ah_a$. Площадь S параллелограмма равна сумме площадей этих треугольников. Значит,

$$S = \frac{1}{2}ah_a + \frac{1}{2}ah_a = ah_a. \blacksquare$$

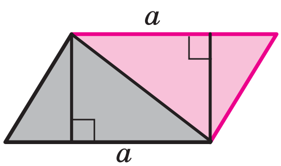


Рис. 125

Вопросы для самоконтроля

1. Что называют высотой параллелограмма? Сколько у параллелограмма высот?
2. Напишите формулу для вычисления высот параллелограмма.

ЗАДАЧИ

Смотрим

5.48. Какую часть от площади параллелограмма $ABCD$ составляет площадь четырёхугольника P на рисунке 126?

Представляем

5.49. На плоскости равновеликие друг другу параллелограммы имеют общее основание AB. Где лежат стороны этих параллелограммов, противоположные стороне AB? А если такие параллелограммы не лежат в одной плоскости?

Работаем с формулой

5.50. Пусть a и b — длины сторон параллелограмма, h_a и h_b — длины высот, проведённых к ним. а) Докажите, что

$$ah_a = bh_b. \qquad (2)$$

б) Выразите из формулы (2) каждую из величин. в) Запишите формулу (2) в виде пропорции и дайте словесную формулировку этой пропорции. г) Докажите, что в ромбе равны высоты, проведённые к соседним сторонам. д) Докажите утверждение, обратное предыдущему. е) Докажите, что бóльшая высота параллелограмма проводится на меньшую сторону. ж) Докажите утверждение, обратное предыдущему.

Планируем

5.51. Как найти площадь параллелограмма, если известны: а) его стороны и одна из диагоналей; б) диагонали и одна из сторон? Приведите численные примеры (результат получите с точностью до двух знаков после запятой).

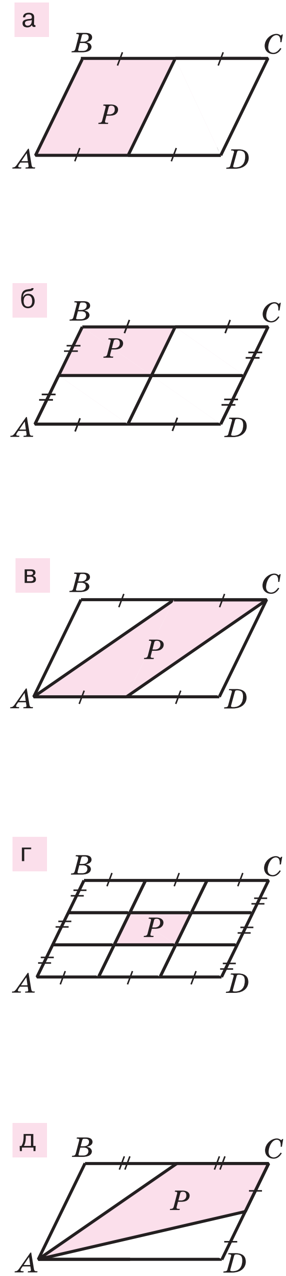


Рис. 126

Вычисляем

5.52. Вычислите площадь параллелограмма, у которого: а) сторона равна 14 мм, а высота к ней — 3,2 см; б) сторона равна 1532 мм, а высота к ней — 0,16 м. Выразите полученную площадь в квадратных сантиметрах.

5.53. В параллелограмме $ABCD$ угол A равен 60°. Найдите его площадь, если стороны параллелограмма равны: а) 6 см и 8 см; б) a и b. Решите эту задачу и для угла A, равного 45°.

5.54. Найдите площадь ромба, диагонали которого равны: а) 10 и 24; б) a и b.

Ищем границы

5.55. Какой среди всех параллелограммов с данными сторонами a и b имеет наибольшую площадь? Чему она равна?

Исследуем

5.56. а) Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. Какая из этих фигур имеет бóльшую площадь? б) Квадрат и ромб имеют одинаковые площади. Сравните периметры этих фигур.

Рассуждаем

5.57. Запишите формулу для площади трапеции. При каких условиях из этой формулы можно получить формулу для площади параллелограмма? А формулу для площади треугольника?

▲ 5.5. Параллелепипед. Призмы

Вы уже знакомы с одним многогранником, все грани которого — параллелограммы, а точнее, параллелограммы частного вида — прямоугольники: это **прямоугольный параллелепипед** (рис. 127, *а*).

А вообще **параллелепипедом** называют многогранник, у которого шесть граней и все они — параллелограммы (рис. 127, *б*). Из этого определения и свойств параллелограмма вытекает, что двенадцать рёбер параллелепипеда распадаются на три группы рёбер по четыре равных друг другу и взаимно параллельных между собой ребра в каждой из трёх групп (рис. 128). Два параллельных друг другу ребра параллелепипеда,

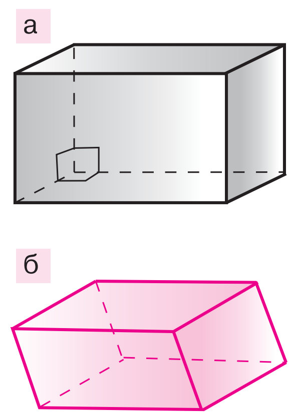


Рис. 127

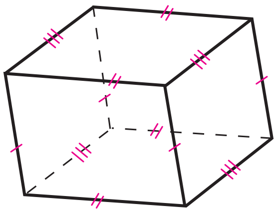


Рис. 128

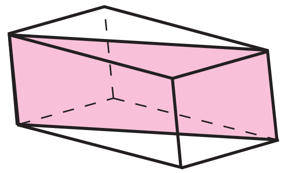


Рис. 129

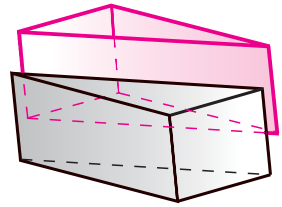


Рис. 130

не лежащие в одной его грани, являются противоположными сторонами **диагонального сечения параллелепипеда,** которое также представляет собой параллелограмм (рис. 129).

Диагональное сечение параллелепипеда рассекает его на две **треугольные призмы** (рис. 130). Из треугольных призм можно составить более сложные призмы (подобно тому как из треугольников составляют многоугольники, рис. 131). Вообще ***n*-угольной призмой** называется многогранник, имеющий $n + 2$ граней, из которых две грани, называемые **основаниями призмы**, представляют собой n-угольники с соответственно равными и параллельными сторонами, а остальные n граней — параллелограммы. Эти грани называют **боковыми гранями** призмы, а их стороны, не лежащие в основаниях призмы, — **боковыми рёбрами призмы**. Все боковые рёбра призмы равны и параллельны друг другу.

Ясно, что параллелепипед — особый случай четырёхугольной призмы: любая пара его противоположных граней может считаться её основаниями.

Прямой называется призма, у которой боковые грани являются прямоугольниками (рис. 132). Плоскости боковых граней прямой призмы также перпендикулярны плоскостям её оснований. Боковые рёбра прямой призмы обычно изображают вертикальными отрезками.

Призмы, не являющиеся прямыми, называют **наклонными** (рис. 133).

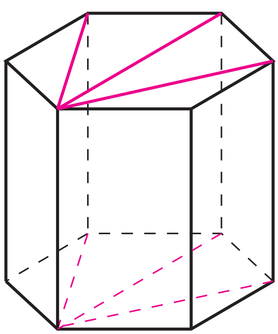


Рис. 131

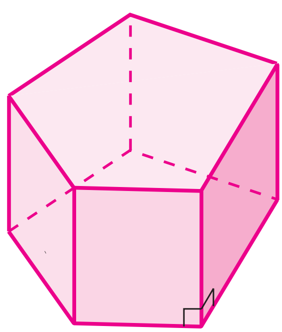


Рис. 132

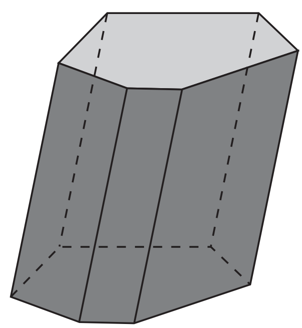


Рис. 133

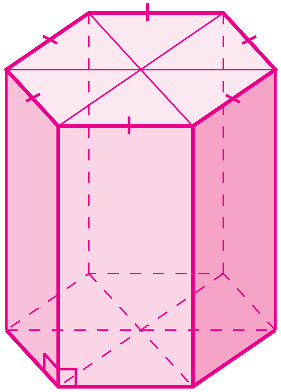


Рис. 134

Рис. 135

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется **правильной призмой** (рис. 134).

Многие архитектурные сооружения представляют собой сочетания правильных призм и пирамид (рис. 135).

Справка словесника. Греческое слова πρισμα означает *отпиленный кусок*.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется параллелепипедом?
2. Что такое призма?
3. Какая призма называется прямой?
4. Какая призма называется правильной?

ЗАДАЧИ

Рисуем

5.58. Из куба сделали детали, проекции которых изображены на рисунке 136. Нарисуйте эти детали.

5.59. Нарисуйте три отрезка, идущие из одной точки. Достройте их до изображения параллелепипеда.

5.60. Нарисуйте треугольную призму. Дорисуйте её изображение до изображения параллелепипеда. Из какой треугольной призмы получится прямоугольный параллелепипед?

5.61. Нарисуйте тетраэдр $PABC$. Дорисуйте его изображение до изображения треугольной призмы с основанием ABC и боковым ребром PA.

5.62. Нарисуйте треугольную призму. Разбейте её на тетраэдры, вершинами которых являются вершины призмы. Сколько получилось тетраэдров?

5.63. Нарисуйте какой-либо многогранник, но не параллелепипед, все грани которого — параллелограммы.

5.64. Нарисуйте параллелепипед. Разбейте его на тетраэдры, все вершины которых являются вершинами параллелепипеда. Сколько получилось тетраэдров?

Представляем

5.65. Сколько параллельных и равных друг другу рёбер имеет параллелепипед? Сколько диагональных сечений имеет параллелепипед?

5.66. Какие многоугольники могут получиться в сечении параллелепипеда плоскостью? Сделайте рисунки, подтверждающие ваши представления.

Планируем

5.67. Вспомните, как мы составляли правильные многоугольники из равнобедренных треугольников (см. п. 1.4). Предложите аналогичное построение для правильных призм. Из каких призм можно составить правильную призму?▼

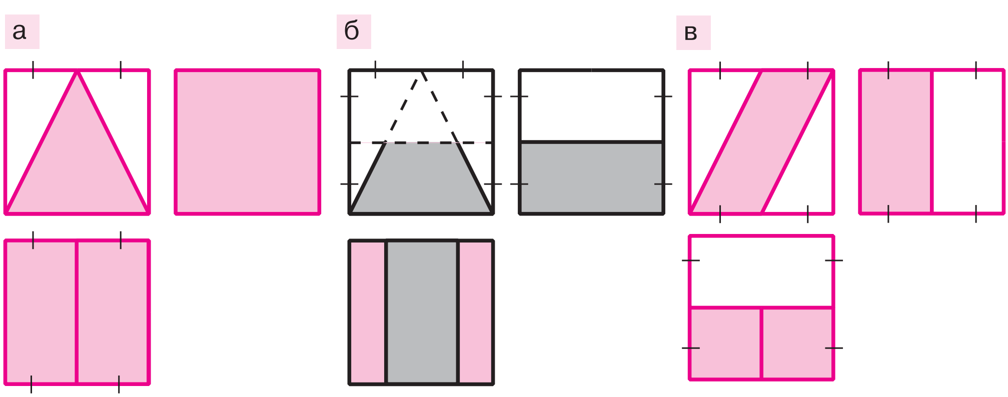


Рис. 136

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ I

Смотрим

I.1. Установите вид четырёхугольника $ABCD$, вершины которого указаны на рисунке 137.

Планируем

I.2. Как разметить квадрат со стороной 2 м (рис. 138), чтобы площадь буквы равнялась 1 м^2?

I.3. Как построить параллелограмм по: а) диагоналям и высоте; б) углу, высоте и диагонали, проведённым из одной вершины?

I.4. Как построить трапецию по: а) основаниям, высоте и диагонали; б) основаниям и диагоналям?

I.5. Внутри угла взяли точку. Как провести такую хорду угла, которая данной точкой делилась бы пополам?

Вычисляем

I.6. Дан квадрат со стороной 1 (рис. 139). Из него вырезается фигура площадью S. Запишите формулу для вычисления площади S, если известна величина x.

I.7. Выразите как функцию от x площади таких фигур: а) прямоугольника с диагональю 1 и стороной, равной x; б) ромба, у которого одна из диагоналей равна 2, а сторона равна x; в) равнобедренной трапеции, у которой большее основание равно 1, а диагональ, равная x, составляет с боковой стороной прямой угол.

I.8. Найдите площадь поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, у которой: а) сторона основания равна 6, а боковое ребро — 5; б) все рёбра равны a.

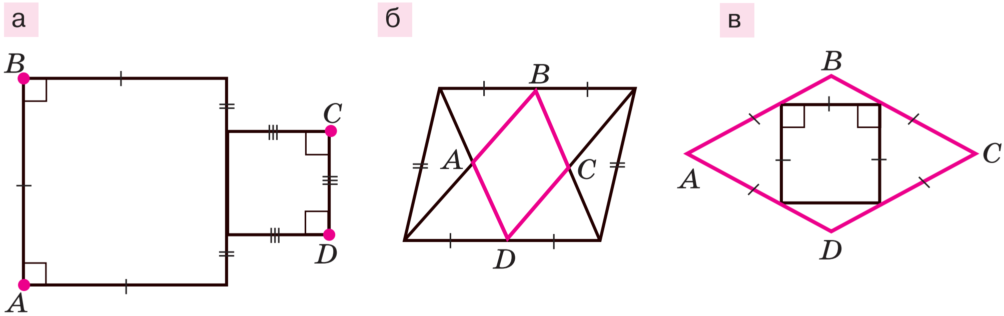


Рис. 137

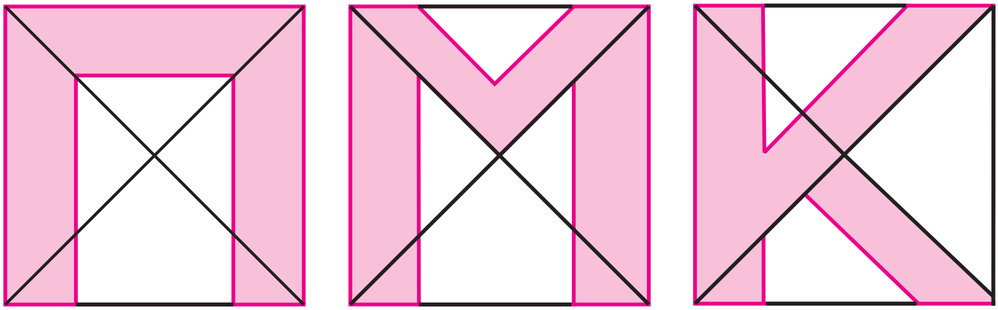


Рис. 138

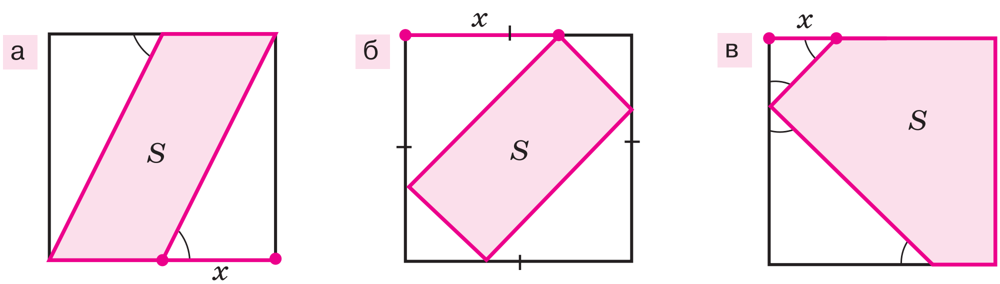


Рис. 139

I.9. Каждую сторону треугольника ABC продолжили на расстояние, равное этой стороне треугольника: AB за точку B до точки K, BC за точку C до точки M, CA за точку A до точки P. Во сколько раз площадь треугольника KMP больше площади треугольника ABC?

Ищем границы

I.10. Какова наибольшая площадь прямоугольника с: а) диагональю 1; б) периметром, равным 2?

I.11. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 1. Из точки K гипотенузы проводятся перпендикуляры KL на CA и KM на CB. Обозначим площадь прямоугольника $CLKM$ как S.
а) Вычислите S, если точка K находится в середине гипотенузы.
б) Пусть $KA = x$. Найдите зависимость S от x. в) В каких границах находится $S(x)$?

I.12. Дан правильный тетраэдр $ABCD$. Пусть K — точка ребра BD. Обозначим площадь поверхности тетраэдра $ACKD$ как S_1, а площадь поверхности тетраэдра $ACKB$ как S_2. а) Сравните S_1 и S_2, когда $BK = KD$. б) Как изменяется отношение $S_1 : S_2$ при движении точки K по ребру BD от B к D? в) Как изменяется при этом движении площадь треугольника ACK? г) Может ли площадь треугольника ACK составлять половину от площади грани тетраэдра $ABCD$?

Доказываем

I.13. а) Отрезок AB движется по плоскости параллельно самому себе, причём его концы движутся по прямым. Докажите, что точки A и B проходят при этом одинаковые расстояния. б) Треугольник ABC движется по плоскости параллельно самому себе, причём его вершины движутся по прямым. Докажите, что площадь, заметённая при движении одной из его сторон, равна сумме площадей, заметённых при движении двумя другими его сторонами. в) Исходя из результата предыдущего пункта, докажите теорему Пифагора.

I.14. Противоположные стороны выпуклого шестиугольника равны и параллельны. Докажите, что три его диагонали, соединяющие противоположные вершины, проходят через одну точку. Сделайте обобщение этой задачи для выпуклого многоугольника с большим числом сторон.

Исследуем

I.15. Является ли четырёхугольник параллелограммом, если одна из диагоналей делит его на равные треугольники?

I.16. На окружности отмечены по порядку точки A, B, C, D. При этом $AB = CD$ и $AD \neq BC$. Докажите, что эти точки являются вершинами трапеции.

I.17. Найдутся ли точки, являющиеся вершинами ромба на сторонах: а) прямоугольника; б) ромба; в) равнобедренного прямоугольного треугольника; г) произвольного прямоугольного треугольника; д) произвольного треугольника; е) произвольного параллелограмма?

I.18. В параллелограмме $ABCD$ провели биссектрису угла A. а) Пусть она пересекает прямую BC в точке K. Докажите, что треугольник ABK равнобедренный. б) Пусть она пересекает прямую CD в точке L. Сколько равнобедренных треугольников вы можете насчитать на полученном рисунке? в) Пусть известны периметры треугольников ABK и KCL. Сможете ли вы найти периметр треугольника ADL? г) Может ли точка K быть серединой стороны BC? д) Оказывается, если точка K — середина стороны BC, то точка C — середина стороны DL. Докажите это.

е) Пусть DM — биссектриса угла D и точка M лежит на BC. Сможете ли вы, зная стороны параллелограмма $ABCD$, найти MK?

I.19. Установите связь между периметром, площадью и диагональю данного прямоугольника. Существует ли прямоугольник с: а) площадью 1 и периметром 2; б) площадью 1 и диагональю 1; в) периметром 2 и диагональю 1?

Применяем геометрию

I.20. Произведите необходимые расчёты для того, чтобы сделать из проволоки, использовав её всю, каркас прямоугольника площадью 150 см^2, если длина проволоки 50 см.

Занимательная геометрия

I.21. Используя только двустороннюю линейку: а) разделите пополам данный угол; б) разделите пополам данный отрезок; в) удвойте данный отрезок; г) проведите перпендикуляр к данной прямой через данную на ней точку; д) проведите прямую, параллельную данной прямой, через данную точку; е) опустите перпендикуляр из данной точки на данную прямую; ж) постройте точку, симметричную данной точке, относительно данной прямой; з) отложите от данного луча угол, равный данному. (В двусторонней линейке используются оба её края).

Применяем компьютер

Решая задачи этой рубрики с помощью компьютера, используйте, например, среду «Живая математика», которую можно найти по адресу: http://www.uchportal.ru/load/24-1-0-2276.

I.22. Постройте трапецию $ABCD$ с основаниями AB и CD (при построении воспользуйтесь командой «Параллельная прямая»). Проверьте, что площадь треугольника ABC равна площади треугольника ABD. Пошевелите вершины трапеции и убедитесь, что равенство площадей сохраняется. Объясните это.

I.23. В условиях предыдущей задачи постройте точку O — пересечение диагоналей трапеции $ABCD$. Проверьте, что площадь треугольника AOD равна площади треугольника BOC. Пошевелите вершины трапеции и убедитесь, что равенство площадей сохраняется. Можете ли вы это объяснить?

I.24. Окно из цветного стекла двух цветов (зелёного и красного) имеет форму правильного восьмиугольника. Зелёное стекло заполняет прямоугольник, две стороны которого — две параллельные стороны восьмиугольника. Красное стекло — остальная часть восьмиугольника. Что больше — площадь красной части или площадь зелёной части восьмиугольника? Какую часть площади окна занимает зелёное стекло?

Глава II

Геометрия треугольника

Мы уже не раз говорили, что треугольник — важнейшая геометрическая фигура. Решение большинства геометрических задач сводится к *решению треугольников*. Под решением треугольников понимают выражение одних элементов треугольника через его другие элементы. Мы уже знаем две важнейшие теоремы, в которых говорится о зависимостях между элементами треугольников: теорему о сумме углов треугольника и теорему Пифагора. Но пока мы не знаем, как, например, найти углы треугольника, зная его стороны, или как найти сторону треугольника, зная две его стороны и угол между ними. Ясно, что такие задачи постоянно приходится решать на практике.

В теории они лежат в основе целого раздела математики — **тригонометрии**. Слово *тригонометрия* в переводе означает *измерение треугольников*.

В этой главе мы познакомимся с основными понятиями тригонометрии — синусом и косинусом, а также докажем важнейшие теоремы тригонометрии — теорему синусов и теорему косинусов. Эти теоремы позволяют *решать* любые треугольники. Опираясь на них, мы изучим в этой главе подобные треугольники.

§ 6. Синус. Применения синуса

6.1. Теорема об отношении перпендикуляра и наклонной

Все основные понятия в этой главе выражаются через отношение отрезков. Например, отношение отрезков может характеризовать форму предмета: так, отношение измерений прямоугольника характеризует его вытянутость. Отношением отрезков характеризуются и различия в размерах фигур одинаковой формы: отношение периметров двух квадратов равно отношению их сторон, а отношение их площадей — квадрату отношения их сторон. Уточним понятие *отношение отрезков*.

Под **отношением** $\frac{a}{b}$ **отрезков** a **и** b понимают отношение численных значений их длин при условии, что длины измерены одной и той же единицей длины. При замене единицы длины численное значение длины каждого отрезка увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица длины меньше (больше) старой. Следовательно, *отношение численных значений длин двух отрезков не изменяется при замене единицы длины*. Именно поэтому можно говорить просто об отношении двух отрезков.

Рис. 140

К отношению отрезков приводят многие практические задачи, например задачи, в которых говорится о подъёме при движении по ровному наклонному пути (например, по эскалатору или по ровной дороге, рис. 140). Крутизну подъёма можно охарактеризовать отношением высоты подъёма к длине пройденного пути. Мы сейчас убедимся, что это отношение не зависит от длины пройденного пути (если путь прямолинейный).

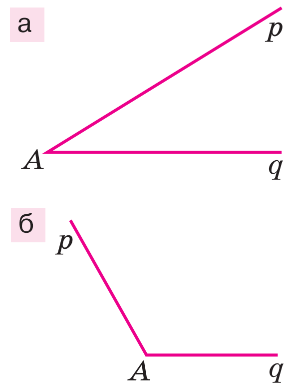


Рис. 141

Говоря о наклонном пути, естественно представлять его как одну из сторон острого или тупого угла A, другая сторона которого горизонтальна (рис. 141). Мы обозначим через p наклонную сторону угла A, а через q его горизонтальную сторону. Тогда пройденный путь — это некоторый отрезок AB на стороне p, а подъём — это перпендикуляр BC, опущенный из точки B на прямую, содержащую луч q (рис. 142). Крутизна же подъёма характеризуется отношением $\frac{BC}{AB}$, которое *не зависит от выбора точки B внутри стороны p*. Это значит, что для любой другой точки B' стороны p (рис. 143) выполняется равенство

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'}. \qquad (1)$$

Докажем равенство (1).

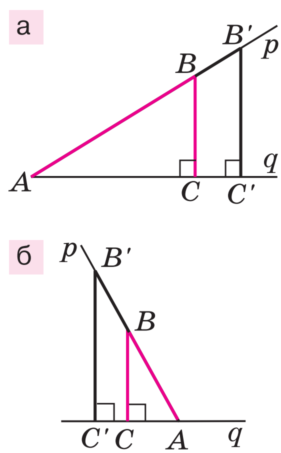


Рис. 143

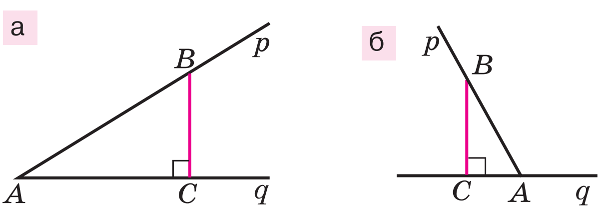


Рис. 142

Доказательство. Выберем некоторую точку M внутри луча q и проведём отрезок BM (рис. 144). Отрезок BC — высота треугольника ABM, проведённая из вершины B. Проведём другую его высоту MK из вершины M. Обозначим AM через b, а MK через h. Если S — площадь треугольника ABM, то $2S = b \cdot BC$ и $2S = h \cdot AB$. Поэтому $b \cdot BC = h \cdot AB$. Из этого равенства следует, что

$$\frac{BC}{AB} = \frac{h}{b}. \qquad (2)$$

Правая часть равенства (2) не зависит от выбора точки B на луче p: если взять другую точку B' на луче p (рис. 145) и повторить проведённые уже рассуждения, то придём к равенству

$$\frac{B'C'}{AB'} = \frac{h}{b}. \qquad (3)$$

Из равенств (2) и (3) вытекает равенство (1). ■
Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема 7 (*об отношении перпендикуляра и наклонной*). **Отношение перпендикуляра, опущенного из некоторой точки стороны угла на другую сторону угла (или её продолжение), к расстоянию от этой точки до вершины угла не зависит от выбора точки на стороне угла.**

Замечание. Мы доказали теорему 7 для острых и тупых углов. Для прямого угла A перпендикуляр BC совпадает с отрезком AB (рис. 146). Поэтому для прямого угла их отношение равно единице, т. е. утверждение теоремы 7 тоже справедливо.

Равенство (2) говорит также о том, что не имеет значения, на какой стороне угла мы выбираем точку: в левой части этого равенства стоит отношение отрезков BC и AB, идущих из точки B стороны p, а справа — отношение отрезков MK и MA, идущих из точки M стороны q.

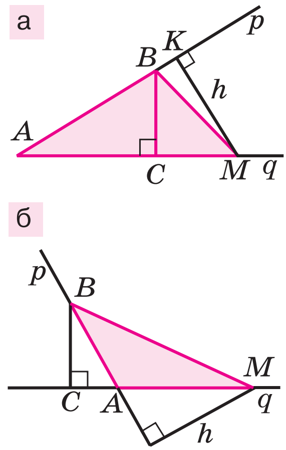


Рис. 144

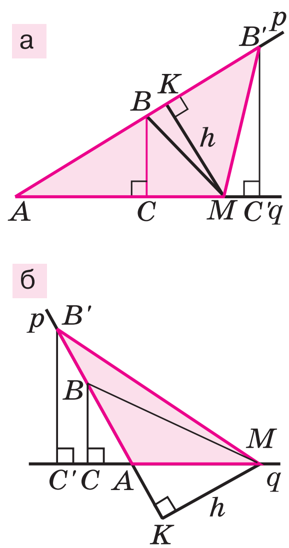


Рис. 145

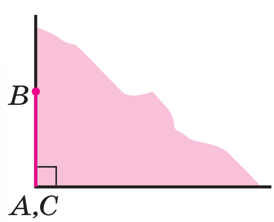


Рис. 146

Вопросы для самоконтроля

1. Изменяется ли отношение отрезков при изменении единицы длины?
2. От чего зависит отношение перпендикуляра к наклонной? Как вы это объясните?

ЗАДАЧИ

Смотрим

6.1. На рисунке 147 найдите пропорциональные отрезки и запишите равенство их отношений. Вычислите неизвестную длину отрезка x.

6.2. Нарисуйте какой-нибудь остроугольный треугольник ABC и две его высоты AM и BP. Обозначьте через O точку пересечения данных высот. Найдите на получившемся рисунке пропорциональные отрезки. Запишите равенства отношений этих пропорциональных отрезков.

Вычисляем

6.3. Чему равно отношение отрезков, длины которых равны: а) 1 см и 1 дм; б) 12 мм и 1,2 см; в) 160 см и 0,8 м; г) 1 мм и 1 км?

Выводим формулу

6.4. Запишите зависимость отрезка y от отрезка x, обозначенных на рисунке 148 данном на с. 96.

Применяем геометрию

6.5. Представьте себе, что вы стоите на движущемся эскалаторе в метро. Как бы вы могли определить глубину той станции метро, к которой ведёт этот эскалатор?

6.6. Строят прямолинейную наклонную эстакаду длиной 120 м, поднимающуюся на 48 м (рис. 149). Шесть опор для этой эстакады ставят на равных расстояниях друг от друга. Каковы высоты этих опор?

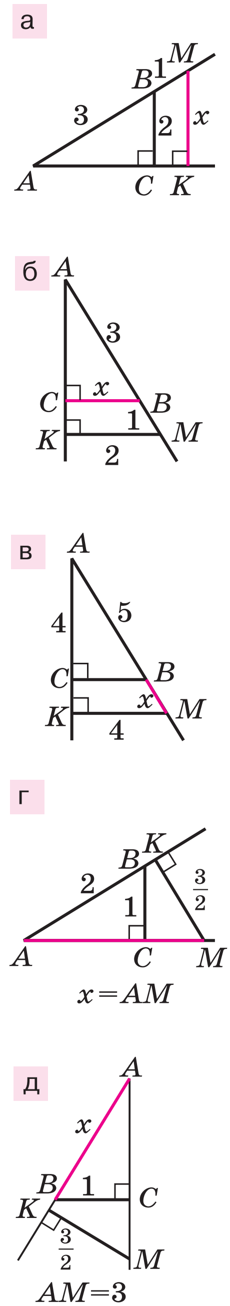


Рис. 147

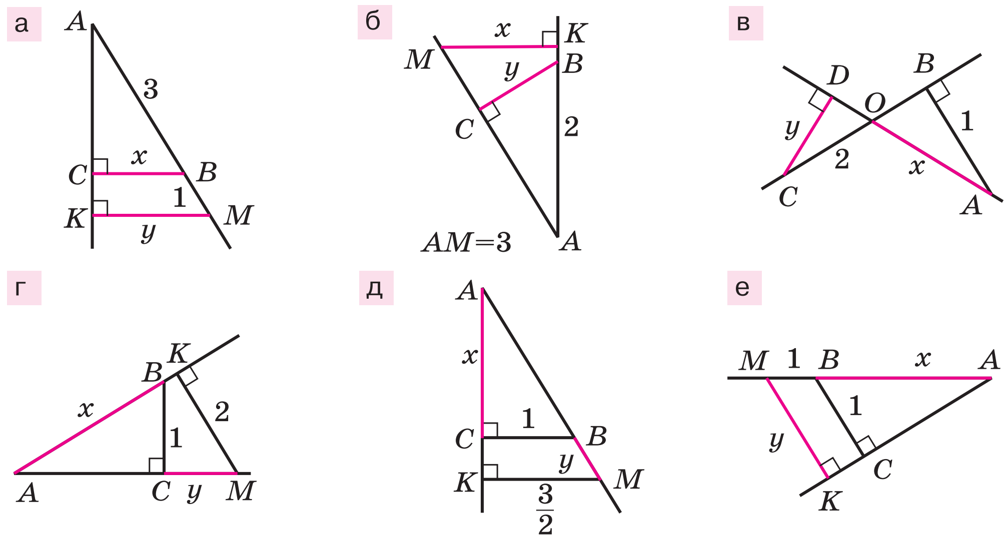


Рис. 148

6.2. Определение синуса

Что такое синус угла A — его обозначают $\sin A$, мы фактически уже определили: это то отношение, о котором идёт речь в теореме 7. Итак, даём определение.

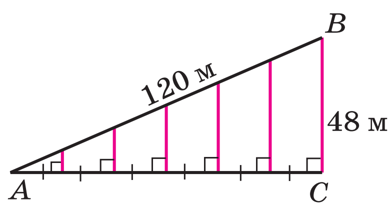


Рис. 149

Определение. Если на одной стороне неразвёрнутого угла A отложить отрезок AB и опустить перпендикуляр BC на другую сторону угла A или её продолжение (рис. 150), то отношение отрезков BC и AB называется **синусом угла** A, т. е.

$$\sin A = \frac{BC}{AB}. \qquad (4)$$

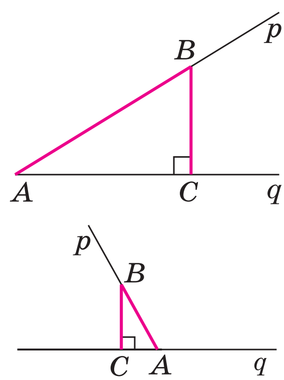


Рис. 150

Вспомним практическую задачу о подъёме по наклонной прямолинейной дороге, которая привела нас к этому определению: высота подъёма BC прямо пропорциональна пройденному пути BA, а коэффициентом пропорциональности является синус угла A, т. е. $BC = (\sin A)BA$.

Из данного определения непосредственно вытекает, что **синусы смежных углов равны**.

Действительно, у смежных углов с общей вершиной A и отрезок AB, и перпендикуляр BC один и тот же (рис. 151). Поэтому их синусы равны.

Нам осталось определить синус развёрнутого угла. У развёрнутого угла A нет перпендикуляра BC — он вырождается в точку B и длина его обращается в нуль (рис. 152). Поэтому полагают, что *синус развёрнутого угла равен нулю.*

Легко доказать, что *синусы равных углов равны.*

□ Действительно, рассмотрим равные друг другу острые углы: $\angle A$ и $\angle K$ (рис. 153, *а*). Внутри одной стороны угла A возьмём некоторую точку B и опустим перпендикуляр BC на другую сторону угла A (рис. 153, *б*). На одной из сторон угла K возьмём такую точку P, что $KP = AB$. Из точки P опустим перпендикуляр PM на другую сторону угла K (рис. 153, *в*). Построенные прямоугольные треугольники ABC и KPM равны (по гипотенузе и острому углу). Поэтому

$$\sin K = PM : PK = BC : BA = \sin A.$$

Если равны друг другу два тупых угла, то равны смежные с ними острые углы. Синусы этих острых углов, как уже доказано, равны. Но они по определению и являются синусами смежных им тупых углов. Поэтому синусы равных друг другу тупых углов равны.

Напомним ещё, что синусы всех прямых углов равны единице, а синусы всех развёрнутых углов равны нулю. Теперь мы рассмотрели все случаи и для всех случаев доказали, что синусы равных углов равны.■

Доказав это утверждение, мы можем теперь говорить, например, о синусе $50°$ и писать $\sin 50°$, понимая под этим синус любого угла, величина которого равна $50°$: все такие углы равны и синусы их равны.

Удобно ввести угол величиной $0°$. Таким углом можно считать вырожденный угол, стороны которого совпадают (как стрелки часов в 12 ч). Для этого вырожденного угла полагают $\sin 0° = 0$.

Так как синусы смежных углов равны, то для любого угла α от $0°$ до $180°$ справедливо равенство

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha. \qquad (5)$$

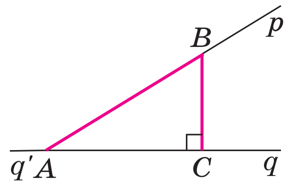


Рис. 151

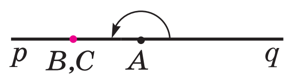


Рис. 152

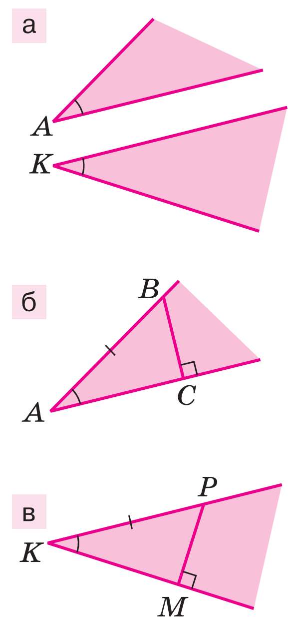


Рис. 153

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое синус угла? Как его вычислить?
2. Чему равен синус: а) прямого угла; б) угла 180°; в) угла 0°?
3. Дайте синусу несколько разных толкований.

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

6.7. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AB = c$ и катетами $AC = b$, $BC = a$ проведите высоту CD. Пусть $AD = b_1$ и $BD = a_1$. Выразите через эти данные синусы острых углов треугольника ABC. Используя полученные равенства, докажите ещё раз (также см. задачу 3.38), что: 1) $a^2 = a_1c$; 2) $b^2 = b_1c$.

Рассуждаем

6.8. Верно ли, что из равенства синусов двух углов следует равенство этих углов?

Смотрим

6.9. Отношению каких отрезков равны синусы углов, обозначенных цифрами на рисунке 154? Запишите эти отношения.

Вычисляем

6.10. Найдите синусы следующих углов: 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°.

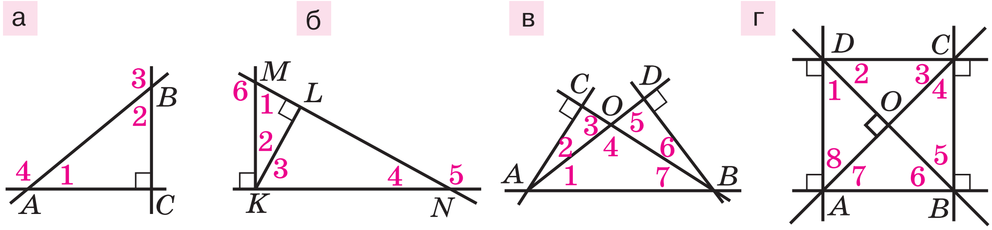


Рис. 154

6.11. Найдите синусы углов треугольника: а) равнобедренного прямоугольного; б) равностороннего; в) «египетского»; г) прямоугольного с катетами 5 см и 12 см; д) равнобедренного с основанием 8 см и боковой стороной 5 см; е) со сторонами 13 см, 14 см и 15 см.

6.12. Угол ромба равен 60°. Найдите синусы углов, которые образуют со сторонами ромба его диагонали.

6.13. Вычислите синусы углов равнобокой трапеции со сторонами: а) 2, 2, 2, 4; б) a, a, a, b $(a < b)$.

6.14. Найдите синусы углов, которые образует диагональ куба с его рёбрами.

6.15. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b, c. Найдите синусы углов, которые образует диагональ этого параллелепипеда с его рёбрами.

Доказываем

6.16. Докажите, что синус любого угла треугольника равен синусу суммы двух других его углов.

6.3. Свойства синуса и его график

Так как каждому углу соответствует его синус, то *синус является функцией угла, а точнее, функцией величины угла*.

Укажем простейшие свойства этой функции.

СВОЙСТВО 1. Синус каждого угла не больше единицы.

□ Это свойство следует из определения синуса и того, что катет BC короче гипотенузы AB. ■

Чтобы найти другие свойства, выполним следующие построения.

Проведём горизонтальную прямую p и выберем на ней точку A. Выберем единицу длины и отложим вправо от точки A единичный отрезок AM на этой прямой. Затем построим единичную полуокружность L с центром A и диаметром NM на прямой p, лежащую выше прямой p (на рисунке 155, *а* точка N лежит левее точки M). Будем рассматривать переменный угол α между фиксированным радиусом AM и подвижным радиусом AB полуокружности L (рис. 155, *б*). Считаем, что угол α возрастает от 0° до 180°. По-

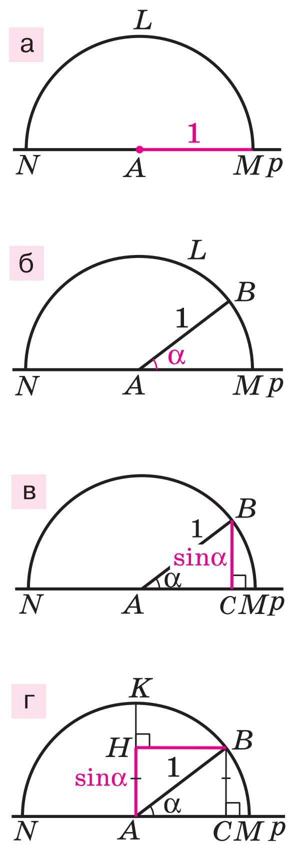


Рис. 155

скольку $AB = 1$, то синус этого угла α равен длине перпендикуляра BC, опущенного из точки B на прямую p (рис. 155, *в*). Проведём также вертикальный радиус AK и опустим на прямую AK перпендикуляр BH (рис. 155, *г*). Отрезок AH равен отрезку BC, а потому $\sin\alpha = AH$. После этих построений можно выводить свойства синуса.

Свойство 2. **При возрастании величины острого угла от 0° до 90° его синус возрастает от 0 до 1.**

□ Действительно, когда угол α возрастает от 0° до 90°, длина отрезка AH возрастает от 0 до 1. А так как $\sin\alpha = AH$, то свойство 2 доказано. ■

Свойство 3. **Величина острого угла определяется синусом этого угла.**

Это значит, что, зная синус острого угла, можно определить этот угол, т. е. для острых углов из равенства $\sin\alpha = \sin\beta$ вытекает равенство $\alpha = \beta$.

□ Действительно, угол α не может быть больше угла β, так как в этом случае $\sin\alpha$ больше $\sin\beta$ (по свойству 2). Аналогично угол α не может быть меньше угла β (в этом случае $\sin\alpha$ меньше $\sin\beta$). Поэтому $\alpha = \beta$. ■

Свойство 4. **При возрастании величины тупого угла от 90° до 180° его синус убывает от 1 до 0.**

Аналогично свойству 3 нетрудно установить, что *из равенства синусов тупых углов следует равенство самих углов*. Если же вид углов неизвестен, то из равенства синусов равенство самих углов не следует: углы могут быть смежными. Например, если $\sin\alpha = \sin\beta = 0{,}5$, то один из этих углов может быть равен 30°, а другой — 150°.

Если задана величина острого угла в градусах, то синус этого угла находят по таблицам (см. с. 175 учебника) или с помощью калькулятора. Синус тупого угла находят как синус смежного с ним острого угла. По таблицам же или с помощью калькулятора решают и обратную задачу — находят величину острого угла, если известен его синус. Сколь угодно точное вычисление синуса для любых углов осуществляется по формулам высшей математики.

На рисунке 156 изображён график синуса: на горизонтальной оси откладывается угол в градусах, на вертикальной — значение его синуса. На графике хорошо видно, как изменяется синус при изменении угла от 0° до 180°.

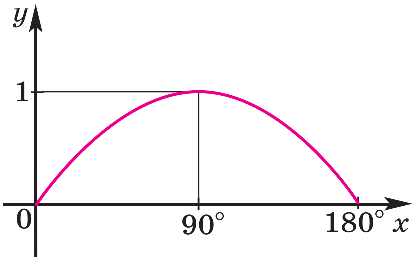


Рис. 156

Вопросы для самоконтроля

1. Какие свойства синуса вы знаете?
2. Какое значение синуса угла определяет угол однозначно?
3. Верны ли такие утверждения: а) если углы не равны, то и синусы их не равны; б) если синусы углов не равны, то и сами углы не равны; в) большему углу соответствует больший синус; г) меньшему углу соответствует меньший синус?

ЗАДАЧИ

Рассуждаем

6.17. Расположите в порядке возрастания синусы таких углов: а) $25°$, $15°$, $65°$, $10°$; б) $170°$, $100°$, $140°$; в) $105°$, $35°$, $74°$, $118°$, $58°$, $17°$, $178°$.

6.18. Всегда ли наибольший из трёх углов треугольника тот угол, синус которого будет наибольшим?

Строим

6.19. Постройте острые углы, синусы которых равны: а) 0,4; б) $\frac{1}{3}$; в) 0,6. Найдите величины этих углов.

6.20. Постройте тупые углы, синусы которых равны: а) 0,2; б) $\frac{2}{3}$; в) 0,8. Найдите величины этих углов.

Оцениваем

6.21. В каких границах лежит синус угла α, если: а) $0° < \alpha < 60°$; б) $60° \leqslant \alpha \leqslant 120°$; в) $120° \leqslant \alpha < 150°$?

Доказываем

6.22. Докажите, что треугольник, синусы двух углов которого равны, равнобедренный.

6.23. Из одной и той же точки A к данной прямой p проводятся наклонные разной длины. а) Докажите, что, чем больше наклонная, тем меньший угол она образует с прямой p. б) Сформулируйте и докажите утверждение, обратное утверждению «а».

6.24. К данной прямой p проводятся различные наклонные равной длины. а) Докажите, что, чем ближе к прямой другой конец наклонной, тем меньший угол она образует с прямой. б) Сформулируйте и докажите утверждение, обратное утверждению «а».

Применяем геометрию

6.25. Какая лестница более крутая: в 20 ступенек, поднимающаяся на 3 м, или в 15 ступенек, поднимающаяся на 2 м? Ширина и длина ступенек одна и та же.

6.26. Представьте, что вы спускаетесь по ровному склону. Верно ли, что, чем короче спуск, тем он круче?

6.4. Решение прямоугольных треугольников

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами a, b и гипотенузой c (рис. 157). Из определения синуса следует, что

$$\sin A = \frac{a}{c} \text{ и} \qquad (6)$$

$$\sin B = \frac{b}{c}, \qquad (7)$$

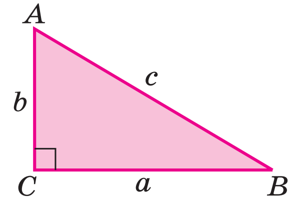


Рис. 157

т. е. *синус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению катета, лежащего против этого угла, и гипотенузы треугольника.*

Короче говорят так: *синус равен отношению противолежащего катета к гипотенузе.*

Формулы (6) и (7) вместе с теоремой Пифагора и теоремой о сумме углов треугольника позволяют **решить прямоугольный треугольник** для всех возможных случаев. Перечислим эти случаи.

1. Заданы катеты a и b. Сначала находим гипотенузу c по теореме Пифагора, а затем находим острые углы A и B, используя формулы (6) и (7). Ясно, что можно найти сначала один из острых углов, например угол A, а тогда угол B находится из равенства $\angle B = 90° - \angle A$.

2. Заданы гипотенуза c и один из катетов. По теореме Пифагора находим второй катет, а затем углы A и B, используя формулы (6) и (7).

3. Заданы гипотенуза c и один из острых углов. Сначала находим второй острый угол из равенства

$$\angle A + \angle B = 90°. \qquad (8)$$

Затем находим катеты из равенств

$$a = c \sin A \qquad (9)$$

$$\text{и } b = c \sin B. \qquad (10)$$

4. Задан один из катетов, например катет a, и один из острых углов. Сначала находим второй острый угол из равенства (8), а затем гипотенузу c, используя формулу (9). Второй катет находим по теореме Пифагора или по формуле (10).

Запомните: *катет находят умножением гипотенузы на синус противолежащего угла* (формулы (9) и (10)), *а гипотенузу находят делением катета на синус противолежащего угла:*

$$c = \frac{a}{\sin A}. \qquad (11)$$

Обратим внимание, что углами треугольник однозначно не определяется: могут быть неравные треугольники, имеющие соответственно равные углы, — это подобные треугольники, о которых речь пойдёт в конце данной главы (рис. 158).

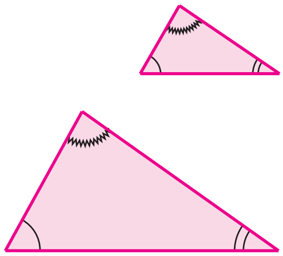


Рис. 158

Вопросы для самоконтроля

1. Как в прямоугольном треугольнике с помощью синуса можно найти углы?
2. Как в прямоугольном треугольнике с помощью синуса можно найти: а) катеты; б) гипотенузу?

ЗАДАЧИ

Смотрим

6.27. Назовите прямоугольные треугольники на рисунке 159. а) Для каждого из острых углов этих треугольников укажите противолежащий ему катет. Запишите выражение для синуса этого угла. б) Для каждого из катетов этих треугольников укажите противолежащий ему угол.

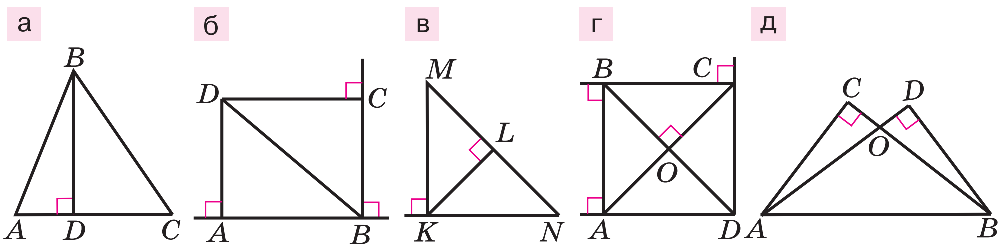


Рис. 159

Планируем

6.28. Как вычислить углы прямоугольного треугольника, если известны: а) катеты; б) отношение катетов; в) катет и медиана к другому катету; г) катет и медиана к этому катету; д) катет и медиана к гипотенузе; е) площадь и сумма катетов; ж) площадь и гипотенуза?

6.29. Как найти площадь равнобедренного треугольника, если известны: а) основание и угол при вершине; б) боковая сторона и угол при вершине; в) высота, проведённая на основание, и угол при вершине; г) высота, проведённая на основание, и угол при основании?

6.30. Как найти площадь прямоугольника, если известны: а) диагональ и угол, который она составляет с одной из сторон; б) диагональ и угол между диагоналями; в) сторона и угол между диагоналями?

6.31. Известны все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды. Как найти углы её граней и угол между её боковыми рёбрами и диагоналями основания пирамиды?

Вычисляем

6.32. Решите прямоугольный треугольник ABC по следующим его элементам[1]: а) $a = 1$, $b = 2$; б) $c = 3$, $a = 1$; в) $a = 2$, $\angle A = 35°$; г) $a = 2$, $\angle B = 70°$; д) $c = 12$, $\angle A = 44°$.

6.33. Решите равнобедренный треугольник ABC с вершиной A и основанием BC по следующим его элементам: а) $AB = 13$, $BC = = 10$; б) $BC = 10$, $\angle A = 52°$; в) $BC = 10$, $\angle B = 36°$; г) $AB = 8$, $\angle A = 52°$; д) $AB = 8$, $\angle B = 36°$.

6.34. Диагональ прямоугольника равна 10 и образует с одной из его сторон угол 36°. Найдите площадь прямоугольника.

6.35. Сторона ромба равна 10, а один из его углов равен 36°. Найдите площадь ромба.

6.36. Найдите углы равнобокой трапеции, основания которой равны 6 см и 18 см, а боковая сторона равна 8 см.

6.37. В круге радиуса R проведена хорда. Она видна из центра круга под углом α. На каком расстоянии от центра находится эта хорда? Какова длина хорды? Составьте сами задачи с аналогичным сюжетом.

---

[1] Здесь и далее предполагается, что в прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой.

Доказываем

6.38. Докажите, что сумма квадратов синусов острых углов прямоугольного треугольника равна единице.

6.39. Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма синусов острых углов больше 1 и меньше 2.

Исследуем

6.40. Один из катетов прямоугольного треугольника остаётся неизменным, а другой катет увеличивается. Как при этом изменяется синус угла, лежащего против: а) изменяющегося катета; б) постоянного катета?

6.41. Можно ли построить такой прямоугольный треугольник, в котором: а) синус одного угла равен 0,5, а синус другого угла равен 0,6; б) синус одного угла равен 0,6, а синус другого угла равен 0,8; в) синус каждого угла равен 0,75?

Применяем геометрию

6.42. Угол подъёма дороги составляет в среднем 2°. На какую высоту поднимется турист, пройдя по дороге 12 км?

6.43. Пожарная лестница, укреплённая на машине, может быть выдвинута на 20 м, а её наклон может достигать 70°. Основание лестницы находится на высоте 2 м. До какого этажа можно по ней добраться, если высота этажа 3 м?

6.44. Из вершины триангуляционного пункта хотят измерить ширину реки. Высота пункта известна. Как это сделать?

6.5. Вычисление площади треугольника

Треугольник однозначно задаётся своими двумя сторонами и углом между ними. Поэтому все величины треугольника, в том числе и его площадь, должны выражаться через длины двух его сторон и угла между ними. Понятие синуса позволяет вывести простую формулу, по которой можно вычислить площадь треугольника, зная его стороны и угол между ними.

Рассмотрим треугольник ABC, у которого известны его стороны b, c и угол A между ними (рис. 160). Тогда его площадь S вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A. \qquad (12)$$

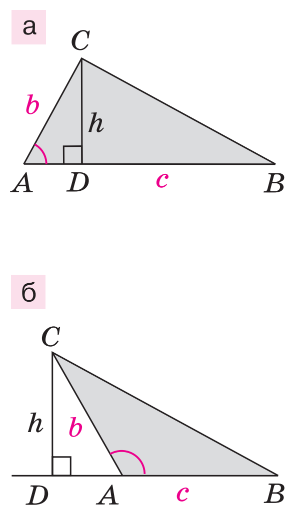


Рис. 160

Докажем равенство (12).

□ Проведём высоту $h = CD$. Отрезок CD является катетом в прямоугольном треугольнике ACD, лежащим против угла A (рис. 160, *а*) или смежного с ним угла (рис. 160, *б*). Поэтому $h = b\sin A$. Подставляя это выражение для h в формулу для площади $S = \frac{1}{2}ch$, получаем равенство (12). ■

Вопрос для самоконтроля

Какие вы знаете формулы для площади треугольника?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

6.45. Докажите, что площадь параллелограмма со сторонами a и b и углом φ между ними вычисляется по формуле

$$S = ab\sin\varphi. \qquad (13)$$

6.46. Пусть φ — угол между диагоналями выпуклого четырёхугольника $ABCD$, а S — его площадь. Докажите, что

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD\sin\varphi. \qquad (14)$$

Смотрим

6.47. Вычислите отношение площадей S_1 и S_2 фигур, изображённых на рисунке 161.

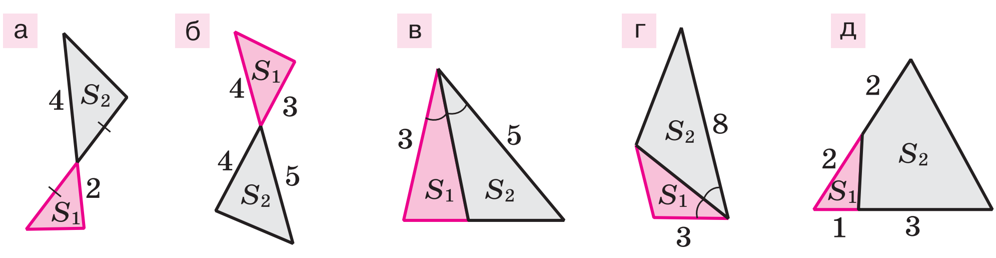


Рис. 161

Вычисляем

6.48. Найдите площади треугольников со сторонами 2 и 3, углы между которыми равны: а) 30°; б) 40°; в) 55°; г) 120°; д) 125°; е) 140°; ж) 150°.

6.49. Найдите площади параллелограммов со сторонами 3 и 4, углы которых равны: а) 60°; б) 75°; в) 80°; г) 105°; д) 150°; е) 160°.

6.50. Найдите площадь прямоугольника с диагональю d и углом между диагоналями φ.

Разбираемся в решении

6.51. В выпуклом шестиугольнике все углы равны по 120°, а стороны через одну равны 1 и 2. Вычислите его площадь.

Решение. Сначала себе представим, как можно было бы построить какой-нибудь шестиугольник с углами, равными 120°. Проще всего такой шестиугольник построить, если «срезать» вершины равностороннего треугольника, отсекая от него три равносторонних треугольника (рис. 162). Ясно, что тот шестиугольник, о котором говорится в условии задачи, можно получить, если отсечь от равностороннего треугольника со стороной 4 три равносторонних треугольника со стороной 1 (рис. 163). И становится ясно, что площадь S такого шестиугольника вычисляется так:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4\sin 60^\circ - 3 \cdot \frac{1}{2}\sin 60^\circ =$$

$$= 6{,}5\sin 60^\circ = \frac{13}{4}\sqrt{3}.$$

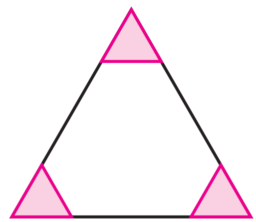


Рис. 162

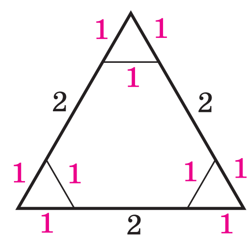


Рис. 163

Ищем границы

6.52. Стороны переменного треугольника равны a и b, а его угол между ними возрастает от 30° до 150°. В каких пределах изменяется площадь этого треугольника? Сформулируйте и решите аналогичные задачи для параллелограмма.

6.53. Переменная хорда KM круга с центром O движется перпендикулярно одному и тому же диаметру. В каких границах лежит площадь треугольника KOM?

Доказываем

6.54. Треугольник ABC со сторонами $AB = c$ и $AC = b$ биссектриса AD разбивает на треугольники ABD и ACD. Докажите, используя формулу (12), что отношение их площадей равно $c : b$.

6.55. Докажите, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.
Замечание. Эту задачу мы уже решали в п. 4.1. Но к одной и той же задаче полезно возвращаться по несколько раз и решать её с помощью вновь полученных теоретических результатов.

Исследуем

6.56. Пусть a и b — смежные стороны параллелограмма, а угол между ними равен φ. Запишите формулу (13) площади параллелограмма, полученную в задаче 6.45. а) Как эта формула выглядит для ромба? б) Можно ли по этой формуле найти площадь прямоугольника? в) Как с помощью этой формулы найти угол между смежными сторонами параллелограмма? г) Какие ещё следствия можно получить из этой формулы?

6.57. Пусть в выпуклом четырёхугольнике диагонали равны a и b, а угол между ними равен φ. Запишите формулу (14) для его площади, полученную в задаче 6.46. а) Как выглядит эта формула для прямоугольника, ромба, квадрата? б) Верна ли формула (14) для невыпуклого четырёхугольника?

6.6. Теорема синусов

Синусы углов треугольника и его стороны связаны простой зависимостью, о которой говорится в следующей теореме:

Теорема 8 (*теорема синусов*). **Отношение двух сторон треугольника равно отношению синусов противолежащих им углов.**

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Мы должны доказать, что

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}. \qquad (15)$$

Проведём в треугольнике ABC высоту CH из вершины C (рис. 164). Выразим CH из прямоугольных треугольников ACH и BCH. Получим

$$CH = b\sin A \text{ и } CH = a\sin B.$$

Следовательно, $a\ \sin B = b\ \sin A$. Из этого равенства и вытекает равенство (15).■

Простым следствием теоремы синусов является признак равнобедренного треугольника: *если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный*. Этот признак вам уже известен. Из равенства (15) он получается совсем просто: если $\angle A = \angle B$, то $\sin A = \sin B$, а потому $a = b$.

Теореме 8 можно дать другую формулировку, в которой уже говорится о всех углах и сторонах треугольника.

Теорема 8′ **Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов треугольника, т. е. для любого треугольника имеют место равенства**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \qquad (16)$$

Доказательство. Действительно, так как

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \text{ то } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Аналогично так как

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}, \text{ то } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Поэтому справедливы равенства (16). ■

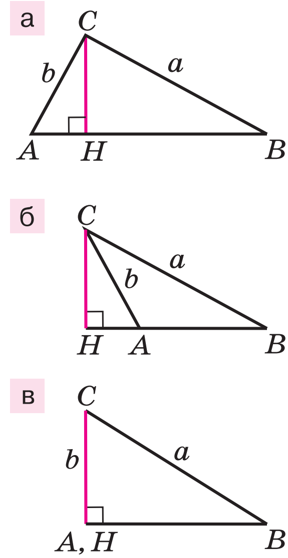


Рис. 164

Теорема синусов позволяет *решить треугольник по стороне и двум углам*. Во-первых, находим третий угол как разность 180° и суммы двух данных углов. А затем из равенств (16) находим стороны треугольника, зная все углы треугольника и одну из его сторон.

Такие задачи приходится решать и практически, определяя, например, расстояние до недоступного предмета (на рисунке 165 он обозначен точкой C). Этот предмет наблюдают из двух точек A и B, расстояние между которыми может быть измерено. Измеряются также углы CAB и CBA. А затем вычисляются расстояния AC и BC по теореме синусов.

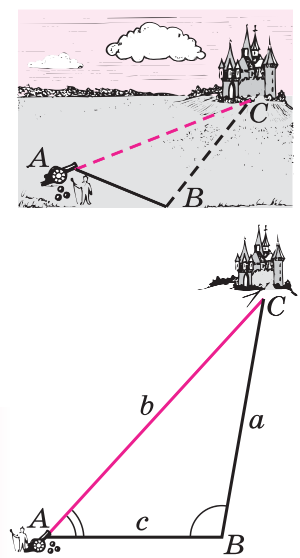


Рис. 165

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит теорема синусов?
2. Какие вы знаете практические применения теоремы синусов?

ЗАДАЧИ

Работаем с формулой

6.58. Дан треугольник ABC. Используя теорему синусов, запишите, чему равны отношения $a : b$, $b : c$, $c : a$, $\sin A : \sin B$, $\sin C : \sin B$, $\sin A : \sin C$.

Планируем

6.59. Пусть известны сторона равнобедренного треугольника и один из его углов. Как найти его стороны, используя теорему синусов?

6.60. Как найти стороны параллелограмма, зная его диагональ и углы, которые она составляет с его сторонами?

6.61. Пусть известны углы треугольника и одна из его сторон. Как найти биссектрису треугольника, проведённую на данную сторону?

6.62. В тетраэдре $ABCD$ $\angle ADC = \angle BDC = \alpha$, $\angle ACD = \angle BCD = \beta$, $AB = CD = a$. Как найти площадь его поверхности, т. е. сумму площадей его граней?

Вычисляем

6.63. Вычислите отношения сторон $b : a$ и $c : a$ в треугольнике ABC, в котором: а) $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$; б) $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$; в) $\angle A = 178°$, $\angle B = 1°$.

6.64. Решите треугольник ABC, у которого сторона $BC = 12$ см, имеющего такие углы: а) $\angle B = 73°$, $\angle C = 25°$; б) $\angle B = 25°$, $\angle A = 57°$; в) $\angle B = 168°$, $\angle C = 55°$; г) $\angle B = 52°$, $\angle A = 110°$.

6.65. Найдите площадь параллелограмма со стороной 12 см, у которого диагонали образуют углы 30° и 45° с этой стороной.

6.66. В равнобокой трапеции $ABCD$ основание $AD = 12$, $\angle BAD = 72°$, $\angle CAD = 30°$. Вычислите стороны трапеции и её площадь.

6.67. В треугольнике ABC сторона $AB = 16$ см и $\angle B = 30°$. Решите треугольник ABC для следующих случаев: а) $AC = 6$ см; б) $AC = 8$ см; в) $AC = 10$ см. Чем различаются эти случаи? Иллюстрируйте свои вычисления рисунками.

Доказываем

6.68. С помощью теоремы синусов ещё раз докажите, что биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

6.69. С помощью теоремы синусов докажите, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

6.70. Углы двух треугольников соответственно равны. Докажите, что стороны этих треугольников пропорциональны.

Исследуем

6.71. Дан треугольник ABC. Запишите теорему синусов для его сторон a и b. Что следует из этой формулы: а) при равенстве углов A и B; б) при равенстве сторон a и b; в) если угол A больше угла B; г) если сторона a больше стороны b?

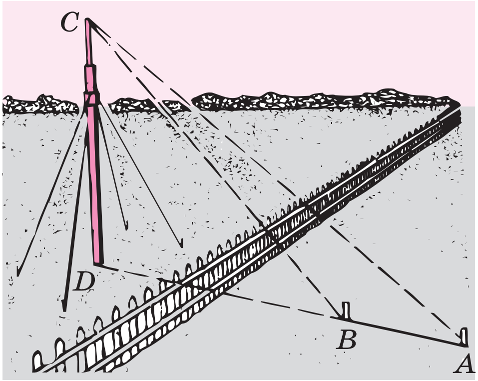
6.72. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник. а) Его прямой угол разделили лучами на три равные части. Какой отрезок гипотенузы между этими лучами оказался наибольшим? б) Гипотенузу разделили на три равных отрезка. Какой из них виден из вершины прямого угла под наибольшим углом?

6.73. Дан равносторонний треугольник ABC. а) Его угол A разделили лучами на три равные части. Какой отрезок стороны BC между этими лучами оказался наибольшим? б) Сторону BC разделили на три равных отрезка BK, KM и MC. Какой из углов BAK, KAM и MAC наибольший?

Применяем геометрию

6.74. По рисунку 166 расскажите, как находится высота недоступного предмета. Сделайте вычисления для $AB = 100$ м, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

6.75. Три дороги образуют треугольник. Обозначим его через ABC. При этом $\angle A = 20°$, $\angle B = 150°$. Автомобилист из пункта A хо-



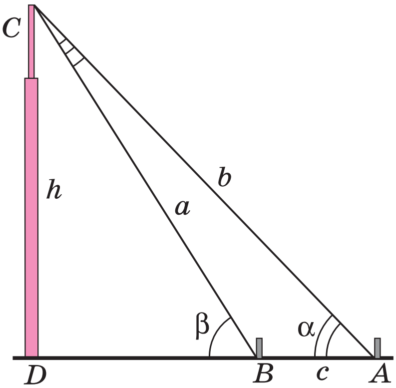


Рис. 166

чет попасть в пункт C побыстрее. Известно, что участки AC и CB — просёлочные дороги, AB — шоссе. Скорость движения по шоссе в 2 раза больше, чем по просёлку. Какой путь ему выбрать?

6.76. Спортивный самолёт летит по замкнутому треугольному маршруту. Два угла этого треугольника равны 30° и 70°. Меньшую сторону маршрута он пролетел за 1 час. За какое время самолёт пролетит по всему маршруту, сохраняя постоянную скорость?

§ 7. Косинус. Применения косинуса

7.1. Определение косинуса

С помощью синуса вы научились решать многие важные задачи. Однако у синуса есть существенный недостаток: он не определяет угол. Если, например, $\sin\alpha = 0{,}5$, то $\alpha = 30°$ или $\alpha = 150°$. Поэтому мы не можем однозначно по синусу найти угол. Угол находится однозначно с помощью другой функции — косинуса. Её обозначают так: cos. Перейдём к определениям. Они связаны с понятием проекции отрезка на прямую. Напомним это понятие и расширим его.

Снова (как и при определении синуса) рассмотрим некоторый угол A со сторонами p и q (рис. 167). Сторону q считаем горизонтальной и содержащую её прямую обозначаем через x. На стороне p отложим некоторый отрезок AB (рис. 168). Если угол A острый или тупой, то отрезок AB — наклонная к прямой x. Как нам известно (см. п. 3.4), проекция отрезка AB на прямую x — это отрезок AC, у которого конец C является основанием перпендикуляра BC, опущенного на прямую x (рис. 168, *а*, *б*). Если угол A прямой, то полагаем проекцией отрезка AB на прямую x точку A: в этом случае точка C совпадает с точкой A (рис. 168, *в*). Если же угол A развёрнутый, то проекция отрезка AB на прямую x — это сам отрезок AB: точка C совпадает с точкой B (рис. 168, *г*).

Тем самым мы теперь можем говорить о проекции AC отрезка AB на прямую x для любых углов A, а не только для острых и тупых углов: в частных случаях точка C может совпадать с точкой A (для прямого угла A) или с точкой B (для развёрнутого угла A).

В том случае, когда проекция AC отрезка AB на прямую x вырождается в точку A (т. е. в том случае, когда угол A прямой), длину его проекции полагаем равной нулю.

Теперь дадим определение косинуса угла для любых углов.

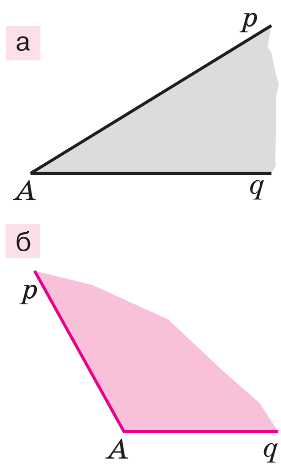


Рис. 167

Определение. Пусть на одной стороне угла A отложен отрезок AB и AC — его проекция на прямую, содержащую другую сторону угла A. Тогда **косинусом угла** A называется отношение отрезков AC и AB, взятое со знаком «плюс», если угол A острый, и со знаком «минус», если угол A тупой или развёрнутый.

Итак, для острого угла A

$$\cos A = \frac{AC}{AB}. \qquad (1)$$

Далее, **косинус прямого угла равен нулю.**

Для тупого угла A

$$\cos A = -\frac{AC}{AB}. \qquad (2)$$

Наконец, из данного определения ясно, что **косинус развёрнутого угла равен −1.**

Из определения косинуса следует также, что *косинусы смежных углов отличаются лишь знаком, т.е. противоположны* (рис. 169).

Действительно, если из двух смежных углов один острый, то другой тупой. Косинус одного из них вычисляется по формуле (1), а другого — по формуле (2). Отношения, стоящие справа в этих равенствах, отличаются лишь знаком. Если же один из смежных углов прямой, то другой угол тоже прямой. Их косинусы равны нулю. Поэтому и для прямых смежных углов обсуждаемое утверждение тоже верно.

В том, что данное нами определение косинуса угла A не зависит от выбора отрезка AB на стороне угла A, мы убедимся в следующем пункте, где установим зависимость косинуса и синуса угла.

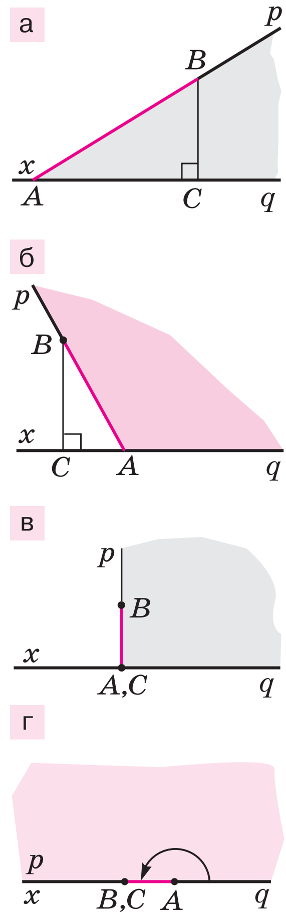
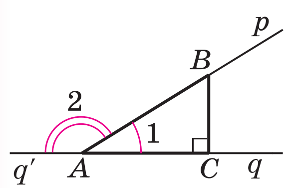


Рис. 168

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычислить косинус: а) острого угла; б) тупого угла?
2. Чему равен косинус: а) прямого угла; б) развёрнутого угла?
3. Какова связь между косинусами смежных углов?
4. Про угол A известно, что он тупой и модуль его косинуса больше 0,5. Какой это угол?
5. Об углах A и B известно, что они смежные и что они равны. Каков их косинус?



$$\cos(\angle pq) = \frac{AC}{AB},$$

$$\cos(\angle pq') = -\frac{AC}{AB}.$$

Рис. 169

ЗАДАЧИ

Смотрим

7.1. Запишите выражения для косинусов углов, обозначенных цифрами на рисунке 170.

Строим

7.2. Постройте углы, косинусы которых равны: а) 0,5; б) –0,5; в) 0,3; г) 0,7; д) –0,7; е) –1; ж) 0; з) 1. Найдите величины этих углов.

Вычисляем

7.3. Найдите косинусы углов треугольников: а) правильного; б) прямоугольного равнобедренного; в) «египетского»; г) прямоугольного с катетами 5 и 12; д) равнобедренного с основанием 6 и боковой стороной 7; е) со сторонами 13, 14, 15. Для прямоугольных треугольников сравните их с синусами углов этих треугольников.

7.4. Найдите косинусы углов ромба, одна из диагоналей которого равна его стороне.

7.5. Найдите косинусы углов равнобокой трапеции, основания которой равны 10 см и 16 см, а боковая сторона равна 5 см.

7.6. Точка A лежит на прямой p. Найдите угол, который составляет с прямой p единичный отрезок AB, если его проекция на эту прямую равна: а) $\frac{1}{3}$; б) 0,5; в) 0,9; г) 1.

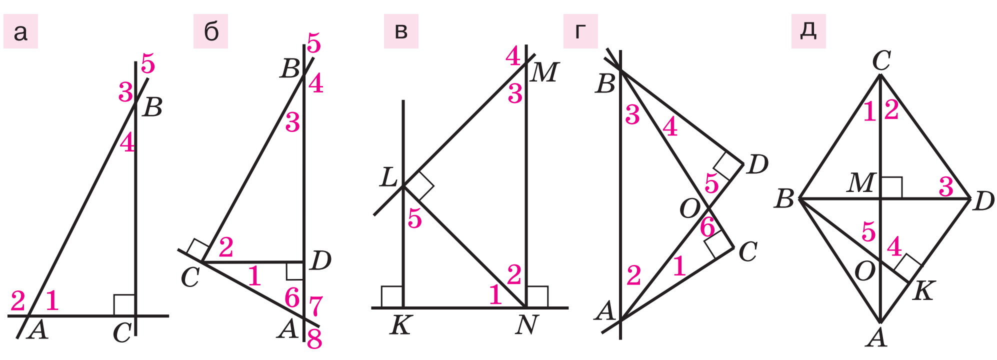


Рис. 170

x Выводим формулу

7.7. Найдите косинусы углов, которые составляет диагональ прямоугольника с его сторонами, если они равны a и b. Сравните их с синусами этих углов. Найдите сумму квадратов этих косинусов.

7.8. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b, c. Найдите косинусы углов, которые составляет диагональ этого параллелепипеда с его рёбрами. Найдите сумму квадратов этих косинусов.

7.2. Основное тригонометрическое тождество

Синус и косинус любого угла A связаны важным равенством

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1. \tag{3}$$

Его называют **основным тригонометрическим тождеством.** Оно вытекает из теоремы Пифагора, а для прямоугольного треугольника с единичной гипотенузой равенство (3) и есть теорема Пифагора. Докажем равенство (3). Возможны такие случаи.

□ 1) Угол A — острый. Возьмём на его стороне точку B и опустим перпендикуляр BC на другую сторону угла A (рис. 171, *а*). Тогда

$\sin A = \frac{BC}{AB}$ и $\cos A = \frac{AC}{AB}$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Поэтому $\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{AC^2 + BC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1.$

Равенство (3) доказано для острых углов.

2) Если угол A прямой, то $\sin A = 1$, $\cos A = 0$ и равенство (3) также справедливо.

3) Пусть угол A тупой. Снова возьмём на его стороне точку B и опустим перпендикуляр BC на продолжение другой стороны угла A (рис. 171, *б*). Тогда $\sin A = \frac{BC}{AB}$, а $\cos A = -\frac{AC}{AB}$. Поэтому снова, как и в случае 1, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

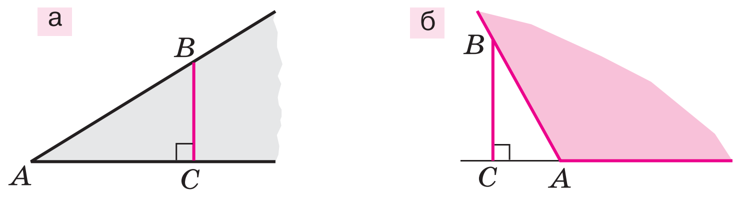


Рис. 171

4) Если угол A развёрнутый, то $\sin A = 0$, $\cos A = -1$ и равенство (3) верно. Равенство (3) доказано для любых углов. ■

Равенство (3) позволяет выразить косинус через синус, если известен вид угла. Из равенства (3) следует, что

$$|\cos A| = \sqrt{1-\sin^2 A}.$$

Если $\angle A \leqslant 90°$, то $\cos A \geqslant 0$, а потому

$$\cos A = \sqrt{1-\sin^2 A}.$$

Если $\angle A > 90°$, то $\cos A < 0$, а потому

$$\cos A = -\sqrt{1-\sin^2 A}.$$

Поскольку $\sin A$ зависит лишь от величины угла A, то из полученных выражений косинуса через синус следует, что $\cos A$ тоже зависит лишь от величины угла A. Поэтому, как и для синуса, мы пишем, например, $\cos 47°$ или $\cos\alpha$, где α — величина соответствующего угла. Поскольку косинус прямого угла равен нулю, то $\cos 90° = 0$. Кроме того, полагаем, что $\cos 0° = 1$. Это согласуется со всем уже изложенным о косинусе (обдумайте это).

Зависимость между косинусами смежных углов теперь можно записать так:

$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha. \qquad (4)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какое тождество называется основным тригонометрическим тождеством?
2. Какие следствия можно получить из основного тригонометрического тождества?
3. Частным случаем какой теоремы является основное тригонометрическое тождество?

ЗАДАЧИ

Работаем с формулой

7.9. Запишите основное тригонометрическое тождество. а) Выразите из него $\cos^2\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin^2\alpha$, $\sin\alpha$. б) Пусть $\cos\alpha$ растёт. Что происходит с $\sin\alpha$? в) Пусть $\sin\alpha$ убывает. Что происходит с $\cos\alpha$? г) Как из этого тождества получить, что синус и косинус по модулю не превосходят единицы?

Вычисляем

7.10. Найдите косинусы углов: а) $0°$; б) $30°$; в) $45°$; г) $60°$; д) $90°$; е) $120°$; ж) $135°$; з) $150°$; и) $180°$.

7.11. Найдите величины углов, косинусы которых равны: а) 0,5; б) −0,5; в) 0,3; г) −0,7; д) −1; е) 0; ж) 1.

7.12. Вычислите синусы углов, косинусы которых равны: а) 0,3; б) $\frac{1}{4}$; в) −0,5.

7.13. Вычислите косинусы углов, синусы которых равны: а) 0,25; б) 0,1; в) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Исследуем

7.14. Могут ли синус и косинус одного и того же угла равняться соответственно: а) 0,3 и 0,4; б) 0,6 и −0,6; в) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{2}{\sqrt{5}}$?

7.3. Косинусы острых углов прямоугольного треугольника

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами a, b и гипотенузой c (рис. 172). Косинусы его острых углов A и B определяются равенствами

$$\cos A = \frac{b}{c} \tag{5}$$

и

$$\cos B = \frac{a}{c}. \tag{6}$$

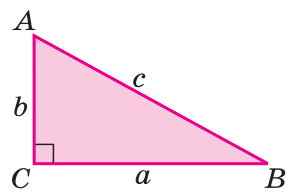


Рис. 172

Итак, *косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению катета, прилежащего к этому углу, и гипотенузы.*

Короче: *косинус равен отношению прилежащего катета к гипотенузе.*

Теперь вспомним, что

$$\sin A = \frac{a}{c} \tag{7}$$

и

$$\sin B = \frac{b}{c}. \tag{8}$$

Сравнивая равенства (7) и (6), а также равенства (5) и (8), получаем, что

$$\sin A = \cos B \tag{9}$$

и

$$\cos A = \sin B. \tag{10}$$

Вспомним ещё, что $\angle A + \angle B = 90°$. Острые углы, сумма которых равна 90°, называют *дополнительными* (друг к другу до 90°). Поэтому равенства (9) и (10) выражают такие свойства дополнительных углов: *синус острого угла равен косинусу дополнительного угла, т. е.*

$$\sin\alpha = \cos(90° - \alpha), \tag{11}$$

и косинус острого угла равен синусу дополнительного угла, т. е.

$$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha). \tag{12}$$

Вопросы для самоконтроля

1. Чему равен косинус угла прямоугольного треугольника?
2. Как с помощью косинуса найти катет в прямоугольном треугольнике? А гипотенузу?
3. Какова зависимость синусов и косинусов острых углов прямоугольного треугольника?
4. Известна сумма синусов углов прямоугольного треугольника. Как найти сумму косинусов углов этого же треугольника?

ЗАДАЧИ

Планируем

7.15. В треугольнике ABC известны высота AD и углы, которые она образует со сторонами AB и AC. а) Как найти длины сторон треугольника ABC и его площадь? б) Реализуйте свой план для $AD = 2$, $\angle BAD = 30°$ и $\angle CAD = 45°$.

7.16. Известны стороны равнобедренного треугольника. а) Как найти проекции его основания и одной из боковых сторон на другую сторону? б) Реализуйте свой план для треугольников со сторонами 5, 5, 8 и 25, 25, 48.

Вычисляем

7.17. Найдите косинусы острых углов A и B следующих прямоугольных треугольников ABC: а) $a = 7$, $b = 24$; б) $a = 5$, $c = 13$; в) $\angle A = 45°$; г) $\angle B = 30°$; д) $\angle A = 60°$.

7.18. Найдите проекции катетов AC и BC на гипотенузу AB в следующих прямоугольных треугольниках: а) $a = 12$, $c = 13$; б) $a = 7$, $b = 24$; в) $a = 8$, $\angle A = 60°$; г) $c = 6$, $\angle A = 30°$; д) $a = 10$, $\angle B = 60°$; е) $a = 8$, $\angle A = 45°$.

7.19. В треугольнике ABC высота AH образует со сторонами AB и AC углы $45°$ и $60°$. Найдите стороны треугольника и его площадь, если $AH = 8$ см.

7.20. Вычислите косинусы острых углов прямоугольного треугольника, в котором: а) проекции катетов на гипотенузу равны 3 и 1; б) высота равна 1, а проекция одного из катетов на гипотенузу равна 2; в) один из катетов равен 2, а его проекция на гипотенузу равна 1. Найдите также градусные меры этих углов.

Доказываем

7.21. Докажите, что косинус внешнего угла треугольника равен косинусу суммы двух других углов треугольника.

7.4. Свойства косинуса и его график

Косинус, как и синус, является функцией величины угла. Свойства этой функции, зная свойства синуса, можно получить аналитически из формул, выражающих косинус через синус (см. п. 7.3). Но можно их получить и геометрически, опираясь на определение косинуса. Мы так и сделаем.

СВОЙСТВО 1. Косинус любого угла не меньше −1 и не больше 1, т. е.

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1. \qquad (13)$$

Это свойство вытекает непосредственно из определения косинуса.

СВОЙСТВО 2. $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

Это свойство вытекает из определения косинуса. О нём мы уже говорили в п. 7.1.

СВОЙСТВО 3. При возрастании угла от 0° до 180° косинус убывает от 1 до −1.

□ Для доказательства этого свойства воспользуемся рисунком 173. Косинус угла BAM равен длине отрезка AC, взятой со знаком «плюс», когда этот угол острый, и со знаком «минус», если угол BAM тупой. Если теперь следить за изменением отрезка AC, то становится ясно, что, когда подвижный радиус AB вращается против часовой стрелки от положения AM до положения AN, косинус угла BAM убывает от 1 до −1 (точка C двигается от точки M до точки N). ■

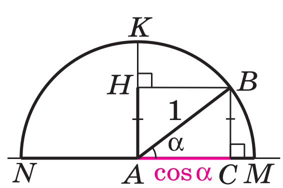


Рис. 173

СВОЙСТВО 4. Косинус однозначно определяет угол, т. е. из равенства $\cos\alpha = \cos\beta$ следует равенство $\alpha = \beta$.

□ Действительно, если $\cos\alpha = \cos\beta$, то не может выполняться неравенство $\alpha < \beta$. В этом случае согласно свойству 3 $\cos\alpha > \cos\beta$, что противоречит условию. Аналогично не может выполняться неравенство $\alpha > \beta$, поскольку оно ведёт к неравенству $\cos\alpha < \cos\beta$. Итак, возможно лишь равенство $\alpha = \beta$. ■

Косинус, как и синус, находят по таблицам или с помощью калькулятора. В особой таблице для косинуса нет необходимости, если уже составлена таблица значений синуса. Действительно, для острых углов $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$, а для тупых углов косинус можно находить из равенства $\cos\alpha = -\cos(180° - \alpha)$. На рисунке 174 приведён график функции $y = \cos x$.

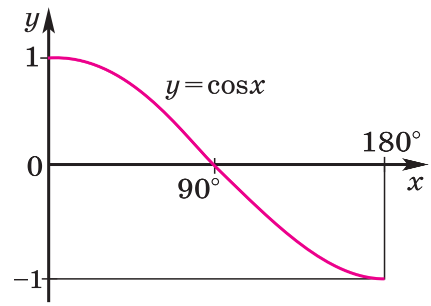


Рис. 174

Вопросы для самоконтроля

1. Как изменяется косинус угла при возрастании угла от 0° до 180°?
2. Что можно сказать об углах, косинусы которых равны?

ЗАДАЧИ

Рассуждаем

7.22. Известно, что косинусы всех углов выпуклого многоугольника положительны. Что вы можете сказать об этом многоугольнике?

7.23. Известно, что косинусы всех углов многоугольника равны нулю. Что это за многоугольник?

7.24. Известно, что косинусы всех углов многоугольника отрицательны. Что вы можете сказать об этом многоугольнике?

7.25. Что вы можете сказать о косинусах углов: а) параллелограмма; б) трапеции?

7.26. Известно, что косинусы всех углов граней некоторой призмы неотрицательны. Что вы можете сказать об этой призме?

7.27. Расположите в порядке убывания косинусы таких углов: а) 71°, 28°, 54°; б) 21°, 121°, 54°; в) 153°, 46°, 94°.

7.28. Какие следствия можно получить из равенств: а) $\cos\alpha = \cos\beta$; б) $\cos\alpha = -\cos\beta$; в) $\cos\alpha = \sin\beta$?

Представляем

7.29. Через середину горизонтального отрезка AB — точку O — проведён вверх луч p, перпендикулярный отрезку AB. По лучу p от точки O двигается вверх точка P. Как изменяются косинусы углов треугольника PAB при движении точки P?

7.30. Через центр O квадрата $ABCD$, лежащего в горизонтальной плоскости, проведён вверх вертикальный луч p. По лучу p от точки O двигается вверх точка P. Как изменяются косинусы углов боковых граней правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ при движении точки P?

7.31. Сформулируйте и решите задачу, аналогичную задаче 7.30, для правильного треугольника и правильной треугольной пирамиды.

Доказываем

7.32. Докажите, что сумма косинусов двух углов любого треугольника положительна.

7.33. Докажите, что сумма косинусов двух острых углов прямоугольного треугольника больше единицы.

Исследуем

7.34. Точка X движется по стороне AB треугольника ABC от вершины A к вершине B. Как изменяются при этом синус и косинус угла CXB? Рассмотрите отдельно случаи различных видов треугольника ABC.

7.35. Выясните, что больше — синус или косинус угла α, если: а) $0° < \alpha < 45°$; б) $45° < \alpha < 90°$; в) $\alpha > 90°$.

7.5. Теорема косинусов (обобщённая теорема Пифагора)

Теорема Пифагора позволяет в прямоугольном треугольнике, зная две из трёх его сторон, найти третью сторону. В прямоугольном треугольнике один из его элементов — прямой угол — задан изначально. Поэтому для решения такого треугольника следует задать ещё два элемента: две стороны или сторону и острый угол. Произвольный треугольник однозначно определяется либо тремя сторонами, либо двумя сторонами и углом между ними, либо двумя углами и стороной. Как решить треугольник в последнем случае — по двум углам и стороне, мы уже знаем: с помощью теоремы синусов. В двух других случаях теорема синусов «не работает», и для решения треугольника в этих случаях применяют ещё одну основную теорему «геометрии треугольника» — *теорему косинусов*. Теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов, а потому её можно называть и *обобщённой теоремой Пифагора*. Сформулируем и докажем эту теорему.

Теорема 9 (*теорема косинусов*). **Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними.**

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC со сторонами $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Требуется доказать равенство

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \tag{14}$$

(а также аналогичные равенства для a^2 и b^2).

Для угла C есть три возможности.

1) Угол C — прямой. Тогда $\cos C = 0$ и равенство (14) становится теоремой Пифагора, которую мы уже доказали.

2) Угол C — острый. В треугольнике ABC, кроме угла C, есть ещё хотя бы один острый угол. Допустим, что это угол B (рис. 175). Из вершины A проведём высоту AH на сторону BC. Точка H лежит внутри стороны BC и разбивает её на два отрезка $CH = b_1$ и $BH = a - b_1$.

Вычислим по теореме Пифагора квадрат высоты AH из двух прямоугольных треугольников ABH и ACH и приравняем эти выражения. Получим

$$c^2 - (a - b_1)^2 = b^2 - b_1^2. \tag{15}$$

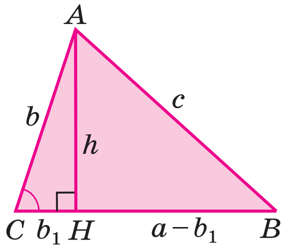


Рис. 175

Выразим из равенства (15) c^2:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab_1. \tag{16}$$

Чтобы из равенства (16) получить равенство (14), достаточно заметить, что $b_1 = b\cos C$ (из прямоугольного треугольника ACH). Для острого угла C теорема доказана.

3) Угол C — тупой. Снова проведём высоту AH. Теперь её основание H лежит на продолжении стороны BC за точку C (рис. 176). Поэтому отрезок BH равен сумме отрезков $BC = a$ и $CH = b_1$. Снова вычислим по теореме Пифагора квадрат высоты AH из прямоугольных треугольников ABH и ACH и приравняем эти выражения. Получим

$$c^2 - (a + b_1)^2 = b^2 - b_1^2. \tag{17}$$

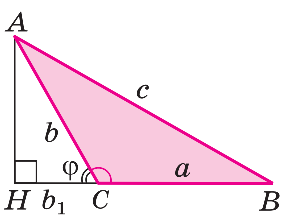


Рис. 176

Выразим теперь c^2 из равенства (17):

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab_1. \tag{18}$$

Отрезок b_1 — катет прямоугольного треугольника ACH, прилежащий к острому углу φ, который будет смежным с углом C треугольника ABC. Поэтому, во-первых, $b_1 = b\cos\varphi$, а во-вторых, $\cos\varphi = -\cos C$. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$b_1 = -b\cos C. \qquad (19)$$

Подставим равенство (19) в равенство (18) и получим равенство (14) для тупого угла C. Теорема доказана для всех случаев. ■

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит теорема косинусов?
2. Можно ли сказать, что теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов? Почему?
3. Какие задачи на решение треугольников позволяет решать теорема косинусов?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

7.36. Сравнив квадрат большей стороны треугольника с суммой квадратов двух других его сторон, можно установить вид треугольника (по его углам). Как это сделать?

7.37. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. Доказав это, получите формулу для вычисления длины медианы треугольника по трём его сторонам.

Работаем с формулой

7.38. Выразите из равенства (14) и аналогичных равенств для других сторон треугольника косинусы углов треугольника.

Планируем

7.39. Как вычислить диагонали ромба, если известны его острый угол и сторона?

7.40. Как вычислить диагональ равнобокой трапеции, если известны её основание, боковая сторона и угол между ними?

7.41. Известны две стороны треугольника и угол, лежащий против одной из них. Как решить такой треугольник?

Вычисляем

7.42. Определите вид треугольников, имеющих такие стороны: а) 5, 6, 7; б) 5, 6, 8; в) 6, 6, 7; г) 6, 6, 9; д) 9, 40, 41.

7.43. Найдите углы треугольников, рассмотренных в задаче 7.42.

7.44. Решите треугольники, у которых известны две стороны и угол между ними в следующих случаях: а) 2, 3, 60°; б) 2, 3, 120°; в) 2, 3, 50°; г) 2, 3, 110°; д) 3, 4, 45°; е) 3, 4, 135°.

Доказываем

7.45. а) Докажите, что в двух треугольниках, имеющих пару соответственно равных сторон, третья сторона больше там, где больше угол между соответственно равными сторонами. б) Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

7.46. Докажите, что бóльшая медиана треугольника проводится к меньшей его стороне. Проверьте обратное.

7.47. Докажите, что в параллелограмме против большего угла лежит бóльшая диагональ. Докажите обратное утверждение.

Исследуем

7.48. Сторона BC равностороннего треугольника ABC разделена на три равные части. Какая из них видна из точки A под бóльшим углом?

7.49. Все стороны треугольника умножили на одно и то же положительное число. Будут ли полученные отрезки сторонами некоторого треугольника? Если да, то будут ли у него такие же углы?

Применяем геометрию

7.50. Кусок проволоки длиной 30 см надо согнуть так, чтобы расстояние между её концами стало 16 см, а угол между частями составил 60°. В каком месте надо согнуть проволоку?

7.6. Средние линии треугольника и трапеции

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется **средней линией треугольника**. У треугольника три средние линии (рис. 177). Теорема косинусов позволяет чисто аналитически доказать важные свойства средней линии треугольника.

Теорема 10 (*о средней линии треугольника*). **Средняя линия треугольника параллельна стороне треугольника и равна её половине.**

Дано: $\triangle ABC$, точка K — середина стороны AC, точка M — середина стороны BC (рис. 178).

Доказать: $KM \parallel AB$ и $KM = \frac{1}{2}AB$.

Доказательство. Стороны треугольника ABC, как обычно, обозначаем a, b, c. Найдём по теореме косинусов квадрат стороны KM из треугольника CKM. Имеем

$$KM^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\frac{ab}{4}\cos C =$$

$$= \frac{1}{4}(a^2 + b^2 - 2ab\cos C) = \frac{1}{4}c^2.$$

Следовательно,

$$KM = \frac{c}{2}. \qquad (20)$$

Второе утверждение теоремы мы доказали. Докажем теперь первое утверждение, что KM и AB параллельны. Обозначим через φ угол K в треугольнике CKM и вычислим его косинус. Имеем

$$\cos\varphi = \left(\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) : \left(2\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}\right) =$$

$$= (b^2 + c^2 - a^2) : (2bc) = \cos A.$$

Поэтому $\varphi = \angle A$. Поскольку углы φ и A — соответственные углы при прямых KM и AB и секущей AC, то из равенства этих углов следует параллельность прямых KM и AB. ■

Из свойств средней линии треугольника легко можно получить аналогичные свойства средней линии трапеции. **Средней линией трапеции** называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции (рис. 179).

Пусть точка K — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$, а точка M — середина её боковой стороны CD. Проведём луч BM и обозначим через P точку пересечения его с прямой AD (рис. 180). Треугольники BCM и PDM равны (по сторонам CM и DM и прилегающим к ним углам). Поэтому $BM = MP$. Следовательно, отрезок KM — средняя линия треугольника ABP. Поэто-

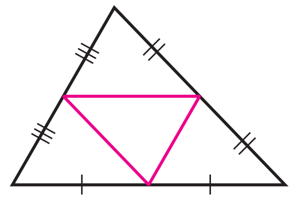


Рис. 177

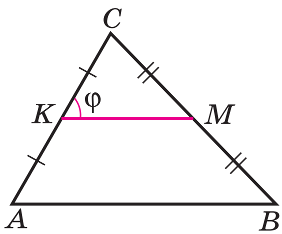


Рис. 178

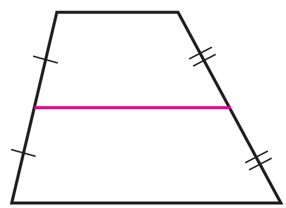


Рис. 179

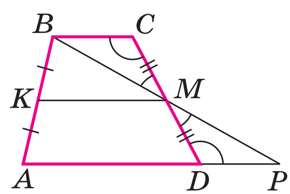


Рис. 180

му KM параллелен AP и KM равен половине AP. Но отрезок AP равен сумме оснований трапеции $ABCD$ (поскольку $BC = DP$). Таким образом, мы доказали следующее предложение: **средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.**

Понятие средней линии позволяет кратко формулировать некоторые уже известные вам теоремы. Например, *площадь трапеции равна произведению её средней линии и высоты.*

А для треугольника аналогичное предложение сформулируйте самостоятельно.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие свойства средней линии треугольника вы знаете?
2. Какие свойства средней линии трапеции вам известны?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

7.51. а) Докажите, что хорда треугольника, идущая из середины его стороны и параллельная другой его стороне, является средней линией треугольника.

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для трапеции.

Хордой многоугольника будем называть отрезок, соединяющий любые две точки двух сторон многоугольника.

Смотрим

7.52. Нарисуйте треугольник. Проведите все его средние линии. Сколько равных друг другу треугольников получилось? Какую часть от площади исходного треугольника составляет площадь каждого из них? А сколько параллелограммов на этом рисунке?

7.53. Нарисуйте тетраэдр. Проведите все средние линии граней тетраэдра и «отрежьте» ими от исходного тетраэдра четыре получившихся новых тетраэдра. Каковы отношения площадей поверхностей исходного тетраэдра и новых тетраэдров? Нарисуйте многогранник, который получится после отсечения от тетраэдра четырёх новых тетраэдров. Выразите площадь его поверхности через площадь поверхности исходного тетраэдра.

Представляем

7.54. У какого треугольника могут быть две взаимно перпендикулярные средние линии?

7.55. Представьте себе треугольник, в котором проведены все средние линии. Какая из средних линий самая большая? самая маленькая?

7.56. Что больше: средняя линия равностороннего треугольника или его высота?

7.57. Может ли средняя линия трапеции быть: а) перпендикулярна стороне трапеции; б) равняться стороне трапеции; в) больше стороны трапеции?

7.58. Представьте себе, что от правильной четырёхугольной пирамиды средними линиями её боковых граней, соединяющих середины её боковых рёбер, отрезали меньшую пирамиду. Каковы отношения площадей поверхностей исходной и меньшей пирамид?

Работаем с формулой

7.59. Запишите формулу для средней линии трапеции. а) Пусть одно из оснований стало увеличиваться. Как изменяется средняя линия? б) Как изменится средняя линия, если оба основания уменьшились вдвое? в) Докажите, что средняя линия m меньше большего основания b трапеции, но больше меньшего её основания a, причём соответствующие разности этих отрезков равны: $m - a = b - m$.

Планируем

7.60. Как вычислить длину средней линии равнобокой трапеции, если известны: а) периметр и боковая сторона; б) части, на которые делит большее основание высота, проведённая из вершины меньшего основания?

Вычисляем

7.61. В треугольнике провели три средние линии. а) Чему равен периметр треугольника, ограниченного средними линиями, если периметр исходного треугольника равен 1? б) Чему равен периметр исходного треугольника, если он больше периметра треугольника, ограниченного средними линиями, на 1?

7.62. Вычислите периметр равнобокой трапеции, в которой: а) боковая сторона равна 2 и средняя линия равна 1; б) средняя линия равна 1 и из середины боковой стороны другая её боковая сторона видна под прямым углом.

7.63. Средняя линия равнобокой трапеции равна 5, а её диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите высоту трапеции.

7.64. Боковую сторону трапеции разделили на три равные части. Через каждую точку деления провели хорду трапеции, параллельную её основаниям. Пусть основания трапеции равны a и b. Чему равны длины построенных хорд?

Доказываем

7.65. Докажите, что каждая точка средней линии трапеции равноудалена от прямых, содержащих её основания.

7.66. Докажите, что средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне BC, делит пополам любую хорду треугольника, идущую из вершины A.

7.67. Докажите, что медиана треугольника делит пополам ту среднюю линию, которую она пересекает.

7.68. Докажите, что четырёхугольник, стороны которого соединяют середины соседних сторон произвольного четырёхугольника $ABCD$, является параллелограммом. Почему это верно и для замкнутой пространственной ломаной $ABCD$?

7.69. Докажите, что средняя линия трапеции и хорда, соединяющая середины оснований трапеции, точкой их пересечения делятся пополам.

Исследуем

7.70. Можно ли восстановить треугольник, если от него остались: а) одна средняя линия; б) две средние линии?

7.71. Можно ли восстановить трапецию по оставшейся средней линии и: а) одному из оснований; б) диагонали; в) хорде, соединяющей середины оснований?

7.72. В трапеции $ABCD$ провели среднюю линию KM и диагональ AC. а) Объясните, почему часть средней линии трапеции в каждом из треугольников ABC и ACD является средней линией этих треугольников. б) Пусть известны большее основание трапеции и одна из средних линий треугольников ABC и ACD. Можно ли найти другое основание трапеции?

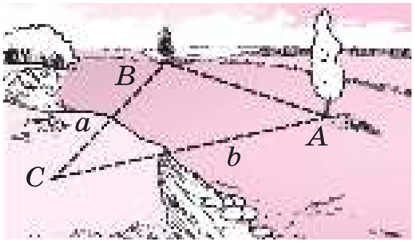


Рис. 181

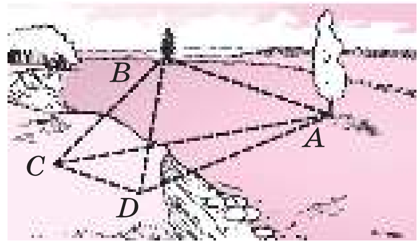


Рис. 182

7.7. Применения косинуса в практике

Рассмотрим две задачи. Пусть имеется прибор, измеряющий углы.

Задача 1. Найти расстояние между двумя недоступными предметами при наблюдении из данной точки, располагая дальномером.

Решение. Пусть предметы расположены в точках A и B, а мы находимся в точке C (рис. 181). Измеряя расстояния дальномером, находим $CA = b$, $CB = a$. Измеряем угол C между CA и CB. Тогда расстояние $AB = c$ можно найти по теореме косинусов.

Задача 2. Найти расстояние между двумя недоступными предметами, когда нет дальномера.

Решение. Пусть предметы расположены в точках A и B и видны из точек C и D (рис. 182). Измеряя расстояние CD и углы ACD и ADC, находим расстояние AC (по теореме синусов из треугольника ACD). Затем, измеряя углы CDB и DCB и уже зная CD, находим BC (из треугольника BCD по теореме синусов). Измеряем, наконец, угол между CA и CB и находим AB (из треугольника ABC по теореме косинусов).

§ 8. Тригонометрические функции

8.1. Тангенс

Мы уже познакомились с основами тригонометрии: с определениями и свойствами первых двух тригонометрических функций — синуса и косинуса. Кроме них, применяют и другие тригонометрические функции. Они, естественно, возникают при решении даже совсем простых задач как в теории, так и на практике. Например, мы хотим по длине тени найти высоту некоторого предмета, скажем, дерева или вышки (рис. 183, *а*). Угол, под которым виден этот предмет, мы измерить можем. Эта практическая задача в теории звучит так: *найти катет a прямоугольного треугольника по кате-*

ту b *и прилежащему к нему острому углу* A (рис. 183, *б*).

Решение. Пусть c — гипотенуза рассматриваемого треугольника. Тогда его катет

$$a = c\sin A.$$

А гипотенузу c по катету b и углу A находим по формуле

$$c = \frac{b}{\cos A}.$$

Из этих двух формул имеем

$$a = b\frac{\sin A}{\cos A}. \qquad (1)$$

Задача решена.

Отношение синуса и косинуса одного и того же угла появляется и при решении других задач. Поэтому удобно ввести ещё одну тригонометрическую функцию угла, которая равна отношению синуса и косинуса этого угла.

Определение. **Тангенсом угла** называется отношение синуса угла к его косинусу. Эту функцию обозначают символом tg. Итак, тангенс угла A определяется равенством

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}. \qquad (2)$$

Теперь решение рассмотренной задачи вместо равенства (1) может быть записано в таком виде:

$$a = b\operatorname{tg} A. \qquad (3)$$

Таким образом, *тангенс острого угла прямоугольного треугольника равен отношению катета, противолежащего этому углу, к катету, прилежащему к этому углу, т. е.*

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}. \qquad (4)$$

Короче говорят так: *тангенс равен отношению противолежащего катета к прилежащему катету*.

Формула (2) показывает, что *тангенс прямого угла не определён* (поскольку знаменатель в правой части равенства (2) для прямого угла A обращается в нуль).

Как синус и косинус, *тангенс является функцией величины угла*. Поэтому пишем tg43°, tg78°

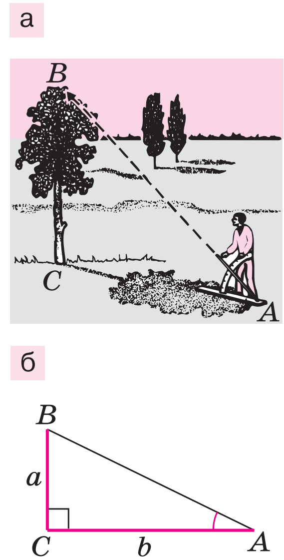


Рис. 183

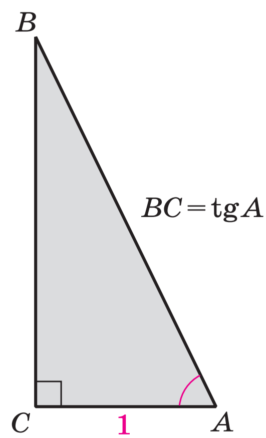


Рис. 184

и т. п. Значения тангенсов конкретных углов находят по таблицам или с помощью калькулятора.

Так как $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ и $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, то

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha. \qquad (5)$$

Это равенство связывает тангенсы смежных углов.

Свойства тангенса для острых углов легко увидеть, если построить прямоугольный треугольник ABC с катетом $AC = 1$. Тогда из равенства (4) следует, что $\operatorname{tg}A = BC = a$ (рис. 184). Из этого рисунка ясно, что *при увеличении угла от 0° до 90° тангенс возрастает от нуля до бесконечности*. Поэтому *для острых углов тангенс определяет угол*.

График тангенса приведён на рисунке 185.

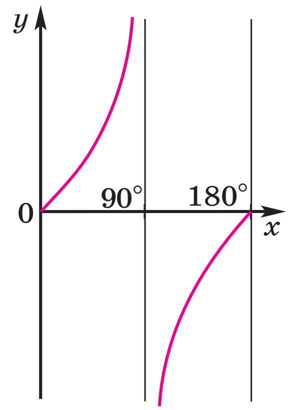


Рис. 185

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое тангенс угла?
2. Чему равен тангенс острого угла прямоугольного треугольника?
3. Какие свойства тангенса вам известны?
4. Какие практические задачи решают с помощью тангенса?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

8.1. Докажите, что тангенс острого угла больше синуса этого угла.

Рассуждаем

8.2. Верны ли такие утверждения: а) если углы не равны, то и их тангенсы не равны; б) если тангенсы углов не равны, то и сами углы не равны?

8.3. Расположите в порядке возрастания тангенсы углов: а) 30°, 50°, 40°; б) 70°, 80°, 100°; в) 60°, 110°, 120°; г) 130°, 140°, 160°.

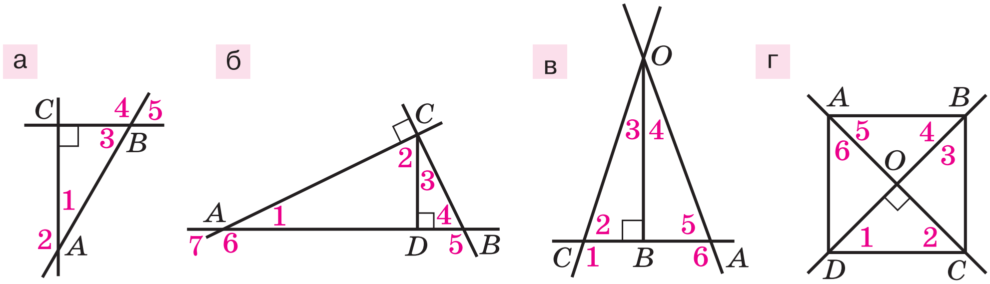


Рис. 186

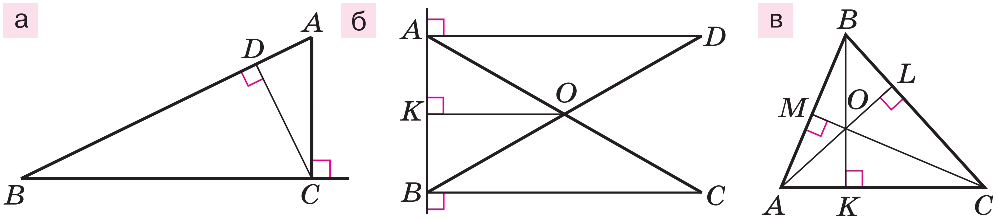


Рис. 187

Смотрим

8.4. Отношениям каких отрезков (возможно со знаком «плюс» или со знаком «минус») равны тангенсы углов, обозначенных цифрами на рисунке 186?

8.5. Выразите с помощью тангенсов углов катеты прямоугольных треугольников, изображённых на рисунке 187.

Планируем

8.6. Как найти высоту равнобедренного треугольника, зная его основание и угол при вершине?

8.7. Как вычислить сторону AC треугольника ABC, если известны высота BD и: а) углы, которые она образует со сторонами треугольника; б) углы треугольника?

8.8. Известны стороны прямоугольника. Как вычислить: а) угол между его диагональю и стороной; б) угол между его диагоналями?

8.9. Как вычислить сторону прямоугольника, если известны другая его сторона и: а) угол между ней и диагональю прямоугольника; б) угол между диагоналями прямоугольника?

8.10. Как вычислить диагональ ромба, если известна другая его диагональ и угол ромба?

8.11. Как, зная сторону правильного n-угольника, найти его апофему? А как по апофеме правильного n-угольника найти его сторону и его периметр?

Вычисляем

8.12. Найдите тангенсы углов: 0°, 30°, 45°, 60°, 120°, 135°, 150°, 180°.

8.13. Решите прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, если: а) $a = 3{,}2$, $b = 4{,}6$; б) $a = 0{,}12$, $\angle A = 24°$; в) $a = 57$, $\angle B = 66°$; г) $b = 7{,}1$, $\angle B = 33°$; д) $b = 0{,}63$, $\angle A = 10°$.

8.14. Пусть PA — перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника ABC, катеты которого AC и BC равны соответственно 2 и 3. Длина $PA = 1$. Вычислите тангенс наибольшего из острых углов граней тетраэдра $PABC$.

Выводим формулу

8.15. Выразите высоту равнобедренного треугольника через его основание a и угол A при вершине.

Доказываем

8.16. Докажите, что произведение тангенсов острых углов прямоугольного треугольника равно единице.

8.17. Используя тангенс, докажите, что квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равен произведению проекций катетов на гипотенузу.

Исследуем

8.18. Пусть AB — перпендикуляр к плоскости, а p — прямая на плоскости. Из какой точки прямой p этот перпендикуляр будет виден лучше всего?

Строим

8.19. Постройте угол, тангенс которого равен: а) 0,2; б) 1,5; в) −2; г) −0,4; д) 5.

Применяем геометрию

8.20. Высота столба равна его солнечной тени. Под каким углом падают солнечные лучи?

8.21. Как вычислить: а) угол падения солнечных лучей; б) угол подъёма лестницы; в) угол подъёма эскалатора метро; г) среднюю крутизну склона по карте; д) высоту башни, не подходя к ней?

8.2. Котангенс

Изменим геометрическую задачу, с решения которой мы начали п. 8.1. Пусть теперь требуется найти катет $AC = b$ прямоугольного треугольника ABC, зная его катет $BC = a$ и угол A. Тогда из равенства (1) получим

$$b = a\frac{\cos A}{\sin A}. \qquad (6)$$

Отношение косинуса угла к синусу того же угла рассматривают как ещё одну тригонометрическую функцию — котангенс.

Определение. **Котангенсом угла** называется отношение косинуса угла к его синусу.

Котангенс обозначается символом ctg, так что по определению

$$\mathrm{ctg}A = \frac{\cos A}{\sin A}. \qquad (7)$$

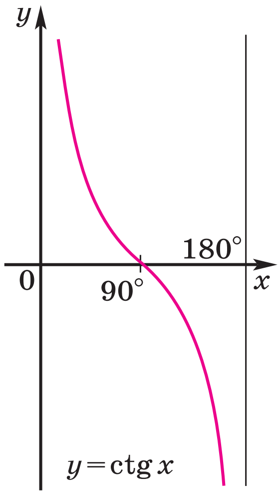


Рис. 188

В прямоугольном треугольнике котангенс острого угла равен отношению прилежащего катета к противолежащему.

Котангенс не существует тогда, когда синус обращается в нуль, т. е. для 0° и 180°. Котангенс, как и остальные тригонометрические функции, зависит лишь от величины угла.

Для тех углов, где тангенс и котангенс отличны от нуля, они связаны простым соотношением

$$\mathrm{ctg}A = \frac{1}{\mathrm{tg}A}. \qquad (8)$$

При возрастании угла от 0° до 180° (сами эти значения не рассматриваются) котангенс убывает от $+\infty$ до $-\infty$ (объясните почему). График котангенса приведён на рисунке 188.

Справка словесника. Мы познакомились с четырьмя тригонометрическими функциями — синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом. Приставка *ко* (*co* — первые две буквы латинского слова complimentus — дополнительный) в названиях функций означает, что эта функция связана с соответствующей ей функцией, в названии которой нет такой приставки, простой зависимостью: для *дополнительных* острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC выполняются равенства

$$\cos A = \sin B,\ \mathrm{ctg}A = \mathrm{tg}B. \qquad (9)$$

Первое из этих равенств нами доказано в п. 7.3, а второе следует из первого и определений тангенса и котангенса.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое котангенс угла?
2. Чему равен котангенс острого угла прямоугольного треугольника?
3. Какие свойства котангенса вам известны?

ЗАДАЧИ

Смотрим

8.22. Отношениям каких отрезков равны котангенсы углов, обозначенных цифрами на рисунке 186?

8.23. Выразите через котангенсы углов катеты прямоугольных треугольников, изображённых на рисунке 187.

Планируем

8.24. Известны высота BH треугольника ABC и его углы A и C. Как найти его сторону AC? Рассмотрите различные случаи.

Вычисляем

8.25. Найдите котангенсы углов: 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°.

Выводим формулу

8.26. В прямоугольном треугольнике ABC катет $BC = 1$. Выразите катет AC и гипотенузу AB через различные тригонометрические функции углов A и B.

8.27. Выразите основание равнобедренного треугольника через его высоту, опущенную на основание, и угол при основании.

Строим

8.28. Постройте угол, котангенс которого равен: а) 2; б) −1; в) 0,2.

8.3. Из истории тригонометрии

Необходимость в решении треугольников возникла при решении разнообразных практических задач, прежде всего в связи с потребностями астрономии, географии, навигации. Поэтому элементы триго-

Птолемей

Региомонтан

Л. Эйлер

Бируни

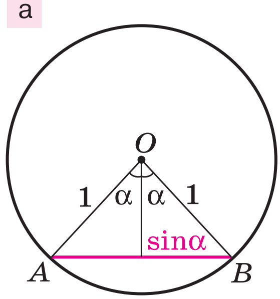
нометрии появились уже в Древнем Вавилоне, где астрономия получила значительное развитие. В знаменитом труде древнегреческого учёного Птолемея «Альмагест» (II в. н. э.), где изложена античная система мира, содержатся не только элементы планиметрии на плоскости, но и элементы сферической тригонометрии, позволявшие решать и сферические треугольники.

В Древней Греции вместо синуса угла рассматривали длину хорды, соответствующей удвоенному углу между радиусами единичной окружности (рис. 189). Это, по существу, то же самое, так как синус равен половине такой хорды. Первые тригонометрические таблицы хорд были составлены Гиппархом во II в. н. э.

Тангенс появился в трудах арабских учёных в IX–X вв. В частности, его использовали при решении задачи по определению длины тени, необходимой для изготовления солнечных часов (рис. 190, *а*).

Как отдельный раздел математики тригонометрия выделилась в трудах персидского учёного Насирэддина Туси (1201—1274). В Европе первое изложение тригонометрии было дано в XV в. немецким учёным Иоганном Мюллером (1436—1476), известным по его псевдониму — Региомонтан. Современную форму изложения и современную символику тригонометрия получила в работах крупнейшего

а



б

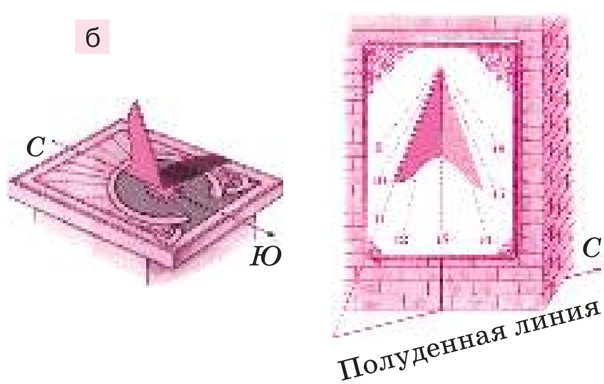


Рис. 189

математика XVIII в. — Леонарда Эйлера (1707—1783). Швейцарец по происхождению, Эйлер в 1726—1741 и 1766—1783 гг. работал в Петербурге.

Одна из двух основных теорем тригонометрии — теорема косинусов (обобщённая теорема Пифагора) имеется в «Началах» Евклида. Но формулируется она там по-другому, без косинуса. Теорема синусов была получена среднеазиатским учёным Бируни в XI в.

Мы познакомили вас с четырьмя из шести тригонометрических функций — синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом. Иногда ещё рассматривают такие функции: **секанс** — $\sec A = \frac{1}{\cos A}$ и **косеканс** — $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$.

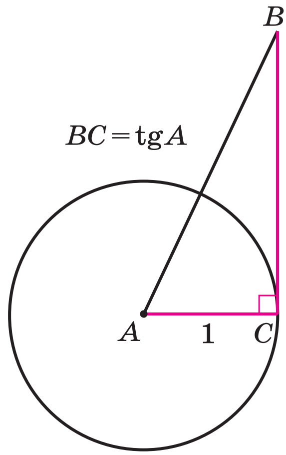


Рис. 190

Справка словесника. Происхождение термина *синус* весьма интересно. Индусы, которые первыми его рассмотрели, употребляли термин *ардхаджива* (*ардха* — половина, *джива* — тетива лука). Слово получилось длинным, и его сократили до слова *джива*. Затем арабы почему-то переделали его в слово *джиба*, которое в арабском языке вообще не имеет смысла. Поскольку произносить бессмысленные слова никому не хотелось, то слово *джиба* переделали в слово *джайб*, одно из значений которого в арабском языке — *выпуклость*. Когда в XII в. это слово с арабского перевели на латынь, то появилось слово *синус*, что по-латыни значит *изгиб*, *выпуклость*. Есть и другие версии происхождения термина *синус*.

Латинское слово tangens означает *касательная*. Можно предположить, что это связано с тем, что тангенс угла A на рисунке 190 равен касательному отрезку BC к окружности единичного радиуса. Латинское слово sekans означает *секущая* (от seko — рассекаю).

§ 9. Подобные треугольники

9.1. Определение подобных треугольников

Вообще о *подобных фигурах* можно сказать, что это фигуры, имеющие одинаковую форму, но различные размеры. Например, подобны две фотографии, отпечатанные с одного негатива, но с разными увеличениями (рис. 191), или архитектурное сооружение и его макет (рис. 192), или животное и его игрушечная фигурка (рис. 193). Подобны любые два круга и любые два правильных многоугольника с одинаковым числом сторон (рис. 194).

Рис. 191

Рис. 192

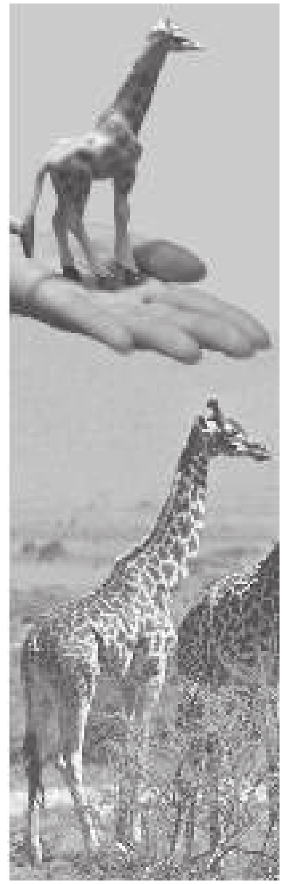


Рис. 193

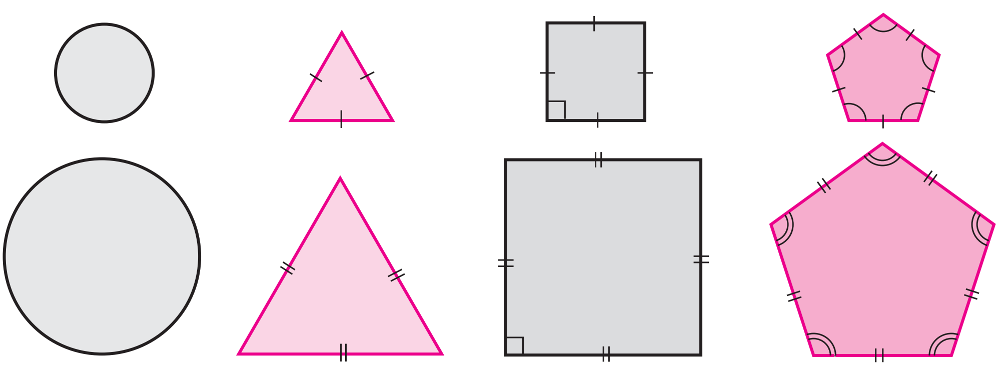
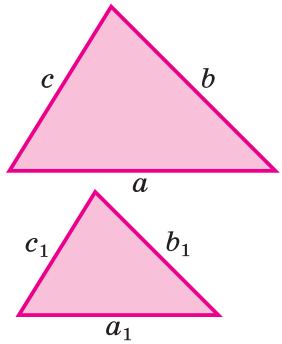


Рис. 194

Из этих примеров можно увидеть, что соответствующие линейные размеры одной фигуры, подобной некоторой другой фигуре, в одно и то же число раз меньше или больше линейных размеров другой фигуры. Так, на коробках игрушечных моделей самолётов указано, во сколько раз их детали меньше соответствующих деталей настоящих самолётов. Поэтому все размеры одной из двух подобных фигур получают, умножая на некоторое число соответствующие размеры другой из них.



$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}$$

Рис. 195

В этом параграфе мы рассмотрим простейшие из подобных многоугольников — подобные треугольники. Подобие произвольных фигур изучается в курсе 9 класса.

Определение. Два треугольника называются **подобными**, если стороны одного из них получаются из сторон другого умножением на некоторый множитель, т. е. стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника.

Подробнее: два треугольника подобны, если можно так сопоставить их стороны, например обозначив стороны одного треугольника через a, b, c, а соответствующие стороны другого треугольника через a_1, b_1, c_1 (рис. 195), что будем иметь равенства отношений соответствующих сторон, т. е. равенства

$$\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}. \qquad (1)$$

Если эти отношения обозначить через k, то из равенств (1) получаем, что

$$a_1=ka, \quad b_1=kb, \quad c_1=kc. \qquad (2)$$

Ясно, что верно и обратное утверждение: из равенств (2) следуют равенства (1). Итак, равенства (1) и (2) равносильны. Положительное число k называется **коэффициентом подобия**.

Из подобия двух треугольников вытекают как равенства (1), так и равенства (2). Обратно: два треугольника подобны, если установлено, что их стороны пропорциональны, т. е. выполняются равенства (1) или, что равносильно, равенства (2).

Рассматривая два подобных треугольника, мы считаем выбранными введённые здесь обозначения их сторон, а вершины треугольников, лежащие против этих сторон, обозначаем, как обычно, через A, B, C, A_1, B_1, C_1.

Итак, говорят, что **треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом k, если выполняются равенства (2)**. В этом случае пишут: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

Если треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом k, то треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом $\frac{1}{k}$.

Это утверждение вытекает из равенств (2).

Если $k = 1$, то треугольники равны. Поэтому *равенство треугольников — это частный случай подобия треугольников (с коэффициентом подобия, равным единице).*

Вопросы для самоконтроля

1. Какие фигуры называются подобными?
2. Какие треугольники называются подобными?
3. Что такое коэффициент подобия?
4. Верно ли, что равные треугольники подобны? Равны ли подобные треугольники?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

9.1. Докажите, что прямоугольные треугольники, имеющие соответственно равные острые углы, подобны.

9.2. Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

9.3. Докажите, что подобны равнобедренные треугольники, у которых равны углы при: а) вершинах; б) основаниях.

Рассуждаем

9.4. Объясните, почему подобны друг другу все равносторонние треугольники.

9.5. Объясните, почему два треугольника, подобные третьему треугольнику с коэффициентами k и k_1, подобны друг другу. Как найти коэффициент их подобия?

Смотрим

9.6. На рисунке 196 укажите подобные треугольники.

9.7. В треугольнике ABC проведены высоты AK и CM. Найдите на полученном рисунке подобные треугольники. Назовите в них соответственные стороны. Запишите их пропорциональность.

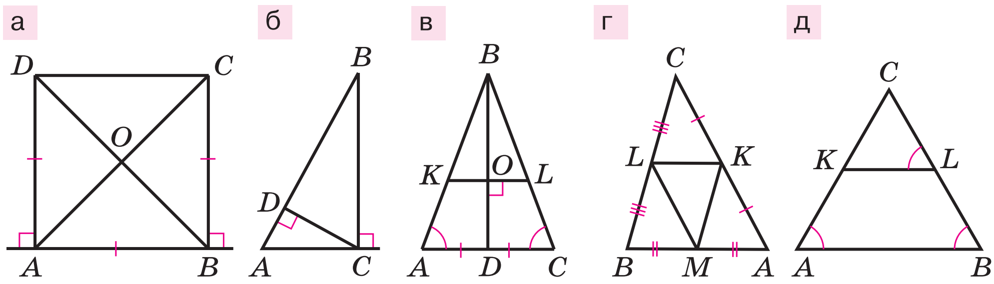


Рис. 196

9.8. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами a и b высота $CH = h$. Докажите ещё раз (см. также задачу 6.7) равенства $a^2 = ca_1$, $b^2 = cb_1$, $h^2 = a_1b_1$, где $c = AB$, $a_1 = BH$, $b_1 = AH$.

Вычисляем

9.9. Стороны треугольника равны 3, 4, 6. Чему равны стороны треугольника, подобного данному, если коэффициент подобия равен: а) 2; б) 0,5? В каждом случае найдите периметр подобного треугольника.

Доказываем

9.10. Докажите, что прямоугольные треугольники, катеты которых пропорциональны, подобны.

9.11. Докажите, что два прямоугольных треугольника, у которых катет и гипотенуза одного пропорциональны катету и гипотенузе другого, подобны.

9.2. Признаки подобия треугольников

Мы докажем два признака подобия треугольников. Доказанные ранее признаки равенства треугольников являются частными случаями признаков подобия треугольников.

Теорема 11 (*первый признак подобия треугольников*). **Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключённые между этими сторонами, равны, то треугольники подобны.**

Доказательство. Допустим, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны углы C и C_1 и пропорциональны заключающие эти углы стороны рассматриваемых треугольников (рис. 197). Тогда, используя введённые обозначения, имеем равенства

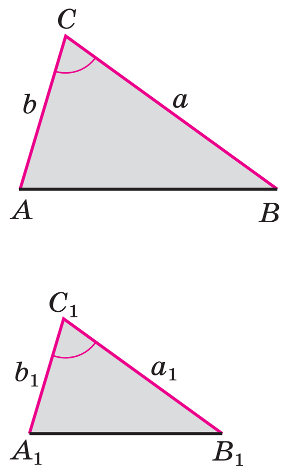
$$a_1 = ka,\ b_1 = kb, \qquad (3)$$

т. е. выполняются два из трёх равенств (2). Докажем, что выполняется и третье равенство, т. е. что $c_1 = kc$.

Найдём, применяя теорему косинусов (см. формулу (14) из п. 7.5), квадрат стороны c_1:

$$c_1^2 = a_1^2 + b_1^2 - 2a_1b_1\cos C_1 =$$
$$= (ka)^2 + (kb)^2 - 2(ka)(kb)\cos C =$$
$$= k^2(a^2 + b^2 - 2ab\cos C) = k^2c^2 = (kc)^2.$$

Следовательно, и $c_1 = kc$, т. е. все три пары сторон рассматриваемых треугольников пропорциональны и эти треугольники подобны. ■



$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$

Рис. 197

Теорема 12 (*второй признак подобия треугольников*). **Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.**

Доказательство. Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых равны два угла: $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$ (рис. 198). Тогда равны и их третьи углы: $\angle C = \angle C_1$. Итак,

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1. \qquad (4)$$

Докажем пропорциональность сторон треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Из равенств (4) следует, что

$$\sin A = \sin A_1,\ \sin B = \sin B_1,\ \sin C = \sin C_1. \qquad (5)$$

Согласно теореме синусов стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих им углов треугольника. Поэтому

$$a = p\sin A,\ b = p\sin B,\ c = p\sin C \qquad (6)$$

и

$$a_1 = q\sin A_1,\ b_1 = q\sin B_1,\ c_1 = q\sin C_1. \qquad (7)$$

Из равенств (5), (6) и (7) следует, что

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = \frac{q}{p},$$

т. е. стороны рассматриваемых треугольников пропорциональны и эти треугольники подобны. ■

Замечание. Отметим, что первый признак подобия треугольников вытекает из теоремы косинусов, а второй — из теоремы синусов.

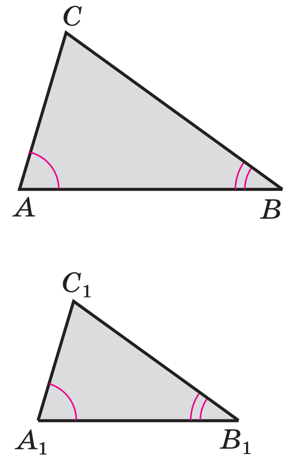


Рис. 198

Вопросы для самоконтроля

1. Какие признаки подобия треугольников вам известны? Сравните их с признаками равенства треугольников.
2. Какие признаки подобия прямоугольных треугольников вам известны?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

9.12. Хорда треугольника, параллельная его стороне, отсекает от него треугольник, подобный данному. Докажите. Проверьте обратное. Какие следствия вы можете получить из доказанного утверждения?

9.13. Пусть две параллельные прямые пересекаются тремя (или более) прямыми, проходящими через одну и ту же точку, не лежащую на данных параллельных прямых. Докажите, что на параллельных прямых получились пропорциональные отрезки.

Рассуждаем

9.14. Два угла одного треугольника равны 70° и 80°, а два угла другого треугольника равны 30° и 80°. Подобны ли эти треугольники?

9.15. Какие признаки подобия прямоугольных и равнобедренных треугольников можно получить как непосредственные следствия двух признаков подобия треугольников? А какие уже известные вам признаки подобия прямоугольных и равнобедренных треугольников не являются следствиями общих признаков подобия треугольников?

Смотрим

9.16. Найдите подобные треугольники на рисунке 199 на с. 144. Напишите пропорциональность их соответствующих сторон.

9.17. Проведите две медианы треугольника и среднюю линию этого треугольника, соединяющую концы медиан. Найдите на полученном рисунке подобные треугольники. Запишите пропорциональность их соответствующих сторон.

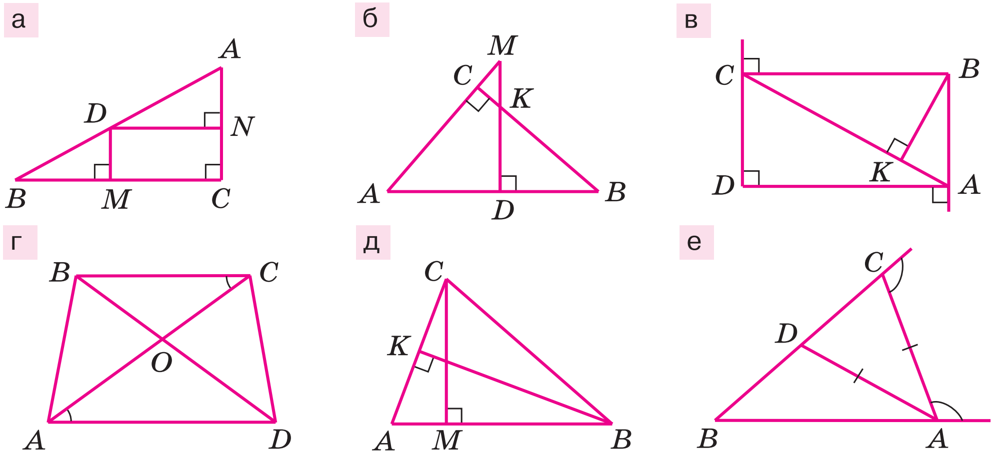


Рис. 199

Планируем

9.18. Нарисуйте треугольник, а затем какой-нибудь отрезок. Как построить треугольник, подобный данному, у которого одна из сторон является нарисованным отрезком?

Вычисляем

9.19. Хорда KM треугольника ABC идёт из точки K стороны AB параллельно его стороне BC. Найдите: а) BK, если $AK = 4$, $AM = 6$, $MC = 10$; б) MC, если $AM = 2$, $AB = 6$, $AK = 4$; в) AC, если $KB = 3$, $MC = 4$, $AB = 10$; г) KM, если $AK = 4$, $BK = 6$, $BC = 20$; д) BC, если $KM = 5$, $AM = 2$, $MC = 6$.

9.20. Хорда PO треугольника ABC идёт от точки P стороны AB до точки O стороны AC. Пусть $\angle AOP = \angle ABC$. Найдите: а) AO, если $AB = 6$, $AP = 4$, $AC = 12$; б) BP, если $AP = 4$, $AO = 3$, $AC = 8$; в) PO, если $AB = 12$, $BC = 8$, $AO = 6$.

Разбираемся в решении

9.21. Биссектриса BK равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) отсекает от треугольника ABC равнобедренный треугольник BCK (рис. 200). Найдите углы треугольников ABC и BCK. Найдите их стороны, считая, что $BC = a$. Постройте циркулем и линейкой эти треугольники по отрезку $BC = a$.

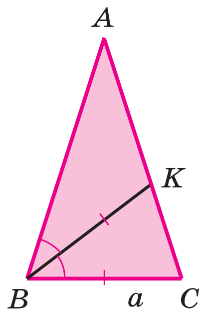


Рис. 200

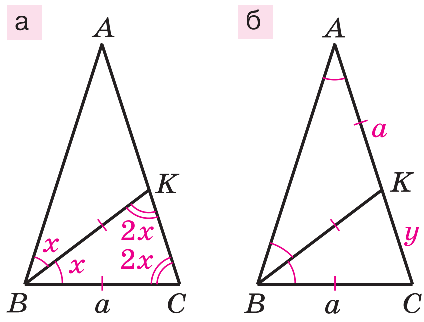


Рис. 201

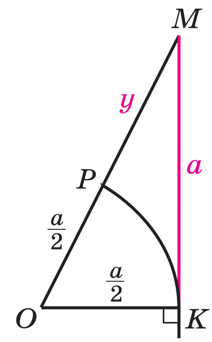


Рис. 202

Решение. Сначала найдём углы треугольников ABC и BCK. Если угол при вершине B равнобедренного треугольника BCK обозначить через x (рис. 201, *а*), то углы при его основании равны $2x$. Следовательно,

$$2x + 2x + x = 180°,$$

а потому $x = 36°$. Итак, углы треугольника BCK равны 36°, 72° и 72°. Такие же углы имеет и треугольник ABC, а потому треугольники ABC и BCK подобны. Вычислим их стороны.

Так как $BC = BK$, то $BK = a$. Треугольник ABK — равнобедренный, так как его углы равны 36°, 36° и 108°. Поэтому $BK = AK$ и $AK = a$. Пусть $KC = y$ (рис. 201, *б*). Тогда из подобия треугольников ABC и BCK имеем

$$(y + a) : a = a : y.$$

Это равенство приводит к такому квадратному уравнению:

$$y^2 + ay - a^2 = 0.$$

Нас интересует лишь его положительное решение (почему?). Оно выражается формулой

$$y = -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

Как строится циркулем и линейкой по отрезку a отрезок y, показано на рисунке 202. Теперь мы знаем все стороны треугольников ABC и BCK, если задан отрезок a. Об отношении отрезков a и y мы ещё будем говорить в следующем параграфе.

Доказываем

9.22. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники ADO и BCO подобны.

9.23. Через каждую вершину треугольника проведена прямая, параллельная стороне, противоположной этой вершине. Докажите, что эти прямые ограничивают треугольник, подобный данному. Сравните его площадь с площадью данного треугольника.

9.24. В треугольнике проведена медиана к одной из сторон. Докажите, что каждая хорда треугольника, параллельная этой стороне, делится данной медианой пополам. Попробуйте обобщить этот результат.

Исследуем

9.25. Биссектриса рассекает равнобедренный треугольник на два подобных ему треугольника. Какие углы у этих треугольников?

Применяем геометрию

9.26. По преданию, Фалес Милетский измерил высоту пирамиды по длине её тени в тот момент, когда длина тени предмета была равна его высоте. На что опирался Фалес в своих рассуждениях?

9.27. Как проверить, подобны ли два чертёжных треугольника?

9.3. Свойства подобных треугольников

Примеры подобных фигур, рассмотренные ранее, подсказывают нам, что у подобных фигур углы между соответствующими элементами этих фигур равны. Докажем это для подобных треугольников.

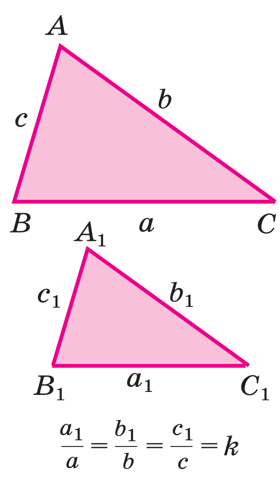


Рис. 203

СВОЙСТВО 1. Соответственные углы подобных треугольников равны.

Доказательство. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом k (рис. 203). Тогда $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, $c_1 = kc$. Вычисляя косинус угла C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ по теореме косинусов, получаем

$$\cos C_1 = a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 : (2a_1b_1) =$$
$$= k^2 (a^2 + b^2 - c^2) : (2k^2ab) =$$
$$= (a^2 + b^2 - c^2) : (2ab) = \cos C.$$

Из равенства косинусов углов C_1 и C следует равенство этих углов. Аналогично доказываются и равенства других соответствующих углов треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. ■

Замечание. Опираясь на это свойство, нетрудно доказать, что и другие соответствующие друг другу углы (например, двугранные) в подобных фигурах равны. Кратко об этом говорят так: *при подобии углы сохраняются.*

Об отношении соответственных друг другу отрезков в подобных треугольниках говорится в следующем свойстве.

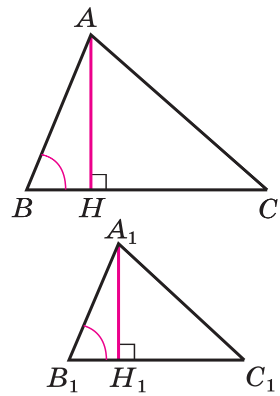


Рис. 204

СВОЙСТВО 2. Соответственные отрезки в подобных треугольниках относятся как соответственные стороны, т. е. их отношение равно коэффициенту подобия.

Говоря о соответственных отрезках, мы имеем в виду соответственные высоты, медианы, биссектрисы и т. п. в подобных треугольниках. Докажем это утверждение для соответственных высот. Для медиан и биссектрис докажите его самостоятельно.

□ Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом k. Проведём в этих треугольниках высоты A_1H_1 и AH (рис. 204). Они будут катетами прямоугольных треугольников $A_1B_1H_1$ и ABH. Поэтому

$$A_1H_1 = A_1B_1 \sin B_1 \text{ и } AH = AB \sin B.$$

Согласно свойству 1 углы B и B_1 равны. Поэтому равны и их синусы. Следовательно,

$$A_1H_1 : AH = A_1B_1 : AB = k. ■$$

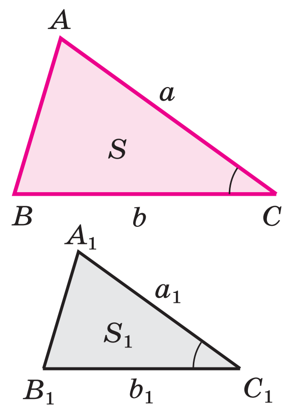


Рис. 205

Выясним теперь, чему равно отношение площадей подобных фигур.

СВОЙСТВО 3. Отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия этих фигур.

□ Докажем это свойство для площадей S_1 и S подобных треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC (рис. 205). Имеем $a_1 = ka$, $b_1 = kb$, $\angle C_1 = \angle C$. Поэтому

$$S_1 = \frac{1}{2}a_1b_1\sin C_1 = \frac{1}{2}kakb\sin C = k^2S, \text{ т. е. } S_1 : S = k^2. ■$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие свойства подобных треугольников вам известны?
2. Какое свойство подобных треугольников совпадает со свойством равных треугольников?

ЗАДАЧИ

Рассуждаем

9.28. Два угла треугольника равны 40° и 50°. Чему равны углы треугольника, подобного данному?

9.29. Каким по виду будет треугольник, подобный данному, если данный треугольник: а) прямоугольный; б) остроугольный; в) тупоугольный; г) равнобедренный?

Смотрим

9.30. Найдите отрезок x на рисунке 206 (когда это возможно).

9.31. Сравните данную площадь S и неизвестную площадь x на рисунке 207.

Вычисляем

9.32. Один конец отрезка лежит на данной прямой, а другой удалён от неё на расстояние d. Чему равно расстояние до прямой: а) от середины этого отрезка; б) от точки отрезка, делящей его в отношении 2 : 3?

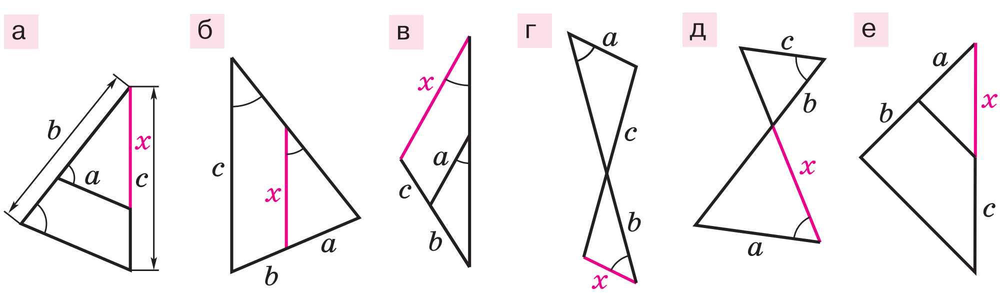


Рис. 206

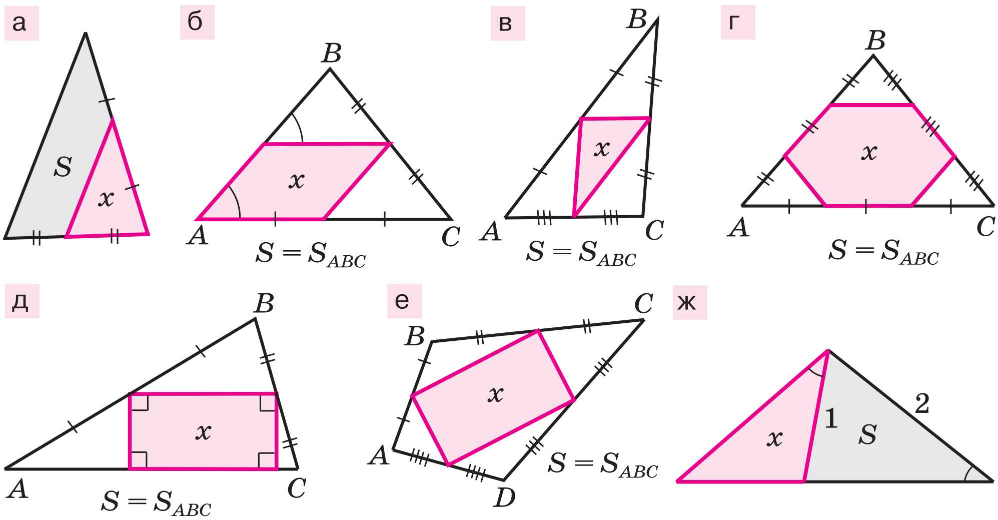


Рис. 207

9.33. Площадь трапеции $ABCD$ равна S. Продолжения её боковых сторон AB и DC за точки B и C пересеклись в точке O. Найдите площади треугольников OBC и OAD, если: а) $AB : BO = 1 : 1$; б) $AB : BO = 1 : 2$; в) $AO : AB = 4 : 1$; г) $BC : AD = 1 : 3$.

9.34. Площадь треугольника ABC равна S. Чему равны площади треугольника AKM и трапеции $KMCB$, на которые разобьёт треугольник ABC хорда KM, идущая от точки K на стороне AB параллельно стороне BC, если: а) $AK : KB = 1 : 2$; б) $AK : AB = 2 : 3$; в) $KM : BC = 1 : 3$? В каком отношении следует разделить точкой K отрезок AB, чтобы треугольник AKM и трапеция $KMCD$ оказались равновеликими?

9.35. Площадь трапеции равна S, а основания её относятся как $1 : 3$. Найдите площади треугольников, на которые разбивают трапецию её диагонали.

Доказываем

9.36. Нарисуйте угол ab с вершиной O. На стороне a отложите равные отрезки: $OA = AB = BC = CD$. На стороне b также отложите равные отрезки: $OK = KL = LM = MN$. Докажите, что прямые AK, BL, CM, DN параллельны друг другу. Как связаны длины отрезков AK, BL, CM, DN?

9.37. В четырёхугольнике $ABCD$ точка O пересечения диагоналей делит эти диагонали на пропорциональные (но не равные друг другу) отрезки: $AO : OC = BO : OD$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция.

9.38. На сторонах угла ab с вершиной O отложены отрезки OA, OB на стороне a и отрезки OC, OD на стороне b. Известно, что $OA \cdot OB = OC \cdot OD$. Докажите, что $\angle OBC = \angle ODA$.

9.39. Внутри острого угла AOB провели луч с началом в точке O. По нему от вершины движется точка X. Докажите, что отношение расстояний от точки X до сторон угла постоянно. Проверьте обратное. Будет ли верно это утверждение для тупого угла?

Исследуем

9.40. Прямая, проведённая через вершину B треугольника ABC, разбила его на два подобных треугольника ABK и BCK. Какие углы в этих треугольниках равны?

9.41. Прямая, проведённая через вершину B треугольника ABC, отсекла от него треугольник ABK, подобный данному. Какие углы в этих треугольниках равны?

Применяем геометрию

9.42. Используя подобие, предложите способ вычисления: а) расстояния до недоступного, но наблюдаемого объекта; б) расстояния между двумя недоступными, но наблюдаемыми объектами.

§ 10. Применения теорем о подобии треугольников

10.1. Подобие треугольников и параллельность. Теорема Фалеса

Напомним, что **хордой многоугольника** мы называем отрезок, соединяющий точки двух сторон многоугольника. Решив задачу 9.12 в п. 9.2, вы доказали, что *хорда, параллельная стороне треугольника, отсекает от него подобный ему треугольник* (рис. 208).

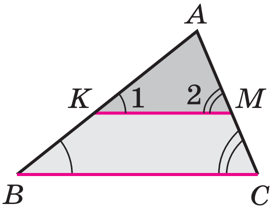


Рис. 208

□ Действительно, если хорда KM параллельна стороне BC треугольника ABC, то $\angle 1 = \angle B$ (как соответственные при параллельных BC и KM и секущей AB) и $\angle 2 = \angle C$ (как соответственные при тех же параллельных и секущей AC). Поэтому треугольник AKM подобен треугольнику ABC (по второму признаку подобия треугольников). ■

Это утверждение часто будет применяться при доказательстве теорем и решении задач. Такие вспомогательные утверждения называют **леммами**. Снова сформулируем лемму, дополнив её ещё одним полезным утверждением.

Лемма **Хорда треугольника, параллельная его стороне, во-первых, отсекает от него подобный ему треугольник и, во-вторых, разбивает две другие стороны треугольника на пропорциональные отрезки.**

Доказательство. Первое утверждение леммы уже доказано. Докажем второе её утверждение, т. е. докажем равенство

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AM}{MC}. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников ABC и AKM следует, что

$$\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AM}.$$

Так как $AB = AK + KB$ и $AC = AM + MC$, то

$$\frac{AK + KB}{AK} = \frac{AM + MC}{AM}. \qquad (2)$$

Поделив почленно числитель в обеих частях равенства (2) на знаменатель, получим

$$1 + \frac{KB}{AK} = 1 + \frac{MC}{AM}.$$

Поэтому $\frac{KB}{AK} = \frac{MC}{AM}$. А это и означает, что выполняется равенство (1). ■

С **Справка словесника.** Из нескольких значений греческого слова *лемма* выделим значение *доход*. Мы увидим сейчас, что доказанная нами лемма даст неплохой «доход» в виде теорем.

Теорема 13 (*о параллельных прямых, пересекающих сторону угла*). **Параллельные прямые, пересекающие сторону угла, отсекают на них пропорциональные отрезки.**

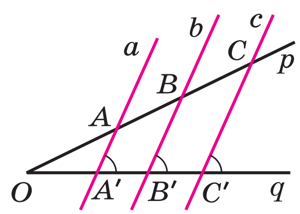


Рис. 209

Доказательство. Пусть стороны угла O — лучи p и q — пересекают параллельные прямые a, b, c соответственно в точках A, A', B, B', C, C' (рис. 209). Требуется доказать, что

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}. \qquad (3)$$

Согласно лемме имеет место следующее равенство:

$$OA : AB = OA' : A'B', \text{ или } \frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'},$$

т. е. выполняется первое из равенств (3). Докажем теперь, что

$$BC : B'C' = OA : OA'. \quad (4)$$

Применим лемму к треугольнику OCC' и его хорде BB'. Получим

$$OB : BC = OB' : B'C'. \quad (5)$$

Поэтому

$$BC : B'C' = OB : OB'. \quad (6)$$

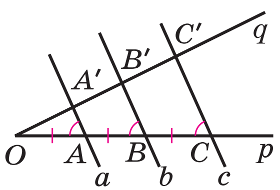
Из подобия треугольников OAA' и OBB' следует, что

$$OB : OB' = OA' : OA'. \quad (7)$$

Из равенств (6) и (7) следует равенство (4). Итак, все три отношения в формуле (3) равны. Равенства (3) доказаны. ■

Частным случаем только что доказанной теоремы является

Теорема Фалеса **Если параллельные прямые пересекают стороны угла и на одной из сторон угла отсекают равные отрезки, то и на другой его стороне они отсекают равные отрезки** (рис. 210).



Если $OA = AB = BC$ *и* $a \parallel b \parallel c$, *то* $OA' = A'B' = B'C'$.

Рис. 210

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит теорема Фалеса?
2. Частным случаем какой теоремы является теорема Фалеса?

ЗАДАЧИ

Дополняем теорию

10.1. Точки K и M лежат соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC, и $AK : KB = AM : MC$. Докажите, что хорда KM параллельна BC.

10.2. Точки K и M лежат соответственно на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, и $AK : KB = DM : MC$. Докажите, что хорда KM параллельна основаниям трапеции $ABCD$.

10.3. Ещё раз докажите, глядя на рисунок 211 и используя теоремы о пропорциональных отрезках, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

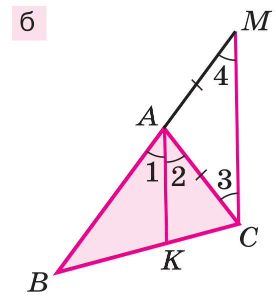


Рис. 211

Смотрим

10.4. Найдите на рисунке 212 подобные треугольники и пропорциональные отрезки.

10.5. Найдите длины неизвестных отрезков x, y и z на рисунке 213.

Вычисляем

10.6. Пусть продолжения боковых сторон AB и DC трапеции $ABCD$ за точки B и C пересекаются в точке P, а хорда KM соединяет точку K стороны AB с точкой M стороны DC и параллельна основаниям трапеции. Найдите:

а) AD и KM, если $\angle A + \angle D = 90°$, $AB = BC = 6$, $CD = 8$, $AK = KB$;
б) BC и CM, если $\angle A + \angle D = 90°$, $AD = 13$, $KP = 8$, $AK = KB = BP$;
в) BP и AD, если $AK = 4$, $KB = 2$, $BC = 4$, $PM = 10$, $PC = 2$;
г) BC, AD, MD, если $PA = 10$, $AK = 5$, $AB = 7$, $KM = 8$, $CM = 6$;
д) PC, BC, AD, если $PB = 2$, $BK = 3$, $AK = 4$, $KM = 5$, $MD = 6$.

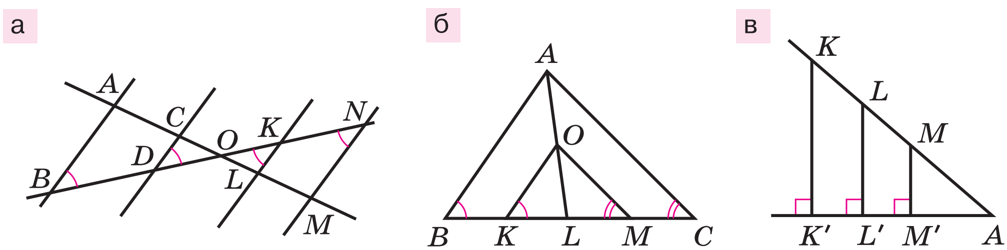


Рис. 212

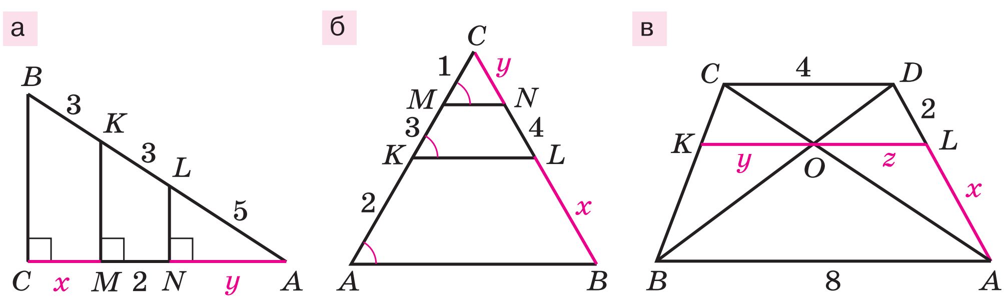


Рис. 213

10.2. Фалес

Фалес

Изучая подобие треугольников, мы уже дважды упомянули имя знаменитого древнегреческого математика и астронома Фалеса Милетского (ок. 625—547 гг. до н. э.). Расскажем о нём подробнее. Фалес — один из семи мудрецов Древней Греции (правда, сейчас широко известны из них лишь математик Фалес и законодатель Солон Афинский). В молодости Фалес побывал в Египте и изучал там разные науки. Затем он возвратился на родину и основал в городе Милете (Малая Азия) знаменитую философскую школу. Фалес познакомил греков с достижениями египетской геометрии и астрономии. По преданию, Фалес смог предсказать солнечное затмение, происшедшее 28 мая 585 г. до н. э. Он дал первые представления об электричестве и магнетизме: открыл свойство натёртого янтаря притягивать предметы и наблюдал притяжение некоторыми видами железной руды отдельных кусков железа.

С именем Фалеса связывают превращение геометрии из чисто прикладной науки в теоретическую. К вопросу «как?», на который давала ответы наука Древнего Египта и Вавилона, добавился вопрос «почему?», который потребовал *доказательств* выдвигаемых утверждений. Кроме той теоремы Фалеса, о которой сказано в п. 10.1, с его именем связывают *доказательство* следующих утверждений: вертикальные углы равны; в равнобедренном треугольнике углы при основании равны; второй признак равенства треугольников (по стороне и двум углам); угол между хордами круга, опирающийся на диаметр круга, — прямой. Новым для вас является лишь утверждение про угол, опирающийся на диаметр (рис. 214, *а*). Докажем его.

□ Рассмотрим треугольник ABC, сторона AB которого является диаметром окружности F, а вершина C лежит на окружности F. Проведём радиус OC окружности F (рис. 214, *б*). Он разобьёт треуголь-

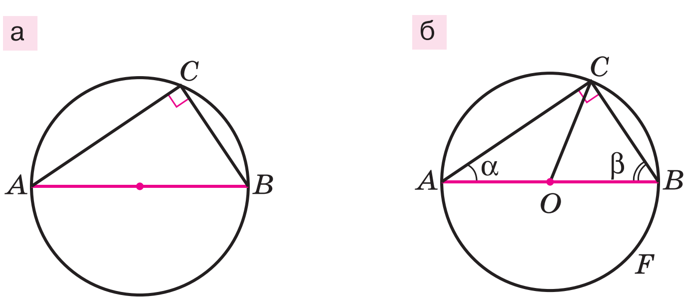


Рис. 214

ник ABC на два равнобедренных треугольника OAC и OBC. Их углы при основаниях AC и BC обозначим через α и β соответственно. Тогда угол C треугольника ABC равен $\alpha + \beta$, а потому сумма всех углов треугольника ABC равна $2\alpha + 2\beta$, т. е. $2\alpha + 2\beta = 180°$. Следовательно, угол C треугольника ABC равен $90°$ — это прямой угол. ■

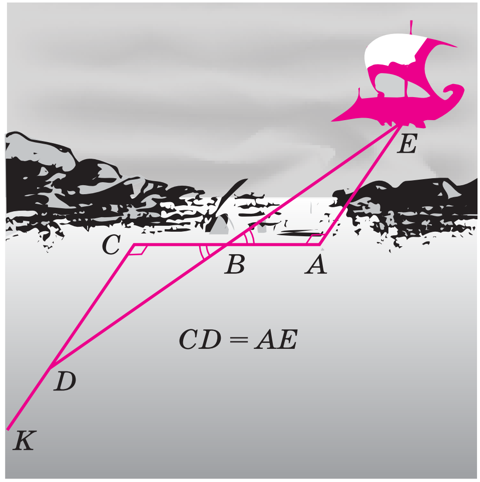


Рис. 215

Свои теоретические знания Фалес использовал для практических приложений. Об одном из них — об определении высоты египетской пирамиды — мы уже говорили. Другим практическим применением было построение дальномера для определения расстояния от корабля до берега (рис. 215). Использование такого дальномера опиралось на то, что треугольник полностью определяется своей стороной и прилежащими к ней углами.

Вопросы для самоконтроля

1. Что вы узнали о Фалесе? Что вам известно из истории о других философах Древней Греции?
2. Как вы думаете, как пользовались дальномером Фалеса?
3. Какую новую для вас теорему вы узнали в этом пункте?
4. Как вы думаете, где лежат в пространстве вершины прямых углов прямоугольных треугольников с общей гипотенузой?

10.3. Применения подобия при решении задач на построение

Теоремы о подобии дают возможность с помощью циркуля и линейки решить несколько важных задач на построение. Начнём с задачи о делении отрезка на равные части.

Задача 1 (*о делении отрезка на равные части*). Разделить циркулем и линейкой данный отрезок AB на n равных частей.

Решение. Решим задачу, например, для $n = 3$. Для любых других n решение точно такое же. Проведём из точки A любой луч p, не лежащий на прямой AB (рис. 216, *а*). От точки A на луче p отложим последовательно три каких-нибудь равных друг другу отрезка AA_1, A_1A_2, A_2A_3 (рис. 216, *б*). Проведём прямую BA_3 и через

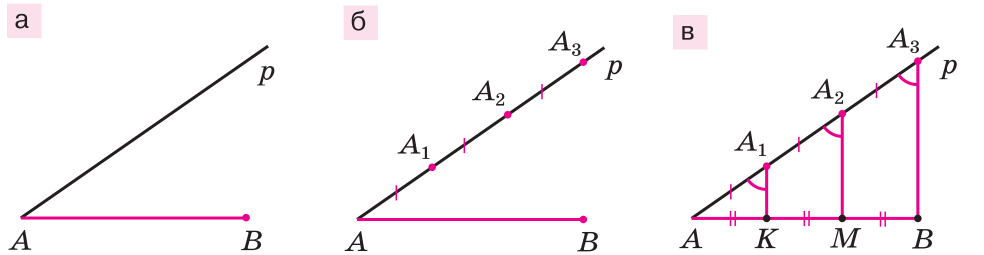


Рис. 216

точки A_1 и A_2 две прямые, параллельные прямой BA_3 (рис. 216, *в*). Их точки пересечения с отрезком AB — точки K и M — и разобьют отрезок AB на три равные части (согласно теореме Фалеса).

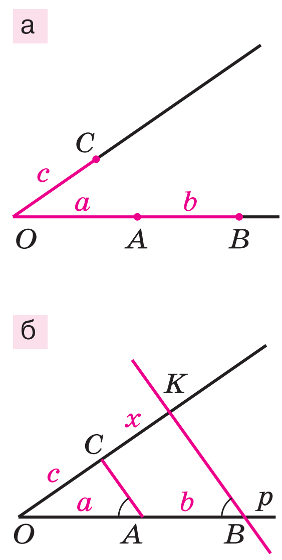


Рис. 217

Задача 2 (*о построении четвёртого пропорционального*). По трём отрезкам a, b, c циркулем и линейкой построить такой отрезок x, что

$$a : b = c : x. \qquad (8)$$

Решение. Построим любой неразвёрнутый угол O. На одной его стороне сначала отложим отрезок $OA = a$, а затем отрезок $AB = b$ (рис. 217, *а*). На другой стороне угла O отложим отрезок $OC = c$ и проведём отрезок AC. Через точку B проведём прямую p, параллельную прямой AC. Прямая p пересечёт луч OC в некоторой точке K (рис. 217, *б*). Отрезок CK и будет искомым отрезком x. Действительно, по лемме из п. 10.1

$$OA : AB = OC : CK,$$

т. е. для отрезка $x = CK$ выполняется равенство (8).

Построение четвёртого пропорционального отрезка всегда происходит, когда задачу на построение решают *методом подобия*. Покажем, в чём состоит этот метод, решив, например, такую задачу:

Задача 3. Построить треугольник ABC по заданным углам B и C и высоте h, опущенной на сторону BC.

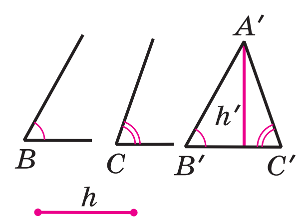
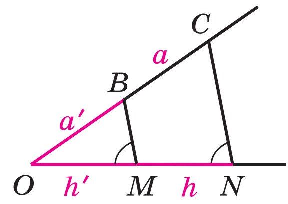


Рис. 218

Решение. Построим любой треугольник $A'B'C'$, в котором $\angle B' = \angle B$ и $\angle C' = \angle C$ (рис. 218). Проведём его высоту h' из вершины A'. Поскольку искомый треугольник ABC подобен построенному треугольнику, то согласно свойству 2 подобных треугольников (см. п. 9.3) $BC : h = B'C' : h'$. Три члена этой пропорции нам известны. Поэтому мы можем построить и неизвестный четвёртый отрезок — отрезок BC (рис. 219). А затем построить треугольник ABC по стороне BC и прилежащим к ней углам B и C.

В решении этой задачи хорошо видна суть метода подобия: 1) сначала строим фигуру, удовлетворяющую всем условиям задачи, кроме одного линейного условия, и подобную искомой фигуре (в задаче 3 это был треугольник с двумя заданными углами); 2) затем находим, строя четвёртый пропорциональный отрезок, такой элемент искомой фигуры, который позволяет легко её построить (в задаче 3 это была сторона BC).



$OB = B'C'$,
$OM = h'$,
$MN = h$

Рис. 219

Построение моделей архитектурных сооружений, автомобилей, самолётов и т. п. и проведение исследований на этих моделях — это тоже метод подобия, его практическое применение.

Вопросы для самоконтроля

1. В чём состоит метод подобия?
2. Какие задачи мы решили методом подобия?

ЗАДАЧИ

Рассуждаем

10.7. Можно ли считать задачу о делении отрезка на равные части частным случаем задачи о построении четвёртого пропорционального отрезка?

Планируем

10.8. Известны две стороны параллелограмма и одна из его высот. Как построить другую высоту параллелограмма, не строя сам параллелограмм?

10.9. Известны две стороны треугольника и высота, опущенная на одну из них. Как построить высоту на другую заданную сторону, не строя сам треугольник?

10.10. Как построить квадрат, равновеликий заданному прямоугольнику?

10.11. Как построить квадрат, площадь которого в 25 раз меньше площади заданного квадрата?

Строим

10.12. Пусть даны единичный отрезок e, а также отрезки a и b. Постройте отрезок: а) ab; б) a^2; в) $\frac{a}{b}$; г) $\frac{a^2}{b}$; д) $\frac{a^2}{b^2}$; е) a^3.

★ 10.4. Построение среднего геометрического

Подобные треугольники появляются и при построении отрезка, который является **средним пропорциональным двух данных отрезков a и b**, т. е. такого отрезка x, что $a : x = x : b$. Среднее пропорциональное двух данных отрезков называют также их **средним геометрическим**.

Строят среднее геометрическое двух данных отрезков a и b так. Сначала строят отрезок AB, являющийся суммой отрезков $AK = a$ и $BK = b$ (рис. 220, *а*). Затем строят полуокружность P с центром в середине отрезка AB — точке O — и радиусом OA (рис. 220, *б*). Через точку K проводят прямую, перпендикулярную прямой AB (рис. 220, *в*). Эта прямая пересечёт полуокружность P в некоторой точке C. Отрезок KC и является средним геометрическим отрезков $AK = a$ и $BK = b$. Докажем это.

□ Треугольник ABC — прямоугольный (хорды CA и CB полуокружности P опираются на её диаметр AB, а потому угол ACB прямой). Прямоугольные треугольники ACK и BCK имеют общие острые углы с прямоугольным треугольником ABC. Поэтому у них равные острые углы. Следовательно, треугольники ACK и BCK подобны, а их катеты пропорциональны. Значит, $AK : KC = KC : BK$. ■★

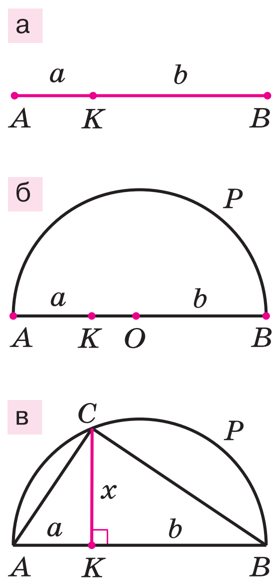


Рис. 220

★ 10.5. Пентаграмма и золотое сечение

Пентаграммой называют пятиконечную звезду, образованную диагоналями правильного пятиугольника (рис. 221). Греческое слово *пентаграмма* имеет два корня: *пента* — пять и *грамма* — черта, линия. В древности пентаграмма считалась символом совершенства. У пифагорейцев она

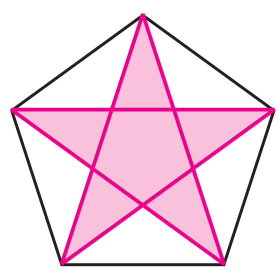


Рис. 221

была их опознавательным знаком. А в Средние века пентаграмме придавали мистический смысл. Пятиконечная звезда, пожалуй, самая распространённая геометрическая фигура на флагах и гербах различных государств. Больше всего пятиконечных звёзд на флаге США — пятьдесят: по числу штатов. Пятиконечные звёзды установлены и на пяти башнях Московского Кремля (рис. 222). Красная пятиконечная звезда была символом Советской армии. Чем же на протяжении многих тысячелетий привлекает людей эта геометрическая фигура? В чём её красота? Оказывается, в том, что она наполнена золотыми пропорциями, или золотыми сечениями отрезков. Это наименование дал Леона́рдо да Винчи (1452—1519) такому делению отрезка a на два отрезка x и $a - x$, при котором *отношение всего отрезка a к его большей части x равно отношению большей части x к меньшей части $a - x$*. В Древней Греции (например, в «Началах» Евклида) о таком делении отрезка говорили как о *делении отрезка в крайнем и среднем отношении*. Алгебра сводит задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении к решению уравнения

$$a : x = x : (a - x). \qquad (9)$$

Это уравнение мы решим чуть позже (и алгебраически, и геометрически), а сейчас вернёмся к изучению пентаграммы и найдём в ней золотые сечения.

Рассмотрим правильный пятиугольник $ABCDE$ (рис. 223, *а*). Его углы равны 108°. Проведём диагонали AC и AD (рис. 223, *б*). Они разобьют пятиугольник на равнобедренный треугольник ACD и два равных друг другу равнобед-

Рис. 222

Леонардо да Винчи

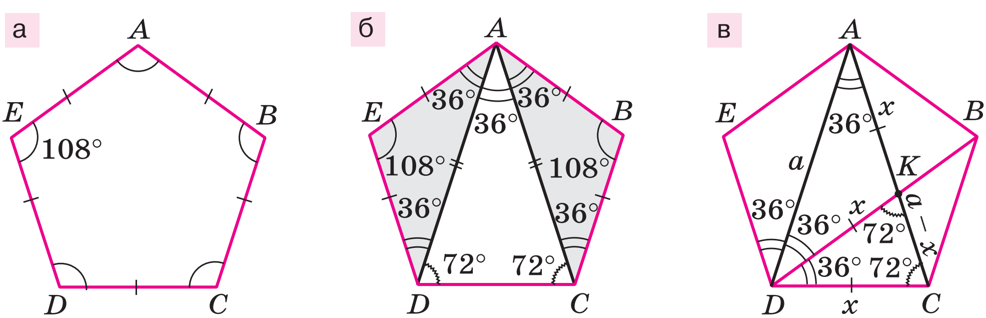


Рис. 223

ренных треугольника ABC и AED с углами при вершинах B и E, равными по $108°$. Поэтому углы при их основаниях равны по $36°$. Значит, треугольник ACD имеет угол $36°$ при вершине A и углы по $72°$ при основании CD. (Вспомните, что такие равнобедренные треугольники мы уже рассматривали, решая задачу 9.21 в п. 9.2.)

Проведём теперь диагональ BD (рис. 223, *в*) и обозначим через K точку её пересечения с диагональю AC. Так как $\angle BDC = 36°$, то отрезок DK — биссектриса треугольника CDA. Поскольку два угла треугольника DKC равны $36°$ и $72°$, то он подобен треугольнику ACD, у которого также углы равны $36°$ и $72°$. Положим $AC = a$ и $CD = x$. Тогда $CD = DK = KA = x$ и $KC = a - x$. Из подобия треугольников ACD и DCK следует, что $AC : CD = CD : CK$, т. е. $a : x = x : (a - x)$. Мы пришли к уравнению (9) и доказали, что *точки пересечения диагоналей правильного пятиугольника делят эти диагонали в среднем и крайнем отношении.*

Приведя уравнение (9) к уравнению $x^2 + ax - a^2 = 0$ и найдя его положительное решение, получим, что

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}, \text{ т. е. } x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1). \qquad (10)$$

Следовательно, числа $x : a$ и $a : x$ таковы:

$$\varphi = x : a = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \text{ и } \Phi = \frac{1}{\varphi} = a : x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1). \qquad (11)$$ ■

Буквой Φ обозначают золотую пропорцию в честь знаменитого греческого скульптора Фидия — одного из строителей Парфенона. Золотое сечение Φ, а также его степени присутствуют (с некоторой степенью точности) в соотношении размеров самых знаменитых архитектурных строений. Значение $\Phi \approx 1{,}618$.

Если отрезок a задан, то как построить циркулем и линейкой отрезок x, показано на рисунке 224. Следовательно, умея делить отрезок в среднем и крайнем отношении, мы умеем строить равнобедренные треугольники с углами $36°$ (при вершине или при основании). Поэтому мы умеем строить циркулем и линейкой и правильные пятиугольники, а значит, и пентаграммы из их диагоналей.

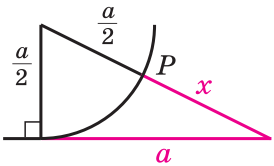


Рис. 224

И. Кеплер

Знаменитый математик и астроном Иоганн Кеплер (1571—1630) говорил: «Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них — это теорема Пифагора, а другое — деление отрезка в среднем и крайнем отношении... Первое можно сравнить с мерой золота, второе же больше напоминает драгоценный камень». О роли теоремы Пифагора вам уже хорошо известно: на её «золото» мы уже смогли приобрести много геометрических результатов. Золотое сечение нам встретилось впервые (а могли бы пройти и мимо него). Ведь драгоценный камень — это украшение, предмет роскоши, без него можно было бы и обойтись. Но золотое сечение постоянно появляется в искусстве: в архитектуре, в живописи, в музыке. О нём написаны целые книги. О золотом сечении рассказано и в книгах А. В. Волошинова «Математика и искусство» и «Пифагор».

ЗАДАЧИ

Вычисляем

10.13. На рисунке 225 изображены правильный пятиугольник $ABCDF$ и пентаграмма из его диагоналей. Считая, что $AB = 1$, выразите через Φ и φ (см. формулу (11)) длины различных отрезков, изображённых на рисунке 225.

10.14. От рисунка 225 перейдите к рисунку 226 и вычислите длины отрезков, изображённых на рисунке 226. Какие закономерности для степеней числа φ вы заметили?

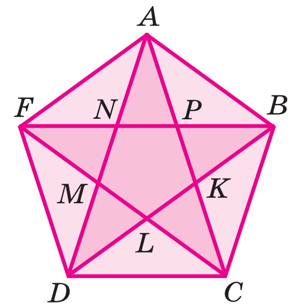


Рис. 225

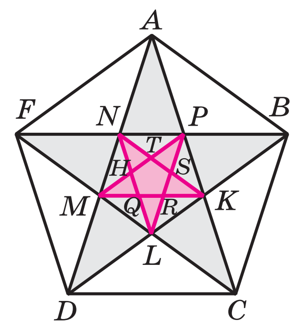


Рис. 226

Планируем

10.15. Как построить правильный пятиугольник по его стороне?

10.16. Как построить правильный десятиугольник по его стороне?

Вычисляем

10.17. Выразите через φ (см. формулу (11)) синусы углов: $18°$, $36°$, $54°$, $72°$, $108°$. Найдите их приближённые значения.

10.18. Найдите площадь правильного пятиугольника со стороной 1.

10.19. Найдите площадь пятиконечной звезды, у которой длина звена ограничивающей её ломаной равна 1.

Доказываем

10.20. Докажите, что $\Phi^2 = 1 + \Phi$, ..., $\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Phi^{n-1}$.

10.21. Докажите (алгебраически и геометрически), что

$$1 = \varphi + \varphi^2,\ \varphi^{n-1} = \varphi^n + \varphi^{n+1}.$$

Как эти равенства связаны с равенствами из задачи 10.20? ★

10.6. Точка пересечения медиан треугольника

Строя медианы треугольника, вы, наверное, уже заметили, что они проходят через одну точку. Докажем это.

Теорема 14 (*о точке пересечения медиан треугольника*). **Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и каждая медиана треугольника делится этой точкой в отношении 2 : 1 (считая от вершины треугольника).**

Доказательство. Пусть медианы AM и BK треугольника ABC пересекаются в точке T (рис. 227, *а*). Проведём среднюю линию KM (рис. 227, *б*). Напомним, что $KM \parallel AB$ и $KM = \frac{1}{2}AB$. Поэтому треугольник ABT подобен треугольнику KMT с коэффициентом 2. Следовательно, $AT : TM = BT : TK = 2 : 1$.

Покажем, что и медиана CN также проходит через точку T (рис. 228). Повторим проведённые рассуждения для медиан AM и CN. Снова получим, что они пересекаются в такой точке на медиане AM, которая делит AM в отношении 2 : 1. Этой точкой является точка T. Поэтому CN проходит через точку T. ■

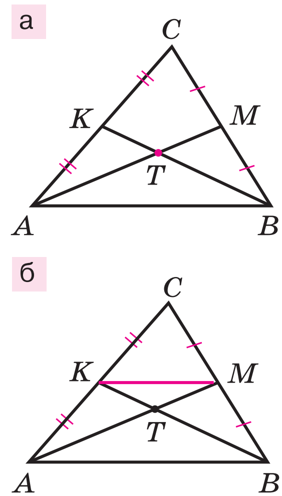


Рис. 227

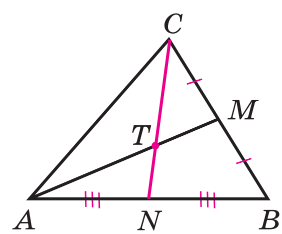


Рис. 228

▲ Точка пересечения медиан треугольника называется **центром масс треугольника, центром тяжести треугольника или центроидом треугольника.** Если изготовить треугольник из картона, проколоть его в точке пересечения медиан и продёрнуть в прокол нитку с узелком, то треугольник, висящий на этой нитке, будет находиться в равновесии. Понятие центра масс (центра тяжести) относится к механике и было введено в науку величайшим учёным древности Архимедом (ок. 287—212 гг. до н. э.). Начиная с работ Архимеда, в трудах учёных методы геометрии и механики плодотворно сочетаются. Ньютон даже назвал геометрию первой главой механики. Архимед так определял понятие центра тяжести: *центром тяжести каждого тела является некоторая расположенная внутри его точка, обладающая тем свойством, что если за неё мысленно подвесить тяжёлое тело, то оно остаётся в покое и сохраняет первоначальное положение.*

Архимед

Механика позволяет нахождение центра масс тела свести к нахождению центра масс некоторой системы материальных точек. *Материальной точкой* называют пару $(A,\ m)$, где A — точка пространства, а m — положительное число (*масса* материальной точки).

Нахождение центра масс треугольника ABC можно свести к нахождению центра масс системы трёх материальных точек $(A,\ 1)$, $(B,\ 1)$ и $(C,\ 1)$ (рис. 229, *а*). Его находят так. Сначала находят по правилу рычага Архимеда центр масс системы из двух точек $(B,\ 1)$ и $(C,\ 1)$. Им будет точка M — середина отрезка BC. Теперь две материальные точки $(B,\ 1)$ и $(C,\ 1)$ можно заменить материальной точкой $(M,\ 2)$ и вместо трёх рассмотреть две материальные точки $(A,\ 1)$ и $(M,\ 2)$ (рис. 229, *б*). Ещё раз применяя правило рычага Архимеда, получаем, что центром масс системы двух этих материальных точек $(A,\ 1)$ и $(M,\ 2)$ будет точка T, делящая отрезок AM в отношении $2 : 1$. Таково *механическое* доказательство теоремы о точке пересечения медиан треугольника. ▼

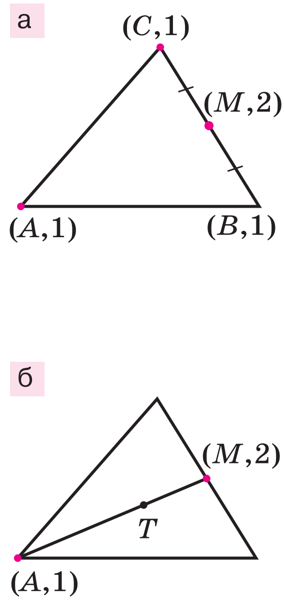


Рис. 229

Вопросы для самоконтроля

1. В чём суть теоремы о точке пересечения медиан треугольника?
2. В чём состоит механический смысл точки пересечения медиан треугольника?

ЗАДАЧИ

Вычисляем

10.22. Найдите медианы равнобедренного треугольника, у которого основание равно 16 см, а боковая сторона — 10 см.

10.23. Найдите медианы прямоугольного треугольника с катетами a и b.

Планируем

10.24. Как вычислить углы между медианами треугольника, зная его стороны?

10.25. Как построить треугольник по его медианам?

Доказываем

10.26. Докажите, что медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников.

10.27. Даны два треугольника, стороны одного из которых являются средними линиями другого. Докажите, что центр масс первого треугольника совпадает с центром масс второго треугольника.

Исследуем

10.28. К какой из сторон треугольника центр масс расположен ближе, а от какой он удалён дальше?

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ II

Планируем

II.1. Пусть известны две стороны треугольника и угол между ними. Как найти биссектрису этого угла?

II.2. В круге радиусом R проведены через одну точку окружности две хорды длиной d. Как найти угол между ними?

II.3. Как вычислить площадь ромба, если известны: а) сторона и угол; б) сторона и диагональ; в) высота и угол; г) диагональ и угол?

II.4. Нарисуйте равносторонний треугольник ABC. Через точки A, B и C проведите перпендикулярно соответственно сторонам AB, BC и CA три прямые. Каждые две из проведённых прямых пересекаются. а) Найдите на полученном рисунке подобные треугольники. б) Пусть сторона данного треугольника известна. Как найти площадь подобного треугольника? в) Решите аналогичные задачи для прямоугольного треугольника ABC.

II.5. Как вычислить площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$, если известны: а) все его стороны и одна диагональ; б) все стороны и один из углов; в) диагональ и углы между нею и сторонами?

Вычисляем

II.6. Стороны треугольника равны 4, 5, 6. Вычислите его наибольшую медиану, наименьшую высоту и среднюю биссектрису.

II.7. Из всех прямоугольных треугольников с данной гипотенузой a найдите тот, который имеет наибольшую площадь.

Доказываем

II.8. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений её боковых сторон, проходит через середины оснований трапеции.

II.9. Через внутреннюю точку отрезка AB проходит переменная прямая x. Докажите, что отношение расстояний до этой прямой от точек A и B остаётся постоянным.

II.10. Из точки O выходят три луча: a, b, c. На луче a находятся точки A и A_1, на луче b находятся точки B и B_1, на луче c находятся точки C и C_1. При этом $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $A_1C_1 \parallel AC$. а) Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны. б) Докажите утверждение, аналогичное «а», если точки A_1, B_1 и C_1 взяты на продолжениях лучей a, b, c. в) Будет ли верно это утверждение в пространстве?

Исследуем

II.11. Из вершины B треугольника ABC проведена хорда BK треугольника. Со сторонами BA и BC она образует углы α и β. Докажите, что $KA : KC = (BA \sin\alpha) : (BC \sin\beta)$. Какие следствия можно получить из этого результата?

II.12. В трапеции с основаниями a и b ($a > b$) провели среднюю линию и диагональ. При их пересечении средняя линия поделилась на части. а) Могут ли полученные части средней линии быть равными? б) В каком отношении делится средняя линия диагональю? Теперь проведите вторую диагональ. в) Чему равен отрезок средней линии между двумя диагоналями? г) Могут ли полученные при пересечении диагоналей и средней линии три части средней линии быть равными? д) Если ответ в пункте «г» отрицательный, то какая из частей самая большая?

II.13. Может ли средняя линия трапеции проходить через точку пересечения диагоналей?

II.14. В тетраэдре $PABC$ рёбра PA, PB, PC попарно взаимно перпендикулярны. Каким по виду треугольником является треугольник ABC?

II.15. Нарисуйте отрезок AB. Возьмите точку O, не лежащую на прямой AB. На отрезке AB возьмите любую точку X и на луче OX постройте точку Y, такую, что $OY = 2OX$. Пусть точка X пробегает весь отрезок AB. По какой линии будет двигаться точка Y? Обобщите полученный результат.

Применяем геометрию

II.16. От причала в двух направлениях одновременно отошли в море два катера, каждый со своей постоянной скоростью. Спустя 1 мин после начала движения расстояние между ними было 1 км. Какое расстояние между ними будет через: а) 2 мин; б) 3 мин; в) 10 мин?

II.17. а) Вы приближаетесь к уличному фонарю по прямой. Что будет происходить с вашей тенью? б) А что будет происходить с вашей тенью, если вы пойдёте по прямой мимо фонаря?

Участвуем в олимпиаде

II.18. В квадрат со стороной 1 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата находится ровно одна вершина прямоугольника, причём стороны его параллельны диагоналям квадрата. Чему равен периметр этого прямоугольника?

II.19. Два равных прямоугольных равнобедренных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ расположены так, что точка C лежит внутри гипотенузы A_1B_1, а точка C_1 лежит внутри гипотенузы AB. Докажите, что отрезок CC_1 делит пополам площадь четырёхугольника AA_1B_1B.

II.20. Хорда KL параллелограмма $ABCD$ (точка K лежит на стороне AB, точка L лежит на стороне AD) параллельна диагонали BD. Докажите, что площади треугольников CBK и CDL равны.

Применяем компьютер

II.21. Постройте треугольник ABC. Используя команду «Середина отрезка», постройте точки K, M, P – середины отрезков AB, AC и BC соответственно. Сравните длины сторон треугольников ABC и KMP. Найдите отношение площадей этих треугольников. Перемещайте вершины треугольника ABC. Сохранятся ли полученные вами закономерности? Можете ли вы это объяснить?

II.22. Постройте треугольник ABC и проведите его медианы AK и BM. Постройте их точку пересечения O. При построении медиан используйте команду «Середина отрезка». Проверьте, что верны отношения $AO : OK = 2 : 1$ и $BO : OM = 2 : 1$. Перемещайте вершины треугольника ABC и проверьте, что эта закономерность сохранится. Можете ли вы это объяснить?

II.23. Постройте треугольник ABC и проведите его медианы AK, BM и CP. При построении медиан используйте команду «Середина отрезка». Проверьте, что все медианы пересекаются в одной точке. Перемещайте вершины треугольника ABC и проверьте, что эта закономерность сохранится. Можете ли вы это объяснить?

Тесты

Итоговую проверку можно провести с помощью тестов. В каждом тесте содержится пять утверждений, на каждое из которых можно дать один из трёх видов ответов: «да» (оно кодируется знаком +), «нет» (оно кодируется знаком –), «не знаю» (оно кодируется знаком 0). За каждый правильный ответ знаками + (плюс) или – (минус) ставится +1, за каждый неправильный ответ этими знаками ставится –1, а за ответ «не знаю» ставится 0. Таким образом, по каждому тесту можно набрать от +5 до –5 баллов.

Тест 1. Свойства треугольника

Следующие утверждения верны:

Если в треугольнике ABC $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle B = 120°$, то в этом треугольнике:

1) $AC > 4$;
2) $\angle A > \angle C$;
3) площадь больше 3;
4) наименьшая высота выходит из вершины B;
5) медиана из вершины C равна $\sqrt{13}$.

Тест 2. Правильный многоугольник

Следующие утверждения верны:

1) Существует правильный многоугольник, все диагонали которого равны друг другу.
2) В каждом правильном многоугольнике с четным числом сторон существуют взаимно перпендикулярные диагонали.
3) Каждый правильный многоугольник имеет центр симметрии.
4) Существуют правильные многоугольники, которые можно разбить на равные друг другу правильные многоугольники.
5) Существуют призмы, каждая грань которых является правильным многоугольником.

Тест 3. Сравнение площадей

Следующие утверждения верны:

Пусть в треугольнике ABC точки K и M — середины сторон BA и BC соответственно, а P — точка пересечения медиан треугольника. Тогда имеют место такие отношения площадей треугольников:

1) $S(\triangle AMK) : S(\triangle ABC) = 1 : 4$;
2) $S(\triangle PMK) : S(\triangle APC) = 1 : 4$;
3) $S(\triangle APC) : S(\triangle ABC) = 1 : 3$;
4) $S(\triangle APK) : S(\triangle APC) = 1 : 3$;
5) $S(\triangle APK) : S(\triangle ABC) = 1 : 6$.

Тест 4. Сравнение отрезков

Следующие утверждения верны:

Пусть в треугольнике ABC точки K и M — середины сторон BA и BC соответственно, а P — точка пересечения медиан треугольника. Прямая, проходящая через точку P параллельно стороне AC, пересекает сторону BA в точке H, а сторону BC в точке T. Тогда имеют место такие отношения отрезков:

1) $AH : HK = 2 : 1$;
2) $PH : AC = 1 : 3$;
3) $HP : KM = 1 : 2$;
4) $AH : HB = 1 : 2$;
5) $BH : BK = 4 : 3$.

Тест 5. Трапеция

Следующие утверждения верны:

Пусть в трапеции $ABCD$ её большее основание AD равно 6, а три другие её стороны равны друг другу и угол при большем основании не меньше, чем 60°. Тогда у такой трапеции:

1) $AD < 3BC$;
2) периметр больше, чем 12;
3) площадь больше, чем 14;
4) диагональ больше, чем 6;
5) существует точка, равноудаленная от всех вершин трапеции.

Тест 6. Равнобедренная трапеция

Следующие утверждения верны:

Пусть основания BC и AD равнобедренной трапеции $ABCD$ равны соответственно 1 и 3. Тогда в этой трапеции:

1) если её высота равна 1, то диагональ больше, чем 3;
2) если $AC > 3$, то $\angle A > 45°$;
3) если $AB > 2$, то площадь больше 4;
4) если её площадь равна 1, то $\angle A > 60°$;
5) если её диагонали взаимно перпендикулярны, то высота равна средней линии.

Тест 7. Свойства параллелограмма

Следующие утверждения верны:

Если в параллелограмме одна сторона равна 1, а другая сторона равна a, то

1) при $a = 1$ параллелограмм имеет ось симметрии;
2) при $a > 1$ одна из его диагоналей меньше 2;
3) если площадь параллелограмма равна 1, то $a \geqslant 1$;
4) если тупой угол параллелограмма увеличивается, то площадь параллелограмма уменьшается;
5) при $a < 1$ каждая из его диагоналей меньше 2.

Тест 8. Признаки параллелограмма

Следующие утверждения верны:
Четырёхугольник является параллелограммом, если:
1) две его стороны равны, а другие две — параллельны;
2) два его противоположных угла равны;
3) его диагонали равны и перпендикулярны;
4) у него есть центр симметрии;
5) его диагональ делит его на два равных треугольника.

Тест 9. Подобные треугольники

Следующие утверждения верны:
Два треугольника подобны, если:
1) оба они равнобедренные и прямоугольные;
2) внешние углы двух углов одного треугольника равны внешним углам двух углов другого треугольника;
3) две стороны и высота к третьей стороне одного треугольника пропорциональны соответствующим двум сторонам и высоте к третьей стороне другого треугольника;
4) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и один из углов первого треугольника равен углу второго треугольника;
5) они являются треугольниками, которые имеют вершину в точке пересечения диагоналей трапеции, а противолежащими этой вершине сторонами имеют основания трапеции.

Итоги

Ведущей линией в курсе геометрии 8 класса была *геометрия вычислений* (*геометрия формул*).

В курсе 8 класса была продолжена и линия геометрии построений. Были построены ломаные, многоугольники, правильные многоугольники, параллелограммы и трапеции, многогранники, пирамиды, призмы, правильные пирамиды и правильные призмы.

Формулы

Площади

$S = ab$ — площадь прямоугольника со сторонами a и b.

$S = \frac{1}{2}ah$ — площадь треугольника со стороной a и высотой h на эту сторону.

$S = \frac{1}{2}ab\sin C$ — площадь треугольника со сторонами a и b и углом C между ними.

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — площадь треугольника со сторонами a, b, c; p — полупериметр.

$S = ah$ — площадь параллелограмма со стороной a и высотой h на эту сторону.

$S = \frac{1}{2}(a + b)h$ — площадь трапеции с основаниями a и b и высотой h.

$S_1 = k^2S$ — площади подобных фигур с коэффициентом подобия k.

Геометрия треугольника

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ — сумма углов треугольника ABC.

$a^2 + b^2 = c^2$ — теорема Пифагора для прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c.

$\sin A = \frac{a}{c}$ и $\cos A = \frac{b}{c}$ для прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c.

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ — теорема синусов для треугольника ABC.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ — теорема косинусов для треугольника ABC.

Содержание курса геометрии 8 класса весьма богато. Его многое связывает с курсом алгебры. Результаты этого курса получены великими учёными: Фалесом и Пифагором, Бируни и Региомонтаном, Кеплером и Эйлером, а также многими другими.

Предметный указатель

Ответы

1.15. а) 108°; б) 120°; в) 135°; г) 144°; д) $\frac{n-2}{n}180°$. **1.17.** Три. **1.18.** а) $\frac{n(n-3)}{2}$; б) $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. **1.33.** а) 30° и 60°; б) 60° и 90°. **1.34.** а) 36°; б) 72°.

2.9. а) 17,5; б) 20; в) 12; г) 6. **2.12.** Периметр увеличится в 4 раза, а площадь – в 16 раз. **2.14.** а) 5040 мм^2; б) 1,95 м^2; в) 190 га. **2.15.** а) $\frac{8}{9}$ м^2; б) $\frac{15}{16}$ м^2; в) $(-x^2+2x)$ м^2. **2.16.** а) 18 м; б) 18 м; в) $\frac{2(x^2+20)}{x}$ м. **2.17.** а) x^2; б) $\frac{x^2}{16}$; в) $x^2 + x$; г) $2x^2$; д) $-x^2 + 0{,}5x$; е) $2x^2 - 1$. **2.18.** а) 94; б) 594 см^2; в) 132 дм^2; г) $2 + 4x$; д) $2(ab + bc + ca)$. **2.19.** в) $6x^2$. **2.20.** а) $10x^2$; б) $-6x^2 + 12$. **2.21.** а) (121 мм^2; 144 мм^2); б) (180; 208). **2.32.** 1, 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$.

3.12. а) 10; б) 0,5; в) $\sqrt{5}$; г) $\frac{\sqrt{34}}{2}$. **3.13.** а) 0,5; б) 2. **3.14.** а) 5; б) $\sqrt{13}$; в) 5. **3.15.** а) $6\sqrt{2}$; б) $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **3.16.** а) 12; б) $2\sqrt{a^2-h^2}$. **3.17.** а) $3\sqrt{3}$; б) $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. **3.19.** а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{8}$; в) 7. **3.20.** а) $2+\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{2}+1$; в) $3\sqrt{2}$; г) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; д) $1+\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.21.** а) $\sqrt{3}a$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **3.22.** $\sqrt{\frac{1}{3}}$. **3.23.** а) $\sqrt{5x^2}$; б) $\sqrt{\frac{1}{5}}$ и $2\sqrt{\frac{1}{5}}$. **3.24.** а) $\sqrt{2+2x^2}$; б) $\sqrt{2x^2-x+0{,}25}$; в) $\sqrt{\frac{x^4+1}{x^2}}$. **3.25.** а) $\sqrt{3x^2+2}$; б) $\sqrt{x^2-5}$. **3.31.** а) $3\frac{1}{3}$ км; б) 5 км/ч. **3.34.** 12 чи и 13 чи. **3.35.** 0,3. **4.3.** а) 0,25; б) 0,75; в) 0,5; г) 0,5; д) 0,25; е) 0,25; ж) 0,25; з) 0,25. **4.12.** а) 77,5 см^2; б) 18 560 см^2. **4.13.** а) 960 см^2; б) 138 000 м^2. **4.14.** а) 60; б) 48. **4.15.** а) $9\sqrt{3}$; б) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$. **4.16.** а) $6+2\sqrt{3}$; б) $4+\sqrt{3}+\sqrt{15}$; в) $4+\sqrt{3}+\sqrt{7}$. **4.17.** а) $0{,}5x^2$; б) $\frac{\sqrt{3}x^2}{8}$; в) $0{,}5x\sqrt{2x+1}$;

г) $\frac{x^2}{2\sqrt{8}}$. **4.18.** а) $0{,}5x^2$; б) $0{,}25x^2$; в) x^2. **4.19.** а) $0{,}25\sqrt{3}x^2$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}x^2$.

4.20. а) (0; 0,5]; б) (0; 3]; в) $\left(0; \frac{ab}{2}\right]$. **4.34.** а) $6\sqrt{6}$; б) $6\sqrt{21}$; в) $4\sqrt{21}$.

4.42. а) 10; б) $0{,}5|a^2 - b^2|$. **4.43.** б) $0{,}5(a+b)\sqrt{c^2-(a-b)^2}$.

4.44. б) $0{,}5(a+b)\sqrt{c^2-0{,}25(a-b)^2}$. **4.45.** в) $0{,}25\sqrt{3}\,|a^2 - b^2|$. **4.46.** а) 2 см^2; б) 7200 см^2. **4.47.** а) $1{,}5\sqrt{x^2-0{,}25}$; б) $0{,}5(x+1)\sqrt{1-0{,}25(x-1)^2}$; в) $\frac{3x^2\sqrt{15}}{16}$ или $\frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$. **4.48.** 72° и 108°.

5.8. а) 50,5 см и 49,5 см; б) $\frac{200}{3}$ см и $\frac{100}{3}$ см; в) 40 см и 60 см или 50 см и 50 см. **5.9.** а) 20° и 160°; б) 100° и 80°; в) 60° и 120°; г) 45° и 135°. **5.48.** а) 0,5; б) 0,25; в) 0,5; г) $\frac{1}{9}$; д) 0,5. **5.52.** а) 4,48 см^2; б) 245,12 см^2. **5.53.** б) $0{,}5\sqrt{3}ab$; $0{,}5\sqrt{2}ab$. **5.54.** б) $0{,}5ab$. **5.55.** ab.

I.7. а) $x\sqrt{1-x^2}$; б) $2\sqrt{x^2-1}$; в) $x^3\sqrt{1-x^2}$. **I.8.** а) 84; б) $a^2(\sqrt{3}+1)$.
I.9. В 7 раз. **I.10.** а) $\frac{1}{2}$ б) $\frac{1}{4}$. **I.11.** а) $\frac{1}{8}$; б) $0{,}5x(1 - x)$; в) $\left(0; \frac{1}{8}\right]$.

I.12. а) $S_1 = S_2$;б) уменьшается от $\frac{1}{2}$ до 2; в) сначала убывает от S (S — площадь грани тетраэдра) до $\sqrt{\frac{2}{3}}\,S$, а затем снова возрастает до S; г) нет.

6.6. 8 м, 16 м, 24 м, 32 м, 40 м, 48 м. **6.10.** 0; 0,5; $0{,}5\sqrt{2}$; $0{,}5\sqrt{3}$; 1, $0{,}5\sqrt{3}$; $0{,}5\sqrt{2}$; 0,5; 0. **6.11.** а) 1 и $0{,}5\sqrt{2}$; б) $0{,}5\sqrt{3}$; в) 1, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$; г) 1, $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$; д) $\frac{3}{5}$, $\frac{24}{25}$; е) $\frac{12}{13}, \frac{56}{65}, \frac{4}{5}$. **6.12.** 0,5 и $0{,}5\sqrt{3}$. **6.13.** б) $\frac{\sqrt{3a^2+2ab-b^2}}{2a}$.

6.14. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. **6.15.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ и т. п. **6.21.** а) $(0; 0{,}5\sqrt{3})$; б) $(0{,}5\sqrt{3}; 1)$; в) $(0{,}5; 0{,}5\sqrt{3}]$. **6.32.** а) $c = \sqrt{5}$, $\angle A \approx 27°$; б) $b = 2\sqrt{2}$, $\angle A \approx 19°$; в) $c \approx 3{,}48$, $b \approx 2{,}86$; г) $b \approx 5{,}49$; д) $a \approx 8{,}34$. **6.33.** а) $\angle B = \angle C \approx 67°$; б) $AB = AC \approx 11{,}4$; в) $AB = AC \approx 8{,}96$; г) $BC \approx 7{,}01$; д) $BC \approx 12{,}9$.

6.34. $S \approx 47{,}6$. **6.35.** $S \approx 58{,}8$. **6.36.** $\approx 41°$. **6.37.** $R\sin\left(90° - \frac{\alpha}{2}\right)$, $2R\sin\frac{\alpha}{2}$.

6.42. Приблизительно на 420 м. **6.43.** До 7-го этажа. **6.47.** а) 0,5; б) 0,6; в) 0,6; г) 0,375; д) 1 : 7. **6.50.** $0{,}5d^2 \sin\varphi$. **6.52.** $[0{,}25ab; 0{,}5ab]$.

6.53. $(0;\ 0{,}5R^2]$, где R — радиус круга. **6.63.** а) $\frac{b}{a} = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; б) 0,5 и $0{,}5\sqrt{3}$ в) $\frac{b}{a} = \frac{c}{a} = \sin 1^\circ : \sin 2^\circ \approx 0{,}5$. **6.64.** а) $b \approx 11{,}6$ см, $c \approx 5{,}12$ см. **6.65.** ≈ 105 см^2. **6.66.** $S \approx 58{,}9$. **6.67.** а) Такого треугольника не существует; б) углы 60° и 90°; в) углы $\approx 53^\circ$ и $\approx 97^\circ$ или $\approx 23^\circ$ и $\approx 127^\circ$.

7.3. е) $\frac{5}{13}$; $\frac{3}{5}$ и $\frac{33}{65}$. **7.4.** 0,5 и −0,5. **7.5.** 0,6 и −0,6. **7.6.** а) $\approx 71^\circ$; б) 60°; в) $\approx 26^\circ$; г) 0°. **7.18.** а) $\frac{144}{13}$, $\frac{25}{13}$; в) $4\sqrt{3}$, $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; г) $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{2}$. **7.19.** $S = 32(\sqrt{3} \pm 1)$. **7.20.** а) 0,5 и $0{,}5\sqrt{3}$; б) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\frac{2}{\sqrt{5}}$; в) 0,5 и $0{,}5\sqrt{3}$. **7.42.** а), в) Остроугольный; б), г) тупоугольный; д) прямоугольный. **7.43.** а) $\approx 78^\circ$, $\approx 43^\circ$, $\approx 57^\circ$. **7.44.** а) $\sqrt{7}$, 41°, 79°. **7.61.** а) 0,5; б) 2. **7.62.** а) 6; б) 6. **7.63.** 5. **7.64.** $\frac{(a+2b)}{3}$, $\frac{(b+2a)}{3}$.

8.13. а) $\angle A \approx 35^\circ$; б) $b \approx 0{,}270$; в) $b \approx 128$. **8.14.** $\sqrt{13}$.

9.19. а) $\frac{20}{3}$; б) 1; в) $\frac{40}{3}$; г) 8; д) 20. **9.20.** а) 2; б) 2; в) 4. **9.32.** а) $\frac{d}{2}$; б) $\frac{2d}{5}$ или $\frac{3d}{5}$. **9.33.** а) $\frac{S}{3}$ и $\frac{4S}{3}$; б) $\frac{4S}{5}$ и $\frac{9S}{5}$. **9.34.** а) $\frac{S}{9}$; б) $\frac{4S}{9}$; в) $\frac{S}{9}$; г) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$, считая от A. **9.35.** $\frac{S}{16}$, $\frac{9S}{16}$, $\frac{3S}{16}$.

10.6. а) 16, 11; б) $\frac{13}{3}$, $\frac{5}{3}$; в) $\frac{1}{2}$, 52; г) $\frac{24}{5}$, 16, 15; д) 2, 3, 9. **10.18.** $\approx 1{,}72$. **10.19.** $\approx 2{,}12$.

II.6. $\sqrt{\frac{53}{2}}; \frac{5}{4}\sqrt{7}; 3\sqrt{2}$. **II.7.** Равнобедренный прямоугольный треугольник. **II.12.** а) Нет; б) $a : b$; в) $0{,}5(a - b)$; г) да, при $a = 2b$; д) зависит от сравнения a и $2b$. **II.16.** 2 км; 3 км; 10 км.

Таблица тригонометрических функций

α° ↓	sinα ↓	tgα ↓	ctgα ↓	cosα ↓	
0	0,0000	0,0000	—	1,000	90
1	0,0175	0,0175	57,3	1,000	89
2	0,0349	0,0349	28,6	0,999	88
3	0,0523	0,0524	19,1	0,999	87
4	0,0698	0,0699	14,3	0,998	86
5	0,0872	0,0875	11,4	0,996	85
6	0,1045	0,1051	9,51	0,995	84
7	0,1219	0,1228	8,14	0,993	83
8	0,139	0,141	7,11	0,990	82
9	0,156	0,158	6,31	0,988	81
10	0,174	0,176	5,67	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,90	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,28	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	cosα ↑	ctgα ↑	tgα ↑	sinα ↑	α° ↑

Список рекомендуемой литературы

1. *Адамар Ж.* Элементарная геометрия. Планиметрия. Ч. 1/ Ж. Адамар. — М.: Учпедгиз, 1957. Смотрите также в Интернете по адресу: http://ilib.mirror1.mccme.ru/.

2. *Александров А. Д.* Геометрия: учеб. для 8 кл. с углуб. изучением математики/ А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — М.: Просвещение, 2008.

3. *Александров И. И.* Сборник геометрических задач на построение/ И. И. Александров. — М.: МЦНМО, 2010.

4. *Вернер А. Л.* Стереометрия: учеб. пособие для учащихся 7—9 кл. общеобразоват. учреждений/ А. Л. Вернер, Т. Г. Ходот. — М.: Просвещение, 2006.

5. *Веннинджер М.* Модели многогранников/ М. Веннинджер. — М.: Мир, 1974.

6. *Волошинов А. В.* Математика и искусство/ А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 2000.

7. *Волошинов А. В.* Пифагор/ А. В. Волошинов. — М.: Просвещение, 1993.

8. *Делоне Б. Н.* Задачник по геометрии/ Б. Н. Делоне, О. К. Житомирский. — М.; Л., ГИТТЛ, 1950.

9. Журнал «Квант». Раздел «Задачи для младших школьников». Смотрите также в Интернете по адресу: http://kvant.mirror1.mccme.ru/.

10. *Левитин К.* Геометрическая рапсодия/ К. Левитин. — М.: Знание, 1984.

11. *Перельман Я. И.* Занимательная алгебра. Занимательная геометрия/ Я. И. Перельман. — М.: АСТ, Астрель, 2002.

12. *Прасолов В. В.* Задачи по планиметрии/ В. В. Прасолов. — М.: МЦНМО, 2007.

Учебное издание

Александров Александр Данилович
Вернер Алексей Леонидович
Рыжик Валерий Идельевич

ГЕОМЕТРИЯ

8 класс

Учебник
для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Е. В. Эргле*
Редакторы *Т. Ю. Акимова, П. А. Бессарабова, И. В. Рекман*
Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова, С. В. Дубова*
Художник *О. Г. Иванова*
Художественный редактор *Т. В. Глушкова*
Компьютерная графика *К. В. Кергелен, И. В. Губиной, С. А. Крутикова*
Техническое редактирование и
компьютерная вёрстка *И. Ю. Соколовой, О. А. Карповой*
Корректоры *О. В. Крупенко, Н. И. Новикова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 22.10.18. Формат $70\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBookCSanPin. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 10,68 + 0,52 форз. Тираж 650 экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение».
Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16,
стр. 3, этаж 4, помещение I.

Отпечатано в России.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд» в филиале «Тверской полиграфический комбинат детской литературы» ОАО «Издательство «Высшая школа». 170040, г. Тверь, проспект 50 лет Октября, 46. Тел.: +7(4822) 44-85-98. Факс: +7(4822) 44-61-51.