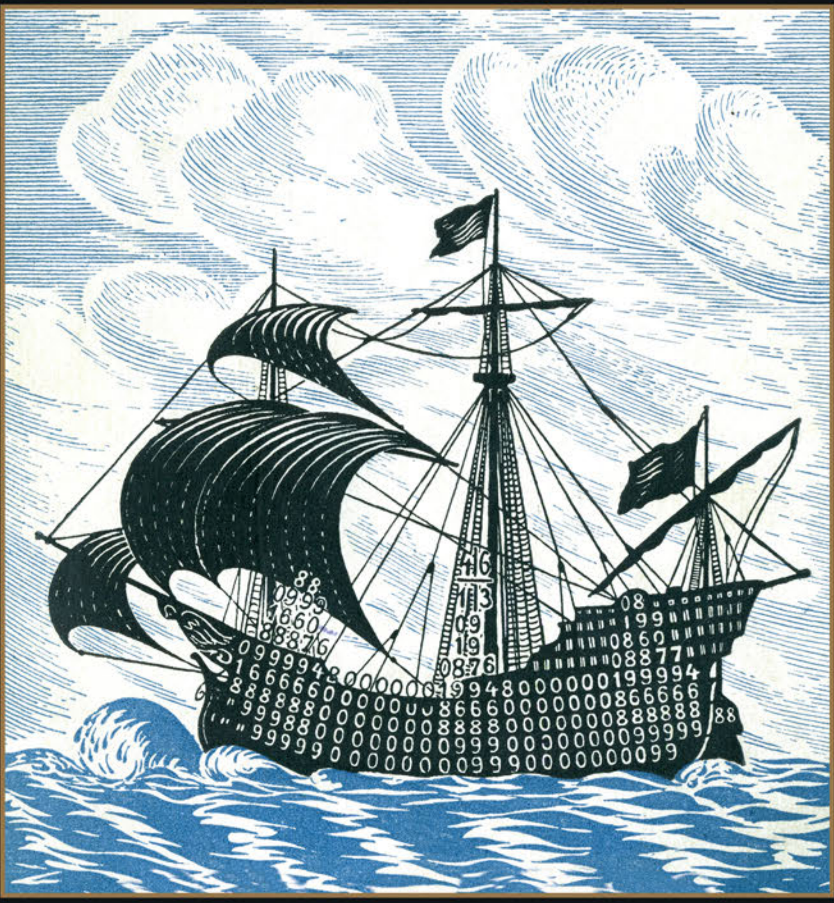
Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

# ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА



«Занимательная арифметика»,
«Занимательная алгебра» «Занимательная геометрия»
«Занимательная математика» «Живая математика»
Свыше четырехсот пятидесяти иллюстраций
Юрия Скалдина

БИБЛИОТЕКА МИРОВОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

БМЛ

*Яков Исидорович Перельман*
*(1882–1942)*

Яков Перельман

# ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

творческое объединение
Алькор

*Совместный проект издательства СЗКЭО
и переплётной компании
ООО «Творческое объединение «Алькор».*

Санкт-Петербург
СЗКЭО

УДК 51-053.2
ББК 22.1
П27

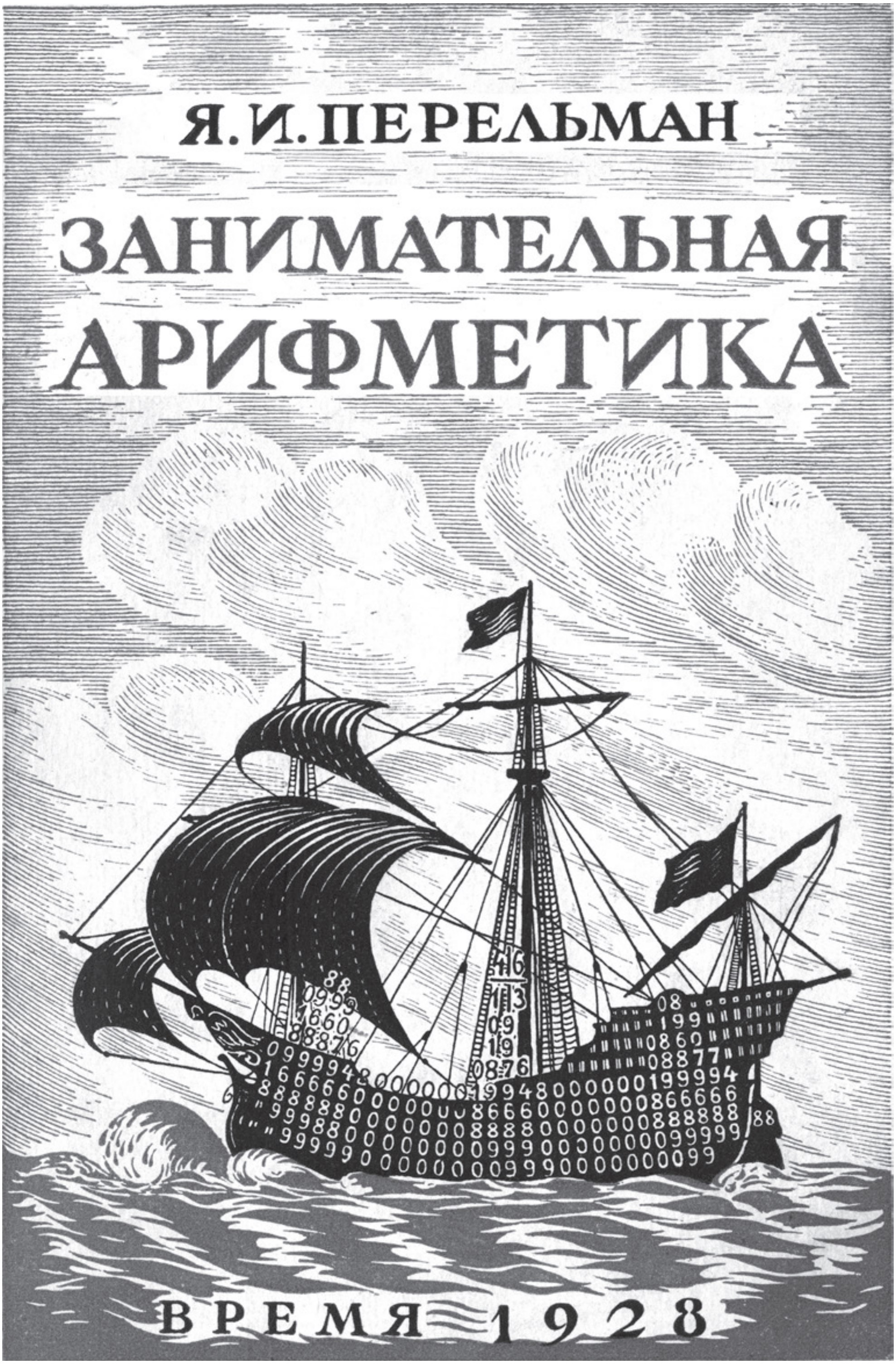
Первые 100 пронумерованных экземпляров
от общего тиража данного издания переплетены мастерами
ручного переплета ООО «Творческое объединение „Алькор“»

Классический европейский переплет выполнен
из натуральной кожи особой выделки растительного дубления.
Инкрустация кожаной вставкой с полноцветной печатью.
Тиснение блинтовое, золотой и цветной фольгой.
6 бинтов на корешке ручной обработки.
Использовано шелковое ляссе, золоченый каптал из натуральной кожи,
форзац и нахзац выполнены из дизайнерской бумаги Malmero
с тиснением орнамента золотой фольгой. Обработка блока
с трех сторон методом механического торшонирования
с нанесением золотой матовой полиграфической фольги горячим способом.
Оформление обложки пронумерованных экземпляров
разработано в ООО «Творческое объединение „Алькор“»

П27 **Перельман Я.** Занимательная математика. — СПб.: СЗКЭО, 2023, — 768 с., ил.

В сборник вошли пять книг замечательного популяризатора науки Якова Исидоровича Перельмана (1882–1942) — «Занимательная арифметика», «Занимательная алгебра», «Занимательная геометрия», «Занимательная математика» и «Живая математика». Эти сочинения приобщают к миру научных знаний, помогают привить читателю вкус к изучению точных наук, вызывают интерес к самостоятельным творческим занятиям.
472 рисунка в этих книгах выполнил (в тесном контакте с самим Перельманом) штатный художник ленинградского издательства «Время» Юрий (Георгий) Дмитриевич Скалдин (1891–1951), младший брат писателя Алексея Дмитриевича Скалдина, умевший великолепно иллюстрировать самые сложные научные явления и опыты.

ISBN 978-5-9603-0830-4 (7БЦ)
ISBN 978-5-9603-0831-1 (Кожаный переплет) 


Я. И. ПЕРЕЛЬМАН
ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ
АРИФМЕТИКА
ВРЕМЯ 1928

Текст и иллюстрации воспроизводятся по изданиям:

*Перельман Я. И. Занимательная арифметика : Загадки и диковинки в мире чисел. — 3-е изд. — Л. : Время, 1929*

*Перельман Я.И. Занимательная арифметика : Загадки и диковинки в мире чисел. — 7-е изд. — М. ; Л. : ГОНТИ, Ред. научно-попул. и юнош. лит-ры, 1938*

Обложка издания 1927 г.

## Предисловие

На русском языке имеется целый ряд оригинальных и переводных сборников[1], преследующих в общем ту же цель, что и настоящая книга: оживить школьную математику введением в нее интересных задач, занимательных упражнений, любопытных теоретических и практических сведений. Знакомым с этой литературой хорошо известно, что большинство подобных книг усердно черпают свой материал из одного и того же ограниченного фонда, накопленного столетиями; отсюда — близкое сходство этих сочинений, разрабатывающих с различной детальностью почти одни и те же темы. Но традиционный инвентарь математических развлечений достаточно уже исчерпан в нашей литературе. Новые книги этого рода должны привлекать новые сюжеты.

«Занимательная арифметика» представляет в большей своей части попытку предложить ряд новых, еще не разрабатывавшихся сюжетов арифметических развлечений. Подыскивание новых тем в столь многосторонне обследованной области — дело нелегкое: составитель не может здесь пользоваться коллективным трудом длинного ряда известных и безызвестных собирателей, а предоставлен лишь собственным силам. Поэтому к «Занимательной арифметике», как к первому опыту обновления традиционного материала подобных сборников, не должна прилагаться слишком строгая мерка.

Другая особенность предлагаемого сборника та, что он ограничивается материалом чисто арифметическим, стремясь возможно теснее примкнуть к различным отделам школьной арифметики. Развлечения, хотя бы и занимательные, но не затрагивающие ни одного из ее отделов, не нашли себе места в книге.

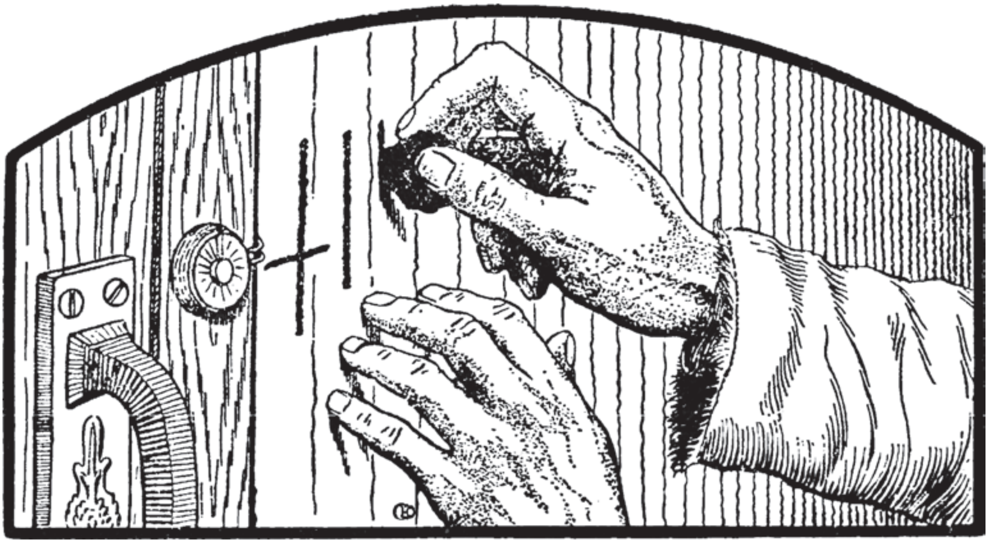
Наконец, заботясь о том, чтобы сборник читался легко, не требуя чрезмерного напряжения, составитель избегал трудных, запутанных вопросов и включал только такой материал, который вполне посилен для большинства читателей. Превращать приятную игру ума в утомительное занятие, чересчур серьезное для развлечения и слишком бесплодное для серьезной работы, — значило бы извращать цель и смысл подобного рода литературы.

Хотя книга имеет в виду читателей, знакомых лишь с элементами арифметики, в ней найдутся страницы, небезынтересные, быть может, и для более сведущих. Усердная просьба к таким читателям — не отказать сообщить автору о замеченных ими недостатках книги. За прежде сделанные указания автор приносит своим корреспондентам глубокую признательность.

*Я. П.*

---

[1] Среди них известный сборник Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки» (из трех его книг 2-я и 3-я составлены при участии автора предлагаемого сборника) почти исчерпывает весь «классический» материал арифметических развлечений.



## Глава I

# СТАРОЕ И НОВОЕ О ЦИФРАХ И НУМЕРАЦИИ

## ТАИНСТВЕННЫЕ ЗНАКИ

### Задача № 1

В первые дни русской революции, в марте 1917 года, жители Ленинграда[1] (тогда — Петрограда) были немало озадачены и даже встревожены таинственными знаками, появившимися неизвестно как у дверей многих квартир. Молва приписывала этим знакам разнообразные начертания. Те знаки, которые мне пришлось видеть, имели форму восклицательных знаков, чередующихся с крестами, какие ставились раньше возле фамилий умерших. По общему убеждению, они ничего хорошего означать не могли и вселяли страх в растерянных граждан.

По городу пошли зловещие слухи. Заговорили о грабительских шайках, помечающих квартиры своих будущих жертв. «Комиссар города Петрограда», успокаивая население, утверждал, что «таинственные знаки, которые чьей-то невидимой рукой делаются на дверях мирных обывателей в виде крестов, букв, фигур, как выяснилось по произведенному дознанию, делаются провокаторами и германскими шпионами»; он приглашал жителей все эти знаки стирать и уничтожать, «а в случае обнаружения лиц, занимающихся этой работой, задерживать и направлять по назначению».

1 В 1991 году Ленинграду вернули название Санкт-Петербург (*примеч. ред.*).

Таинственные восклицательные знаки и зловещие кресты появились также у дверей моей квартиры и квартир моих соседей. Некоторый опыт в распутывании замысловатых задач помог мне, однако, разгадать нехитрый и нисколько не страшный секрет этой тайнописи.

**Решение**

Своим «открытием» я поспешил поделиться с согражданами, поместив в газетах следующую заметку[1]:

*«Таинственные знаки»*

«В связи с таинственными знаками, появившимися на стенах многих петроградских домов, небесполезно разъяснить смысл одной категории подобных знаков, которые, несмотря на зловещее начертание, имеют самое невинное происхождение. Я говорю о знаках такого типа:

†!!  ††!!!!!  †††!!!

Подобные знаки замечены во многих домах на черных лестницах у дверей квартир. Обычно знаки этого типа имеются у всех дверей данного дома, причем в пределах одного дома двух одинаковых знаков не наблюдается. Их мрачное начертание естественно внушает тревогу жильцам. Между тем смысл их, вполне невинный, легко раскрывается, если сопоставить их с номерами соответствующих квартир. Так, например, приведенные выше знаки найдены мною у дверей квартир № 12, № 25 и № 33:

| | | |
|---|---|---|
| †!! | ††!!!!! | †††!!! |
| 12 | 25 | 33 |

Нетрудно догадаться, что кресты означают десятки, а палочки — единицы; так оказалось *во всех без исключения случаях*, которые мне приходилось наблюдать. Своеобразная нумерация эта, очевидно, принадлежит дворникам-китайцам[2], не понимающим наших цифр. Появились эти знаки, надо думать, еще до революции, но только сейчас обратили на себя внимание встревоженных граждан».

Таинственные знаки такого же начертания, но только не с прямыми, а с *косыми* крестами, были обнаружены и в таких домах, где дворниками служили пришедшие из деревень русские крестьяне. Здесь уже нетрудно было выяснить истинных авторов тайнописи, вовсе и не подозревавших, что их безыскусственные обозначения номеров квартир только теперь были замечены и вызвали такой переполох.

---

[1] Вечерний выпуск газеты «Биржевые ведомости» от 16 марта 1917 г.

[2] Их было много тогда в Ленинграде. Позднее я узнал, что китайский иероглиф для 10 имеет как раз указанную форму креста (китайцы не употребляют наших «арабских» цифр).

## СТАРИННАЯ НАРОДНАЯ НУМЕРАЦИЯ

Откуда взяли ленинградские дворники этот простой способ обозначения чисел: кресты — десятки, палочки — единицы? Конечно, не придумали этих знаков в городе, а привезли их из родных деревень. Нумерация эта давно уже в широком употреблении и понятна каждому, даже неграмотному крестьянину в самом глухом углу нашего Союза[1]. Восходит она, без сомнения, к глубокой древности и употребительна не только у нас. Не говоря уже о родстве с китайскими обозначениями, бросается в глаза и сходство этой упрощенной нумерации с римской: и в римских цифрах палочки означают единицы, косые кресты — десятки.

Любопытно, что эта народная нумерация некогда была даже у нас узаконена: по такой именно системе, только более развитой, должны были вестись сборщиками податей записи в податной тетради. «Сборщик, — читаем мы в старом „Своде Законов“, — принимая от кого-либо из домохозяев вносимые к нему деньги, должен сам или через писаря записать в податной тетради против имени того домохозяина, которого числа сколько получено денег, выставляя количество принятой суммы цифрами и *знаками*. Знаки сии для сведения всех и каждого ввести повсеместно одинаковые, а именно:

десять рублей означать знаком ........ □
рубль ........................ ○
десять копеек ........................ ×
копейка ...................... |
четверть ........................ —

Например, двадцать восемь рублей пятьдесят семь копеек три четверти:

(□□○○○○○○○○××××× ||||||| ☰)»

В другом месте того же тома «Свода Законов» находим еще раз упоминание об обязательном употреблении народных числовых обозначений. Приводятся особые знаки для тысяч рублей — в виде шестиконечной звезды с крестом в ней, и для ста рублей — в виде колеса с 8 спицами. Но обозначения для рубля и десяти копеек здесь устанавливаются иные, чем в предыдущем законе.

Вот текст закона об этих так называемых ясачных знаках[2]:

---

1 Имеется в виду Советский Союз (СССР) (*примеч. ред.*).

2 Т. е. знаки в ясачной грамоте; *ясак* в Московской Руси и царской России — натуральный налог, которым обрагались некоторыерые народности Поволжья, Сибири и Дальнего Востока (*примеч. ред.*).

«Чтобы на каждой квитанции, выдаваемой Родовитому Старосте, от которого внесен будет ясак, кроме изложения словами было показываемо особыми знаками число внесенных рублей и копеек так, чтобы сдающие простым счетом сего числа могли быть уверены в справедливости показания[1]. Употребляемые в квитанции знаки означают:

 тысячу рублей,

 сто рублей,

□ десять рублей,

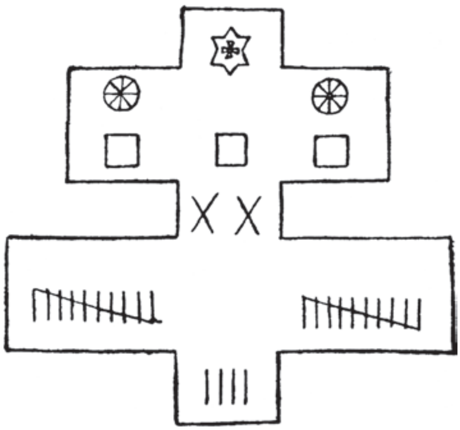
╳ один рубль,

|||||||||| десять копеек,

| одну копейку.

Дабы не можно было сделать здесь никаких прибавлений, все таковые знаки очерчивать кругом прямыми линиями. Например:

1232 руб. 24 коп. изображаются так: (см рис.)».



Как видите, употребляемые нами арабские и римские цифры — не единственный способ обозначения чисел.

В старину у нас, да еще и теперь по деревням, применяются другие системы письменного счисления, отдаленно сходные с римскими и совсем не сходные с арабскими цифрами.

Но и это еще не все способы изображения чисел, употребляющиеся в наши дни: многие торговцы, например, имеют свои секретные знаки для числовых обозначений, — так называемые торговые меты. О них побеседуем сейчас подробнее.

---

[1] Это показывает, что описываемые знаки были в широком употреблении среди населения.

## СЕКРЕТНЫЕ ТОРГОВЫЕ МЕТЫ

На вещах, купленных у офеней или в частных магазинах, особенно провинциальных, вы, вероятно, замечали иногда непонятные буквенные обозначения вроде

*а ве* *в уо*

Это не что иное, как цена вещи без запроса, которую торговец для памяти обозначает на товаре, но так, однако, чтобы ее не мог разгадать покупатель. Бросив взгляд на эти буквы, торговец сразу проникает в их скрытый смысл и, сделав надбавку, называет покупателю цену с запросом.

Такая система обозначения весьма проста, если только знать «ключ» к ней. Торговец выбирал какое-нибудь слово, составленное из 10 различных букв; чаще всего останавливали выбор на словах: *трудолюбие*, *правосудие*, *ярославец*, *миролюбец*, *Миралюбов*. Первая буква слова означает — 1, вторая — 2, третья — 3 и т. д.; десятою буквою обозначается нуль. С помощью этих условных букв-цифр торговец и обозначает на товарах их цену, храня в строгом секрете «ключ» к своей системе обозначения.

Если, например, выбрано слово:

п р а в о с у д и е
1234567890

то цена 4 р. 75 к. будет обозначена так:

*в уо*

Знак *«пое»* означает 1 р. 50 к. (150), *«пее»* — 1 рубль (100) и т. п.

Иногда цена на товаре бывает написана в виде дроби; например, на одной из купленных мною книг имеется обозначение

$$\frac{\textit{ое}}{\textit{тро}}$$

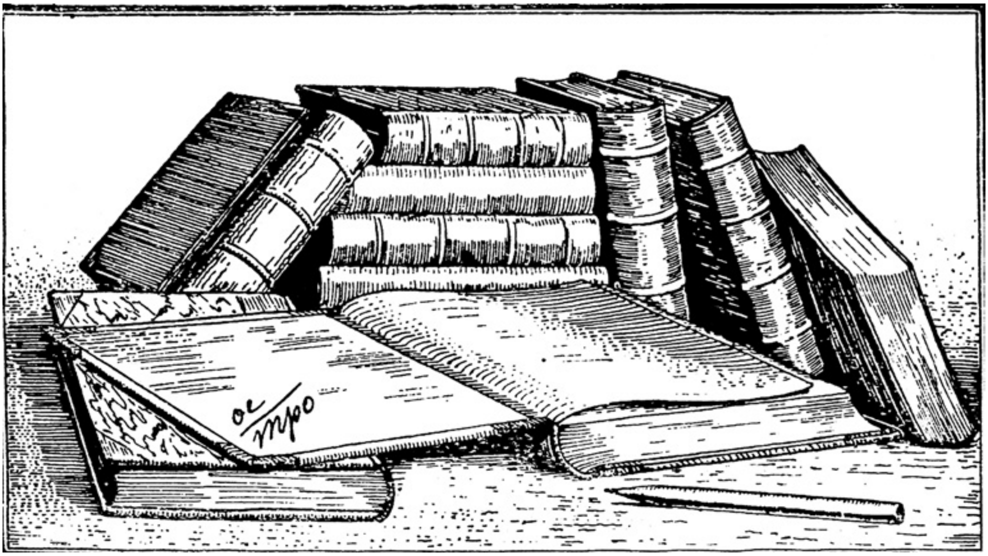
Это значит, при ключе «трудолюбие», что надо запросить 1 р. 25 коп., себе же книга стоила 50 коп.

Секрет своей меты торговцы строго берегут. Но если купить в одном и том же магазине несколько вещей, то, сопоставляя названную торговцем цену с соответствующими обозначениями, нетрудно догадаться о значении букв. Особенно легко разгадывать меты дешевых товаров, где запрашивают немного, так что первые цифры уплаченных сумм отвечают начальным буквам обозначения. Разгадав же несколько букв, легко доискаться значения остальных. При некоторой проницательности может быть разгадан «ключ» любой меты.

Допустим, например, что вы купили несколько вещей и заплатили за первую 25, за вторую — 22, за третью — 28 копеек. В уголках этих предметов вы находите такие обозначения:

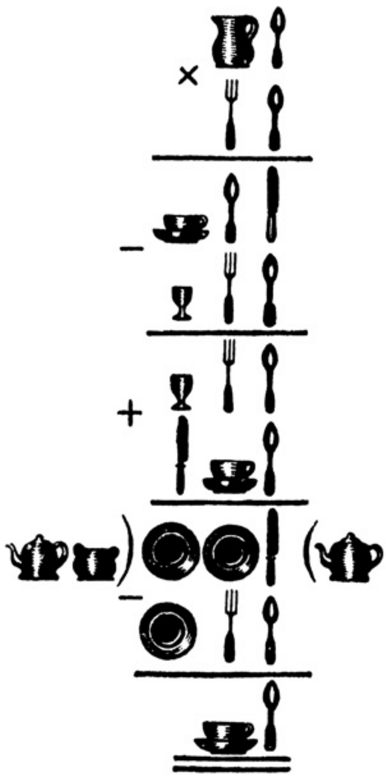
*ро, рр, рд.*

Ясно, что буква *р* означает 2. Отгадав по другим товарам еще одну букву, — например, *с* = 6, — вы уже догадаетесь, что ключ — *правосудие*. Число подходящих слов, надо заметить, ограничено, и выбор не бывает чересчур затруднительным.




## АРИФМЕТИКА ЗА ЗАВТРАКОМ

После сказанного легко сообразить, что можно изображать числа не только с помощью цифр, но и с помощью любых иных знаков или даже предметов — карандашей, перьев, линеек, резинок и т. п.: надо только условиться приписывать каждому предмету значение какой-нибудь определенной цифры. Можно даже, ради курьеза, с помощью таких цифр-предметов изображать *действия* над числами — складывать, вычитать, умножать, делить. Вот, например, ряд действий над числами, обозначенными предметами сервировки стола (см. рис. на следующей странице). Вилка, ложка, нож, кувшинчик, чайник, тарелка — все это знаки, каждый из которых заменяет определенную цифру.



**Задача № 2**

Глядя на эту группу ножей, вилок, посуды и т. п., попробуйте угадать: какие именно числа здесь обозначены?

С первого взгляда такая задача кажется очень трудной: приходится разгадывать настоящие иероглифы, как сделал некогда француз Шамполион[1]. Но ваша задача гораздо легче: вы ведь знаете, что числа здесь, хотя обозначены вилками, ножами, ложками и т. п., написаны по десятичной системе счисления, т. е. вам известно, что тарелка, стоящая на втором месте (считая справа), есть цифра десятков, что предмет направо от нее — цифра единиц, а по левую сторону — цифра сотен. Кроме того, вы знаете, что расположение всех этих предметов имеет определенный смысл, который вытекает из сущности арифметических действий, производимых над обозначенными ими числами. Все это может значительно облегчить вам решение предложенной задачи.

**Решение**

Вот как можно доискаться значения расставленных здесь предметов. Рассматривая первые три ряда на нашем рисунке, вы видите, что «ложка», умноженная на «ложку», дает «нож». А из следующих рядов видно, что «нож» без «ложки» дает «ложку», или что «ложка» + «ложка» = =«ножу». Какая же цифра дает одно и то же и при удвоении, и при умножении само на себя? Это может быть только 2, потому что 2 × 2 = 2 + 2. Таким образом узнаем, что «ложка» = 2, и, следовательно, «нож» = 4.

Теперь идем дальше. Какая цифра обозначена вилкой? Попробуем разгадать это, присмотревшись к первым трем рядам, где вилка участвует в умножении, и к рядам III, IV и V, где та же вилка фигурирует в действии вычитания. Из группы вычитания вы видите, что, отнимая в разряде десятков «вилку» от «ложки», получаем в результате «вилку», т. е. при вычитании два минус «вилка» получается «вилка». Это может быть в двух случаях:

[1] *Жан-Франсуа Шампольон* (1790–1832) — французский востоковед, основатель египтологии. Благодаря проведенной им расшифровке текста Розеттского камня в 1822 году стало возможным чтение египетских иероглифов (*примеч. ред.*).

либо «вилка» = 1, и тогда 2 – 1 = 1; либо же «вилка» = 6, и тогда, вычитая 6 из 12 (единица высшего разряда занимается у «чашки»), получаем 6.

Что же выбрать: 1 или 6? Испытаем, годится ли 6 для «вилки» в других действиях. Обратите внимание на сложение V и VI рядов: «вилка» (т. е. 6) + + «чашка» = «тарелке»; значит, «чашка» должна быть меньше 4 (потому что в рядах VII и VIII «тарелка» минус «вилка» = «чашке»). Но «чашка» не может равняться двойке, так как двойка обозначена уже «ложкой»; не может «чашка» быть и единицей — иначе вычитание IV ряда из III не могло бы дать трехзначного числа в V ряду. Не может, наконец, чашка обозначать и 3: если чашка = 3, то бокальчик (см. ряды IV и V) должен обозначать единицу; потому что 1 + 1 = 2, т. е. «бокальчик» + «бокальчик» = «чашке», убавленной на единицу, которая была занята у него при вычитании в разряде десятков; «бокальчик» же равняться единице не может, потому что тогда тарелка в VII ряду будет обозначать в одном случае цифру 5 («бокальчик» + «нож»), а в другом — цифру 6 («вилка» + «чашка»), чего быть не может. Значит, нельзя было допустить, что «вилка» = 6, а надо было принять ее равной единице.

Узнав путем таких — довольно, правда, долгих — поисков, что вилка обозначает цифру 1, мы дальше уже идем более уверенно и быстро. Из действия вычитания в III и IV рядах видим, что чашка обозначает либо 6, либо 8. Но 8 приходится отвергнуть, потому что тогда вышло бы, что «бокальчик» = 4, а мы знаем, что цифра 4 обозначена ножом. Итак, чашка обозначает цифру 6, а следовательно, бокальчик — цифру 3.

Какая же цифра обозначена кувшинчиком в I ряду? Это легко узнать, раз нам известно произведение (III ряд, 624) и один из множителей (II ряд, 12). Разделив 624 на 12, получаем 52. Следовательно, «кувшинчик» = 5.

Значение тарелки определяется просто: в VII ряду «тарелка» = «вилке» + «чашка» = «бокальчику» + «нож»; т. е. «тарелка» = 1 + 6 = 3 + 4 = 7.

Остается разгадать цифровое значение чайника и сахарницы в VII ряду. Так как для цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 предметы уже найдены, то остается выбирать только между 8, 9 и 0. Подставим в действие деления, изображенное в последних трех рядах[1], соответствующие цифры вместо предметов.

Получим такое расположение (буквами *ч* и *с* обозначены «чайник» и «сахарница»):

$$
\begin{array}{r}
\textit{чс})\ 774\ (\textit{ч} \\
\underline{712}\phantom{\ (\textit{ч}} \\
62\phantom{\ (\textit{ч}}
\end{array}
$$

[1] Расположение чисел здесь такое, какое принято теперь в Англии и Америке (а в прежнее время употреблялось и в русских учебных книгах): частное и делитель пишутся по обе стороны делимого.

Число 712, мы видим, есть произведение двух неизвестных чисел *чс* и *ч*, которые, конечно, не могут быть ни нулем, ни оканчиваться нулем: значит, ни *ч*, ни *с* не есть нуль. Остаются два предположения: *ч* = 8 и *с* = 9, или же, наоборот, *ч* = 9 и *с* = 8. Но, перемножив 98 на 8, мы не получаем 712; следовательно, чайник обозначает 8, а сахарница — 9 (действительно: 89 × 8 = 712).

Итак, мы разгадали иероглифическую надпись из предметов столовой сервировки:

кувшин = 5
ложка = 2
вилка = 1
чашка = 6
бокальчик = 3
чайник = 8
сахарница = 9
тарелка = 7

А весь ряд арифметических действий, изображенный этой оригинальной сервировкой, приобретает такой смысл:

$$
\begin{array}{r}
52 \times 12 \\
\underline{12\phantom{\times 12}} \\
624 - 312 \\
\underline{312\phantom{- 312}} \\
312 + 462 \\
\underline{462\phantom{+ 462}} \\
89)\ 774\ (8 \\
\underline{712\phantom{\ (8}} \\
62\phantom{\ (8}
\end{array}
$$

## АРИФМЕТИЧЕСКИЕ РЕБУСЫ

То, что я предлагаю назвать арифметическими ребусами, — занимательная игра американских школьников, у нас пока еще совершенно неизвестная[1]. Она состоит в отгадывании задуманного слова посредством решения задачи вроде той, какую мы решили в предыдущей статье. Загадывающий задумывает слово, состоящее из 10 не повторяющихся букв, — например, «трудолюбие», «специально», «просвещать». Приняв буквы задуманного слова за цифры, загадывающий изображает посредством этих букв какой-нибудь случай деления. Если задумано слово «просвещать», то можно взять такой пример деления:

[1] Английское название игры «div-al-et» — сокращение от «division by letters», т. е. деление буквами.

| *п* | *р* | *о* | *с* | *в* | *е* | *щ* | *а* | *т* | *ь* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |

делимое — *провес* ...123 564
делитель — *овса* ...3548

```
123564 |3548        провес |овса
10644    34         пьесс   ос
 17124               пщпрс
 14192               псптр
  2932                ртор
```

Можно взять и другие слова:

делимое — *восстать* ... 53 449 890
делитель — *свет* ... 4569

```
восстать |свет
свет      ппета
щщвт
 свет
оптьа
рщспс
 сстст
 сппрп
  оараь
  оеввр
   пщра
```

Буквенное изображение определенного случая деления вручается отгадчику, который и должен по этому бессмысленному, казалось бы, набору букв угадать задуманное слово. Как следует в подобных случаях доискиваться числового значения букв, — читатель уже знает: мы объяснили это, когда решали задачу предыдущей статьи. При некотором терпении можно успешно разгадывать эти арифметические ребусы, если только пример достаточно длинен и дает необходимый материал для догадок и испытаний. Если же выбраны слова, дающие чересчур короткий случай деления, например:

| *т* | *р* | *у* | *д* | *о* | *л* | *ю* | *б* | *и* | *е* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 0 |

делимое — *блюдо* ... 86 745
делитель — *труд* ...1234

```
блюдо |труд
блуб   юе
 уло
```

то разгадывание очень трудно. В подобных случаях надо просить загадывающего продолжить деление до сотых или тысячных долей, т. е. получить в частном еще 2 или 3 десятичных знака. Вот пример деления до сотых долей:

*с п е ц и а л ь н о*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

делимое — *палец* ... 26734
делитель — *пила* ... 2576

*палец* | *пила*
*пила* | *со,ел*
*нлцо*
*ллпь*
*поспо*
*сьоеп*
*поьь*

Если бы в этом случае мы остановились на целом частном (*со*), отгадка задуманного слова едва ли была бы возможна.

**Задачи №№ 3–5**

Для читателя, который пожелал бы испытать свои силы в разрешении подобных арифметических ребусов, привожу еще три примера:

| I. | | II. | | III. | |
|---|---|---|---|---|---|
| *давние* | *дни* | *постная* | *репа* | *уравнить* | *ниву* |
| *доес* | *ипи* | *репа* | *капп* | *уурер* | *руее* |
| *ввеи* | | *рркнн* | | *уьиаи* | |
| *оеад* | | *рккпк* | | *ниву* | |
| *дове* | | *кяпта* | | *вллнт* | |
| *доес* | | *ае а с* | | *внуре* | |
| *ои* | | *кян ея* | | *верл ь* | |
| | | *ае ас* | | *внур е* | |
| | | *кпеп* | | *ауи р* | |

По этим образцам читатель сможет составить самостоятельно множество других примеров.

*(Решения этих задач — см. далее, с. 32, внизу).*

## ДЕСЯТИЧНАЯ СИСТЕМА В КНИЖНЫХ ШКАФАХ

Особенность десятичной системы счисления остроумно используется даже в такой области, где с первого взгляда этого и ожидать не приходится, — именно, при распределении книг в библиотеке.

Обычно, желая указать библиотекарю номер нужной вам книги, вы просите дать вам каталог и предварительно справляетесь в нем, потому что в каждом книгохранилище имеется обыкновенно своя нумерация книг. Существует, однако, и такая система распределения книг по номерам, при которой одна и та же книга должна иметь одинаковый номер во всякой библиотеке. Это так называемая десятичная система классификации книг.

Система эта (к сожалению, принятая пока еще далеко не всюду[1]) чрезвычайно удобна и весьма несложна. Сущность ее в том, что каждая отрасль знания обозначается определенным числом и притом так, что цифровой состав этого числа сам говорит о месте данного предмета в общей системе знаний.

Книги прежде всего разбиваются на десять обширных классов, обозначенных цифрами от 0 до 9.

0. Сочинения общего характера.
1. Философия.
2. Религия.
3. Общественные науки. Право.
4. Филология. Языки.
5. Физико-математические и естественные науки.
6. Прикладные науки (медицина, техника, сельское хозяйство и т. п.).
7. Изящные искусства.
8. Литература.
9. История, география, биографии.

В обозначении номера книги по этой системе первая цифра прямо указывает на ее принадлежность к тому или иному классу из перечисленных выше: каждая книга по философии имеет номер, начинающийся с 1, по математике — с 5, по технике — с 6. И наоборот, если номер книги начинается, например, с 4, то, еще не раскрывая книги, мы можем утверждать, что перед нами сочинение из области языкознания.

Далее, каждый из десяти перечисленных классов книг подразделяется на 10 главных отделов, тоже отмеченных цифрами; эти цифры ставят в обозначении номера на втором месте. Так, 5-й класс, включающий физико-математические и естественно-научные книги, разделяется на следующие отделы:

[1] В настоящее время используется во всем мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати, различных видов документов и организации картотек (*примеч. ред.*).

50. Общие сочинения по физико-математическим и естественным наукам.
51. Математика.
52. Астрономия. Геодезия.
53. Физика. Механика теоретическая.
54. Химия. Минералогия.
55. Геология.
56. Палеонтология.
57. Биология. Антропология.
58. Ботаника.
59. Зоология.

Сходным образом разбиваются по отделам и остальные классы. Например, в классе прикладных наук (6) отдел медицины обозначается цифрой 1 после 6, т. е. числом 61; по сельскому хозяйству — 63, по домоводству — 64; торговле и путям сообщения — 65, химической промышленности и технологии — 66 и т. п. Точно так же в 9 классе все книги по географии и путешествиям относятся к отделу 91, и т. п.

Присоединение к двум первым цифрам третьей характеризует ее содержание еще точнее, указывая, к какому именно *подотделу* данного отдела она относится. Например, в отделе математики (51) присоединение на третьем месте цифры 1 указывает, что книга относится к арифметике (511), цифры 2 — к алгебре (512), цифры 3 — к геометрии (513) и т. д. Точно так же и отдел физики (53) разбивается на 10 подотделов: книги по электричеству обозначаются 537, по свету — 535, по теплоте — 536 и т. д.

Затем следует дальнейшее дробление подотдела на разряды, обозначаемые четвертой цифрой номера и т. д.

В библиотеке, устроенной по десятичной системе, нахождение нужной книги упрощается до крайности. Если, например, вы интересуетесь

геометрией, вы прямо идете к шкафам, где номера начинаются с 5, отыскиваете тот шкаф, где хранятся книги № 51... и пересматриваете в нем только те полки, где стоят книги № 513...: здесь собраны все книги по геометрии, имеющиеся в данной библиотеке. Точно так же, ища книги по социализму и коммунизму, вы обратитесь к книгам № 333..., не заглядывая в каталог и никого не затрудняя расспросами.

Как бы обширна ни была библиотека, никогда не может случиться недостатка в числах для нумерации книг[1].

## КРУГЛЫЕ ЧИСЛА

Вероятно, все замечали на себе и на окружающих, что среди цифр есть излюбленные, к которым мы питаем особенное пристрастие. Мы, например, очень любим «круглые числа», т. е. оканчивающиеся на 0 или 5. Пристрастие к определенным числам, предпочтение их другим заложено в человеческой натуре гораздо глубже, чем обыкновенно думают. В этом отношении сходятся вкусы не только всех европейцев и их предков, например, древних римлян, — но даже первобытных народов других частей света.

При каждой переписи населения обычно наблюдается чрезмерное обилие людей, возраст которых оканчивается на 5 или на 0; их гораздо больше, чем должно бы быть. Причина кроется, конечно, в том, что люди не помнят твердо, сколько им лет и, показывая возраст, невольно «округляют» годы. Замечательно, что подобное же преобладание «круглых» возрастов наблюдается и на могильных памятниках древних римлян.

Эта одинаковость числовых пристрастий идет еще дальше. Один германский психолог (проф. К. Марбе) подсчитал, как часто встречается в обозначениях возраста на древнеримских могильных плитах та или иная цифра, и сравнил эти результаты с повторяемостью цифр в обозначениях возраста по переписи в американском штате Алабама, где живут преимущественно негры. Получилось удивительное согласие: древние римляне и современные нам негры до малейших подробностей сходятся в числовых пристрастиях! Конечные цифры возраста по частоте их повторяемости располагались в обоих случаях в одинаковой последовательности, а именно:

0, 5, 8, 2, 3, 7, 6, 4, 9 и 1.

Но и это не все. Чтобы выяснить числовые пристрастия современных европейцев, упомянутый ученый производил такого рода опыты: он предлагал

[1] Желающие применить эту систему на практике при устройстве библиотеки найдут все необходимые сведения в книге Международного библиографического института: «Десятичная классификация». Перевод под редакцией проф. А. М. Ловягина (Ленинград, 1923).

множеству лиц определить «на глаз», сколько миллиметров заключает в себе полоска бумаги, например, в палец длиною, и записывал ответы. Подсчитав затем частоту повторения одних и тех же конечных цифр, ученый получил снова тот же самый ряд:

0, 5, 8, 2, 3, 7, 6, 4, 9 и 1.

Нельзя считать случайностью, что народы — столь отдаленные друг от друга и антропологически, и географически, — обнаруживают полную одинаковость числовых симпатий, т. е. явное пристрастие к «круглым» числам, оканчивающимся на 0 или 5, и заметную неприязнь к числам не круглым.

Любовь к пятеркам и десяткам находится, без сомнения, в прямой связи с десятичным основанием нашей системы счисления, т. е. в конечном итоге — с числом пальцев на наших обеих руках. Остается неразгаданной лишь та правильность, с какой слабеет эта симпатия по мере удаления от 5 и 10.

Это пристрастие к округленным числам обходится нам, надо заметить, довольно дорого. Товарные цены в розничной продаже всегда тяготеют к этим круглым числам: некруглое число, получающееся при исчислении продажной стоимости товара, дополняется до большего круглого числа. Цена книги редко бывает 57 коп., 63 коп., 84 коп., — а чаще 60 коп., 65 коп., 85 коп. Но округленность цены достигается обычно за счет покупателя, а не продавца. Общая сумма, которую потребители переплачивают за удовольствие приобретать товары по круглым ценам, накапливается весьма внушительная. Кто-то дал себе труд, задолго до последней войны[1], приблизительно подсчитать ее, и оказалось, что население России ежегодно переплачивало в виде разницы между круглыми и некруглыми товарными ценами не менее 30 миллионов рублей. Не слишком ли дорогая дань невинной слабости к округлениям?

**АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ:**

$$100 = \left\{ \begin{array}{c} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \times 9 \\ 12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 \\ 123 + 4 - 5 + 67 - 89 \\ 123 - 45 - 67 + 89 \end{array} \right.$$

[1] Я. П. имеет в виду Первую мировую войну 1914–1918 гг. (*примеч. ред.*).


# Глава II

# ПОТОМОК ДРЕВНЕГО АБАКА

## ЧЕХОВСКАЯ ГОЛОВОЛОМКА

### Задача № 6

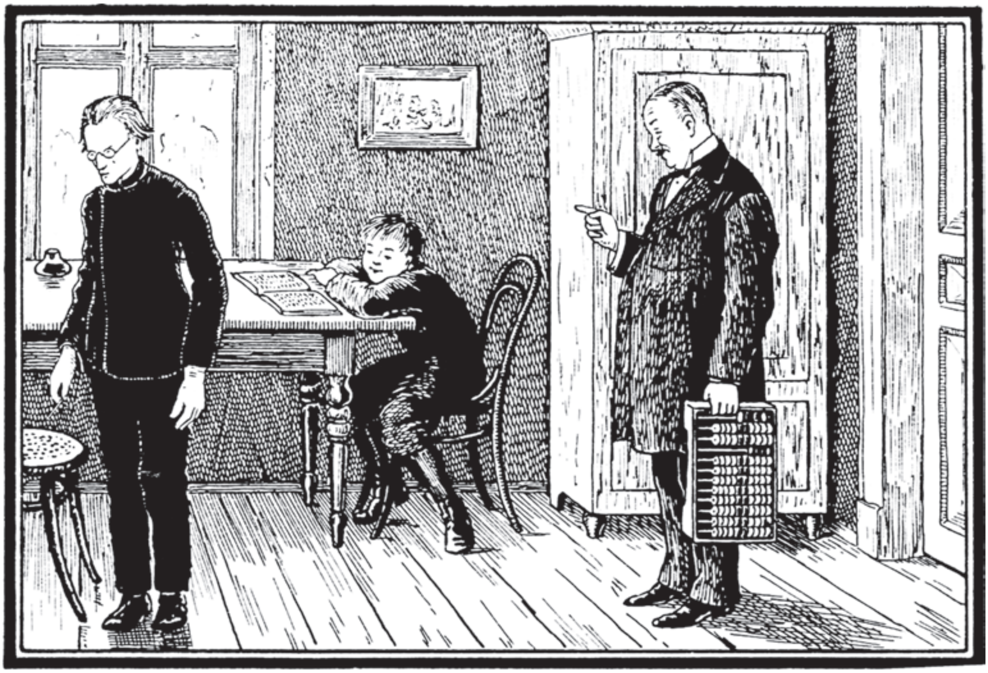
Припомним ту, в своем роде знаменитую арифметическую задачу, которая так смутила семиклассника Зиберова из чеховского рассказа «Репетитор»:

«Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?»

С тонким юмором описывает Чехов, как беспомощно трудились над этой задачей и семиклассник-репетитор, и его ученик, двенадцатилетний Петя, пока не выручил их Петин отец, Удодов:

«Петя повторяет задачу и тотчас же, ни слова не говоря, начинает делить 540 на 138.

— Для чего же вы делите? Постойте! Впрочем, так... продолжайте. Остаток получается? Здесь не может быть остатка. Дайте-ка я разделю!



Зиберов [репетитор] делит, получает 3 с остатком и быстро стирает.

— Странно... — думает он, ероша волосы и краснея. — Как же она решается? Гм!.. Это задача на неопределенные уравнения, а вовсе не арифметическая.

Учитель глядит в ответы и видит 75 и 63.

— Гм!.. странно... Сложить 5 и 3, а потом делить 540 на 8? Так, что ли? Нет, не то!

— Решайте же! — говорит он Пете.

— Ну, чего думаешь? Задача-то ведь пустяковая, — говорит Удодов Пете. — Экий ты дурак, братец! Решите уж вы ему, Егор Алексеич.

Егор Алексеич [репетитор] берет в руки грифель и начинает решать. Он заикается, краснеет, бледнеет.

— Эта задача, собственно говоря, алгебраическая, — говорит он. — Ее с иксом и игреком решить можно. Впрочем, можно и так решить. Я вот разделил... Понимаете? Или вот что. Решите мне эту задачу к завтрему... Подумайте...

Петя ехидно улыбается. Удодов тоже улыбается. Оба они понимают замешательство учителя. Ученик VII класса еще пуще конфузится, встает и начинает ходить из угла в угол.

— И без алгебры решить можно, — говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая. — Вот, извольте видеть...

Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было.

— Вот-с... по-нашему, по-неученому».

Эта сценка с задачей, заставляющая нас смеяться над конфузом злосчастного репетитора, задает нам сама три новых задачи. А именно:

1. Как намеревался репетитор решить задачу алгебраически?
2. Как должен был решить ее Петя?
3. Как решил ее отец Пети на счетах «по-неученому»?

**Решение**

На первые два вопроса, вероятно, без труда ответят если не все, то, во всяком случае, многие читатели нашей книжки. Третий вопрос не так прост. Но рассмотрим наши задачи по порядку.

1. Семиклассник-репетитор готов был решать задачу «с иксом и игреком», будучи уверен, что задача — «собственно говоря, алгебраическая». И он, надо думать, легко справился бы с ней, прибегнув к помощи системы уравнений (только не неопределенных, как ему казалось). Составить два уравнения с двумя неизвестными для данной задачи очень нетрудно; вот они:

$$x + y = 138 \qquad 5x + 3y = 540,$$

где $x$ — число аршин синего, а $y$ — черного сукна.

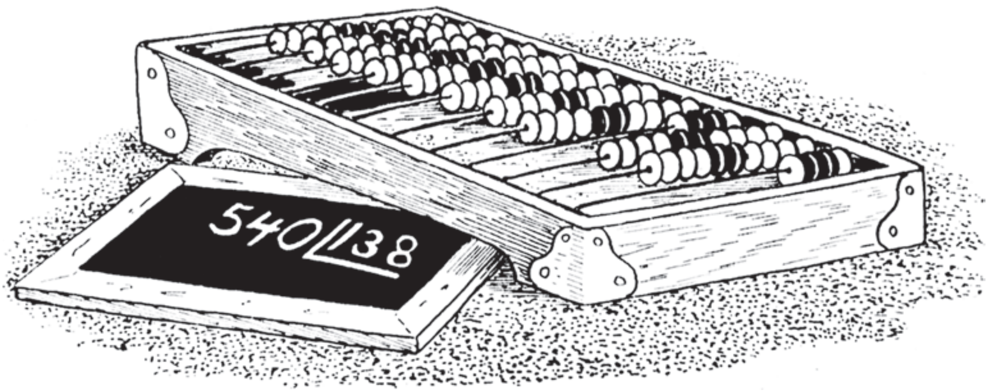
2. Однако задача легко решается и арифметически. Если бы вам пришлось решать ее, она, конечно, не затруднила бы вас. Вы начали бы с предположения, что все купленное сукно было синее, — тогда за всю партию в 138 аршин синего сукна пришлось бы уплатить 5 × 138 = 690 рублей; это на 690 – 540 = 150 рублей больше того, что было заплачено в действительности. Разница в 150 рублей указывает, что в партии имелось и более дешевое, черное сукно по 3 рубля аршин. Дешевого сукна было столько, что из двухрублевой разницы на каждом аршине составилось 150 рублей: очевидно, число аршин черного сукна определится, если разделить 150 на 2. Получаем ответ — 75; вычтя эти 75 аршин из общего числа 138 аршин, узнаем, сколько было синего сукна: 138 – 75 = 63. Так и должен был решать задачу Петя.

3. На очереди третий вопрос: как решил задачу Удодов-старший?

В рассказе говорится об этом очень кратко: «он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было».

В чем же, однако, состояло это «щелканье на счетах»? Каков способ решения задачи с помощью счетов?

Разгадка такова: злополучная задача решается на счетах тем же приемом, что и на бумаге, — теми же арифметическими действиями. Но выполнение их значительно упрощается благодаря преимуществам, которые наши русские счеты предоставляют всякому, умеющему с ними обращаться. Очевидно, «отставной губернский секретарь» Удодов хорошо умел считать на счетах, потому что их косточки быстро, без помощи алгебры, открыли ему то,




чего репетитор-семиклассник добивался узнать «с иксом и игреком». Проследим же, какие действия должен был проделать на счетах Петин отец.

Прежде всего ему нужно было, как мы знаем, умножить 138 на 5. Для этого он, по правилам действий на счетах, умножил сначала 138 на 10, — т. е. просто перенес 138 одной проволокой выше, — а затем разделил это число пополам опять-таки на счетах же. Деление начинают снизу: откидывают половину косточек, отложенных на каждой проволоке; если число косточек на данной проволоке нечетное, то выходят из затруднения, «раздробляя» одну косточку этой проволоки на 10 нижних.

В нашем, например, случае делят 1.380 пополам так: на нижней проволоке, где отложено 8 косточек, откидывают 4 косточки (4 десятка), на средней проволоке из 3 косточек откидывают 1, а оставшуюся 1 косточку заменяют мысленно 10 нижними и делят пополам, добавляя 5 десятков к косточкам нижней; на верхней проволоке раздробляют одну косточку, прибавляя 5 сотен к косточкам средней проволоки. В результате на верхней проволоке совсем не остается косточек; на средней 1 + 5 = 6 сотен, на нижней 4 + 5 = 9 десятков. Итого 690 единиц. Выполняется все это быстро, автоматически.

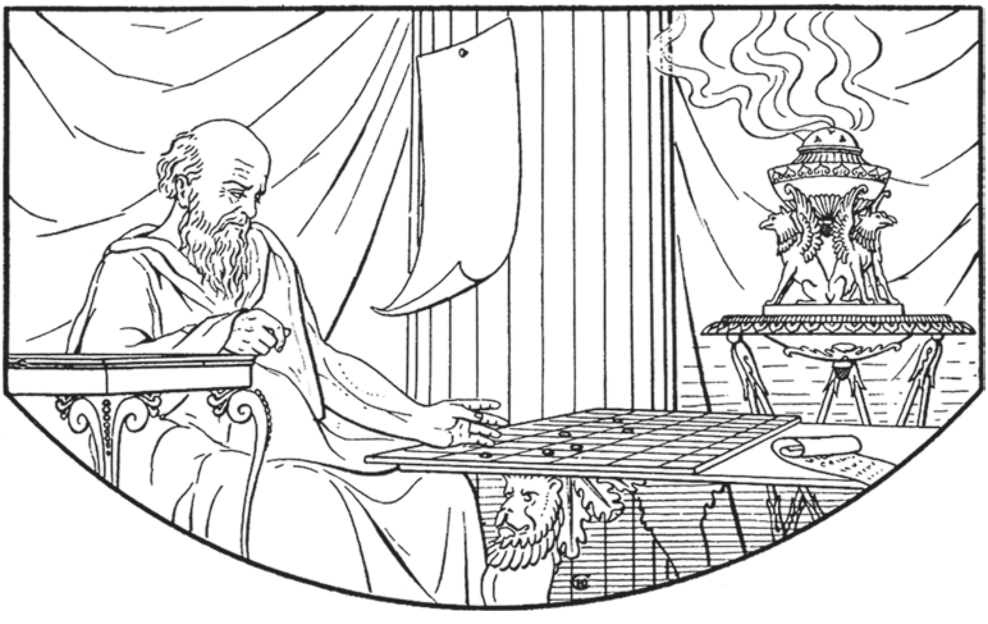
Далее Удодову-старшему нужно было из 690 вычесть 540. Как проделывается это на счетах — всем известно.

Наконец, полученную разность, 150, оставалось разделить пополам: Удодов откинул из 5 косточек (десятков) 2, отдав 5 единиц нижнему ряду косточек; потом из 1 косточки на проволоке сотен отдал 5 десятков нижнему ряду: получилось 7 десятков и 5 единиц, т. е. 75.

Все эти простые действия выполняются на счетах, конечно, гораздо скорее, чем тут описано.

## РУССКИЕ СЧЕТЫ

Есть много полезных вещей, которых мы не ценим только потому, что, постоянно находясь у нас под руками, они превратились в слишком обыкновенный предмет домашнего обихода. К числу таких недостаточно ценимых вещей принадлежат и наши конторские счеты — русская народная счетная машина, представляющая собою лишь видоизменение знаменитого «абака», или «счетной доски» наших отдаленных предков. Древние народы— египтяне, греки, римляне — употребляли при вычислениях счетный прибор «абак», очень походивший на наши десятикосточковые счеты. Это была доска (стол), разграфленная на полосы, по которым передвигали особые шашки, игравшие роль косточек наших счетов. Такой вид имел греческий абак. Абак римский имел форму медной доски с желобами (прорезами), в которых передвигались кнопки. Родственен абаку перуанский «квипос» — ряд ремней или бечевок с завязанными на них узлами; этот счетный прибор получил особенное распространение среди первоначальных обитателей Ю. Америки, но, без сомнения, был в употреблении также и в Европе (см. далее статью «Отголоски старины»). В Средние века вплоть до XVI в. подобные приспособления были широко распространены в Европе. Но в наши дни видоизмененный абак — счеты — сохранился, кажется, только у нас да в Китае (семикосточковые счеты, «суан-пан»[1]. Запад не знает десятикосточковых счетов — вы не найдете



[1] Семикосточковые счеты в Китае чрезвычайно распространены; они имеются всевозможных размеров, до самых миниатюрных (у меня хранится привезенный мне из Китая экземпляр в 17 мм длины и 8 мм ширины).

их ни в одном магазине Европы. Быть может, потому-то мы и не ценим этого счетного прибора так высоко, как он заслуживает, смотрим на него, как на какую-то наивную кустарную самодельщину в области счетных приборов.

Между тем мы вправе были бы гордиться нашими конторскими счетами, так как при изумительной простоте устройства они, по достигаемым на них результатам, могут соперничать в некоторых отношениях даже со сложными, дорогостоящими счетными машинами западных стран. В умелых руках этот нехитрый прибор творит порою настоящие чудеса. Иностранцы, впервые знакомящиеся с нашими счетами, охотно признают это и ценят их выше, нежели мы сами. Специалист, заведывавший одной из крупных русских фирм по продаже счетных машин, рассказывал мне, что ему не раз приходилось изумлять русскими счетами иностранцев, привозивших ему в контору образцы сложных счетных механизмов. Он устраивал состязания между двумя счетчиками, из которых один работал на дорогой заграничной «аддиционной» машине (т. е. машине для сложения), другой же пользовался обыкновенными счетами. И случалось, что последний — правда, большой мастер своего дела — брал верх над обладателем заморской диковинки в быстроте и точности вычислений. Бывало и так, что иностранец, пораженный быстротой работы на счетах, сразу же сдавался и складывал свою машину обратно в чемодан, не надеясь продать в России ни одного экземпляра.

— К чему вам дорогие счетные машины, если вы так искусно считаете при помощи ваших дешевых счетов! — говорили нередко представители иностранных фирм.

А ведь заграничные машины в сотни раз дороже наших конторских счетов!

Правда, на русских счетах нельзя производить всех тех действий, которые выполняются машинами. Но во многом — например, в сложении и вычитании — счеты могут соперничать со сложными механизмами. Впрочем, в искусных руках умножение и деление также значительно ускоряются на счетах, если знать приемы выполнения этих действий.

Познакомимся же с некоторыми из них.

## УМНОЖЕНИЕ НА СЧЕТАХ

Вот несколько приемов, пользуясь которыми всякий, умеющий быстро *складывать* на счетах, сможет проворно выполнять встречающиеся на практике примеры *умножения*.

Умножение на 2 и на 3 заменяется двукратным и троекратным сложением.

При умножении на 4 умножают сначала на 2 и складывают этот результат с самим собою.

Умножение числа на 5 выполняется на счетах так: переносят все число одной проволокой выше, т. е. умножают его на 10, а затем делят это 10-кратное число пополам (как делить на 2 с помощью счетов — мы уже объяснили выше, на с. 26).

Вместо умножения на 6 — умножают на 5 и прибавляют умножаемое.

Вместо умножения на 7 — множат на 10 и отнимают умножаемое 3 раза.

Умножение на 8 заменяют умножением на 10 без 2.

Точно так же множат на 9 — заменяют умножением на 10 без 1.

При умножении на 10 — переносят, как мы уже сказали, все число одной проволокой выше.

Читатель, вероятно, уже и сам сообразит, как надо поступать при умножении на числа больше 10 и какого рода замены тут окажутся наиболее удобными. Множитель 11 надо, конечно, заменить 10 + 1. Множитель 12 заменяют 10 + 2, или практически 2 + 10, т. е. сначала откладывают удвоенное число, а затем прибавляют удесятеренное. Множитель 13 заменяется 10 + 3 и т. д.

Рассмотрим несколько особых случаев для множителей первой сотни:

$20 = 10 \times 2$ $\qquad$ $32 = 22 + 10$
$22 = 11 \times 2$ $\qquad$ $42 = 22 + 20$
$25 = (100 : 2) : 2$ $\qquad$ $43 = 33 + 10$
$26 = 25 + 1$ $\qquad$ $45 = 50 - 5$
$27 = 30 - 3$ $\qquad$ $63 = 33 + 30$ и т. д.

Легко увидеть, между прочим, что с помощью счетов очень удобно умножать на такие числа, как на 22, 33, 44, 55 и т. п.; поэтому надо стремиться при разбивке множителей пользоваться подобными числами с одинаковыми цифрами.

К сходным приемам прибегают и при умножении на числа, бóльшие 100. Если подобные искусственные приемы утомительны, мы всегда, конечно, можем умножить с помощью счетов по общему правилу, умножая каждую цифру множителя и записывая частные произведения, — это все же дает некоторое сокращение времени.

## ДЕЛЕНИЕ НА СЧЕТАХ

Выполнять деление с помощью конторских счетов гораздо труднее, чем умножать; для этого нужно запомнить целый ряд особых приемов, подчас довольно замысловатых. Интересующимся ими придется обратиться к специальным руководствам. Здесь укажу лишь, ради примера, удобные приемы деления с помощью счетов на числа первого десятка (кроме числа 7, способ деления на которое чересчур сложен).

Как делить на 2, мы уже знаем (с. 26) — способ этот очень прост.

Гораздо сложнее прием деления на 3: он состоит в замене деления умножением на бесконечную периодическую дробь 3,3333... (известно, что 0,333 = = ⅓). Умножать с помощью счетов на 3 мы умеем; уменьшать в 10 раз тоже несложно: надо лишь переносить делимое одной проволокой ниже. После недолгого упражнения этот прием деления на 3, на первый взгляд длинноватый, оказывается довольно удобным на практике.

Деление на 4, конечно, заменяется двукратным делением на 2.

Еще проще деление на 5: его заменяют делением на 10 и удвоением результата.

На 6 делят с помощью счетов в два приема: сначала делят на 2, потом полученное делят на 3.

Деление на 7, как мы уже сказали, выполняется с помощью счетов чересчур сложно, и потому здесь излагать его не будем.

На 8 делят в три приема: сначала на 2, потом полученное вновь на 2 и затем еще раз на 2.

Очень интересен прием деления на 9. Он основан на том, что ⅑ = 0,1111... Отсюда ясно, что вместо деления на 9 можно последовательно складывать 0,1 делимого + 0,1 его + 0,001 его и т. д.[1] Всего проще, как видим, делить на 2, 10 и 5, — и, конечно, на такие кратные им числа, как 4, 8, 16, 20, 25, 40, 50, 75, 80, 100. Эти случаи деления не представляют трудности и для малоопытного счетчика.

## УЛУЧШЕНИЕ СЧЕТОВ

### Задача № 7

Какие косточки на наших конторских счетах являются совершенно излишними?

### Решение

Совершенно излишни десятые косточки каждого ряда; можно вполне обойтись 9 косточками на проволоке. В самом деле: когда надо отложить

---

[1] Этот прием полезен и для устного деления на 9.

10-ю косточку, вы отодвигаете все 9 косточек назад, а на следующей проволоке откидываете одну косточку. Другими словами, 10-я косточка на счетах так же не нужна, как не нужна особая цифра для обозначения 10: 9 + 1 есть единица высшего разряда, и ее можно сразу же именно так записать, не обозначая предварительно как принадлежащую к низшему разряду.

## ОТГОЛОСКИ СТАРИНЫ

С отдаленными предками наших конторских счетов связаны некоторые пережитки старины в языке и обычаях. Мало кто подозревает, например, что собственно мы делаем, завязывая «для памяти» узелок на носовом платке. Мы повторяем то, что некогда с бо́льшим смыслом делали наши предки, «записывая» таким образом итог счета на шнурках. Веревка с узлами представляла собой некогда счетный прибор, в принципе аналогичный нашим счетам и, без сомнения, связанный с ними общностью происхождения: это — «веревочный абак».

С абаком же связаны и такие распространенные теперь слова, как «банк» и «чек». «Банк» по-немецки означает *скамья*. Что же общего между финансовым учреждением — «банком» в современном смысле слова — и скамьей? Оказывается, что здесь далеко не простое совпадение названий. *Абак в форме скамьи* был широко распространен в торговых кругах Германии в XV–XVI веках; каждая меняльная лавка или банкирская контора характеризовалась присутствием «счетной скамьи» — естественно, что скамья стала синонимом банка.

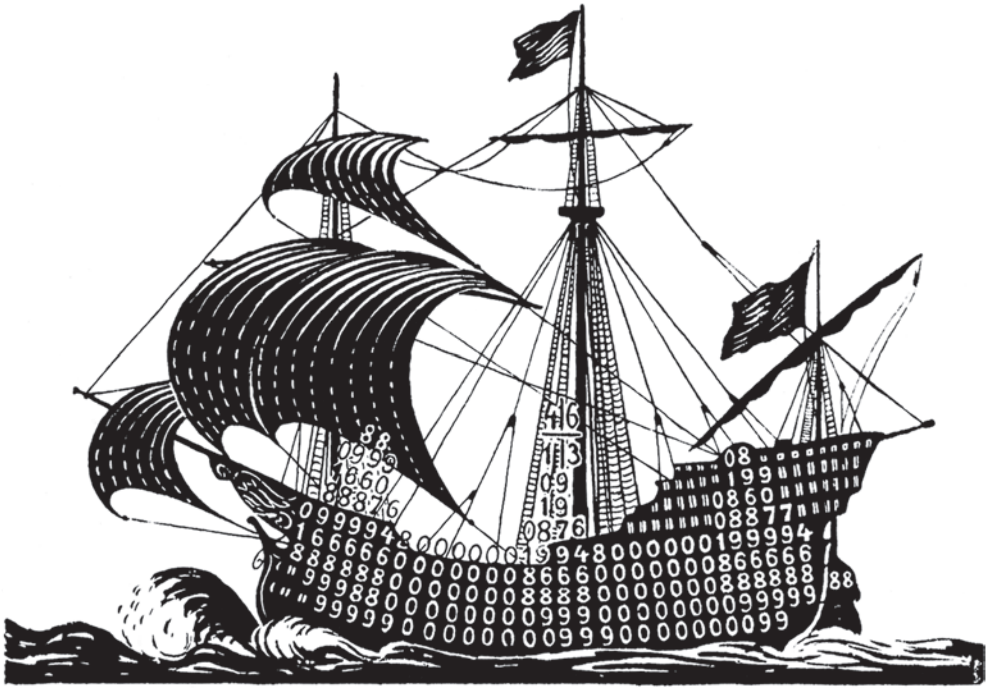
*Образцы перуанских «квипосов» — узловая запись чисел*

Более косвенное отношение к абаку имеет слово «чек». Оно английского происхождения и производится от глагола «чекер» (checker) — графить; «чекеред» (графленый) называли разграфленную в форме абака кожаную салфетку, которую в XVI–XVII веках английские коммерсанты носили с собою в свернутом виде и в случае надобности произвести подсчет развертывали на столе. Бланки для расчетов графились по образцу этих свертывающихся абаков, и неудивительно, что на них перенесено было в сокращенном виде самое название этих счетных приборов: от слова «чекеред» произошло слово «чек».

Любопытно, откуда произошло выражение «остаться на бобах», которое мы применяем теперь к человеку, проигравшему все свои деньги. Оно также древнего происхождения и относится к тому времени, когда все денежные расчеты — в том числе и расчеты между игроками — производились на абаке, на счетном столе или скамье, с помощью бобов, заменявших косточки наших счетов. «Один считает на камешках, другой — на бобах», — читаем у Кампанеллы в «Государстве Солнца» (1602). Человек, проигравший свои деньги, оставался с одними бобами, выражавшими сумму его проигрыша — отсюда и соответствующий оборот речи.

Решение числовых ребусов, предложенных на с. 18:

I — «совпадение»; II — «крепостная»;
III — «уравнитель»



**Глава III**

# НЕМНОГО ИСТОРИИ

## «ТРУДНОЕ ДЕЛО — ДЕЛЕНИЕ»

Зажигая привычным движением спичку, мы иной раз еще задумываемся над тем, каких трудов стоило добывание огня нашим предкам, даже не очень отдаленным. Но мало кто подозревает, что и нынешние способы выполнения арифметических действий тоже не всегда были так просты и удобны, так прямо и быстро приводили к результату. Предки наши пользовались гораздо более громоздкими и медленными приемами. И если бы школьник XX века мог перенестись за четыре, за три века назад, он поразил бы наших предков быстротой и безошибочностью своих арифметических выкладок. Молва о нем облетела бы окрестные школы и монастыри, затмив славу искуснейших счетчиков той эпохи. Со всех концов Европы приезжали бы учиться у нового великого мастера счетного дела.

Особенно сложны и трудны были в старину действия умножения и деления — последнее всего больше. Тогда не существовало еще, как теперь, одного выработанного практикой приема для каждого действия. Напротив, в ходу была одновременно дюжина различных способов умножения и деления —

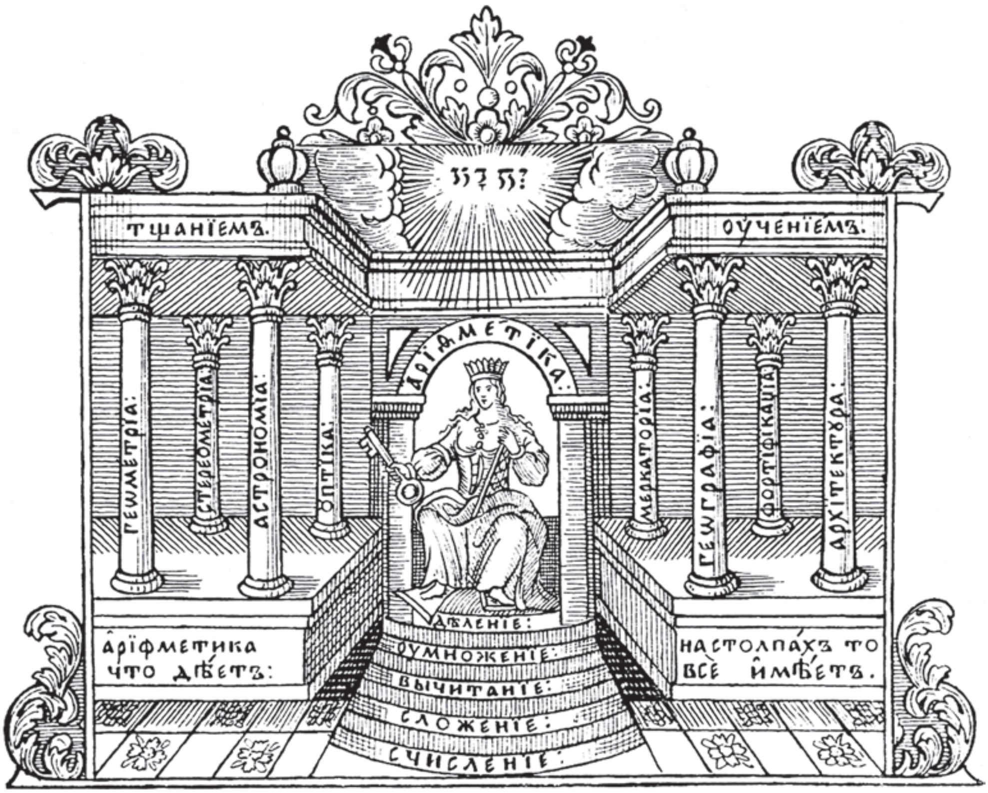
приемы один другого запутаннее, твердо запомнить которые не в силах был человек средних способностей. Каждый учитель счетного дела держался своего излюбленного приема, каждый «магистр деления» (были такие специалисты) изобретал собственный способ выполнения этого действия. И все эти приемы умножения — «шахматами или органчиком», «загибанием», «по частям или в разрыв», «крестиком», «решеткой», «задом наперед», «ромбом», «треугольником», «кубком или чашей», «алмазом» и прочие[1], — а также все способы деления, носившие не менее затейливые наименования, соперничали друг с другом в громоздкости и сложности. Усваивались они с большим трудом и лишь после продолжительной практики. Признавалось даже, что для овладения искусством быстрого и безошибочного умножения и деления многозначных чисел нужно особое природное дарование, исключительные способности; рядовым людям премудрость эта недоступна. «Трудное дело — деление», гласила старинная латинская поговорка; оно и в самом деле было трудно, если принять во внимание утомительные методы, какими выполнялось тогда это действие. Нужды нет, что способы эти носили подчас довольно игривые названия: под веселым названием скрывался длиннейший ряд запутанных манипуляций. В XVI веке кратчайшим и удобнейшим способом считалось, например, деление «лодкой, или галерой». Знаменитый итальянский математик того времени Николай Тарталья (XVI век) в своем обширном учебнике арифметики писал о нем следующее:

«Второй способ деления называется в Венеции[2] *лодкой* или *галерой*, вследствие некоторого сходства фигуры, получающейся при этом, потому что при делении некоторых родов чисел составляется фигура, похожая на лодку, а в других — на галеру, которая в самом деле красиво выглядит; галера получается иной раз хорошо отделанная и снабженная всеми принадлежностями — выкладывается из чисел так, что она действительно представляется в виде галеры с кормою и носом, мачтою, парусами и веслами...»

Читается это очень весело: так и настраиваешься скользить по числовому морю на парусах арифметической галеры. Но хотя старинный математик и рекомендует этот способ как «самый изящный, самый легкий, самый верный, самый употребительный и самый общий из существующих, пригодный для деления всех возможных чисел», — я не решаюсь все же его изложить здесь из опасения, что даже терпеливый читатель закроет книгу в этом скуч-

[1] Перечисленные приемы умножения указаны в старинной «Арифметике» Николая Тартальи. Наш современный способ умножения описывается там под названием «шахматного».

[2] Венеция и некоторые другие государства Италии в XIV–XVI столетиях вели обширную морскую торговлю, и потому в этих странах приемы счета были ради коммерческих надобностей разработаны раньше, чем в других. Лучшие труды по арифметике появились в Венеции. Многие итальянские термины коммерческой арифметики сохранились еще в настоящее время.




*Заставка из «Арифметики» Магницкого (XVIII в.).*
*По экземпляру, принадлежащему Я. И. Перельману*

ном месте и не станет читать дальше. Между тем этот утомительный способ действительно был самым лучшим в ту эпоху, а у нас в России употреблялся до середины XVIII века: в «Арифметике» Леонтия Магницкого[1] он описан в числе шести предлагаемых там способов (из которых ни один не похож на современный) и особенно рекомендуется автором; на протяжении своей объемистой книги — 640 страниц огромного формата — Магницкий пользуется исключительно «способом галеры», не употребляя, впрочем, этого наименования.

[1] Старинный русский учебник математики, охватывающий все ее отделы. Это — одна из тех двух книг, которые Ломоносов назвал «вратами своей учености». Подробное заглавие ее таково:

«Арифметика, сиречь наука числительная, повелением царя Петра Алексеевича в великом граде Москве типографским тиснением ради обучения мудролюбивых российских отроков и всякого чина и возраста людей на свет произведена в лето от Рождества Бога слова 1703».

В заключение покажем читателю эту числовую «галеру», воспользовавшись примером из упомянутой книги Тартальи:

```
                       4 | 6
                       -----
          88           1 | 3          08
        0999             09          199
        1660             19         0860
       88876           0876        08877
       099994800000019948000000199994
       166666000000086660000000866666
Делимое   – 888888000000088880000000888888 (88-частное)
Делитель[1] – 99999000000009990000000099999
              9999000000009990000000099
```

## МУДРЫЙ ОБЫЧАЙ СТАРИНЫ

Добравшись после утомительных трудов до желанного конца арифметического действия, предки наши считали необходимым непременно проверить этот в поте лица добытый итог. Громоздкие приемы вызывали недоверие к их результатам. На длинном извилистом пути легче заблудиться, чем на прямой дороге современных приемов. Отсюда естественно возник старинный обычай *проверять* каждое выполняемое арифметическое действие — похвальное правило, следовать которому не мешало бы и нам.

Любимым приемом поверки был так называемый «способ 9». Этот изящный прием, который полезно и теперь знать каждому, нередко описывается в современных арифметических учебниках, особенно иностранных. Правда, он почему-то мало теперь употребляется на практике, но это нисколько не умаляет его достоинств.

Поверка девяткой основана на «правиле остатков», гласящем: остаток от деления суммы на какое-либо число равен сумме остатков от деления каждого слагаемого на то же число. Точно так же остаток произведения равен произведению остатков множителей. С другой стороны, известно также[2], что при делении числа на 9 получается тот же остаток, что и при делении на 9 суммы цифр этого числа; например, 758 при делении на 9 дает 2, и то же получается в остатке от деления (7 + 5 + 8) на 9. Сопоставив оба указанных

---

[1] Последние две девятки приписаны к делителю в процессе деления.

[2] Выясняется попутно при выводе признака делимости на 9 (читатель найдет вывод в моей «Хрестоматии-задачнике по начальной математике»).

свойства, мы и приходим к приему поверки девяткой, т. е. делением на 9. Покажем на примере, в чем он состоит.

Пусть требуется проверить правильность *сложения* следующего столбца:

$$
\begin{array}{rcr}
38\,932 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 7 \\
1096 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 7 \\
+\,4\,710\,043 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\
589\,106 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 2 \\
\hline
5\,339\,177 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 8
\end{array}
$$

Составляем в уме сумму цифр каждого слагаемого, причем в получающихся попутно числах также складываем цифры (делается это в самом процессе сложения цифр), пока в конечном результате не получим однозначного числа. Результаты эти (остатки от деления на 9) записываем, как показано на примере, рядом с соответствующим слагаемым. Складываем все остатки (7 + 7 + + 1 + 2 = 17; 1 + 7 = 8) — получаем 8. Такова же должна быть сумма цифр итога (5 339 177), если действие выполнено верно: 5 + 3 + 3 + 9 + 1 + 7 + 7 после всех упрощений равно 8.

Поверка *вычитания* выполняется точно так же, если принять уменьшаемое за сумму, а вычитаемое и разность — за слагаемые. Например:

$$
\begin{array}{rcr}
6913 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \times\,1 \\
-\,2587 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 4 \\
\hline
4326 & & 6
\end{array}
$$

$$4 + 6 = 10; \qquad 1 + 0 = 1.$$

Не сложна и поверка *умножения*, как видно из следующего примера:

$$
\begin{array}{rcr}
8713 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 1 \\
\times\,264 & \ldots\ldots\ldots\ldots & \times\,3 \\
\hline
34\,852 & & 3 \\
52\,278\phantom{0} & & \\
17\,426\phantom{00} & & \\
\hline
2\,300\,232 & \ldots\ldots\ldots\ldots & 3
\end{array}
$$

Если при такой поверке умножения обнаружена будет ошибочность результата, то, чтобы определить, *где* именно ошибка кроется, можно поверить способом 9 каждое частное произведение отдельно; а если здесь ошибки не окажется, надо поверить еще и *сложение* частных произведений. Такая поверка сберегает время и труд только при умножении многозначных чисел; при малых числах проще, конечно, выполнить действие заново.

Как поверять по этому способу деление? Если у нас случай деления без остатка, то делимое рассматривается как произведение делителя на частное. В случае же деления с остатком пользуются тем, что делимое = делителю × частное + остаток. Например:

Выписываю из «Арифметики» Магницкого предлагаемое там для поверки девяткой удобное расположение:

$$\text{сумма цифр:}\quad \underbrace{16\,201\,387}_{1} : \underbrace{4457}_{2} = \underbrace{3635}_{8};\qquad \text{остаток } \underbrace{192}_{3}$$

$$2 \times 8 + 3 = 19;\quad 1 + 9 = 10;\quad 1 + 0 = 1.$$

*Для умножения:*

$$\begin{array}{r} 365 \\ \times\ 24 \\ \hline 1460 \\ 730\phantom{0} \\ \hline 8760 \end{array} \qquad \text{«Сие}\quad \begin{array}{ccc} & 5 & \\ & | & \\ 3 & \text{———} & 3 \\ & | & \\ & 6 & \\ \hline & 30 & \end{array}\quad \text{сему согласно, убо добре есть»}$$

*Для деления:*

$$\begin{array}{lccc} & & \text{Частного} & \\ & & 8 & \\ & & | & \\ \text{Делимого} & 1 & \text{———} & 1\quad \text{«Согласно добре делил»} \\ & & | & \\ \text{Делителя} & & 2 & \\ \hline & & 16 & \\ \text{Остатка} & & 3 & \\ \hline \text{Всех} & & 1 & \end{array}$$

Подобная поверка, без сомнения, не оставляет желать лучшей в смысле быстроты и удобства. Нельзя сказать того же о ее *надежности*: ошибка может и ускользнуть от нее. Действительно, ведь одну и ту же сумму цифр могут иметь разные числа; не только перестановка цифр, но иной раз даже и замена одних другими остаются при такой поверке необнаруженными. Укрываются от контроля также лишние девятки и нули, потому что не влияют на сумму цифр. Всецело полагаться поэтому на такой прием поверки было бы неосмотрительно. Предки наши сознавали это и не ограничивались одною лишь поверкой с помощью девятки, но производили еще дополнительную поверку — чаще всего с помощью *семерки*. Этот прием основан на том же «правиле остатков» (с. 36), но не так удобен, как способ девятки, потому что деление на 7 приходится выполнять полностью, чтобы найти остатки (а при этом легко возможны ошибки в действиях самой поверки). Две поверки — девяткой и семеркой — уже являются гораздо более надежным контролем: что ускользнет от одной, будет уловлено другою. Ошибка не обнаружится лишь в том случае, если разность истинного и полученного результатов кратна числу $7 \times 9 = 63$. Так как подобная случайность все же возможна, то и двойная поверка не дает полной уверенности в правильности результата.

Впрочем, для обычных вычислений, где ошибаются чаще всего на 1 или на 2 единицы, можно ограничиться только поверкою девяткой. Дополнительная поверка семеркой чересчур обременительна. Только тот контроль хорош, который не мешает работе.

## ХОРОШО ЛИ МЫ МНОЖИМ?

Старинные способы умножения были неуклюжи и неудобны, но так ли хорош наш нынешний способ, чтобы в нем невозможны были уже никакие дальнейшие улучшения? Нет, наш способ, безусловно, не является совершенным; можно придумать еще более быстрые или еще более надежные. Из нескольких предложенных улучшений (ср. гл. VII) укажем пока одно, увеличивающее не быстроту выполнения действия, а его надежность. Оно состоит в том, что при многозначном множителе начинают с умножения не на последнюю, а на *первую* цифру множителя. Выполненное на с. 37 умножение 8713 × 264 примет при этом такой вид:

$$
\begin{array}{r@{}l}
8713 & \\
\times\ \ 264 & \\
\hline
17\,426 & \\
52\,278 & \\
34\,852 & \\
\hline
2300\,232 &
\end{array}
$$

Преимущество подобного расположения в том, что цифры частных произведений, от которых зависят первые наиболее ответственные цифры результата, получаются в *начале* действия, когда внимание еще не утомлено и, следовательно, вероятность сделать ошибку наименьшая. (Кроме того, способ этот упрощает применение так называемого «сокращенного» умножения, о котором мы здесь распространяться не можем.).

## РУССКИЙ СПОСОБ УМНОЖЕНИЯ

Вы не можете выполнить умножения многозначных чисел, — хотя бы даже двузначных — если не помните наизусть всех результатов умножения однозначных чисел, т. е. того, что называется таблицей умножения. В старинной «Арифметике» Магницкого, о которой мы раньше упоминали, необходимость твердого знания таблицы умножения воспета в таких — надо сознаться, чуждых для современного слуха — стихах:

Аще кто не твердит  
таблицы и гордит,  
Не может познати  
числом что множати

И во всей науки,  
несвобод от муки,  
Колико не учит  
туне ся удручит

И в пользу не будет  
аще ю забудет.

Автор этих стихов, очевидно, не знал или упустил из виду, что существует способ перемножать числа и без знания таблицы умножения. Способ этот, не похожий на наши школьные приемы, употребителен в обиходе великорусских крестьян и унаследован ими от глубокой древности. Сущность его в том, что умножение любых двух чисел сводится к ряду последовательных делений одного числа пополам при одновременном удвоении другого числа.

Вот пример:

$$\begin{array}{r@{\times}r} 32 & 13 \\ 16 & 26 \\ 8 & 52 \\ 4 & 104 \\ 2 & 208 \\ 1 & 416 \end{array}$$

Деление пополам продолжают до тех пор, пока в частном не получится 1, параллельно удваивая другое число. Последнее удвоенное число и дает искомый результат. Нетрудно понять, на чем этот способ основан: произведение не изменяется, если один множитель уменьшить вдвое, а другой вдвое же увеличить. Ясно поэтому, что в результате многократного повторения этой операции получается искомое произведение:

$$32 \times 13 = 1 \times 416.$$

### Задача № 8

Однако как поступать, если при этом приходится делить пополам число нечетное?

Народный способ легко выходит из этого затруднения. Надо — гласит правило — в случае нечетного числа откинуть единицу и делить остаток пополам; но зато к последнему числу правого столбца нужно будет *прибавить* все те числа этого столбца, которые стоят против *нечетных* чисел левого столбца: сумма и будет искомым произведением. Практически это делают так, что все строки с четными левыми числами зачеркивают; остаются только те, которые содержат налево нечетное число. Приведем пример (звездочка указывает, что данную строку надо зачеркнуть):

$$\begin{array}{r} 19 \times \phantom{0}17 \\ 9 \times \phantom{0}34 \\ 4 \times \phantom{0}68^{*} \\ 2 \times 136^{*} \\ 1 \times 272 \end{array}$$

Сложив незачеркнутые числа, получаем вполне правильный результат:

$$17 + 34 + 272 = 323.$$

На чем основан этот прием?

**Решение**

Обоснованность этого приема станет ясна, если принять во внимание, что

$$19 \times 17 = (18 + 1)\,17 = 18 \times 17 + 17$$
$$9 \times 34 = (\ \ 8 + 1)\,34 = \ \ 8 \times 34 + 34, \text{ и т. п.}$$

Ясно, что числа 17, 34 и т. п., утрачиваемые при делении нечетного числа пополам, необходимо прибавить к результату последнего умножения, чтобы получить произведение.

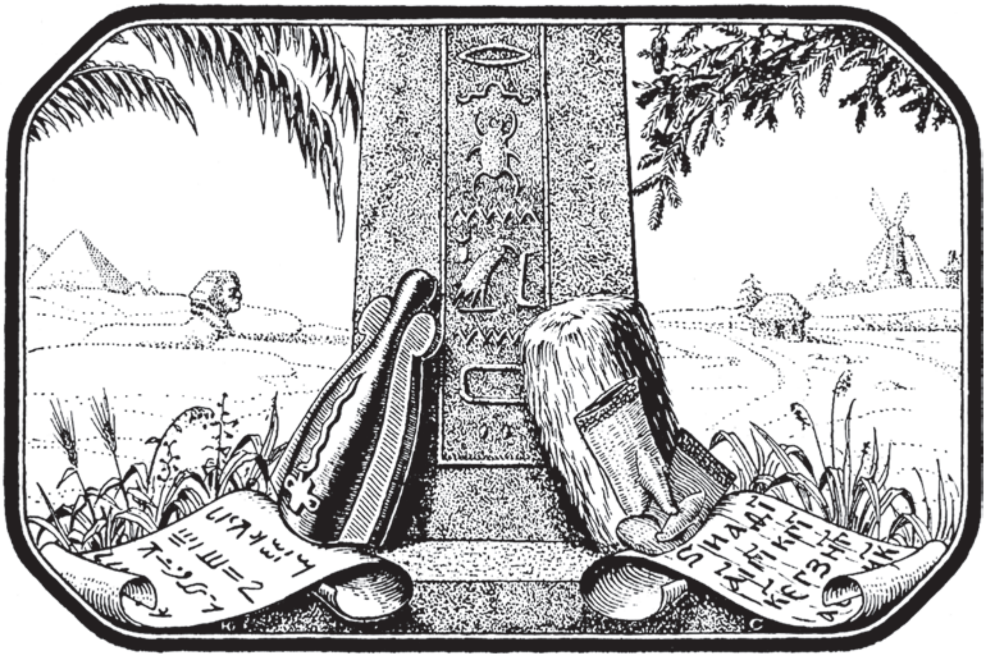
Нельзя, как видите, отказать в практичности этому народному приему умножения, который один научный английский журнал (*Knowledge* — «Знание») окрестил незадолго до мировой войны «русским крестьянским» способом.

**АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ**

$$95 + 1 + \tfrac{6}{7} + \tfrac{4}{28} + 3 = 100$$
$$98 + 1 + \tfrac{3}{6} + \tfrac{27}{54} = 100$$

Подыщите еще и другие способы составления числа 100 помощью девяти значащих цифр, употребленных по одному разу.

(См. с. 44)



## ИЗ СТРАНЫ ПИРАМИД

Весьма вероятно, что сейчас описанный способ дошел до нас из глубочайшей древности и из отдаленной страны — из Египта. Мы мало знаем, как производили действия обитатели древней Страны пирамид. Но сохранился любопытный памятник — папирус, на котором записаны арифметические упражнения ученика одной из землемерных школ Древнего Египта; это так называемый папирус Ринда, относящийся ко времени между 2000 и 1700 гг. до нашей эры[1] и представляющий собою копию еще более древней рукописи, переписанную неким Аамесом. Писец[2] Аамес, найдя «ученическую тетрадку» этой отдаленнейшей эпохи, тщательно переписал все арифметические упражнения будущего землемера, — вместе с их ошибками и исправлениями учителя, — и дал своему списку торжественное заглавие, которое дошло до нас в следующем неполном виде:

[1] Папирус был разыскан английским египтологом Генри Риндом. Он оказался заключенным в металлический футляр. В развернутом виде имеет 20 метров длины при 30 сантиметрах ширины. Хранится в Британском музее в Лондоне.

[2] Звание «писец» принадлежало третьему классу египетских жрецов; в заведывании их находилось «все относившееся к строительной части храма и к его земельной собственности». Математические, астрономические и географические знания составляли их главную специальность (В. Бобынин).

«Наставление, как достигнуть знания всех темных вещей... всех тайн, сокрытых в вещах.

Составлено при царе Верхнего и Нижнего Египта Ра-а-усе, дающем жизнь, по образцу древних сочинений времен царя Ра-ен-мата писцом Аамесом».

В этом интересном документе, насчитывающем за собою около 40 веков и свидетельствующем о еще более глубокой древности, мы находим четыре примера умножения, выполненные по способу, живо напоминающему наш русский народный способ. Вот эти примеры (точки впереди чисел обозначают число единиц множителя; знаком + мы отметили числа, подлежащие сложению):

| | |
|---|---|
| (8×8) | (9×9) |
| . 8 | . 9 + |
| . . 16 | . . 18 |
| . . . . 32 | . . . . 36 |
| : : : : 64 | : : : : 72 + |
| | Итог . . . . 81 |

| | |
|---|---|
| (8×365) | (7×2801) |
| . 365 | . 2801 + |
| . . 730 | . . 5602 + |
| . . . . 1460 | . . . . 11 204 + |
| : : : : 2920 | Итог . . . 19 607 |

Вы видите из этих примеров, что еще за тысячелетия до нас египтяне пользовались приемом умножения, довольно сходным с нашим крестьянским, и что неведомыми путями он как бы перекочевал из древней Страны пирамид в современную русскую деревню. Если бы обитателю земли фараонов предложили перемножить, например, 19 × 17, он произвел бы это действие следующим образом: написал бы ряд последовательных удвоений числа 17

| | |
|---|---|
| 1 | 17 + |
| 2 | 34 + |
| 4 | 68 |
| 8 | 136 |
| 16 | 272 + |

и затем сложил бы те числа, которые отмечены здесь знаком +, т. е. 17 + 34 + + 272. Он получил бы, конечно, вполне правильный результат:

$$17 + (2 \times 17) + (16 \times 17) = 19 \times 17.$$

Легко увидеть, что подобный прием по существу весьма близок к нашему «крестьянскому» (замена умножения рядом последовательных удвоений).

Трудно сказать, у одних ли русских крестьян сохранился в настоящее время такой древний способ умножения; английские авторы называют его именно «русским крестьянским способом»; в Германии простой народ кое-где хотя и пользуется им, но также называет его «русским».

Чрезвычайно интересно было бы получить от читателей сведения о том, применяется ли в их местности этот древний способ умножения, имеющий за собой такое долгое и оригинальное прошлое[1].

Следовало бы вообще с бо́льшим вниманием относиться к народной математике: вникать в употребляемые народом приемы счета и измерений, собирать и записывать эти памятники народного математического творчества, дошедшие до нашего времени из глубин седой старины. На это уже давно указывал историк математики В. В. Бобынин, предложивший даже краткую программу собирания памятников народной математики. Нелишним будет привести здесь составленный им перечень того, что именно следует собирать и записывать:

1. Счисление и счет. 2. Приемы меры и веса. 3. Геометрические сведения и их выражение в постройках, нарядах и украшениях. 4. Способы межевания. 5. Народные задачи. 6. Пословицы, загадки и вообще произведения народной словесности, имеющие отношение к математическим знаниям. 7. Памятники древней народной математики, находящиеся в рукописях, музеях, коллекциях и т. д. или находимые при раскопках курганов, могил, городищ и пр.

**АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ**

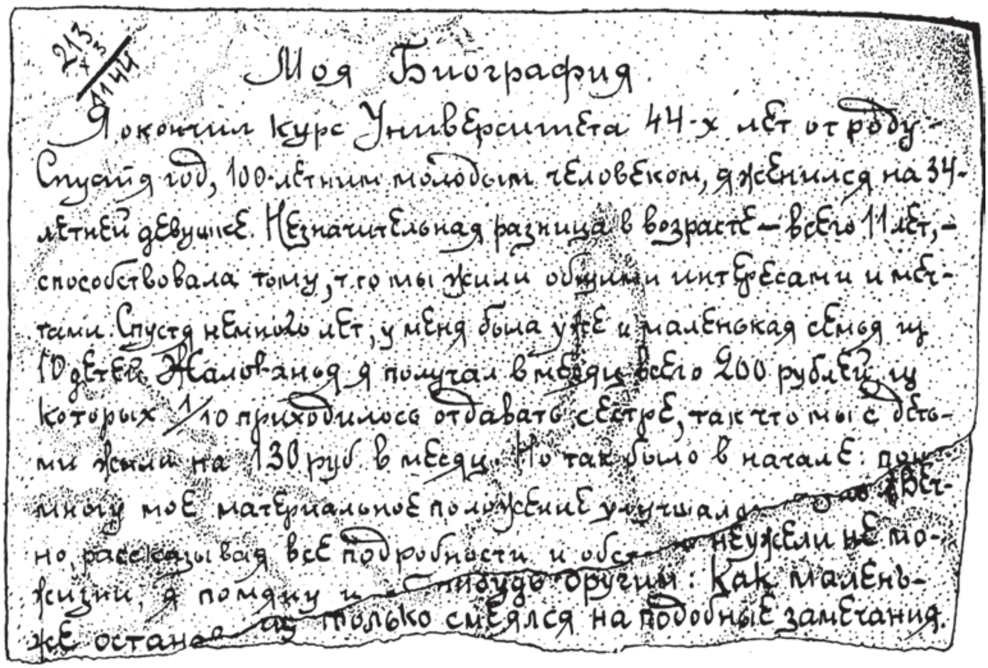
(См. с. 41)

$$91 + \frac{5823}{647} = 100$$

$$94 + \frac{1578}{263} = 100$$

$$96 + \frac{1428}{357} = 100$$

[1] Одним из весьма важных источников пополнения книг Перельмана новыми материалами были письма читателей. Начиная с 1915 года Перельман практически во всех своих книгах указывал домашний адрес и просил писать непосредственно ему. Количество приходивших писем было огромно. Запись на листке его настольного календаря за 3 июля 1939 года: «В июне получил 197 писем» (*примеч. ред.)*.


Моя Биография
Я окончил курс Университета 44-х лет от роду. Спустя год, 100-летним молодым человеком, я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 11 лет, — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет, у меня была уже и маленькая семья из 10 детей. Жалованья я получал в месяц всего 200 рублей, из которых 1/10 приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 130 руб. в месяц. Но так было в начале: по-
много мое материальное положение улучшалось
но, рассказывая все подробности и обст... неужели не мо-
жизни, я помяну и ... нибудь другим: Как малень-
же остан... только смеялся на подобные замечания.

**Глава IV**

# НЕДЕСЯТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

## ЗАГАДОЧНАЯ АВТОБИОГРАФИЯ

Эту главу позволю себе начать с задачи, которую я придумал когда-то для читателей одного распространенного тогда журнала[1] в качестве «задачи на премию». Вот она.

### Задача № 9

*«Загадочная автобиография»*

В бумагах одного чудака-математика найдена была его автобиография. Она начиналась следующими строками:

*«Я окончил курс университета 44 лет от роду. Спустя год, 100-летним молодым человеком, я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 11 лет — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет у меня была уже и маленькая семья из 10 детей. Жалованья*

[1] «Природа и люди» (потом она была перепечатана в сборнике Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки»).

*я получал в месяц всего 200 рублей, из которых 110 приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 130 руб. в месяц»* и т. д.

Чем объяснить странные противоречия в числах этого отрывка?

**Решение**

Решение задачи подсказывается названием этой главы: недесятичная система счисления — вот единственная причина кажущейся противоречивости приведенных чисел. Напав на эту мысль, нетрудно догадаться, в какой именно системе счисления изображены числа чудаком-математиком. Секрет выдается фразой: «спустя год (после 44-летнего возраста), 100-летним молодым человеком...» Если от прибавления одной единицы число 44 преображается в 100, то, значит, цифра 4 — *наибольшая* в этой системе (как 9 — в десятичной), а следовательно, основанием системы является 5. Чудаку-математику пришла фантазия написать все числа своей биографии по *пятеричной системе счисления*, т. е. по такой, в которой единица высшего разряда не в 10, а в 5 раз больше единицы низшего; на первом справа месте стоят в ней простые единицы (не свыше четырех), на втором — не десятки, а пятерки; на третьем не сотни, а «двадцатипятерки» и т. д. Поэтому число, изображенное в тексте записки «44», означает не $4 \times 10 + 4$, как в десятичной системе, а $4 \times 5 + 4$, т. е. двадцать четыре. Точно так же число «100» в автобиографии означает одну единицу третьего разряда в пятеричной системе, т. е. 25. Остальные числа записки соответственно означают:

$$
\begin{aligned}
«\ 34\ » &= 3 \times 5 + 4 = 19 \\
«\ 11\ » &= 5 + 1 = 6 \\
«\ 200\ » &= 2 \times 25 = 50 \\
«\ 10\ » &= 5 \\
«\ 1/10\ » &= 1/5 \\
«\ 130\ » &= 25 + 3 \times 5 = 40
\end{aligned}
$$

Восстановив истинный смысл чисел записки, мы видим, что в ней никаких противоречий нет.

*«Я окончил курс 24 лет от роду. Спустя год, 25-летним молодым человеком, я женился на 19-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 6 лет — способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного лет у меня была уже и маленькая семья из 5 детей. Жалованья я получал 50 рублей, из которых 1/5 приходилось отдавать сестре, так что мы с детьми жили на 40 рублей».*

Трудно ли изображать числа в других системах счисления? Нисколько. Положим, вы желаете число 119 изобразить в пятеричной системе. Делите 119 на 5, чтобы узнать, сколько в нем единиц *первого* разряда:

$$119 : 5 = 23, \text{ остаток } 4.$$

Значит, число простых единиц будет 4. Далее, 23 пятерки не могут стоять все во втором разряде, так как высшая цифра в пятеричной системе — 4, и больше 4 единиц ни в одном разряде быть не должно. Делим поэтому 23 на 5:

$$23 : 5 = 4, \text{ остаток } 3.$$

Это показывает, что во втором разряде («пятерок») будет цифра 3, а в третьем («двадцатипятерок») — 4.

Итак,

$$119 = 4 \times 25 + 3 \times 5 + 4, \text{ или в } \textit{пятеричной} \text{ системе «434».}$$

Сделанные действия для удобства располагают так:

$$\begin{array}{rrr}
119 & \mid\; 5 & \\ \hline
\mathit{4} & \mid 23 & \mid 5 \\ \cline{2-3}
 & \mathit{3} & \mid \mathit{4}
\end{array}$$

Курсивные цифры (при письме можно их подчеркивать) выписывают справа налево и сразу получают искомое изображение числа в иной системе.

Приведем еще примеры.

**Задача № 10**

Изобразить 47 в *третичной* системе.

**Решение**

$$\begin{array}{rrrr}
47 & \mid\; 3 & & \\ \hline
\mathit{2} & \mid 15 & \mid 3 & \\ \cline{2-3}
 & \mathit{0} & \mid 5 & \mid 3 \\ \cline{3-4}
 & & \mathit{2} & \mid \mathit{1}
\end{array}$$

*Ответ*: «1202». Поверка: 1 × 27 + 2 × 9 + 0 × 9 + 2 = 47.

**Задача № 11**

Число 200 изобразить в *семеричной* системе.

**Решение**

$$\begin{array}{rrr}
200 & \mid\; 7 & \\ \cline{2-2}
14 & \mid 28 & \mid 7 \\ \hline
60 & \mathit{0} & \mid \mathit{4} \\ \cline{1-1}
\mathit{4} & &
\end{array}$$

*Ответ*: «404». Поверка: 4 × 49 + 0 × 7 + 4 = 200.

### Задача № 12

Число 163 изобразить в двенадцатеричной системе.

### Решение

$$\begin{array}{r|l}
163 & 12 \\
43 & 13 \mid 12 \\
\hline
\mathit{7} & \mathit{1} \mid \mathit{1}
\end{array}$$

*Ответ*: «117». Поверка: 1 × 144 + 1 × 12 + 7 = 163.

Думаем, что теперь читатель не затруднится изобразить любое число в какой угодно системе счисления. Единственная помеха может возникнуть лишь вследствие того, что в некоторых случаях не будет доставать *изображений для цифр*. В самом деле: при изображении числа в системах с основанием более десяти (например, в двенадцатеричной) может явиться надобность в цифрах *«десять»* и *«одиннадцать»*. Из этого затруднения нетрудно выйти, избрав для этих новых цифр какие-нибудь условные знаки или буквы, — хотя бы, например, буквы К и Л, стоящие в русском алфавите на 10-м и 11-м месте[1]. Так, число 1579 в двенадцатеричной системе изобразится следующим образом:

$$\begin{array}{r|l}
1579 & 12 \\
12 & 131 \mid 12 \\
\hline
37 & \mathit{11} \mid \mathit{10} \\
19 & \\
\hline
\mathit{7} &
\end{array}
\qquad «(10)(11)7», \text{ или КЛ 7}$$

Поверка: 10 × 144 + 11 × 12 + 7 = 1579.

### Задача № 13

Выразить число 1926 в двенадцатеричной системе[2].

### Задача № 14

Выразить число 273 в двадцатеричной системе[3].

---

[1] В настоящее время двенадцатеричная система практически не используется, но огромное распространение в связи с появлением компьютеров получили двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления. В качестве цифр шестнадцатеричной системы используются цифры от 0 до 9 и латинские буквы от A до F (*примеч. ред.*).

[2] Ответ 1146.

[3] Ответ НН, где буквою Н обозначена цифра 13.

## ПРОСТЕЙШАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Вообще, нетрудно сообразить, что в каждой системе высшая цифра, какая может понадобиться, равна основанию этой системы без единицы. Например, в 10-ричной системе высшая цифра 9, в 6-ричной — 5, в троичной — 2, в 15-ричной — 14, и т. д.

Самая простая система счисления, конечно, та, для которой требуется меньше всего цифр. В десятичной системе нужны 10 цифр (считая и 0), в пятеричной — 5 цифр, в троичной — 3 цифры (1, 2 и 0), в двоичной — только 2 цифры (1 и 0). Существует ли «единичная» система? Конечно: это система, в которой единицы высшего разряда в один раз больше единицы низшего, т. е. равны ей; другими словами, «единичной» можно назвать такую систему, в которой единицы всех разрядов имеют *одинаковое* значение. Это самая примитивная система; ею пользуется первобытный человек, делая на дереве зарубки по числу сосчитываемых предметов. Но между нею и всеми другими системами счета есть громадная разница: в ней нет главной особенности нашей нумерации — так называемого *поместного значения цифр*. Действительно: в «единичной» системе знак, стоящий на 3-м или на 5-м месте, имеет то же значение, что и стоящий на первом месте. Между тем даже в двоичной системе единица на 3-м месте (справа) уже в 4 раза (2 × 2) больше, чем на 1-м, а на 5-м — в 16 раз больше (2 × 2 × 2 × 2). Поэтому система «единичная» дает нам очень мало выгоды, так как для изображения какого-нибудь числа по этой системе нужно ровно столько же знаков, сколько было сосчитано предметов: чтобы записать сто предметов, нужно сто знаков, в двоичной же — только семь («1100100»), а в пятеричной — всего три («400»).

Вот почему «единичную» систему едва ли можно назвать «системой»; по крайней мере, ее нельзя поставить рядом с остальными, так как она принципиально от них отличается, не давая никакой экономии в изображении чисел. Если же ее откинуть, то простейшей системой счисления нужно признать систему двоичную, в которой употребляются всего две цифры: 1 и 0. При помощи 1 и 0 можно изобразить все бесконечное множество чисел! На практике эта система мало удобна — получаются слишком длинные числа[1]; но теоретически она имеет все права считаться простейшей. Она обладает некоторыми любопытными особенностями, присущими только ей одной[2]; особенностями этими, между прочим, можно воспользоваться для выполнения целого ряда эффектных математических фокусов, о которых мы скоро побеседуем подробно в главе «Фокусы без обмана».

---

[1] Зато, как увидим далее, для такой системы до крайности упрощаются таблица сложения и таблица умножения.

[2] Благодаря реализации в цифровых электронных схемах, двоичная система используется во всех компьютерах и вычислительных электронных устройствах (*примеч. ред.*).

## НЕОБЫЧАЙНАЯ АРИФМЕТИКА

**Задача № 15**

К арифметическим действиям мы привыкли настолько, что выполняем их автоматически, почти не думая о том, что мы делаем. Но те же действия потребуют от нас немалого напряжения, если мы пожелаем применить их к числам, написанным не по десятичной системе. Попробуйте, например, выполнить сложение следующих двух чисел, написанных по пятеричной системе:

$$+\begin{array}{r}\text{«4203»}\\ \underline{\text{«2132»}}\end{array}\quad \text{(по пятеричной системе)}$$

**Решение**

Складываем по разрядам, начиная с единиц, т. е. справа: 3 + 2 равно 5; но мы не можем записать 5, потому что такой цифры в пятеричной системе не существует: 5 есть уже единица высшего разряда. Значит, в сумме вовсе нет единиц; пишем 0, а 5, т. е. 1 следующего разряда, удерживаем в уме. Далее, 0 + 3 = 3, да еще 1, удержанная в уме, — всего 4 единицы второго разряда. В третьем разряде получаем 2 + 1 = 3. В четвертом 4 + 2 = 6, т. е. 5 + 1; пишем 1, а 5, т. е. 1 высшего разряда, относим далее влево. Искомая сумма = 11 340.

$$+\begin{array}{r}\text{«4203»}\\ \underline{\text{«2132»}}\\ \text{«11340»}\end{array}\quad \text{(в пятеричной системе)}$$

Предоставляем читателю проверить это сложение, предварительно переведя изображенные в кавычках числа в десятичную систему и выполнив то же действие.

Точно так же выполняются и другие действия. Для упражнения приводим далее ряд примеров, число которых читатель при желании может увеличить самостоятельно:

| | **Задача № 16** | **Задача № 17** | **Задача № 18** |
|---|---|---|---|
| По пятеричной системе | $-\begin{array}{r}\text{«2143»}\\ \underline{\text{«334»}}\end{array}$ | $\times\begin{array}{r}\text{«213»}\\ \underline{\text{«3»}}\end{array}$ | $\times\begin{array}{r}\text{«42»}\\ \underline{\text{«31»}}\end{array}$ |

| | **Задача № 19** | **Задача № 20** | **Задачи № 21** и **№ 22** |
|---|---|---|---|
| По троичной системе | $\begin{array}{r}\text{«212»}\\ +\ \text{«120»}\\ \underline{\text{«201»}}\end{array}$ | $\times\begin{array}{r}\text{«122»}\\ \underline{\text{«20»}}\end{array}$ | «220» : 2 =<br>«201» : 2 = |

*Ответы*:

№ 16 — «1304». № 17 — «1144». № 18 — «2402». № 19 — «2010». № 20 — «10210». № 21 — «110». № 22 — «10», остаток «11».

При выполнении этих действий мы сначала мысленно изображаем написанные числа в привычной нам десятичной системе, а получив результат, снова изображаем его в требуемой недесятичной системе. Но можно поступать и иначе: составить «таблицу сложения» и «таблицу умножения» в тех же системах, в которых даны нам числа, и пользоваться ими непосредственно. Например, таблица сложения в *пятеричной* системе такова:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 10 |
| 2 | 3 | 4 | 10 | 11 |
| 3 | 4 | 10 | 11 | 12 |
| 4 | 10 | 11 | 12 | 13 |

С помощью этой таблички мы могли бы сложить числа «4203» и «2132», написанные в пятеричной системе, гораздо менее напрягая внимание, чем при способе, примененном раньше.

Упрощается, как легко понять, также выполнение вычитания.

### Задача № 23

Составим и таблицу умножения («Пифагорову») для *пятеричной* системы.

### Решение

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 4 | 11 | 13 |
| 3 | 11 | 14 | 22 |
| 4 | 13 | 22 | 31 |

Имея эту табличку перед глазами, вы опять-таки можете облегчить себе труд умножения (и деления) чисел в пятеричной системе, — как легко убедиться, применив ее к приведенным выше примерам. Например, при умножении

$$\text{По пятеричной системе}\left.\right\}\quad \times\begin{array}{r}«213»\\ «3»\\ \hline «1144»\end{array}$$

рассуждаем так: трижды три «14» (из таблицы); 4 пишем, 1 — в уме. Один на 3 дает 3, да еще один — пишем 4. Дважды три = «11»; 1 — пишем, 1 — переносим влево. Получаем в результате «1144».

Чем меньше основание системы, тем меньше и соответствующие таблицы сложения и умножения. Например, для троичной системы обе таблицы таковы:

Таблица сложения для троичной системы:

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 |
| 1 | 2 | 10 |
| 2 | 10 | 11 |

Пифагорова таблица сложения для троичной системы:

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 11 |

Их можно было бы сразу же запомнить и пользоваться ими для выполнения действий. Самые маленькие таблицы сложения и вычитания получаются для *двоичной* системы:

Таблица сложения для двоичной системы:

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 10 |

Таблица умножения для двоичной системы:

| |
|---|
| 1 × 1 = 1 |

При помощи таких простых таблиц можно выполнять в двоичной системе *все четыре действия*! Умножения в этой системе, в сущности, как бы и вовсе нет: ведь умножить на единицу значит оставить число без изменения; умножение же на «10», «100», «1000» и т. п. сводится к простому приписыванию справа соответствующего числа нулей. Что же касается сложения, то для выполнения его нужно помнить только одно — что в двоичной системе 1 + 1 = 10. Не правда ли, мы с полным основанием назвали раньше двоичную систему самой простой из всех возможных? Длина чисел этой своеобразной арифметики искупается простотой выполнения над ними всех арифметических действий.

Пусть требуется, например, умножить

$$\text{В двоичной системе}\quad\left\{\begin{array}{r} \times\ \text{«1001011101»} \\ \text{«100101»} \\ \hline \text{«1001011101»} \\ +\quad \text{«1001011101»}\phantom{000} \\ \text{«1001011101»}\phantom{00000} \\ \hline \text{«101011101110001»} \end{array}\right.$$

Выполнение действия сводится только к переписыванию данных чисел в надлежащем расположении: это требует несравненно меньше умственных усилий, чем умножение тех же чисел в десятичной системе (605 × 37 = = 22385). Если бы у нас была принята двоичная система, изучение *письменного* счисления требовало бы наименьшего напряжения мысли (зато — наибольшего количества бумаги и чернил). Однако в *устном* счете двоичная арифметика по удобству выполнения действий значительно уступает нашей десятичной.

## ЧЕТ ИЛИ НЕЧЕТ?

### Задача № 24

Не видя числа, трудно, конечно, угадать, какое оно — четное или нечетное. Но не думайте, что вы всегда сможете сказать это, едва увидите задаваемое число. Скажите, например: четное или нечетное число 16?

Если вам известно, что оно написано по десятичной системе, то, без сомнения, можно утверждать, что число это — четное. Но когда оно написано по какой-либо другой системе — можно ли быть уверенным, что оно изображает непременно четное число?

### Решение

Оказывается, нет. Если основание, например, семь, то «16» означает 7 + 6 = 13, число нечетное. То же будет и для всякого нечетного основания (потому что всякое нечетное число + 6 = нечетному числу).

Отсюда вывод, что знакомый нам признак делимости на два (последняя цифра четная) безусловно пригоден только для десятичной системы счисления, для других же — не всегда. А именно, он верен только для систем счисления с *четным* основанием: 6-ричной, 8-ричной и т. п. Каков же признак делимости на 2 для систем с *нечетным* основанием? Достаточно краткого размышления, чтобы установить его: сумма цифр должна быть четной.

Например, число «136» четное во всякой системе счисления, даже и с нечетным основанием; действительно, в последнем случае имеем: нечетные числа[1] + нечетное число + четное = четному числу.

С такою же осторожностью надо отнестись к задаче: всегда ли число 25 делится на 5? В 7-ричной или в 8-ричной системах изображенное так число на 5 не делится (потому что оно равно девятнадцати или двадцати одному). Точно так же общеизвестный признак делимости на 9 (сумма цифр...) правилен только для десятичной системы. Напротив, в пятеричной системе тот же признак применим для делимости на 4, а, например, в семеричной — на 6. Так, число «323» в пятеричной системе делится на 4, потому что 3 + 2 + + 3 = 8, а число «51» в семеричной — на 6 (легко убедиться, переведя числа в десятичную систему: получим соответственно 88 и 36). Почему это так, читатель сам сможет сообразить, если вникнет хорошенько в вывод признака делимости на 9 и приложит те же рассуждения, соответственно измененные, например, к семеричной системе для вывода признака делимости на 6.

Труднее доказать чисто арифметическим путем справедливость следующих положений:

$$\left.\begin{array}{r} 121 : 11 = \ \ 11 \\ 144 : 12 = \ \ 12 \\ 21 \times 21 = 441 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{во всех системах счисления} \\ \text{(где имеются соответствующие цифры)} \end{array}$$

Знакомые с основами алгебры легко найдут основание, объясняющее свойство этих равенств. Остальные читатели могут проверить их рядом проб для разных систем счисления.

## ДРОБИ БЕЗ ЗНАМЕНАТЕЛЯ

Мы привыкли к тому, что без знаменателя пишутся только *десятичные* дроби. Поэтому на первый взгляд кажется, что написать прямо без знаменателя дробь $\frac{2}{7}$ или $\frac{1}{3}$ нельзя. Дело представится нам, однако, иначе, если вспомним, что дроби без знаменателя возможны и в *других системах* счисления. Что, например, означает дробь «0,4» в пятеричной системе? Конечно, $\frac{4}{5}$. Дробь «1,2» в семеричной системе означает $\frac{12}{7}$. А что означает в той же семеричной системе дробь «0,33»? Здесь результат сложнее: $\frac{3}{7}$ + + $\frac{3}{49}$ = $\frac{24}{49}$.

[1] Нечетное число, умноженное на себя (т. е. на нечетное) всегда дает нечетное число (например, 7 × 7 = 49, 11 × 11 = 121 и т. п.)

### Задача № 25

Рассмотрим еще несколько недесятичных дробей без знаменателя. Чему равны:

a) «2,121» в троичной системе?
b) «1,011» в двоичной системе?
c) «3,431» в пятеричной системе?
d) «2,(5)» в семеричной системе?

*Ответы:*

a) $2 + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = 2\frac{16}{27}$;
b) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{3}{8}$;
c) $3 + \frac{4}{5} + \frac{3}{25} + \frac{1}{125} = 3\frac{116}{125}$;
d) $2 + \frac{5}{7} + \frac{5}{49} + \frac{5}{343} + \ldots = 2\frac{5}{6}$.

В правильности последнего равенства читатель легко может убедиться, если попробует применить к данному случаю, с соответствующим видоизменением, рассуждения, относящиеся к превращению десятичных периодических дробей в простые.

В заключение рассмотрим еще две задачи особого рода:

### Задача № 26

По какой системе счисления выполнено следующее сложение:

$$\begin{array}{r} 756 \\ +\;\; 307 \\ 2456 \\ 24 \\ \hline 3767 \end{array}$$

### Задача № 27

По какой системе счисления выполнено деление:

$$\begin{array}{l} 4415400 : 4532 = 543 \\ \underline{40344} \\ \;\;34100 \\ \;\;\underline{31412} \\ \;\;\;\;22440 \\ \;\;\;\;\underline{22440} \\ \;\;\;\;\;\;\;\;0 \end{array}$$

*Ответы:*

№ 26 — по восьмеричной;
№ 27 — по шестеричной.

**Задача № 28**

Напишите число сто тридцать во всех системах счисления до девятеричной включительно.

*(См. с. 80)*

**Задача № 29**

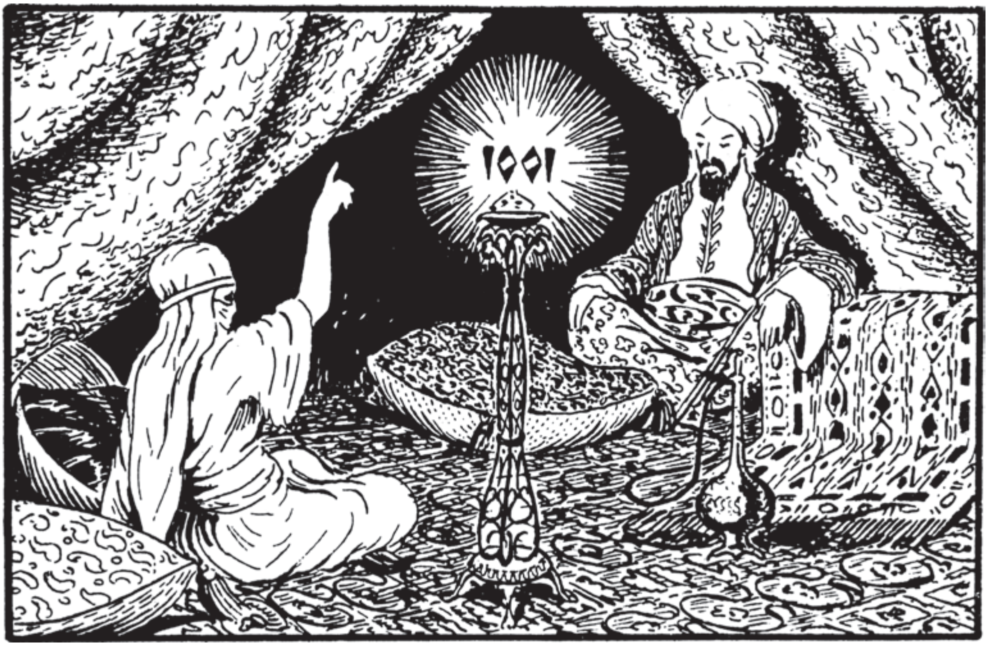
Чему равно число «123», если считать его написанным во всех системах счисления до девятеричной включительно? Возможно ли, что оно написано по *двоичной* системе? А по *троичной*? Если оно написано по *пятеричной* системе, то можете ли вы узнать, не переписывая его по десятичной системе, делится ли оно без остатка на два? Если оно написано по *семеричной* системе, то делится ли оно без остатка на шесть? Если оно написано по *девятеричной* системе, то делится ли оно без остатка на четыре?

*(См. с. 99)*

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

| Умножение | = | сложению |
|---|---|---|
| $2 \times 2 = 2 + 2$ | | $11 \times 1{,}1 = 11 + 1{,}1$ |
| $3 \times 1\frac{1}{2} = 3 + 1\frac{1}{2}$ | | $21 \times 1\frac{1}{20} = 21 + 1\frac{1}{20}$ |

| Умножение | = | вычитанию: |
|---|---|---|
| $1 \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ |
| $6 \times \frac{6}{7} = 6 - \frac{6}{7}$ | | $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ |




Глава V

# ГАЛЕРЕЯ ЧИСЛОВЫХ ДИКОВИНОК

## АРИФМЕТИЧЕСКАЯ КУНСТКАМЕРА

В мире чисел, как и в мире живых существ, встречаются подлинные диковинки, редкие экземпляры, обладающие исключительными свойствами. Из таких необыкновенных чисел можно было бы составить своего рода музей числовых редкостей, настоящую «арифметическую кунсткамеру». В ее витринах нашли бы себе место не только числовые исполины, о которых мы побеседуем еще в особой главе, но и числа сравнительно небольшие, зато выделяющиеся из ряда других какими-либо необычайными свойствами. Некоторые из них уже по внешности привлекают к себе внимание; другие открывают свои диковинные особенности лишь при более близком знакомстве.

Приглашаю читателя пройтись со мною по галерее таких числовых диковинок и познакомиться с некоторыми из них.

Пройдем, не останавливаясь, мимо первых витрин, заключающих числа, свойства которых нам уже знакомы. Мы знаем уже, почему попало в галерею диковинок число 2: не потому, что оно первое четное число, а потому, что оно — основание самой удобной системы счисления (см. с. 49).

Не удивимся мы, встретив тут 5 — одно из наших любимейших чисел, играющее важную роль при всяких «округлениях», в том числе и при округлении цен, которое обходится нам так дорого (см. с. 22). Не будет неожиданностью для нас найти здесь и число 9 — конечно, не как «символ постоянства»[1], а как число, облегчающее нам поверку арифметических действий (см. с. 36). Но вот витрина, за стеклом которой мы видим

## ЧИСЛО 12

Чем оно замечательно? Конечно, это число месяцев в году и число единиц в дюжине. Но что, в сущности, особенного в дюжине? Немногим известно, что 12 — старинный и едва не победивший соперник числа 10 в борьбе за почетный пост основания системы счисления. Культурнейший народ Древнего Востока — вавилоняне и их предшественники, еще более древние первонасельники Двуречья — вели счет в двенадцатеричной системе счисления. И если бы не пересилившее влияние Индии, подарившей нам десятичную систему, мы, весьма вероятно, унаследовали бы от Вавилона двенадцатеричную систему. Кое в чем мы и до сих пор платим дань этой системе, несмотря на победу десятичной. Наше пристрастие к дюжинам и гроссам[2], наше деление суток на две дюжины часов, деление часа — на 5 дюжин минут, деление минуты — на столько же секунд, деление круга на 30 дюжин градусов, наконец, деление фута на 12 дюймов и многие другие пережитки глубокой

---

[1] Древние (последователи Пифагора) считали 9 символом постоянства, так как все числа, кратные 9, сохраняют одну и ту же сумму цифр, кратную 9.

[2] *Гросс* — 12 дюжин, т. е. 144.

древности — разве не свидетельствует все это о том, как велико еще влияние этой древней системы?

Хорошо ли, что в борьбе между дюжиной и десяткой победила последняя? Конечно, сильными союзницами десятки были и остаются наши собственные руки с *десятью* пальцами — живые счетные машины. Но если бы не это, то следовало бы безусловно отдать предпочтение 12 перед 10. Гораздо удобнее производить расчеты по двенадцатеричной системе, нежели по десятичной. Причина та, что число 10 делится без остатка только на 2 и на 5, между тем как 12 делится и на 2, и на 3, и на 4, и на 6. У 10 всего два делителя, у 12 — четыре. Преимущества двенадцатеричной системы станут вам яснее, если вы примете в соображение, что в двенадцатеричной системе число, оканчивающееся нулем, кратно и 2, и 3, и 4, и 6: подумайте, как удобно дробить число, когда и ½, и ⅓, и ¼, и ⅙ его должны быть целыми числами! А если выраженное в двенадцатеричной системе число оканчивается двумя нулями, то оно должно делиться без остатка на 144, а следовательно, и на все множители 144, т. е. на следующий длинный ряд чисел:

2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.

Четырнадцать делителей — вместо тех восьми, которые имеют числа, написанные в десятичной системе, если оканчиваются двумя нулями (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 и 100). В нашей системе только дроби вида ½, ¼, ⅕, $\frac{1}{20}$ и т.д. превращаются в конечные десятичные; в двенадцатеричной же системе можно написать без знаменателя гораздо более разнообразные дроби, и прежде всего дроби:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{36}, \frac{1}{48}, \frac{1}{72}, \frac{1}{144}$,

которые соответственно изобразятся так:

0,6; 0,4; 0,3; 0,2; 0,16; 0,14; 0,1; 0,09; 0,08; 0,06; 0,04; 0,03; 0,02; 0,01.

Было бы, однако, большим заблуждением думать, что делимость числа может зависеть от того, в какой системе счисления оно изображено. Если орехи, заключающиеся в данном мешке, могут быть разложены в 5 одинаковых кучек, то это свойство их, конечно, не изменится от того, будет ли наше число орехов выражено в той или иной системе счисления, или отложено на счетах, или написано прописью, или, наконец, изображено каким-либо иным способом. Если число, написанное в двенадцатеричной системе, делится на 6 или на 72, то, будучи выражено в другой системе счисления, например в десятичной, оно должно иметь те же делители. Разница лишь в том, что в двенадцатеричной системе делимость на 6 или на 72 *легче обнаружить* (число оканчивается одним или двумя нулями). Когда говорят о преимуществах двенадцатеричной системы в смысле делимости на большее число делителей, то имеют в виду, что благодаря склонности нашей «к круглым» числам на практике будут чаще встречаться числа, оканчивающиеся в двенадцатеричной системе нулями.

При таких преимуществах двенадцатеричной системы неудивительно, что среди математиков раздавались голоса за полный переход на эту систему. Однако мы уже чересчур тесно сжились с десятичной системой, чтобы решаться на такую реформу.

Вы видите, следовательно, что дюжина имеет за собою длинную историю и что число 12 не без основания очутилось в галерее числовых диковинок. Зато его соседка — «чертова дюжина», 13 — фигурирует здесь не потому, что она чем-либо замечательна, а, скорее, именно потому, что ничем не замечательна, хотя и пользуется такой мрачной славой: разве не удивительно, в самом деле, что ровно ничем не выделяющееся число могло стать столь «страшным» для суеверных людей?[1]

[1] Как распространено это суеверие даже и в нашу эпоху, видно из того, что при устройстве электрического трамвая в Ленинграде (тогда Петербурге) первое время не решались вводить маршрут № 13, а пропустив его, сразу перешли к № 14: опасались, что публика побоится ездить в вагонах с таким «роковым» номером. Любопытно и то, что в Ленинграде есть немало домов, где 13-й номер квартиры пропущен... В гостиницах также нередко отсутствует комната № 13. Для борьбы с этим ничем не обоснованным числовым суеверием на Западе (в Англии) учреждены даже особые «клубы числа 13»...

В следующей витрине арифметической кунсткамеры перед нами

## ЧИСЛО 365

Оно замечательно не только тем, что определяет число дней в году. Прежде всего, оно при делении на 7 дает в остатке 1: эта несущественная, казалось бы, особенность числа 365 имеет большое значение для календаря. От нее зависит то, что каждый простой (не високосный) год кончается тем днем недели, каким он начался; если, например, день нового года был понедельник, то и последний день года будет понедельник, а следующий год начнется со вторника. По той же причине — благодаря остатку 1 от деления 365 на 7 — было бы нетрудно так изменить наш календарь, чтобы определенная календарная дата всегда приходилась на один и тот же день недели — например, чтобы 1 мая каждый год было воскресенье. Для этого достаточно было бы лишь первый день года вовсе не вводить в счет числа дней, называть его не «1 января»,


а просто «новый год»; 1-м января будет следующий день. Тогда остальное число дней года, 364, будет заключать целое число недель; следовательно, весь ряд дальнейших лет будет начинаться тем же днем недели, и все даты из года в год будут повторяться в одни и те же дни. В годы високосные, заключающие 366 дней, надо будет уже первые два дня года оставить вне счета как праздничные.

Любопытна и другая особенность числа 365, не связанная с календарем:

$$365 = 10 \times 10 + 11 \times 11 + 12 \times 12,$$

то есть 365 равно сумме квадратов трех последовательных чисел, начиная с 10:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365.$$

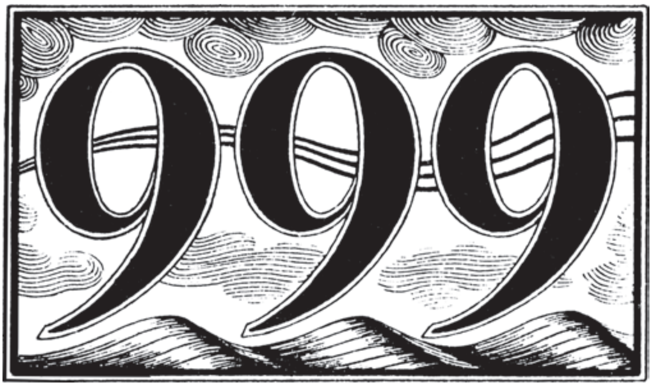
Но и это еще не все: тому же равна сумма квадратов двух следующих чисел — 13 и 14:

$$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365.$$

Таких чисел не много наберется в нашей галерее арифметических диковинок.

## ТРИ ДЕВЯТКИ

В следующей витрине выставлено наибольшее из всех трехзначных чисел: 999. Оно, без сомнения, гораздо удивительнее, чем его перевернутое изображение — 666 — знаменитое «звериное число» Апокалипсиса, вселявшее нелепый страх многим суеверным людям, но по арифметическим свойствам ничем не выделяющееся среди прочих чисел. Любопытная особенность числа 999 проявляется при умножении на него всякого другого трехзначного числа.




Тогда получается шестизначное произведение; первые три цифры его есть умножаемое число, только уменьшенное на 1, а остальные три цифры (кроме последней) — «дополнения» первых до 9. Например:

$$573 \times 999 = \begin{array}{r} 572 \\ \underline{572427} \\ 999 \end{array}$$

Стоит лишь взглянуть на следующую строку, чтобы понять происхождение этой особенности:

$$573 \times 999 = 573 \times (1000 - 1) = \left\{ \begin{array}{r} -\,573000 \\ \underline{573} \\ 572427 \end{array} \right.$$

Зная эту особенность, мы можем «мгновенно» умножать любое трехзначное число на 999.

$$947 \times 999 = 946153$$
$$509 \times 999 = 508491$$
$$981 \times 999 = 980019$$

и т. п.

А так как $999 = 9 \times 111 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$, то вы можете, опять-таки с молниеносной быстротой, писать целые колонны шестизначных чисел, кратных 37; не знакомый со свойствами числа 999, конечно, сделать этого не в состоянии. Короче говоря, вы можете устраивать перед непосвященными маленькие сеансы «мгновенного умножения и деления» не хуже иного фокусника.

Сказанное, с соответствующими изменениями, относится не только к трем девяткам, но и к любому ряду их — к 9999, к 99999 и т. п.

## ЧИСЛО ШЕХЕРАЗАДЫ

Следующим на очереди у нас число 1001 — прославленное число Шехеразады. Вы, вероятно, и не подозревали, что в самом названии сборника волшебных арабских сказок заключается также своего рода чудо, которое могло бы поразить воображение сказочного султана не менее многих других чудес Востока, если бы он способен был интересоваться арифметическими диковинками.

Чем же так замечательно число 1001? С виду оно кажется весьма обыкновенным. Оно даже не принадлежит к избранному разряду так называемых «простых» чисел. Через ячейки Эратосфенова решета оно свободно проскользнуло бы, так как делится без остатка и на 7, и на 11 и на 13 — на три последовательных простых числа, произведением которых оно и является. Но в том, что число $1001 = 7 \times 11 \times 13$, нет еще ничего волшебного. Замечательнее то, что при умножении на него трехзначного числа получается

результат, состоящий из самого умноженного числа, только написанного дважды, например:

$$873 \times 1001 = 873873;$$
$$207 \times 1001 = 207207, \text{ и т. д.}$$

И хотя этого и следовало ожидать, так как

$$873 \times 1001 = 873 \times 1000 + 873 = 873000 + 873,$$

все же, пользуясь указанным свойством «числа Шехеразады», можно достичь результатов совсем неожиданных — по крайней мере для человека неподготовленного.

**Задача № 30**

Целое общество гостей, непосвященных в арифметические тайны, вы можете поразить следующим фокусом. Пусть кто-нибудь напишет на бумажке секретно от вас трехзначное число, какое хочет, и затем пусть припишет к нему еще раз то же самое число. Получится шестизначное число, состоящее из трех повторяющихся цифр. Предложите тому же товарищу или его соседу разделить — секретно от вас — это число на 7; при этом вы заранее предсказываете, что остатка не получится. Результат деления передается соседу, который по вашему предложению делит его на 11; и хотя вы не знаете делимого, вы все же смело утверждаете, что и оно разделится без остатка. Полученный результат вы направляете следующему соседу, которого просите разделить это число на 13 — деление снова выполняется без остатка, о чем вы заранее предупреждаете. Результат третьего деления вы, не глядя на полученное число, вручаете *первому* товарищу со словами:

— Вот число, которое вы задумали!

Так и есть: вы угадали.

Какова разгадка этого фокуса?

**Решение**

Этот красивый арифметический фокус, производящий на непосвященных впечатление волшебства, объясняется очень просто: вспомните, что приписать к трехзначному числу его само — значит умножить его на 1001, т. е. на произведение $7 \times 11 \times 13$. Шестизначное число, которое ваш товарищ получит после того, как припишет к задуманному числу его само, должно будет поэтому делиться без остатка и на 7, и на 11, и на 13; а после деления последовательно на эти три числа (т. е. на их произведение — 1001) оно должно, конечно, снова дать задуманное число.

## ЧИСЛО 10101

После сказанного о числе 1001 для вас уже не будет неожиданностью увидеть в витринах нашей галереи число 10101. Вы догадаетесь, какому именно свойству число это обязано такою честью. Оно, как и число 1001, дает удивительный результат при умножении, но не трехзначных чисел, а *двузначных*; каждое двузначное число, умноженное на 10101, дает в результате само себя, написанное *трижды*. Например:

$$73 \times 10101 = 737373;$$
$$21 \times 10101 = 212121.$$

Причина уясняется из следующей строки:

$$73 \times 10101 = 73 \times (10000 + 100 + 1) = \left\{ \begin{array}{r} 730000 \\ +\quad 7300 \\ 73 \\ \hline 737373 \end{array} \right.$$

### Задача № 31

Можно ли проделывать с помощью этого числа фокусы необычайного отгадывания, как с помощью числа 1001?

### Решение

Да, можно. Здесь даже возможно обставить фокус эффектнее, разнообразнее, если иметь в виду, что 10101 есть произведение четырех простых чисел:

$$10101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37.$$

Предложив первому гостю задумать какое-нибудь *двузначное* число, вы предлагаете второму приписать к нему то же число, а третьему приписать то же число еще раз. Четвертого гостя вы просите разделить получившееся

шестизначное число, например, на 7; пятый гость должен разделить полученное частное на 3; шестой гость делит то, что получилось, на 37 и, наконец, седьмой делит этот результат на 13 — причем все 4 деления выполняются без остатка. Результат последнего деления вы просите передать первому гостю: это — задуманное им число.

При повторении фокуса вы можете внести в него некоторое разнообразие, обращаясь каждый раз к новым делителям. А именно, вместо четырех множителей $3 \times 7 \times 13 \times 37$ можете взять следующие группы трех множителей:

$$21 \times 13 \times 37; \quad 7 \times 39 \times 37; \quad 3 \times 91 \times 37; \quad 7 \times 13 \times 111.$$

Число это — 10101 — пожалуй, даже удивительнее волшебного числа Шехеразады, хотя и менее известно своими поразительными свойствами, нежели 1001. А между тем о нем писалось еще двести лет тому назад в «Арифметике» Магницкого, в той главе, где приводятся примеры умножения «с некоим удивлением». С тем бо́льшим основанием должны мы включить его в наше собрание арифметических диковинок.

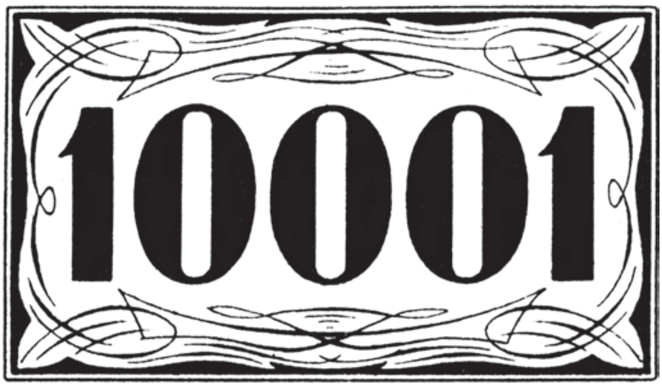
## ЧИСЛО 10001

### Задача № 32

С этим числом вы также можете проделать фокусы вроде предыдущих, хотя, пожалуй, и не столь эффектные. Дело в том, что оно представляет собою произведение двух простых чисел:

$$10001 = 73 \times 137.$$

Как воспользоваться этим для выполнения арифметических фокусов, читатель, надеюсь, после всего сказанного выше догадывается сам.



## ШЕСТЬ ЕДИНИЦ

В соседней витрине мы видим такую диковинку арифметической кунсткамеры:


— число, состоящее из шести единиц. Благодаря знакомству с волшебными свойствами числа 1001 мы сразу соображаем, что

$$111111 = 111 \times 1001.$$

Но $111 = 3 \times 37$, а $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Отсюда следует, что наш новый числовой феномен, состоящий из одних лишь единиц, цредставляет собою произведение пяти простых множителей. Соединяя же эти 5 множителей в две группы на всевозможные лады, мы получаем 15 пар множителей, дающих в произведении одно и то же число 111111:

$$\begin{aligned}
3 \times (7 \times 11 \times 13 \times 37) &= 3 \times 37037 = 111111\\
7 \times (3 \times 11 \times 13 \times 37) &= 7 \times 15873 = 111111\\
11 \times (3 \times 7 \times 13 \times 37) &= 11 \times 10101 = 111111\\
13 \times (3 \times 7 \times 11 \times 37) &= 13 \times 8547 = 111111\\
37 \times (3 \times 7 \times 11 \times 13) &= 37 \times 3003 = 111111\\
(3 \times 7) \times (11 \times 13 \times 37) &= 21 \times 5291 = 111111\\
(3 \times 11) \times (7 \times 13 \times 37) &= 33 \times 3367 = 111111
\end{aligned}$$

и т. д.

Вы можете, значит, засадить общество из 15 человек за работу умножения, и хотя каждый будет перемножать другую пару чисел, все получат один и тот же оригинальный результат: 111111.

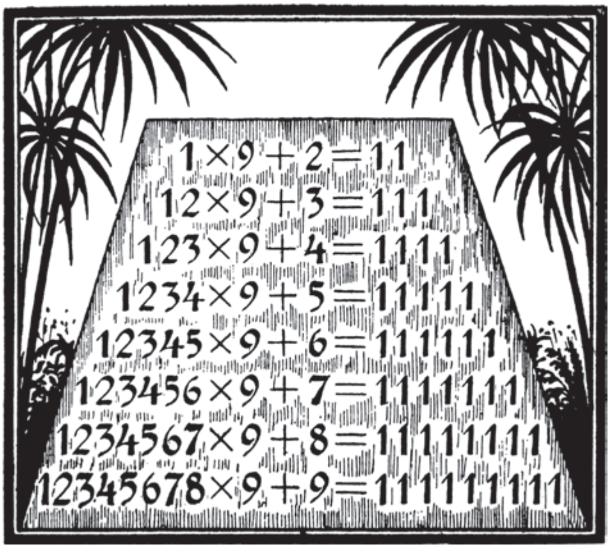
**Задача № 33**

То же число 111111 пригодно и для отгадывания задуманных чисел — наподобие того, как выполняется это с помощью чисел 1001 и 10101. В данном случае нужно предлагать задумывать число однозначное, т. е. цифру, и повторять 6 раз. Делителями здесь могут служить пять простых чисел: 3, 7, 11, 13, 37 и получающиеся из них составные: 21, 33, 39 и т. д. Это дает возможность до крайности разнообразить выполнение фокуса. Как надо поступать в этих случаях, — предоставляю придумать читателю.

## ЧИСЛОВЫЕ ПИРАМИДЫ

В следующих витринах галереи нас поражают числовые достопримечательности совсем особого рода — некоторое подобие пирамид, составленных из чисел. Рассмотрим поближе первую из таких пирамид.

### Задача № 34




Как объяснить эти своеобразные результаты умножения, эту странную закономерность?

### Решение

Возьмем для примера какой-нибудь из средних рядов нашей числовой пирамиды: 123456 × 9 + 7. Вместо умножения на 9 можно умножить на (10 – 1), т. е. приписать 0 и вычесть умножаемое:

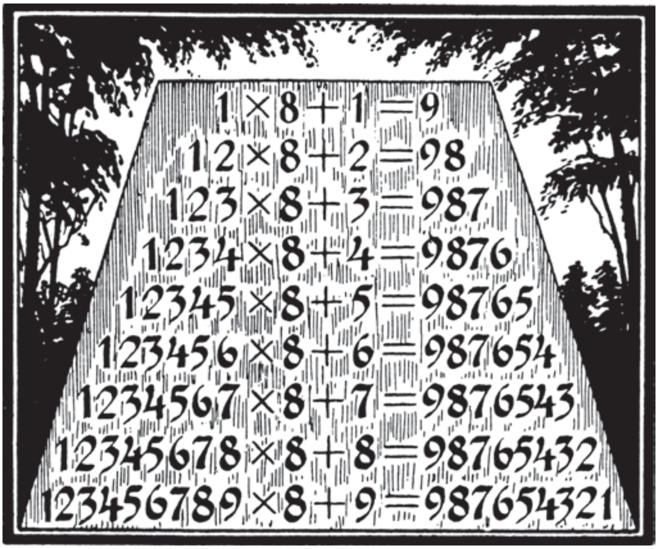
$$123456 \times 9 + 7 = 1234560 + 7 - 123456 = \left\{ \begin{array}{r} -\,1234567 \\ 123456 \\ \hline 1111111 \end{array} \right.$$

Достаточно взглянуть на последнее вычитание, чтобы понять, почему тут получается результат, состоящий только из одних единиц.

Мы можем понять это, исходя и из других рассуждений. Чтобы число вида 12345... превратилось в число вида 11111..., нужно из второй его цифры вычесть 1, из третьей — 2, из четвертой — 3, из пятой — 4 и т. д. — иначе говоря, вычесть из него то же число вида 12345..., лишенное своей последней цифры, — т. е. вдесятеро уменьшенное и предварительно сокращенное на последнюю цифру. Теперь понятно, что для получения искомого результата нужно наше число умножить на 10, прибавить к нему следующую за последней цифру и вычесть из результата первоначальное число (а умножить на 10 и отнять множимое — значит умножить на 9).

**Задача № 35**

Сходным образом объясняется образование и следующей числовой пирамиды,




получающейся при умножении определенного ряда цифр на 8 и прибавлении последовательно возрастающих цифр. Особенно интересна в этой пирамиде последняя строка, где в результате умножения на 8 и прибавления 9 происходит превращение полного натурального ряда цифр в такой же ряд, но с обратным расположением.

Попытайтесь объяснить эту особенность.

**Решение**

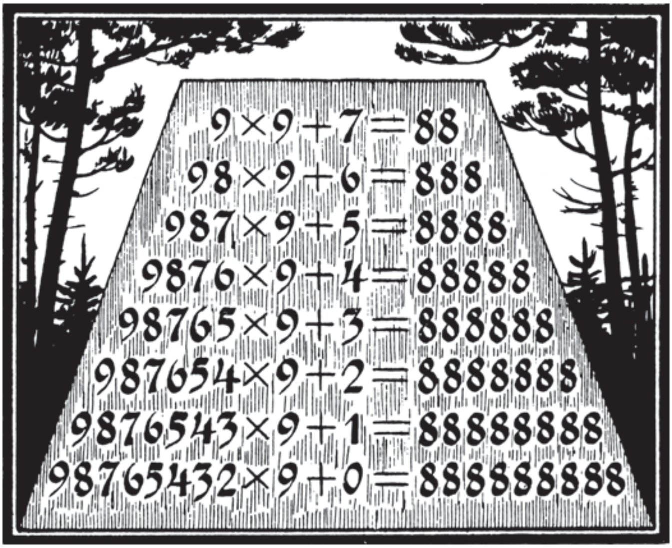
Необходимость получения таких странных результатов уясняется из следующей строки:

$$12345 \times 8 + 5 = \left\{ - \begin{matrix} 12345 \times 9 + 6 \\ 12345 \times 1 + 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ - \begin{matrix} 111111\text{ [1]} \\ 12346, \end{matrix} \right.$$

т. е. 12345 × 8 + 5 = 111111 – 12346. Но, вычитая из числа 111111 число 12346, составленное из ряда возрастающих цифр, мы, как легко понять, должны получить ряд убывающих цифр 98765.

**Задача № 36**

Вот, наконец, третья числовая пирамида, также требующая объяснения:




**Решение**

Обоснованность этой пирамиды есть прямое следствие существования первых двух. Связь эта устанавливается очень легко. Из *первой* пирамиды мы знаем уже, что, например:

$$12345 \times 9 + 6 = 111111.$$

Умножив обе части на 8, имеем:

$$(12345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = 888888.$$

Но из *второй* пирамиды мы знаем, что

$$12345 \times 8 + 5 = 98765, \text{ или } 12345 \times 8 = 98760.$$

---

[1] Почему 12345 × 9 + 6 = дает именно 111111, было показано при рассмотрении предыдущей числовой пирамиды.

Значит:

$$888888 = (12345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = (98760 \times 9) + 48 =$$
$$= (98760 \times 9) + (5 \times 9) + 3 = (98760 + 5) \times 9 + 3 =$$
$$= 98765 \times 9 + 3.$$

Вы убеждаетесь, что оригинальные числовые пирамиды не так уже загадочны, как кажутся на первый взгляда. Курьезно, что мне случилось как-то видеть их напечатанными в одной немецкой газете с припиской: «Причина такой поразительной закономерности никем еще до сих пор не была объяснена»...

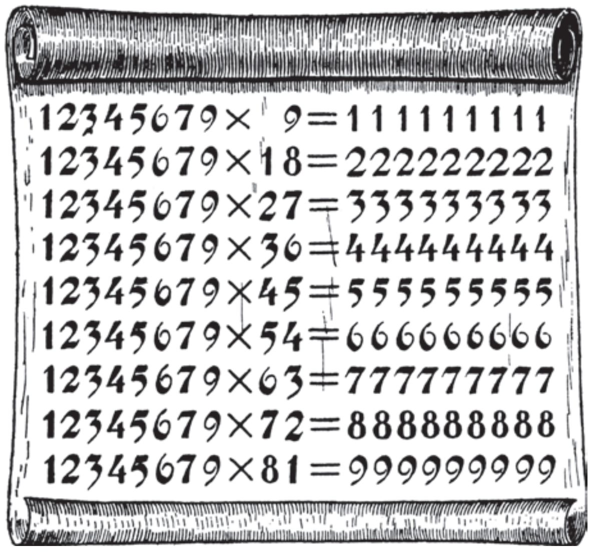
## ДЕВЯТЬ ОДИНАКОВЫХ ЦИФР

**Задача № 37**

Конечная строка первой из сейчас (с. 68) рассмотренных «пирамид»:

$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$

представляет образчик целой группы интересных арифметических курьезов, собранной в нашем музее в следующую таблицу:




Откуда такая закономерность в результатах?

**Решение**

Примем во внимание, что

$$1234567 \times 9 + 9 = (12345678 + 1) \times 9 = 12345679 \times 9.$$

Поэтому

$$12345679 \times 9 = 111111111.$$

А отсюда прямо следует, что

$$12345679 \times 9 \times 2 = 222222222$$
$$12345679 \times 9 \times 3 = 333333333$$
$$12345679 \times 9 \times 4 = 444444444 \text{ и т. д.}$$

## ЦИФРОВАЯ ЛЕСТНИЦА

### Задача № 38

Что получится, если число 111111111, с которым мы сейчас имели дело, умножить само на себя? Заранее можно предвидеть, что результат должен быть диковинный, — но какой именно?

### Решение

Если вы обладаете способностью отчетливо рисовать в воображении ряды цифр, вам удастся найти интересующий нас результат, даже не прибегая к выкладкам на бумаге. В сущности, здесь дело сводится только к надлежащему расположению частных произведений, потому что умножать приходится все время лишь единицу на единицу — действие, могущее затруднить разве лишь фонвизинского Митрофанушку, размышляющего о результате умножения «единожды один». Сложение же частных произведений сводится к простому счету единиц[1]. Вот результат этого единственного в своем роде умножения (при выполнении которого, впрочем, не приходится ни разу прибегать к действию умножения):

```
        111111111
        111111111
        ---------
        111111111
       111111111
      111111111
     111111111
    111111111
   111111111
  111111111
 111111111
111111111
-----------------
12345678987654321
```

[1] В двоичной системе счисления, как мы уже объясняли (см. с. 52–53), все умножения именно такого рода. На этом примере мы наглядно убеждаемся в преимуществах двоичной системы.

Все девять цифр выстроены в стройном порядке, симметрично убывая от середины в обе стороны.

Те из читателей, которых утомило обозрение числовых диковинок, могут покинуть здесь эту галерею и перейти в следующие отделения, где показываются фокусы и выставлены числовые великаны и карлики; я хочу сказать, — они могут прекратить чтение этой главы и обратиться к дальнейшим. Но кто желает познакомиться еще с несколькими интересными достопримечательностями мира чисел, тех приглашаю осмотреть со мною небольшой ряд ближайших витрин.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ КУРЬЕЗЫ

$$100 = \left\{ \begin{array}{c} 24\,\tfrac{3}{6} + 75\,\tfrac{9}{18} \\ 95\,\tfrac{3}{7} + \ \ 4\,\tfrac{16}{28} \\ 98\,\tfrac{3}{6} + \ \ 1\,\tfrac{27}{54} \\ 94\,\tfrac{1}{2} + \ \ 5\,\tfrac{38}{76} \\ 1\,\tfrac{6}{7} + 3 + 95\,\tfrac{4}{28} \\ 57\,\tfrac{3}{6} + 42\,\tfrac{9}{18} \end{array} \right\} = 100$$

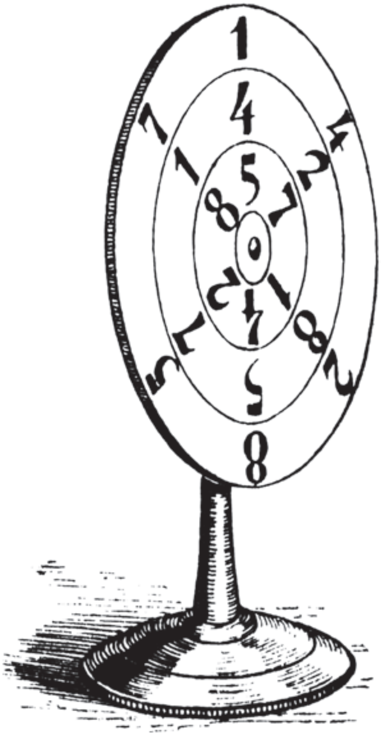
Каждая сумма состоит только из девяти разных цифр

## МАГИЧЕСКИЕ КОЛЬЦА

**Задача № 39**

Что за странные кольца выставлены в следующей витрине нашей галереи? Перед нами (см. рис. с. 74) три плоских кольца, вращающихся одно в другом. На каждом кольце написаны шесть цифр в одном и том же порядке, иначе говоря — написано одно и то же число: 142857. Эти кольца обладают следующим удивительным свойством: как бы ни были они повернуты, мы при сложении двух написанных на них чисел — считая от любой цифры в направлении начерченной стрелки — во всех случаях получим то же самое шестизначное число (если только результат вообще будет 6-значный), лишь немного подвинутое! В положении, например, какое изображено на прилагаемом чертеже, мы получаем при сложении двух наружных колец:

$$\begin{array}{r} +\ 142\,857 \\ \underline{428\,571} \\ 571\,428 \end{array}$$




т. е. опять-таки тот же ряд цифр: 142857, только цифры 5 и 7 перенеслись из конца в начало.

При другом расположении колец относительно друг друга мы имеем такие случаи:

$$
\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 285\,714 \\ 571\,428 \\ \hline 857\,142 \end{array} \quad + \begin{array}{r} 714\,285 \\ 142\,857 \\ \hline 857\,142 \end{array} \text{ и т. п} \end{array}
$$

Исключение составляет единственный случай, когда в результате получается 999999:

$$
+\begin{array}{r} 285\,714 \\ 714\,285 \\ \hline 999\,999 \end{array}
$$

Мало того. Тот же ряд цифр в той же последовательности мы получим и при *вычитании* чисел, написанных на кольцах. Например:

$$
-\begin{array}{r} 428\,571 \\ 142\,857 \\ \hline 285\,714 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 571\,428 \\ 285\,714 \\ \hline 285\,714 \end{array} \qquad -\begin{array}{r} 714\,285 \\ 142\,857 \\ \hline 571\,428 \end{array}
$$

Исключение составляет случай, когда приведены к совпадению одинаковые цифры — тогда, разумеется, разность равна нулю.

Но и это еще не все. Умножьте число 142857 на 2, на 3, на 4, на 5 или на 6 — и вы получите снова то же число, лишь передвинутое в круговом порядке на одну или несколько цифр:

$$
\begin{gathered}
142857 \times 2 = 285714 \\
142857 \times 3 = 428571 \\
142857 \times 4 = 571428 \\
142857 \times 5 = 714285 \\
142857 \times 6 = 857142
\end{gathered}
$$

Чем же обусловлены все загадочные особенности этого числа?

**Решение**

Мы нападем на путь к разгадке, если продлим немного последнюю табличку и попробуем умножить наше число на 7: в результате получится 999999. Значит, число наше — не что иное, как седьмая часть 999999, т. е. дробь

$$\frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}.$$

И действительно, если вы станете превращать $1/7$ в десятичную дробь, вы получите:

$$1 : 7 = 0{,}142857\ldots,\ \text{т. е. } 1/7 = 0{,}(142857)$$

$$\begin{array}{l}
\ \ 10 \\
\hline
\ \ \ 30 \\
\hline
\ \ \ \ 20 \\
\hline
\ \ \ \ \ 60 \\
\hline
\ \ \ \ \ \ 40 \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ 50 \\
\hline
\ \ \ \ \ \ \ \ 1
\end{array}$$

Наше загадочное число есть, следовательно, период бесконечной периодической дроби, которая получается при превращении 1/7 в десятичную. Становится понятным теперь, почему при удвоении, утроении и т. д. этого числа происходит лишь перестановка одной группы цифр на другое место. Ведь умножение этого числа на 2 делает его равным 2/7 и, следовательно, равносильно превращению в десятичную дробь уже не 1/7, а 2/7. Начав же превращать дробь 2/7 в десятичную, вы сразу заметите, что цифра 2 — один из тех остатков, которые у нас получались уже при превращении 1/7: ясно, что должен повториться и прежний ряд цифр частного, но он начнется с другой цифры; иными словами, должен получиться тот же период, но только несколько начальных цифр его очутятся на конце. То же самое должно произойти и при умножении на 3, на 4, на 5 и на 6, т. е. на все числа, получающиеся в остатках. При умножении же на 7 мы должны получить целую 1, или — что то же самое — 0,9999...

Любопытные результаты *сложения и вычитания* чисел на кольцах находят себе объяснение в том же факте, что 142857 есть период дроби, равной 1/7. В самом деле: что мы делаем, поворачивая кольцо на несколько цифр? Переставляем группу цифр спереди на конец, т. е., согласно только что сказанному, мы умножаем число 142857 на 2, на 3, на 4 и т. д. Следовательно, все действия сложения или вычитания чисел, написанных на кольцах, сводятся к сложению или вычитанию дробей 1/7, 2/7, 3/7 и т. д. В результате мы должны получить, конечно, несколько седьмых долей, — т. е. опять-таки наш ряд цифр 142857 в той или иной круговой перестановке. Отсюда надо исключить лишь случаи, когда складываются такие числа седьмых долей, которые в сумме дают 1 или больше 1.

Но и последние случаи исключаются не вполне: они дают результат, правда, не тождественный с рассмотренными, но все же сходный с ними. Рассмотрим внимательнее, что должно получиться от умножения нашего загадочного числа на множитель больше 7, т. е. на 8, на 9 и т. д. Умножить 142857, например, на 8 мы можем так: умножить сначала на 7 и к произведению (т. е. к 999999) прибавить наше число:

$$142857 \times 8 = 142857 \times 7 + 142857 = 999999 + 142857 =$$
$$= 1000000 - 1 + 142857 = 1000000 + (142857 - 1).$$

Окончательный результат — 1142856 — отличается от умножаемого 142857 только тем, что впереди стоит еще одна 1, а последняя цифра на 1 же уменьшена. По сходному правилу составляются произведения 142857 на всякое другое число, большее 7, — как легко усмотреть из следующих строк:

$$\begin{aligned}
142857 \times 8 &= (142857 \times 7) + 142857 = 1142856\\
142857 \times 9 &= (142857 \times 7) + (142857 \times 2) = 1285713\\
142857 \times 10 &= (142857 \times 7) + (142857 \times 3) = 1428570\\
142857 \times 16 &= (142857 \times 7 \times 2) + (142857 \times 2) = 2285712\\
142857 \times 39 &= (142857 \times 7 \times 5) + (142857 \times 4) = 5571423
\end{aligned}$$

Общее правило здесь такое: при умножении 142857 на любой множитель нужно умножить лишь на остаток от деления множителя на 7; впереди этого произведения ставится число, показывающее, сколько семерок в множителе, и то же число вычитается из результата[1]. Пусть мы желаем умножить 142857 на 86. Множитель 86 при делении на 7 дает в частном 12 и в остатке 4. Следовательно, результат умножения таков:

$$12571428 - 12 = 12571416.$$

От умножения 142857 × 365 мы получим (так как 365 при делении на 7 дает в частном 52, а в остатке 1):

$$52142857 - 52 = 52142805.$$

Усвоив это простое правило и запомнив результаты умножения нашего диковинного числа на множители от 2 до 6 (что весьма нетрудно — нужно помнить лишь, с какой цифры они начинаются), вы можете изумлять непосвященных молниеносно быстрым умножением шестизначного числа. А чтобы не забыть этого удивительного числа, запомним, что оно произошло от $\frac{1}{7}$ или — что то же самое — от $\frac{2}{14}$; вот вам первые три цифры нашего числа: 142. Остальные три получаются вычитанием первых трех из 9:

$$\begin{array}{r} -\ 999 \\ 142857 \\ \hline 857 \end{array}$$

Мы уже имели дело с такими числами — именно, когда знакомились со свойствами числа 999. Вспомнив сказанное там, мы сразу сообразим, что число 142857 есть, очевидно, результат умножения 143 на 999:

$$142857 = 143 \times 999.$$

Но 143 = 13 × 11. Припомнив замеченное раньше о числе 1001, равном 7 × 11 × 13, мы будем в состоянии, не выполняя действия, предсказать, что должно получиться от умножения 142857 × 7:

$$142857 \times 7 = 143 \times 999 \times 7 = 999 \times 11 \times 13 \times 7 =$$
$$= 999 \times 1001 = 999999$$

(все эти преобразования мы, конечно, можем проделать в уме).

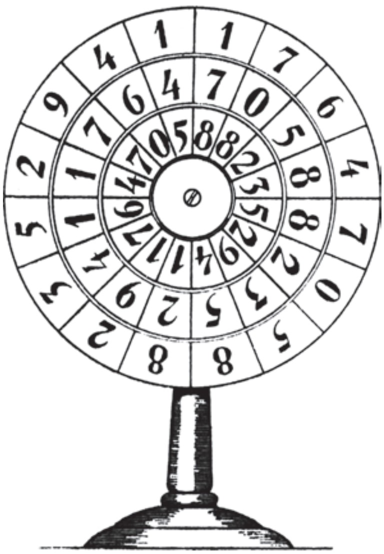
[1] Если множитель кратен 7, то результат равен числу 999999, умноженному на число семерок в множителе; такое умножение легко выполнить в уме. Например, 142857 × × 28 = 999999 × 4 = 4000000 – 4 = 3999996.

## ФЕНОМЕНАЛЬНАЯ СЕМЬЯ

### Задача № 40

Только что рассмотренное нами число 142857 является одним из членов целой семьи чисел, обладающих теми же свойствами. Вот еще одно такое число: 0588235294117647(0 впереди необходим). Если умножить это число, например, на 4, мы получим тот же ряд цифр, только первые 4 цифры будут переставлены в конец:

$$0588235294117647 \times 4 = 2352941176470588.$$



Расположив цифры этого числа на ряде подвижных колец, как в предыдущем случае, мы при *сложении* чисел двух колец будем получать то же число, лишь смещенное в круговом порядке:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 0588235294117647 \\ 2352941176470588 \end{array} \\ \hline 2941176470588235 \end{array}$$

При кольцевом расположении все три ряда, конечно, тождественны.

От *вычитания* чисел двух колец опять-таки получается тот же круг цифр:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 2352941176470588 \\ 0588235294117647 \end{array} \\ \hline 1764705882352941 \end{array}$$

Наконец, это число, как и рассмотренное ранее, состоит из двух половин: цифры второй половины являются дополнением цифр первой половины до 9.

Попробуйте найти разгадку всех этих особенностей.

### Решение

Нетрудно догадаться, каким образом приведенный числовой ряд оказался столь близким родственником числа 142857; последнее число представляет собою период бесконечной дроби, равной $\frac{1}{7}$, наше же число является, вероятно, периодом какой-нибудь другой дроби. Так и есть: наш длинный ряд цифр — не что иное, как период бесконечной дроби, получающейся от превращения в десятичную простой дроби $\frac{1}{17}$:

$$\frac{1}{17} = 0,(0588235294117647)$$

Вот почему при умножении этого числа на множители от 1 до 16 получается тот же ряд цифр, в котором лишь одна или несколько начальных цифр перенесены в конец числа. И наоборот — перенося одну или несколько цифр ряда из начала в конец, мы тем самым увеличиваем это число в несколько раз (от 1 до 16). Складывая два кольца, повернутых одно относительно другого, мы производим сложение двух *умноженных* чисел, например, утроенного и удесятеренного, — и, конечно, должны получить то же кольцо цифр, потому что умножение на 3 + 10, т. е. на 13, вызывает лишь перестановку группы цифр, не заметную при круговом расположении.

При некотором положении колец получаются, однако, суммы, немного отличающиеся от первоначального ряда. Если, например, повернем кольца так, чтобы складывать пришлось шестикратное число с пятнадцатикратным, то в сумме должно получиться число, умноженное на 6 + 15 = 21. А такое произведение, как легко догадаться, составляется уже несколько иначе, чем произведение на множитель, меньший 16. В самом деле: так как наше число есть период дроби, равной $^1/_{17}$, то, будучи умножено на 17, оно должно дать 16 девяток (т. е. столько, сколько их в подразумеваемом знаменателе периодической дроби) или 1 с 17 нулями минус 1. Поэтому при умножении на 21, т. е. на 4 + 17, мы должны получить четырехкратное число, впереди которого стоит 1, а от разряда единиц отнято 1. Четырехкратное же число начнется с цифр, получающихся при превращении в десятичную дробь простой дроби $^4/_{17}$.

$$\begin{array}{l} \underline{4\ :17} = 0{,}23\ldots. \\ \ \underline{40} \\ \quad \underline{60} \\ \qquad 9 \end{array}$$

Порядок остальных цифр нам известен: 5294 . . . Значит, 21-кратное наше число будет

2352941176470588.

Столько именно и получается от сложения кругов цифр при соответственном их расположении. При *вычитании* числовых колец такого случая, разумеется, быть не может. Чисел, подобных тем двум, с которыми мы познакомились, существует множество. Все они составляют словно одно семейство, так как объединены общим происхождением — от превращения простых дробей в бесконечные десятичные. Но не всякий период десятичной дроби обладает рассмотренным выше любопытным свойством давать при умножении круговую перестановку цифр. Не вдаваясь в тонкости теории, отметим, что это имеет место только для тех дробей, *число цифр периода которых на единицу меньше знаменателя* соответствующей простой дроби. Так, например:

$^1/_7$ дает в периоде 6 цифр.
$^1/_{17}$ „ „ „ 16 „
$^1/_{19}$ „ „ „ 18 „
$^1/_{23}$ „ „ „ 22 „
$^1/_{29}$ „ „ „ 28 „

Вы можете убедиться испытанием, что периоды дробей, получающихся от превращения $1/19$, $1/23$ и $1/29$ в десятичные, обладают теми же особенностями, как и рассмотренные нами периоды дробей $1/7$ и $1/17$.

Например, от $1/29$ получаем число

0344827586206896551724137931.

Если указанное сейчас условие (относительно числа цифр периода) не соблюдено, то соответствующий период дает число, не принадлежащее к занимающей нас семье интересных чисел. Например, $1/13$ дает десятичную дробь с шестью (а не с 12) цифрами в периоде:

$$1/13 = 0{,}076923.$$

Помножив на 2, получаем совершенно иное число:

$$2/13 = 0{,}153846.$$

Почему? Потому что среди остатков от деления 1:13 не было числа 2. *Различных* остатков было столько, сколько цифр в периоде, т. е. 6; различных же множителей для дроби $1/13$ у нас 12; следовательно, не все множители будут среди остатков, а только 6. Легко убедиться, что эти множители следующие: 1, 3, 4, 9, 10, 12. Умножение на эти 6 чисел дает круговую перестановку (076923 × 3 = 230769), на остальные — нет. Вот почему от $1/13$ получается число, лишь отчасти пригодное для «магического кольца». То же надо сказать и о целом ряде других периодов.

После этого, думаем, нельзя не согласиться, что длиннейшие периоды бесконечных дробей представляют собою настоящую Калифорнию[1] интереснейших арифметических достопримечательностей.

Решение задачи № 28
(с. 56)

Число 130 в различных системах счисления выражается следующим образом:

| | |
|---|---|
| в двоичной | 10 000 010 |
| в троичной | 11 211 |
| в 4-ной | 2002 |
| в 5-ной | 1010 |
| в 6-ной | 334 |
| в 7-ной | 244 |
| в 8-ной | 202 |
| в 9-ной | 154 |

[1] Т. е. «настоящую сокровищницу» (после обнаружения в 1848 году месторождений золота в Калифорнии началась так называемая «золотая лихорадка») (*примеч. ред.*).

## Глава VI

# ФОКУСЫ БЕЗ ОБМАНА

## ИСКУССТВО ИНДУССКОГО ЦАРЯ

Арифметические фокусы — честные, добросовестные фокусы. Здесь не стремятся обмануть, не стараются усыпить внимание зрителя. Чтобы выполнить арифметический фокус, не нужны ни чудодейственная ловкость рук, ни изумительное проворство движений, ни какие-либо другие артистические способности, требующие иногда многолетних упражнений. Весь секрет арифметического фокуса состоит в использовании любопытных свойств чисел, в близком знакомстве с их особенностями. Кто знает разгадку такого фокуса, тому все представляется простым и ясным; а для не знающего арифметики — самое прозаическое действие, например, умножение, кажется уже чем-то вроде фокуса.

Было время, когда выполнение даже обыкновенных арифметических действий над большими числами, знакомое теперь каждому школьнику, составляло искусство лишь немногих и казалось остальным какою-то сверхъестественною способностью. В древнеиндусской повести «Наль и Дамаянти»[1] находим отголосок такого взгляда на арифметические действия.

[1] Русский перевод (вольный) Жуковского. Эпизод, о котором далее идет речь, описан в главе VIII этой повести.

Наль, умевший превосходно править лошадьми, возил однажды своего хозяина, царя Ритуперна, мимо развесистого дерева — Вибитаки.

> Вдруг он увидел вдали Вибитаку — ветвисто-густою
> Сенью покрытое дерево. «Слушай, — сказал он: —
> Здесь, на земле, никто не имеет всезнанья; в искусстве
> Править конями ты первый; зато мне далося искусство
> Счета»...

И в доказательство своего искусства царь мгновенно сосчитал число листьев на ветвистой Вибитаке. Изумленный Наль просит Ритуперна открыть ему тайну его искусства, и царь соглашается.

> ...Лишь только
> Вымолвил слово свое Ритуперн, как у Наля открылись
> Очи, и он все ветки, плоды и листья Вибитаки
> Разом мог перечесть...

Секрет искусства состоял, как можно догадаться, в том, что непосредственный счет листьев, требующий много времени и терпения, заменялся счетом листьев одной лишь ветки и умножением этого числа на число веток каждого сука и далее — на число сучьев дерева (предполагая, что сучья одинаково обросли ветками, а ветки — листьями).

Разгадка большинства арифметических фокусов столь же проста, как и секрет «фокуса» царя Ритуперна. Стоит лишь узнать, в чем разгадка фокуса, и вы сразу овладеваете искусством его выполнять, как овладел легендарный Наль изумительным искусством быстрого счета. В основе каждого арифметического фокуса лежит какая-нибудь интересная особенность чисел, и потому знакомство с подобными фокусами не менее поучительно, чем занимательно.

## НЕ ВСКРЫВАЯ КОНВЕРТОВ

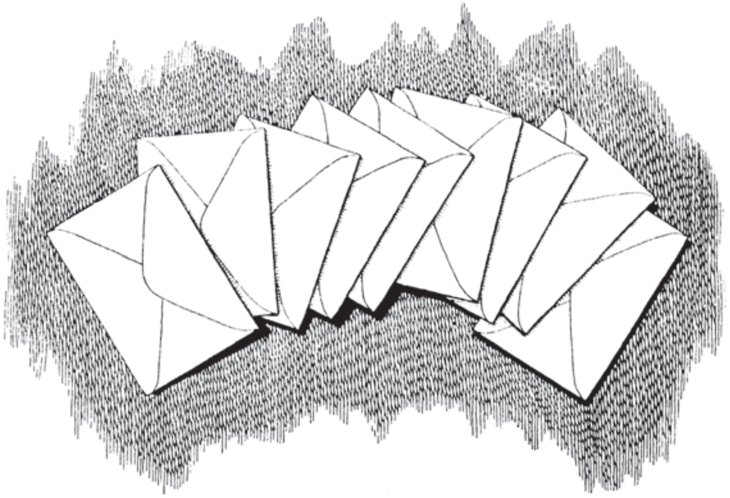
### Задача № 41

Фокусник вынимает стопку из 300 кредитных билетов по 1 рублю каждый[1] и предлагает вам разложить деньги в 9 конвертах так, чтобы вы могли уплатить *ими любую сумму до 300 рублей, не вскрывая ни одного конверта*.

Задача представляется вам совершенно невыполнимой. Вы готовы уже думать, что тут дело кроется в какой-нибудь коварной игре слов или неожиданном толковании их смысла. Но вот фокусник, видя вашу беспомощность, сам раскладывает деньги по конвертам, заклеивает их и предлагает вам назвать любую сумму в пределах трехсот рублей.

Вы называете наугад первое попавшееся число — например, 269.

[1] Можно пользоваться и простыми карточками с соответствующими надписями.



Без малейшего промедления фокусник подает вам 4 заклеенных конверта. Вы вскрываете их и находите:

| | | |
|---|---|---|
| в 1-м — | 64 | руб. |
| „ 2-м — | 45 | „ |
| „ 3-м — | 128 | „ |
| „ 4-м — | 32 | „ |
| Итого... | 269 | руб. |

Теперь вы склонны заподозрить фокусника в искусной подмене конвертов и требуете повторения опыта. Он спокойно кладет деньги обратно в конверты, заклеивает и оставляет их на этот раз в ваших руках. Вы называете новое число, например 100, или 7, или 293, — и фокусник моментально указывает, какие из лежащих у вас под руками конвертов вы должны взять, чтобы составить требуемую сумму (в первом случае, для 100 рублей — 4 конверта, во втором, для 7 рублей — 3 конверта, в третьем, для 293 рублей — 6 конвертов).

В чем же дело?

### Решение

Секрет этот кроется в том, чтобы разложить деньги в следующие стопки: 1 руб., 2 руб., 4 руб., 8 руб., 16 руб., 32 руб., 64 руб., 128 руб. и, наконец, в последней — остальные рубли, т. е.

$$300 - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128) = 300 - 255 = 45.$$

Из первых 8 конвертов возможно, как нетрудно убедиться, составить любую сумму от 1 до 255; если же задается число большее, то пускают в дело последний конверт, с 45 рублями, а разницу составляют из первых 8 конвертов.

Вы можете проверить пригодность такой группировки чисел многочисленными пробами и убедиться, что из них можно действительно составить всякое число, не превышающее 300. Но вас, вероятно, интересует и то, почему, собственно, ряд чисел 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 и т. д. обладает столь замечательным свойством.

Это нетрудно понять, если вспомнить, что числа нашего ряда представляют степени 2: $2^1$, $2^2$, $2^3$, $2^4$ и т. д.[1], — и, следовательно, их можно рассматривать как разряды двоичной системы счисления. А так как всякое число можно написать по двоичной системе, то значит, и *всякое число возможно составить из суммы степеней* 2, т. е. из чисел ряда 1, 2, 4, 8, 16 и т. д. И когда вы подбираете конверты, чтобы составить из их содержимого заданное число, вы, в сущности, выражаете заданное число в двоичной системе счисления. Например, число 100 мы легко сможем составить, если изобразим его в двоичной системе:

$$\begin{array}{llllllll}
100 \mid 2 & & & & & & & \\
0 & \mid 50 \mid 2 & & & & & & \\
 & 0 & \mid 25 \mid 2 & & & & & \\
 & & 1 & \mid 12 \mid 2 & & & & \\
 & & & 0 & \mid 6 \mid 2 & & & \\
 & & & & 0 & \mid 3 \mid 2 & & \\
 & & & & & 1 & \mid 1 &
\end{array}$$

$$100 = \underset{64}{1}\ \underset{32}{1}\ \underset{(16)}{0}\ \underset{(8)}{0}\ \underset{4}{1}\ \underset{(2)}{0}\ \underset{(1)}{0}$$

$$100 = 64 + 32 + 4$$

Напомним, что в двоичной системе на первом месте *справа* стоят единицы, на втором — двойки, на третьем — четверки, на четвертом — восьмерки и т. д.

1 Проходившие алгебру знают, что и число 1 можно рассматривать как степень 2, именно нулевую.

## УГАДАТЬ ЧИСЛО СПИЧЕК

### Задача № 42

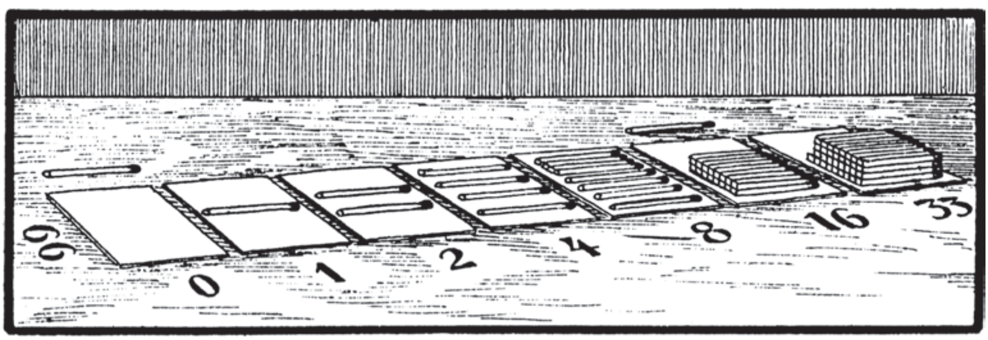
Свойством двоичной системы можно воспользоваться и для следующего фокуса. Вы предлагаете кому-нибудь взять неполный коробок со спичками, положить его на стол, а рядом положить 8 бумажных квадратиков. Затем просите *в вашем отсутствии* проделать следующее: оставив половину спичек в коробке, перенести другую половину на ближайшую бумажку; если число спичек нечетное, то излишнюю спичку положить рядом с бумажкой, налево от нее. Спички, очутившиеся на бумажке, надо (не трогая лежащей рядом) разделить на две равные части: одну половину положить в коробку, другую — переложить на следующую бумажку; в случае нечетного числа остающуюся спичку положить рядом со второй бумажкой. Далее поступать таким же образом, возвращая всякий раз половину спичек обратно в коробку, а другую половину — перекладывая на следующую бумажку, не забывая при нечетном числе спичек класть одну спичку рядом. В конце концов все спички, кроме одиночных, лежащих рядом с бумажками, возвратятся в коробку.

Когда это сделано, вы являетесь в комнату и, бросив взгляд на пустые бумажки, называете число спичек во взятой коробке.

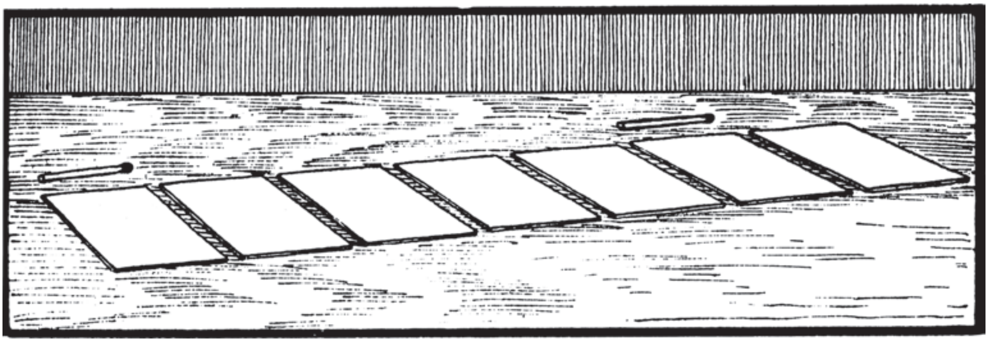
Как можно по пустым бумажкам и случайным единичным спичкам догадаться о первоначальном числе спичек в коробке?

### Решение

Эти «пустые» бумажки в данном случае очень красноречивы: по ним и по одиночным спичкам можно буквально *прочесть* искомое число, потому что оно *написано* на столе — в двоичной системе счисления. Поясним это на примере. Пусть число спичек было 66. Последовательные операции с ними и окончательный вид бумажек показаны на следующих схемах:




*Последовательные операции*



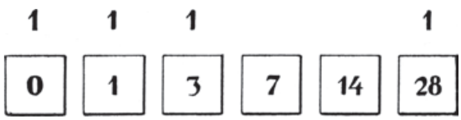
*Окончательный вид*

Не нужно большой проницательности, чтобы сообразить, что проделанные со спичками операции, в сущности, те же самые, какие мы выполнили бы, если бы хотели выразить число спичек в коробке по двоичной системе счисления; окончательная же схема — прямо изображает это число в двоичной системе, если пустые бумажки принять за нули, а бумажки, отмеченные сбоку спичкой, — за единицы. Читая схему слева направо получаем

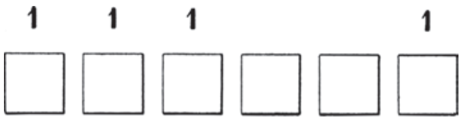
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 64 | (32) | (16) | (8) | (4) | 2 | (1) |

т. е. в десятичной системе: 64 + 2 = 66.

Если бы было 57 спичек, мы имели бы иные схемы:




*Последовательные операции.*




*Окончательный вид.*

Искомое число, написанное по двоичной системе:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 32 | 16 | 8 | (4) | (2) | 1 |

А в десятичной: 32 + 16 + 8 + 1 = 57.

## ЧТЕНИЕ МЫСЛЕЙ ПО СПИЧКАМ

**Задача № 43**

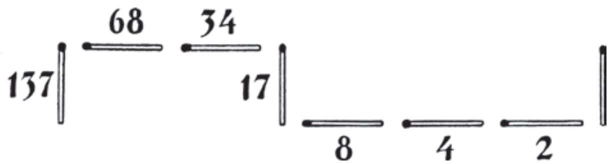
Третье видоизменение того же фокуса представляет собою своеобразный способ отгадывания задуманного числа по спичкам. Загадавший должен мысленно делить задуманное число пополам, полученную половину опять пополам и т. д. (от нечетного числа отбрасывая единицу) — и при каждом делении класть перед собою спичку, направленную *вдоль* стола, если делится число четное, и *поперек*, если приходится делить нечетное. К концу операции получается фигура вроде следующей:

Вы всматриваетесь в эту фигуру и безошибочно называете задуманное число: 137.

Как вы узнаете его?

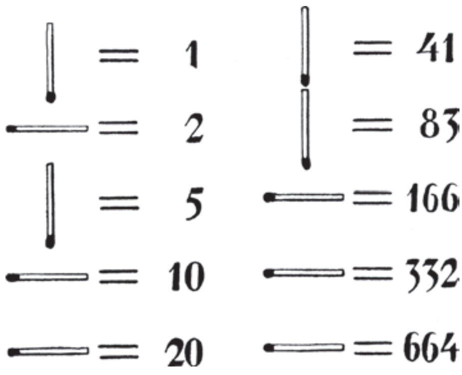
**Решение**

Способ станет ясен сам собою, если в выбранном примере (137) мы последовательно обозначим возле каждой спички то число, при делении которого она была положена:




Теперь понятно, что так как последняя спичка *во всех случаях* обозначает число 1, то не составляет труда, восходя от нее к предшествующим делениям, добраться до первоначально задуманного числа. Например, по фигуре

вы можете вычислить, что задумано было число 664. В самом деле, выполняя последовательно удвоения (начиная с конца) и не забывая прибавлять, где надо единицу, получаем (см. рис.).




Таким образом, пользуясь спичками, вы прослеживаете ход чужих мыслей, восстанавливая всю цепь умозаключений.

Тот же результат мы можем получить иначе, сообразив, что *лежащая* спичка должна соответствовать в двоичной системе нулю (деление на 2 без остатка), а *стоящая* — единице. Таким образом, в первом примере мы имеем (читая справа налево) число

1 0 0 0 1 0 0 1
128 (64) (32) (16) 8 (4) (2) 1

или в десятичной системе:

$$128 + 8 + 1 = 137.$$

А во втором примере задуманное число изображается по двоичной системе:

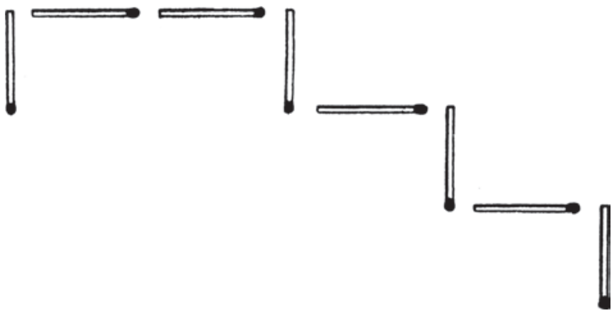
1 0 1 0 0 1 1 0 0 0
512 (256) 128 (64) (32) 16 8 (4) (2) 1

или по десятичной системе:

$$512 + 128 + 16 + 8 + 1 = 664.$$

**Задача № 44**

Какое число задумано, если получилась такая фигура (см. рис.).



**Решение**

Число «10010101» в двоичной системе соответствует в десятичной:

$$128 + 16 + 4 + 1 = 149.$$

(Необходимо заметить, что получаемая при последнем делении единица также должна быть отмечаема *стоящей* спичкой).

## ИДЕАЛЬНЫЙ РАЗНОВЕС

**Задача № 45**

У некоторых читателей, вероятно, возник уже вопрос: почему для выполнения описанных раньше опытов мы пользуемся именно *двоичной* системой? Ведь всякое число можно изобразить в любой системе, между прочим и в десятичной. Чем же объясняется предпочтение здесь двоичной?

**Решение**

Объясняется оно тем, что в этой системе, кроме нуля, употребляется всего одна цифра — единица, а следовательно, число составляется из различных степеней 2, взятых только *по одному* разу. Если бы в фокусе с конвертами мы распределили деньги, например, по пятеричной системе, то могли бы составить, не вскрывая конвертов, любую сумму лишь в том случае, когда каждый пакет повторяется у нас не менее 4 раз (в пятеричной системе употребляются ведь кроме нуля 4 цифры).

Впрочем, бывают случаи, когда для подобных надобностей удобнее пользоваться не двоичной, а *троичной* системой, несколько видоизмененной. Сюда относится знаменитая старинная «задача о наборе гирь», которая может послужить сюжетом и для арифметического фокуса.

### Задача № 46а

Представьте, что вам предложили придумать набор из 4 гирь, с помощью которых возможно было бы отвесить любое целое число килограммов от 1 до 40. Двоичная система подсказывает вам набор:

1 кг, 2 кг, 4 кг, 8 кг, 16 кг,

которым можно отвешивать все грузы от 1 до 31 кг. Но это, очевидно, не удовлетворяет требуемым условиям ни по числу гирь, ни по предельному грузу (31 кг вместо 40). Кроме того, вы не использовали здесь возможности класть гири не только на одну чашку весов, но и на две, т. е. обходиться не только суммою гирь, но и их разностью. Это дает так много разнообразных комбинаций, что вы совершенно теряетесь в поисках, не умея уложить их в какую-либо систему. Если вам не посчастливится напасть на правильный путь, вы готовы будете даже сомневаться вообще в разрешимости подобной задачи столь малым числом гирь, как четыре.

### Решение

Посвященный выходит из этого затруднения с волшебной простотой, намечая следующие 4 гири:

1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг.

Любое целое число килограммов, до 40 кг, вы можете отвесить такими гирями, кладя их то на одну, то на обе чашки весов. Не приводим примеров, потому что каждый легко может сам убедиться в полной пригодности такого набора гирь для нашей цели. Остановимся лучше на том, *почему* именно указанный ряд обладает этим свойством. Вероятно, читатели уже заметили, что числа эти — ряд степеней числа 3: [1]

$$3^0, 3^1, 3^2, 3^3.$$

Это значит, что мы обращаемся здесь к услугам *троичной* системы счисления. Гири — цифры этой системы. Но как воспользоваться ею в тех случаях, когда требуемый вес получается в виде *разности* двух гирь? И как избегнуть необходимости обращаться к удвоению гирь (в троичной системе ведь кроме нуля употребляются две цифры: 1 и 2)?

То и другое достигается введением «отрицательных» цифр. Дело сводится попросту к тому, что вместо цифры 2 употребляют 3 – 1, т. е. цифру единицы высшего разряда, от которого *отнимается* одна единица низшего. Например, число 2 в нашей видоизмененной троичной системе обозначится не 2, а $1\bar{1}$, где знак минус над цифрой единиц означает, что эта единица

---

[1] Единицу можно рассматривать как *нулевую* степень 3 (вообще — как нулевую степень каждого числа).

не прибавляется, а отнимается. Точно так же число 5 изобразится не 12, а $1\bar{1}1$ (т. е. 9 – 3 – 1 = 5).

Теперь ясно, что если любое число можно изобразить в троичной системе с помощью нуля (т. е. знака отсутствия числа) и одной только цифры, именно прибавляемой или отнимаемой единицы, — то из чисел 1, 3, 9, 27 можно, складывая или вычитая их, составить все числа от 1 до 40. Мы как бы пишем все эти числа, употребляя вместо цифр — гири. Случай сложения отвечает при взвешивании тому случаю, когда гири помещаются все на одну чашку, а случай вычитания, когда часть гирь кладется на чашку с товаром, и, следовательно, вес ее *отнимается* от веса остальных гирь. Нуль соответствует *отсутствию* гири.

### Задача № 46б

Как известно, эта система на практике не применяется. Всюду в мире, где введена метрическая система мер, применяется набор в 1, 2, 2, 5 единиц, а не 1, 3, 9, 27, — хотя первым можно отвешивать грузы только до 10 единиц, а вторым — до 40. Не применялся набор 1, 3, 9, 27 и тогда, когда метрическая система еще не была введена. В чем же причина отказа на практике от этого совершеннейшего разновеса?

### Решение

Причина кроется в том, что идеальный разновес удобен только на бумаге, на деле же пользоваться им весьма хлопотливо. Если бы приходилось только отвешивать заданное число весовых единиц — например, отвесить 400 грамм масла или 2500 грамм сахара, — то системой гирь в 100, 300, 900, 2700 можно было бы еще на практике пользоваться (хотя и тут приходилось бы каждый раз долго подыскивать соответствующую комбинацию). Но когда приходится определять, сколько весит данный товар, то подобный разновес оказывается страшно неудобным: здесь нередко ради прибавления к поставленным гирям одной единицы приходится производить полную замену прежней комбинации другой, новой. Отвешивание становится при таких условиях крайне медленным и притом утомительным делом. Не всякий быстро сообразит, что, например, вес 19 кг получится, если на одну чашку поставить гири в 27 кг и 1 кг, а на другую 9; вес 20 кг — если на одну чашку поставить гири в 27 кг и 3 кг, а на другую — 9 кг и 1 кг. При каждом отвешивании приходилось бы решать подобные головоломки. Разновес 1, 2, 2, 5 таких затруднений не доставляет.

## ПРЕДСКАЗАТЬ СУММУ НЕНАПИСАННЫХ ЧИСЕЛ

### Задача № 47

Одним из наиболее поражающих «номеров», выполняемых феноменальным русским вычислителем Р. С. Арраго[1], является молниеносное — с одного взгляда — складывание целого столбца многозначных чисел.

Но что сказать о человеке, который может написать сумму еще раньше, чем ему названы все слагаемые?

Это, конечно, фокус, и выполняется он в таком виде. Отгадчик предлагает вам написать какое-нибудь многозначное число по вашему выбору. Бросив взгляд на это первое слагаемое, отгадчик пишет на бумажке сумму всей будущей колонны слагаемых и передает вам на хранение. После этого он просит вас (или кого-нибудь из присутствующих) написать еще одно слагаемое — опять-таки какое угодно. А затем быстро пишет сам третье слагаемое. Вы складываете все три написанных числа — и получаете как раз тот результат, который заранее был написан отгадчиком на спрятанной у вас бумажке.

Если, например, вы написали в первый раз 83267, то отгадчик пишет будущую сумму 183266. Затем вы пишете, допустим, 27935, а отгадчик приписывает третье слагаемое — 72064:

| | | |
|---|---|---|
| I | Вы: | 83267 |
| III | Вы: | 27935 |
| IV | Отгадчик: | 72064 |
| II | Сумма | 183266 |

Получается в точности предсказанная сумма, хотя отгадчик не мог знать, каково будет второе слагаемое. Отгадчик может предсказать также сумму 5 или 7 слагаемых, — но тогда он сам пишет два или три из них. Никакой подмены бумажки с результатом здесь заподозрить вы не можете, так как она до последнего момента хранится в вашем собственном кармане. Очевидно, отгадчик пользуется здесь каким-то неизвестным вам свойством чисел. Каким?

---

[1] *Роман Семенович Арраго* (настоящая фамилия Левитин) (1883–1949) — артист оригинального жанра, один из известнейших российских счетчиков. В 1908–1912 гг. гастролировал по Европе, Южной Америке и Австралии. Выполнял сложные вычисления и номера мнемоники, решал задачи по возведению в степень и извлечению корня из десятизначных чисел, отвечал на вопросы зрителей о точных датах рождения знаменитых людей. В 1912 году окончательно вернулся в Россию. Бóльшую часть жизни работал в СССР. В годы Великой Отечественной войны много выступал на заводах, в воинских частях, госпиталях, а после войны — в театрах и цирках (*примеч. ред.*).

**Решение**

Отгадчик пользуется тем, что от прибавления, скажем, к 5-значному числу числа из 5 девяток (99999) это число увеличивается на 1000000 – 1, т. е. впереди него появляется единица, а последняя цифра уменьшается на единицу. Например:

$$\begin{array}{r} 83267 \\ +\ 99999 \\ \hline 183266 \end{array}$$

Эту сумму — т. е. сумму написанного вами числа и 99999 — отгадчик и пишет на бумажке как будущий результат сложения. А чтобы результат оправдался, он, увидев ваше второе слагаемое, выбирает свое, третье слагаемое так, чтобы вместе со вторым оно составило 99999, т. е. вычитает каждую цифру второго слагаемого из 9. Эти операции вы легко можете теперь проследить на предыдущем примере, а также и на следующих примерах:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| I | Вы: | 379264 | I | Вы: | 9935 |
| III | Вы: | 4873 | III | Вы: | 5669 |
| IV | Отгадчик: | 995126 | IV | Отгадчик: | 4330 |
| II | Сумма | 1379263 | II | Сумма | 19934 |

Легко усмотреть, что вы сильно затрудните отгадчика, если ваше второе слагаемое будет заключать больше цифр, чем первое: отгадчик не сможет написать слагаемого, которое уменьшит ваше второе число для оправдания предсказанного им слишком малого результата. Поэтому опытный отгадчик предупредительно ограничивает свободу вашего выбора этим условием. Фокус выходит внушительнее, когда в придумывании слагаемых участвует несколько лиц. После первого же слагаемого — например, 437692 — отгадчик уже предсказывает сумму всех пяти чисел, именно записывает 2437690 (здесь будет добавлено дважды 999999, т. е. 2000000 – 2). Дальнейшее ясно из схемы:

| | | |
|---|---|---|
| I | Вы написали: | 437692 |
| III | Другой написал: | 822541 |
| V | Третий написал: | 263009 |
| IV | Отгадчик добавил: | 177468 |
| VI | » » | 736990 |
| II | » предсказал: | 2437690 |

## ПРЕДУГАДАТЬ РЕЗУЛЬТАТ

Большое впечатление производят те арифметические фокусы, в которых отгадчик угадывает результат действий над совершенно неизвестными ему числами. Подобных фокусов существует много, и все они основаны на возможности придумать такой ряд арифметических действий, результат которых не зависит от чисел, над которыми они производятся.

Рассмотрим фокусы этого рода.

Признак делимости на 9 всем известен: число кратно 9, если сумма его цифр кратна 9. Припомнив, как выводится это правило, мы запасаемся еще и другим интересным правилом: если от числа отнять сумму его цифр, то получается остаток, кратный 9 (это доказывается попутно при выводе признака делимости на 9). Точно так же мы получим число, кратное 9, если *отнимем* от данного числа другое, которое составлено из тех же цифр, но размещенных в другом порядке. Например: 457 – (4 + 5 + 7) = 441, т. е. числу, кратному 9; или: 7843 – 4738 = 3105, числу, кратному 9.[1] Всем этим можно воспользоваться для выполнения несложного фокуса.

### Задача № 48

Предложите товарищу задумать любое число и затем, переставив его цифры в ином, каком угодно порядке, вычесть меньшее число из большего. В полученном результате ваш товарищ зачеркивает одну цифру — безразлично какую — и читает вслух оставшиеся цифры, а вы сразу же называете скрытую от вас, зачеркнутую сумму. Как вы отгадываете ее?

### Решение

Очень просто: вы знаете, что результат должен быть кратен 9, т. е. сумма его цифр должна без остатка делиться на 9. Быстро сложив в уме прочитанные вам цифры, вы легко можете сообразить, какой цифры не хватает, чтобы сумма была кратна 9. Например: задумано число 57924; после перестановки получено 92457. Вычитание дает результат 3?533, в котором знак вопроса стоит на месте зачеркнутой цифры. Сложив цифры 3 + 5 + 3 + 3, получаем 14. Нетрудно сообразить, что зачеркнута была цифра 4, потому что ближайшее большее число, кратное 9, есть 18, а 18 – 4 = 14.

$$\begin{array}{r} -\,92457 \\ \underline{57924} \\ 3?533 \end{array}$$

### Задача № 49

Тот же фокус можно обставить гораздо более эффектно, именно так, чтобы отгадать число, ничего не спрашивая у загадчика. Для этого проще всего предложить задумать трехзначное число с неодинаковыми крайними числами; затем, переставив цифры *в обратном порядке*, вычесть меньшее число из большего; в полученном результате переставить цифры и сложить оба числа. Окончательный результат всего этого ряда перестановок, вычитания и сложения вы называете изумленному загадчику без малейшего промедления или даже вручаете ему заранее в заклеенном конверте. Как это делается?

---

[1] Это свойство разности вытекает из «правила остатков», о котором мы упоминали раньше, на с. 36.

**Решение**

Секрет фокуса прост: какое бы число ни было задумано, в результате перечисленных действий всегда получается одно и то же: 1089. Вот несколько примеров:

$$\begin{array}{r} 763\\ -\;267\\ \hline 495\\ +\;594\\ \hline 1089 \end{array}\qquad\begin{array}{r} 431\\ -\;134\\ \hline 297\\ +\;792\\ \hline 1089 \end{array}\qquad\begin{array}{r} 982\\ -\;289\\ \hline 693\\ +\;396\\ \hline 1089 \end{array}\qquad\begin{array}{r} 291\\ -\;192\\ \hline 099\\ +\;990\\ \hline 1089 \end{array}$$

(Последний пример показывает, как должен поступать загадчик, когда разность получается двузначная.)

Всматриваясь внимательно в ход выкладок, вы, без сомнения, поймете причину такого однообразия результатов. При вычитании неизбежно должна получаться в разряде десятков цифра 9, а по сторонам ее — цифры, сумма которых = 9. При последующем сложении должна поэтому получиться на первом справа месте цифра 9, далее, от 9 + 9, цифра 8 и единица в уме, которая при сложении с 9 сотнями дает 10. Отсюда — 1089.

Если вы станете повторять этот фокус несколько раз кряду, не внося в него никаких изменений, то секрет ваш, разумеется, будет раскрыт: загадчик сообразит, что постоянно получается одно и то же число 1089, хотя, быть может, и не отдаст себе отчета в причине такого постоянства. Вам необходимо поэтому видоизменять фокус. Сделать это нетрудно, так как $1089 = 33 \times 33 = 11 \times 11 \times 3 \times 3 = 121 \times 9 = 99 \times 11$. Достаточно поэтому просить загадчика, когда вы доведете его до числа 1089, разделить этот результат на 33, или на 11, или на 121, или на 99, или на 9, — и тогда лишь назвать получающееся число. У вас, следовательно, в запасе имеется 5 изменений фокуса, не говоря уже о том, что вы можете просить загадчика также умножить сумму на любое число, мысленно выполняя то же самое действие.

## МГНОВЕННОЕ ДЕЛЕНИЕ

Из многочисленных разновидностей фокусов этого рода опишем один, основанный на знакомом уже нам свойстве множителя, состоящего из ряда одних девяток; когда умножают на него число с столькими же цифрами, получается результат, состоящий из двух половин: первая — это умножаемое число, уменьшенное на единицу; вторая — результат вычитания первой половины из множителя. Например: $247 \times 999 = 246653$; $1372 \times 9999 = 13718628$ и т. п. Причину легко усмотреть из следующей строки:

$$247 \times 999 = 247 \times (1000 - 1) = 247000 - 247 =$$
$$= 246999 - 246.$$

Пользуясь этим, вы предлагаете целой группе товарищей произвести деление многозначных чисел — одному 68933106 : 6894; другому 8765112348 : : 9999; третьему 543456 : 544, четвертому 12948705 : 1295 и т. д., — а сами беретесь обогнать их всех, выполняя те же задачи. И прежде, чем они успеют приняться за дело, вы уже вручаете каждому бумажку с полученным вами безошибочным результатом деления: первому — 9999, второму 87652, третьему — 999, четвертому — 9999.

Вы можете сами придумать по указанному образцу ряд других способов поражать непосвященных мгновенным выполнением деления: для этого воспользуйтесь некоторыми свойствами тех чисел, которые помещены в «Галерее числовых диковинок» (см. главу VI).

## ЛЮБИМАЯ ЦИФРА

### Задача № 50

Попросите кого-нибудь назвать его любимую цифру. Допустим, вам назвали цифру 6.

— Вот удивительно! — восклицаете вы. — Да ведь это как раз самая замечательная из всех значащих цифр.

— Чем же она замечательна? — осведомляется ваш озадаченный собеседник.

— А вот посмотрите: умножьте вашу любимую цифру на число значащих цифр, т. е. на 9, и полученное число (54) подпишите множителем под числом 12345679:

$$\begin{array}{r} \times\, 12345679 \\ 54 \\ \hline \end{array}$$

Что получится в произведении?

Ваш собеседник выполняет умножение — и с изумлением получает результат, состоящий сплошь из его любимых цифр: 666666666.

— Вот видите, какой у вас тонкий арифметический вкус, — заканчиваете вы. — Вы сумели избрать из всех цифр как раз ту, которая обладает столь удивительным свойством!

Однако в чем тут дело?

### Решение

Точно такой же изысканный вкус оказался бы у вашего собеседника, если бы он избрал какую-нибудь другую из 9 значащих цифр, потому что каждая из них обладает тем же свойством:

$$\begin{array}{r} 12345679 \\ \times 4 \times 9 \\ \hline 444444444 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12345679 \\ \times 7 \times 9 \\ \hline 777777777 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 12345679 \\ \times 9 \times 9 \\ \hline 999999999 \end{array}$$

Почему это так, вы сообразите, если припомните то, что говорилось о числе 12345679 в «Галерее числовых диковинок».

## УГАДАТЬ ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ

Фокусы, относящиеся к этой категории, могут быть изменяемы на разные лады. Опишу один из видов этого фокуса, довольно сложный, но именно потому и производящий эффектное впечатление.

**Задача № 51**

Допустим, что вы родились 18 мая 1903 года и что вам теперь 23 полных года. Но я не знаю ни даты вашего рождения, ни вашего возраста. Тем не менее я берусь отгадать то и другое, заставив вас проделать лишь некоторый ряд вычислений.

А именно: порядковый номер месяца (май, 5-й месяц) я прошу вас умножить на 100, прибавить к произведению число месяца (18), сумму удвоить, к результату прибавить 8, полученное число умножить на 5, к произведению прибавить 4, помножить результат на 10, прибавить 4 и к полученному числу прибавить ваш возраст (23).

Когда вы все это проделаете, вы сообщаете мне окончательный результат вычислений. Я вычитаю из него 444, а разность разбиваю на грани, справа налево, по 2 цифры в каждой: получаю сразу как день и месяц вашего рождения, так и ваш возраст.

Действительно. Проделаем последовательно все указанные вычисления:

$$\begin{aligned}
5 \times 100 &= 500\\
500 + 18 &= 518\\
518 \times 2 &= 1036\\
1036 + 8 &= 1044\\
1044 \times 5 &= 5220\\
5220 + 4 &= 5224\\
5224 \times 10 &= 52240\\
52240 + 4 &= 52244\\
52244 + 23 &= 52267
\end{aligned}$$

Произведя вычитание 52267 – 444, получаем число 51823.

Теперь разобьем это число на грани, справа налево, по две цифры в каждой. Имеем:

$$5 - 18 - 23,$$

т. е. 5-го месяца (мая), числа 18; возраст 23 года.

Почему же так получилось?

**Решение**

Секрет нашего фокуса легко понять из рассмотрения следующего равенства:

$$\left\{\left[(100m + t) \times 2 + 8\right] \times 5 + 4\right\} \times 10 + 4 + n -$$

$$- 444 = 10\,000m + 100t + n.$$

Здесь буква $m$ обозначает порядковый номер месяца, $t$ — число месяца, $n$ — возраст. Левая часть равенства выражает все последовательно произведенные вами действия, а правая — то, что должно получиться, если раскрыть скобки и проделать возможные упрощения. В выражении $10000m + 100t + n$ ни $m$, ни $t$, ни $n$ не могут быть более чем двухзначными числами; поэтому число, получающееся в результате, всегда должно при делении на грани, по две цифры в каждой, распасться на три части, выраженные искомыми числами $m$, $t$ и $n$.

Предоставляем изобретательности читателя придумать видоизменения этого фокуса, т. е. другие комбинации действий, дающие подобный же результат.

## ОДНО ИЗ «УТЕШНЫХ ДЕЙСТВИЙ» МАГНИЦКОГО

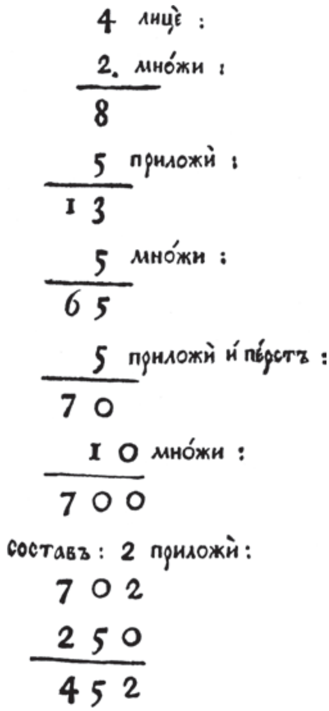
**Задача № 52**

Читателю же предлагаю раскрыть также секрет следующего незамысловатого фокуса, который описан еще в «Арифметике» Магницкого в главе: «Об утешных некиих действиях, через арифметику употребляемых».

Пусть кто-либо задумает какое-нибудь число, относящееся к деньгам, к дням, к часам или к «каковой-либо иной числимой вещи». Остановимся на примере перстня, надетого на 2-й сустав мизинца (т. е. 5-го пальца) 4-го из 8 человек. Когда в это общество является отгадчик, его спрашивают: у кого из восьми человек (обозначенных номерами от 1 до 8), на каком пальце и на котором суставе находится перстень?

«Он же рече: кто-либо от вас умножи оного, который взял через 2, и к тому приложи 5, потом паки (снова) умнож чрез 5, также приложи перст на нем же есть перстень (т. е. к полученному прибавь номер пальца с перстнем). А потом умножи чрез 10 и приложи сустав на нем же перстень взложен, и от сих произведенное число скажи ми, по немуже искомое получиши.

Они же твориша (поступили) якоже повеле им, умножаху четвертого человека, который взял перстень, и прочая вся, яже велеше им; якоже явлено есть (см. выкладки); из всего собрания пришло ему число 702, из него же он вычитал 250, осталось 452, т. е. 4-й человек, 5-й палец, 2-й сустав».




Не надо удивляться, что этот арифметический фокус был известен еще 200 лет назад: задачи совершенно подобного же рода я нашел в одном из первых сборников математических развлечений, именно у Баше де Мезирьяка[1], в его книге «Занимательные и приятные числовые задачи», вышедшей в 1612 году; а туда она попала из сочинения Леонарда Пизано[2] (1202 г.). Нужно вообще заметить, что бо́льшая часть математических игр, головоломок и развлечений, которые в ходу в настоящее время, очень древнего происхождения.

Решение задачи № 29
(с. 56).

По 4-ной системе — 27; по 5-ной — 38; по 6-ной — 51; по 7-ной — 66; по 8-ной — 83; по 9-ной — 102. Число это не может быть написано ни по двоичной, ни по троичной системе, так как содержит цифру 3, которой в этих системах нет. Число это по 5-ной системе делится на 2, так как сумма его цифр делится на 2. По 7-ной системе оно делится на 6, а по 9-ной не делится на 4.

---

[1] *Клод Гаспар Баше, сьер де Мезирьяк* (1581–1638) — французский математик, поэт, лингвист, переводчик. Один из первых членов Французской академии.

[2] *Леонардо Пизанский* (1170–1250) — первый крупный математик средневековой Европы. Наиболее известен под прозвищем Фибоначчи.


**Глава VII**

# БЫСТРЫЙ СЧЕТ И ВЕЧНЫЙ КАЛЕНДАРЬ

## ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ И МНИМЫЕ ФЕНОМЕНЫ

Кому приходилось присутствовать на сеансах нашего русского вычислителя Арраго, тот, без сомнения, не мог не поразиться его изумительными счетными способностями. Тут уж перед нами не фокус, а редкое природное дарование. Не существует «трюков» для выполнения в уме таких выкладок, как возвышение в куб любого четырехзначного числа или умножение любого шестизначного числа на шестизначное. Куб числа 4729, например, Арраго вычислил при мне в уме менее чем в одну минуту (результат 105756712489), а на умножение 679321 × 887064, также в уме, употребил всего 1½ минуты (результат 602601203544).

Я имел возможность наблюдать вычислительную работу этого феноменального счетчика не только на эстраде, но и в домашней обстановке, с глазу на глаз, и мог убедиться, что никакими особыми вычислительными приемами он не пользуется, а вычисляет в уме в общем так же, как мы на бумаге.

Но его необычайная память на числа помогает ему обходиться без записи промежуточных результатов, а быстрая сообразительность позволяет оперировать с двузначными числами с такою же легкостью, с какою мы производим действия над числами однозначными. Благодаря этому умножение шестизначного числа на шестизначное является для него задачей не большей, примерно, трудности, чем для нас — умножение трехзначного на трехзначное.

Такие феномены, как Арраго или — на Западе — Иноди, Диаманди, Рюкле, встречаются единицами. Но наряду с ними подвизаются и эстрадные математики иного рода, основывающие свое искусство на тех или иных арифметических трюках. Вам, быть может, приходилось слышать или даже присутствовать самим на сеансах «гениальных математиков», вычислявших в уме с поразительной быстротой, сколько вам недель, дней, минут, секунд, в какой день недели вы родились, какой день будет такого-то числа такого-то года и т. п. Чтобы выполнить бо́льшую часть этих вычислений, вовсе не нужно, однако, обладать необычайными математическими способностями. То же самое может после недолгого упражнения проделать и каждый из нас. Нужно только знать кое-какие секреты этих фокусов, разоблачением которых мы сейчас и займемся.

## «СКОЛЬКО МНЕ НЕДЕЛЬ?»

Чтобы научиться по числу лет быстро определять число заключающихся в них недель, нужно только уметь ускоренно множить на 52, т. е. на число недель в году.

### Задача № 53

Пусть дано перемножить 36 × 52. «Счетчик» сразу же, без заминки, говорит вам результат: 1872. Как он его получил?

### Решение

Довольно просто: 52 состоит из 50 и 2; 36 умножается на 5 через деление пополам; получается 18 — это две первые цифры результата: далее умножение 36 на 2 делается как обыкновенно; получают 72, которые и приписываются к прежним 18: 1872.

Легко увидеть, почему это так. Умножить на 52 — значит умножить на 50 и на 2; но вместо того чтобы умножить на 50, можно половину умножить на 100 — отсюда понятно деление пополам; умножение же на 100 достигается припиской 72 (36 × 2), отчего каждая цифра увеличивается в 100 раз (передвигается на два разряда влево).

Теперь понятно, почему «гениальный» счетчик так быстро отвечает на вопрос «мне столько-то лет; сколько мне недель?». Умножив число лет на 52, ему остается только прибавить еще к произведению седьмую часть числа лет, потому что в году 365 дней, т. е. 52 недели и 1 день: каждые 7 лет из этих избыточных дней накапливается лишняя неделя[1].

## «СКОЛЬКО МНЕ ДНЕЙ?»

Если спрашивают не о числе недель, а о числе дней, то прибегают к такому приему: половину числа лет множат на 73 и приписывают нуль — результат и будет искомым числом. Эта формула станет понятна, если заметить, что 730 = 365 × 2. Если мне 24 года, то число дней получим, умножив 12 × 73 = = 876 и приписав нуль — 8760. Само умножение на 73 также производится сокращенным образом, о чем речь впереди.

Поправка в несколько дней, происходящая от високосных лет, обыкновенно в расчет не принимается, хотя ее легко ввести, прибавив к результату четверть числа лет, — в нашем примере 24 : 4 = 6; общий результат, следовательно, 8766. [2]

Прием для вычисления числа минут читатель, после сказанного в следующей статье, не затруднится найти самостоятельно.

## «СКОЛЬКО МНЕ СЕКУНД?»

**Задача № 54**

На этот вопрос также можно довольно быстро ответить, пользуясь следующим приемом: половину числа лет умножают на 63; затем ту же половину множат на 72, результат ставят рядом с первым и приписывают три нуля. Если, например, число лет 24, то для определения числа секунд поступают так:

63 × 12 = 756; 72 × 12 = 864; результат 756864000

Как и в предыдущем примере, здесь не приняты в расчет високосные годы — ошибка, которой никто не поставит вычислителю в упрек, когда приходится иметь дело с сотнями миллионов.

На чем же основан указанный здесь прием?

**Решение**

Правильность нашей формулы выясняется очень просто. Чтобы определить число секунд, заключающихся в данном числе лет, нужно лета (в нашем

---

[1] Нетрудно ввести поправку и на високосные годы.

[2] Указанными далее приемами ускоренного умножения эти операции облегчаются до чрезвычайности, и миллионный результат получается очень быстро. Советую читателю попробовать произвести то же вычисление и обыкновенным путем, чтобы на деле убедиться, какая экономия во времени получается при пользовании указанной формулой и нижеприведенными приемами.

примере 24) умножить на число секунд в году, т. е. на $365 \times 24 \times 60 \times 60 = 31536000$. Мы делаем то же самое, но только большой множитель 31536 разбиваем на две части (приписка нулей сама собой понятна). Вместо того, чтобы умножать $24 \times 31536$, умножают 24 на 31500 и на 36, но и эти действия мы для удобства вычислений заменяем другими, как видно из следующей схемы:

$$24 \times 31536 = \begin{cases} 24 \times 31500 = 12 \times 63000 = 756000 \\ 24 \times \quad 36 = 12 \times \quad 72 = \underline{\quad\ 864} \end{cases}$$
$$756864$$

Остается лишь приписать три нуля — и мы имеем искомый результат: 756864000.

## ПРИЕМЫ УСКОРЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Мы упоминали раньше, что для выполнения тех отдельных действий умножения, на которые распадается каждый из указанных выше приемов, существуют также удобные способы. Некоторые из них весьма несложны и удобоприменимы; они настолько облегчают вычисления, что мы советуем читателю вообще запомнить их, чтобы пользоваться при обычных расчетах. Таков, например, прием перекрестного умножения, весьма удобный при действии с двузначными числами. Способ этот не нов; он восходит к грекам и индусам и в старину назывался «способом молнии», или «умножением крестиком». Теперь он хорошо забыт, и о нем не мешает напомнить[1].

Пусть дано перемножить $24 \times 32$. Мысленно располагаем числа по следующей схеме, одно под другим:

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 4 \\ | & \times & | \\ 3 & & 2 \end{array}$$

Теперь последовательно производим следующие действия:

1) $4 \times 2 = 8$ — это последняя цифра результата;

2) $2 \times 2 = 4$; $4 \times 3 = 12$; $4 + 12 = 16$; 6 — предпоследняя цифра результата; 1 запоминаем.

3) $2 \times 3 = 6$, да еще удержанная в уме единица, имеем 7 — это первая цифра результата.

Получаем все цифры произведения: 7, 6, 8 — 768.

[1] Впрочем, в последние годы способ этот снова стал входить в употребление — главным образом, благодаря деятельной пропаганде замечательного германского счетчика, инженера Ф. Ферроля. В Америке выдающиеся педагоги высказывались за введение его в школе взамен нынешнего, довольно медленного способа.

После непродолжительного упражнения прием этот усваивается очень легко.

Другой способ, состоящий в употреблении так называемых «дополнений», удобно применяется в тех случаях, когда перемножаемые числа близки к 100.

Пусть требуется перемножить 92 × 96. «Дополнение» для 92 до 100 будет 8; для 96 — 4. Действие производят по следующей схеме:

множители: 92 и 96
дополнения: 8 и 4

Первые две цифры результата получаются простым вычитанием из множителя «дополнения» множимого или наоборот; т. е. из 92 вычитают 4, или из 96 — 8. В том и другом случае имеем 88; к этому числу приписывают произведение «дополнений»: 8 × 4 = 32. Получаем результат 8832.

Что полученный результат должен быть верен, наглядно видно из следующих преобразований:

$$92 \times 96 = \begin{cases} 88 \times 96 = 88\,(100 - 4) = 88 \times 100 - 88 \times 4 \\ \underline{4 \times 96} = 4\,(88 + 8) = \underline{4 \times 8 + 88 \times 4} \end{cases}$$
$$92 \times 96 \qquad = \qquad 8832 + 0$$

## КАКОЙ ДЕНЬ НЕДЕЛИ?

Умение быстро определять день недели, на какой приходится та или иная дата (например, 17 января 1893 г., 4 сентября 1943 г. и т. п.) основано на знании особенностей нашего календаря, которые мы сейчас и изложим.

1 января 1-го года нашей эры приходилось (это установлено расчетом) на *субботу*. Так как в каждом простом году 365 дней, или 52 полных недели и 1 день, то год должен кончаться тем же днем недели, каким начался; поэтому последующий год начинается одним днем недели позже, чем предыдущий. Если 1 января 1-го года была суббота, то 1 января 2-го года было днем позже, т. е. воскресенье, 3-го года — на 2 дня позже; а 1 января например, 1923 года было бы на 1922 дня (1923 – 1) после субботы, — если бы не было ни одного високосного года. Число високосных лет мы найдем, разделив 1923 на 4 = 480; но отсюда, для нового стиля, надо исключить календарную разницу в 13 дней[1]: 480 – 13 = 467. К полученному числу надо прибавить число дней, протекших после 1 января 1923 года до определяемой даты — скажем для примера, до 14 декабря: это составит 347 дней. Сложив 1922, 467 и 347,

[1] Разница между юлианским и григорианским календарями. В России григорианский календарь (новый стиль) вместо юлианского (старый стиль) был введен в 1918 году (*примеч. ред.*).

мы делим сумму на 7, и по полученному остатку 6 определяем, что 14 декабря 1923 года приходилось на 6 дней после субботы, а именно в *пятницу*.

$$\begin{array}{r} 1922 \\ +\ 467 \\ 347 \\ \hline 2736 \end{array}$$

Такова сущность вычислений недельного дня любой даты. На практике дело значительно упрощается. Прежде всего заметим, что в течение каждого 28-летнего периода бывает, вообще говоря, 7 високосных лет (неделя), — так что каждые 28 лет день недели любой даты должен повторяться. Кроме того, вспомним, что в предыдущем примере мы вычли из 1923 сначала 1, а затем календарную разницу обоих стилей, т. е. 13, всего 1+13 = 14 дней, или две полных недели. Но полное число недель, понятно, не влияет на результат. Поэтому для дат XX века надо принимать во внимание только: 1) число дней, протекших с 1 января данного года — в нашем примере 347; затем 2) прибавить число дней, соответствующее остатку лет 347 от деления 1923 на 28, и наконец, 3) число високосных лет в этом остатке, т. е. 4. Сумма этих трех чисел (347 + 19 + 4), т. е. 370, дает при делении на 7 тот же остаток 6 (пятница), который был получен нами раньше.

$$\begin{array}{r} 347 \\ +\ 19 \\ 4 \\ \hline 370 \end{array}$$

Таким же образом мы найдем, что 15 января 1923 г. приходилось на понедельник (14 + 19 + 4 = 37; 37 : 7— в остатке 2). Для 9 февраля нов. ст. 1917 г. мы нашли бы 39 + 13 + 3 = 55; при делении 55 на 7 получаем в остатке 6 — пятница. Для 29 февраля нов. ст. 1904 г.: 59 + 0 – 1 [1] = 58; остаток от деления на 7 здесь 2 — понедельник.

Дальнейшее упрощение состоит в том, что вместо полного числа дней месяца (при исчислении числа дней, протекших после 1 января заданного года), принимают в расчет только его остаток от деления на 7. Далее, разделив 1900 на 28, получаем в остатке 24 года, в которых содержится 5 високосных лет; прибавив их к 24 и найдя, что сумма 24 + 5, т. е. 29, дает при делении на 7 остаток 1, определяем, что 1 января 1900 года было в 1-й день недели. Отсюда для первых чисел каждого месяца получаем следующие цифры, определяющие соответствующие им дни недели (мы будем их называть «остаточными числами»).

---

[1] Деля 1904 на 28, мы уже учли, что 1904 год — високосный; беря же в феврале 29 дней, мы учитываем это обстоятельство второй раз. Поэтому надо лишний день откинуть.

Остаточные числа для:

| | | |
|---|---|---|
| января | . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 1 |
| февраля | . . 1 + 31 = 32, или . . . . . . | 4 |
| марта | . . . . 4 + 28 = 32, или . . . . . . | 4 |
| апреля | . . . 4 + 31 = 35, или . . . . . . | 0 |
| мая | . . . . . 0 + 30 = 30, или . . . . . . | 2 |
| июня | . . . . 2 + 31 = 33, или . . . . . . | 5 |
| июля | . . . . 5 + 30 = 35, или . . . . . . | 0 |
| августа | . . . 0 + 31 = 31, или . . . . . . | 3 |
| сентября | . . 3 + 31 = 34, или . . . . . . | 6 |
| октября | . . . 6 + 30 = 36, или . . . . . . | 1 |
| ноября | . . . 1 + 31 = 32, или . . . . . . | 4 |
| декабря | . . . 4 + 30 = 34, или . . . . . . | 6 |

Запомнить эти числа нетрудно; кроме того, их можно нанести на циферблат карманных часов, поставив возле каждой цифры циферблата соответствующее число точек[1].

Сделаем теперь расчет дня недели, например, для 31 марта 1923 г.

| | |
|---|---|
| Число месяца . . . . . . . . . . . . . . . | 31 |
| Остаточное число для марта . . . . . . | 4 |
| С начала столетия прошло лет . . . . | 23 |
| В том числе високосных . . . . . . . . . | 5 |
| | Сумма 63 |

Остаток от деления на 7 . . . . . . . . . 0 — суббота.

**Задача № 55**

Найти день недели 16 апреля 1948 года.

**Решение**

| | |
|---|---|
| Число месяца . . . . . . . . . . . . . . . | 16 |
| Остаточное число для апреля . . . . . | 0 |
| С начала столетия прошло лет . . . . | 48 |
| В том числе високосных . . . . . . . . . | 12 |
| | Сумма 76 |

Остаток от деления на 7 . . . . . . . . . 6 — пятница.

**Задача № 56**

Найти день недели 29 февраля 1912 г. (нов. ст.).

[1] На с. 108 приложен чертеж такого циферблата.

**Решение**

Число месяца . . . . . . . . . . . . . . . 29
Остаточное число для февраля . . . . . 4
С начала столетия прошло лет . . . . 12
В том числе високосных[1] . . . . . . . . . 2
Сумма 47

Остаток от деления на 7 . . . . . . . . . 5 — четверг.

Для дат предшествующих столетий (XIX, XVIII и т. д.) можно пользоваться теми же числами; но надо помнить, что в XIX веке разница между новым и старым стилем была не 13, а 12 дней; кроме того, при делении 1800: 28 получается в остатке 8, что вместе с 2 високосными годами в этом остатке составляет 10 (или 10 – 7 = 3), т. е. соответствующее характерное число для дат XIX века должно быть увеличено на 3 – 1 = 2. Так что, например, день недели 31 декабря нов. ст. 1864 года мы определим сначала по предыдущему, а затем внесем соответствующую поправку — прибавим 2 дня:

Число месяца . . . . . . . . . . . . . . . 31
Остаточное число для декабря . . . . . 6
С начала столетия прошло лет . . . . 64
В том числе високосных . . . . . . . . 16
Поправка для XIX века . . . . . . . . . 2
Сумма 119

Остаток от деления на 7 . . . . . . . . . 0 — суббота.

**Задача № 57**

Найти день недели 25 апреля нов. ст. 1886 года

**Решение**

Число месяца . . . . . . . . . . . . . . . 25
Остаточное число для апреля . . . . . 0
С начала столетия прошло лет . . . . 86
В том числе високосных . . . . . . . . 21
Поправка для XIX века . . . . . . . . . 2
Сумма 134

Остаток от деления на 7 . . . . . . . . . 1 — воскресенье.

После недолгого упражнения можно и еще более упростить вычисления, а именно — писать вместо приведенных здесь чисел прямо их остатки

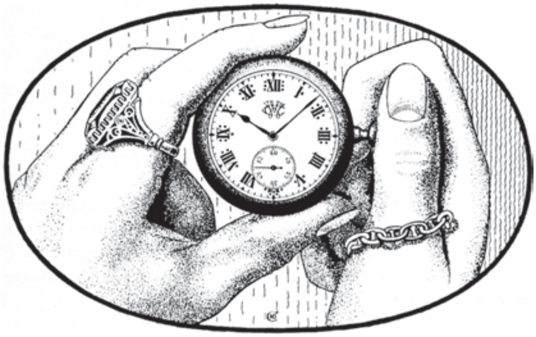
[1] Принято во внимание, что один високосный год уже был учтен, когда мы взяли дату 29 февраля. Поэтому пишем не 3 високосных года, а 2.

от деления на 7. Например, день недели 24 марта 1934 года мы определим в результате следующих простых выкладок:

| | |
|---|---|
| Вместо числа месяца (24) . . . . . . . . . . . . . . . . . | 3 |
| Остаточное число для марта . . . . . . . . . . . . . . . | 4 |
| Вместо числа лет, прошедших от 1900 года . . . . . | 6 |
| В том числе високосных . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 1 |
| | Сумма 0 (вместо 14) |

Искомый день — суббота.

Подобного рода упрощенными приемами пользуются обычно те мнимые «гениальные математики», которые показывают публике свое искусство быстрого счета. Как видите, все это очень просто и может быть выполнено каждым после непродолжительного упражнения[1].



## КАЛЕНДАРЬ НА ЧАСАХ

Знание этих маленьких секретов может не только пригодиться нам для выполнения фокусов, но и сослужить службу в повседневной жизни. Мы легко можем превратить свои карманные часы в «вечный календарь», с помощью которого сможем определить дни недели любых дат какого угодно года. Для этого понадобится только, осторожно сняв стеклышко с часов, нанести на циферблате тушью точки возле цифр в числе, соответствующем таблице (с. 109). Как пользоваться этими точками, мы уже знаем. Особенно просто это для дат XX столетия: к числу точек прибавляют число месяца, последние две цифры года и частное от деления их на 4, а еще лучше — остатки от деления этих чисел на 7. Остаток от деления суммы этих 4 слагаемых на 7 показывает день недели, а именно:

[1] Способов сокращенного вычисления календарных дат существует множество. Я изложил здесь самый простой из известных мне приемов, употребляемый упомянутым выше германским математиком Ф. Ферролем, прославившимся своими поразительно быстрыми устными вычислениями.

0 — суббота
1 — воскресенье
2 — понедельник
3 — вторник и т. д.

Еще проще пользование часами-календарем для дат *текущего года*. Для каждого года нужно лишь держать в памяти остаток от деления на 7 суммы числа прошедших от начала века лет и четверти этого числа; этот остаток постоянно должен прибавляться к числу месяца определяемой даты вместе с числом точек возле соответствующей цифры. Остаток этот можно было бы прибавить к числу точек и наносить ежегодно на циферблат, чтобы не было надобности вводить его в вычисление особо. Но едва ли это практично.

| | |
|---|---|
| I | 1 |
| II | 4 |
| III | 4 |
| IV | 0 |
| V | 2 |
| VI | 5 |
| VII | 0 |
| VIII | 3 |
| IX | 6 |
| X | 1 |
| XI | 4 |
| XII | 6 |

Само собою разумеется, что «вечный календарь» указанного типа возможно устроить не только на карманных часах. Вы можете просто приклеить к карандашу, линейке, к краю записной книжки, вообще к любому предмету, часто бывающему у вас под руками, узенькую полоску бумаги с соответствующей табличкой чисел, характерных для каждого месяца, и маленький вездесущий вечный календарь готов.

## КАЛЕНДАРНЫЕ ЗАДАЧИ

Читателям, желающим испытать свои силы в решении разнообразных календарных задач, предлагаю ответить на следующие вопросы:

Почему ежегодно все числа апреля бывают в те же дни недели, что и в июле? Все числа марта бывают в те же дни недели, что и в ноябре? Сентябрьские даты — в те же дни недели, что и декабрьские? Майские — в те же дни, что и январские следующего года?

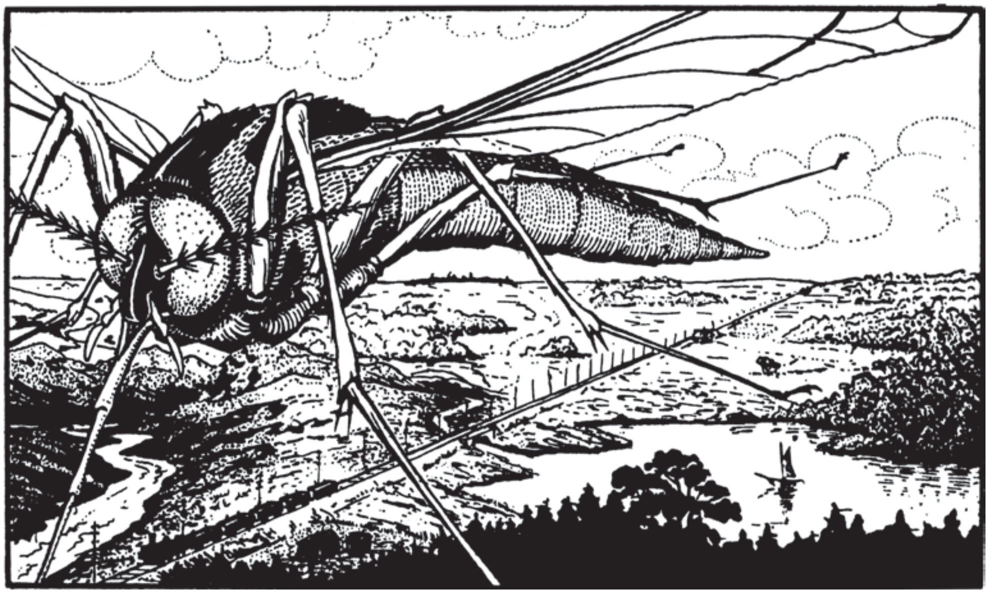
Почему в високосные годы 1 января бывает тот же день недели, что и 1 октября? 1 февраля, 1 марта и 1 ноября бывает один и тот же день недели?

Объясните, почему в пределах одного столетия календарь повторяется каждые 28 лет? Почему в течение этого 28-летнего периода одни и те же числа месяцев приходятся на одинаковые дни недели через следующие промежутки: 11 лет, 6 лет, 5 лет, 6 лет?

Объясните, почему даты какого-либо года XX века повторяются в те же дни недели, в какие приходились они в XIX веке 40 и 96 лет назад?

**АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КУРЬЕЗ**

$2^5\,9^2 = 2592$



Глава VIII

# ЧИСЛОВЫЕ ВЕЛИКАНЫ

## КАК ВЕЛИК МИЛЛИОН?

Величественная внушительность числовых великанов — миллиона, миллиарда, даже триллиона — заметно померкла в наших глазах за последнее время, с тех пор как числа эти вместе с потоком бумажных денег проникли в нашу повседневную жизнь[1]. Когда месячные расходы в хозяйстве небольшой семьи достигали миллиардов, а бюджет второстепенного учреждения выражался триллионами, естественна была мысль, что эти некогда недоступные воображению числа вовсе не так огромны, как твердили нам до сих пор. Трудно поражаться громадности семизначного числа рублей, за которое не давали и полной крынки молока. Не подавляет ума миллиард, на который не купишь сапог.

[1] В 1921 году реальная стоимость 100 тыс. руб. совзнаков равнялась стоимости одной дореволюционной копейки. В 1924 году по итогам всех деноминаций в стране возник советский рубль, равный 50 миллиардам рублей периода до 1922 года (*примеч. ред.*).

Но было бы заблуждением думать, что благодаря проникновению числовых великанов из своих недоступных высот в прозу житейского обихода мы познакомились с ними лучше, чем раньше. Миллион по прежнему остается для большинства людей тем, чем и был — «знакомым незнакомцем». Скорее даже наоборот: ходячее представление о миллионе сделалось еще превратнее. Мы и раньше склонны были преуменьшать величину этого числа, превышающего силу нашего воображения. Когда же миллионными числами стали выражаться весьма скромные, в сущности, ценности, миллион сжался в нашем воображении до размера довольно обыкновенного, легко доступного числа. Мы впадали при этом в курьезную психологическую ошибку: то, что миллион рублей сделался сравнительно небольшой суммой, мы относили не за счет уменьшения денежной единицы, а за счет уменьшения миллиона. Многие воображали, что им довелось наконец постичь величину миллиона, который оказался вовсе не так огромен, как трубит его будто бы незаслуженная слава. Я слышал, как человек, узнав впервые, что от Земли до Солнца 150 миллионов километров, простодушно воскликнул:

— Только всего?

Другой, прочтя, что от Петрограда до Москвы миллион шагов, заметил:

— Только *один* миллион шагов до Москвы? А мы-то платим за билет двести миллионов!...

Большинство людей, так свободно обращавшихся с миллионами при денежных расчетах, все-таки не отдавали себе ясного отчета в том, насколько эти числа огромны. Для этого следовало бы упражняться в миллионном счете не таких изменчивых единиц, как рубль, а предметов, всегда сохраняющих в нашем воображении одну и ту же постоянную величину. Если вы хотите ощутить истинные размеры миллиона — попробуйте хотя бы проставить в чистой тетради *миллион точек*. Я не предлагаю вам доводить такую работу до конца (на это едва ли у кого достанет терпения); уже одно начало работы, его медленный ход даст вам почувствовать, что такое «настоящий» миллион.

Английский натуралист А. Р. Уоллес, знаменитый сподвижник Дарвина, придавал весьма серьезное значение развитию правильного представления о миллионе. Он предлагал[1] «в каждой большой школе отвести одну комнату или залу, на стенах которой можно было бы наглядно показать, что такое миллион. Для этой цели нужно иметь 100 больших квадратных листов бумаги, в 4½ фута каждый, разграфленных квадратиками в четверть дюйма, оставив равное число белых промежутков между черными пятнами. Через каждые 10 пятен нужно оставлять двойной промежуток, чтобы отделить каждую сотню пятен (10 × 10). Таким образом на каждом листе будет по 10 тысяч черных пятен, хорошо различимых с середины комнаты, а все сто листов будут содержать миллион пятен. Такая зала была бы в высшей степени поучительна, особенно

[1] В книге «Положение человека во Вселенной».

в стране, где о миллионах говорят очень развязно и тратят их без смущения[1]. Между тем никто не может оценить достижений современной науки, имеющей дело с невообразимо большими или невообразимо малыми величинами, если не способен их представить наглядно и, суммируя в целое, вообразить себе, как велико число *один* миллион, когда современной астрономии и физике приходится иметь дело с сотнями, тысячами и даже миллионам таких миллионов[2]. Во всяком случае, очень желательно, чтобы в каждом большом городе была устроена такая зала для наглядного показания на ее стенах величины одного миллиона».

Я предлагаю другой, более доступный для каждого, способ развить в себе возможно отчетливое представление о величине миллиона. Для этого нужно только дать себе труд поупражняться в мысленном миллионном счете и суммировании размеров мелких, но хорошо знакомых нам единиц — шагов, минут, спичек, стаканов и т. п. Результаты получаются нередко неожиданные, поразительные.

Приведем несколько примеров.

## МИЛЛИОН СЕКУНД

### Задача № 58

Как вы думаете, сколько времени отняла бы у вас работа — пересчитать миллион каких-либо предметов, по одному каждую секунду?

### Решение

Оказывается, что, считая безостановочно по 10 часов в сутки, вы закончили бы подсчет в месяц времени! Приблизительно удостовериться в этом нетрудно даже устным вычислением: в часе 3600 секунд, в 10 часах — 36000; в трое суток вы, следовательно, пересчитаете всего около 100 тысяч предметов; а так как миллион в 10 раз больше, то, чтобы досчитать до него, понадобится 30 дней[3].

Отсюда следует, между прочим, что предложенная ранее работа — проставить в тетради миллион точек — потребовала бы много недель самого

[1] Я. П. удалось осуществить эту затею в Павильоне занимательной науки на Елагином острове. На темно-синем потолке зала посетители видели бесчисленное множество ярко-желтых кружков. Весь потолок был густо усыпан ими. Россыпь на потолке представляла один миллион (*примеч. ред.*).

[2] Например, взаимные расстояния планет измеряются десятками и сотнями миллионов километров, расстояние звезд — миллионами миллионов километров, а число молекул в кубическом сантиметре окружающего нас воздуха — миллионами миллионов миллионов. — *Я. П.*

[3] Отметим для сведения, что в году (астрономическом) 31556926 секунд; миллион секунд в точности равен 11 суткам 13 ч 46 мин 40 с.

усердного и неустанного труда[1]. Да и тетрадь для этого понадобилась бы страниц в тысячу. Тем не менее такой труд был однажды выполнен. В распространенном английском журнале я видел как-то воспроизведение страницы из тетради, «единственное содержание которой составляет миллион аккуратно расставленных точек, по тысяче на странице». Все 500 листов этой тетради были разграфлены карандашом и заполнены рукой одного беспримерно терпеливого учителя чистописания в середине прошлого столетия.

## В МИЛЛИОН РАЗ ТОЛЩЕ ВОЛОСА

### Задача № 59

Тонкость волоса вошла чуть ли не в поговорку. Все часто видят волос и хорошо знают, насколько он тонок. Толщина человеческого волоса — около 0,07 мм. Мы округлим ее до 0,1 мм. Представьте себе, однако, что волос стал в миллион раз толще — какова тогда была бы его толщина. Был ли бы он толщиной в руку? В бревно? Или в большую бочку? Или, может быть, ширина его достигла бы ширины комнаты средних размеров?

Если вы никогда не задумывались над такой задачей, то можно поручиться, что, не проделав вычисления — вы дадите грубо ошибочный ответ. Мало того: вы будете, пожалуй, даже оспаривать правильный ответ — настолько покажется он неправдоподобным. Каков же он?

### Решение

Оказывается, что волос, увеличенный по толщине в миллион раз, имел бы около сотни метров в поперечнике! Это кажется невероятным, но дайте себе труд сделать подсчет, и вы убедитесь, что так и есть:

$$0{,}1\ \text{мм} \times 1000000 = 0{,}1\ \text{м} \times 1000 = 0{,}1\ \text{км} = 100\ \text{м}.$$ [2]

---

[1] До какой степени люди склонны недооценивать величину миллиона, показывает следующий поучительный пример. Тот самый Уоллес, который так предостерегает других от преуменьшения миллиона, заканчивает приведенный выше (с. 111–112) отрывок таким советом: «В маленьких размерах каждый может устроить это сам для себя: стоит только достать сотню листов толстой бумаги, разлиновать их на квадратики и поставить крупные черные точки. Подобное изображение было бы очень поучительно, хотя не в такой, конечно, степени, как осуществленное в большом масштабе». Почтенный автор, по-видимому, полагал, что подобная работа вполне под силу одному человеку.

[2] Мы проделали здесь умножение несколько необычным путем — вместо умножения числа только заменили саму единицу меры другою, в миллион раз большею. Этот прием очень удобен для устных подсчетов, и им следует пользоваться при выкладках с метрическими мерами.

## УПРАЖНЕНИЯ С МИЛЛИОНОМ

Проделаем — попытайтесь выполнить это устно — еще ряд упражнений, чтобы освоиться надлежащим образом с величиною миллиона.

**Задача № 60**

Величина обыкновенной комнатной мухи общеизвестна — около 7 мм в длину. Но какова была бы ее длина при увеличении в миллион раз?

**Решение**

Умножим 7 мм на 1000000, получим 7 км — примерно ширина Москвы или Ленинграда. С трудом верится, что муха или комар, увеличенная по длине в миллион раз, могли бы покрыть своим телом столичный город!

**Задача № 61**

Увеличьте мысленно в миллион раз (по ширине) ваши карманные часы — и получите снова поражающий результат, который едва ли вам удастся предугадать. Какой?

**Решение**

Часы имели бы в ширину километров 50, а каждая цифра простиралась бы на целую географическую милю (7 км).

**Задача № 62**

Какой высоты достигал бы человек в миллион раз выше обычного роста?

**Решение**

1700 км. Он был бы всего в 8 раз меньше поперечника земного шара. Буквально одним шагом мог бы он перешагнуть из Ленинграда в Москву, а если бы лег, то растянулся бы от Ленинграда до Крыма...

Приведу еще несколько готовых подсчетов того же рода, предоставляя проверку их читателю.

Сделав *миллион шагов* по одному направлению, вы отошли бы километров на 600. От Москвы до Ленинграда примерно и будет миллион шагов.

*Миллион человек*, выстроенных в одну шеренгу плечом к плечу, растянулись бы на 250 км.

*Миллионом стаканов воды* можно наполнить 200 огромных бочек.

*Миллион точек* типографского шрифта — например, этой книги, — поставленные рядом, вплотную, растянулись бы метров на 50–100.

Зачерпывая *миллион раз наперстком*, вычерпаете около тонны жидкости (в 80-ведерную бочку).

Книга в *миллион страниц* имела бы в толщину метров 50.

*Миллион букв* заключает книга убористой печати в 600–800 страниц среднего формата.

*Миллион дней* — более 27 столетий. От начала нашей эры не прошло еще миллиона дней!

## НАЗВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ ВЕЛИКАНОВ[1]

Мы беседовали сейчас о миллионах. Прежде чем перейти к еще бо́льшим числовым гигантам, остановимся на их названиях, принятых в нашей стране и в ряде других стран.

*Миллион* — это тысяча тысяч:

1 000 000.

Затем идут десятки и сотни миллионов. Тысяча миллионов образует миллиард. Иногда миллиард называют биллионом, однако у нас это не принято. Итак, один миллиард равен тысяче миллионов. Он записывается в виде

1 000 000 000,

т. е. единицы с девятью нулями.

Тысяча миллиардов образует триллион. Таким образом, один триллион равен миллиону миллионов и записывается в виде единицы с двенадцатью нулями:

1 000 000 000 000.

Если вас интересуют наименования сверхисполинов, следующих за триллионом, то изучите приведенную ниже табличку (с. 116).

В некоторых странах принят другой порядок названий чисел-гигантов, которые часто совпадают с принятыми у нас, но имеют другие значения. Под словом *биллион* там понимают не тысячу, а миллион миллионов, т. е. единицу с 12 нулями, под словом *триллион* понимают единицу с 18 нулями, т. е. миллион миллионов миллионов, а под словом *квадриллион* — единицу с 24 нулями, т. е. миллион миллионов миллионов миллионов, и т. д. Короче

[1] В годы написания этой книги Я. П. в СССР параллельно существовали две системы наименования больших чисел — в наши дни их чаще всего именуют «короткой шкалой» и «длинной шкалой»: первая использовалась в житейском обиходе и финансовых расчетах, вторая — в научных книгах по астрономии и физике. С середины XX века в СССР, в современной России и ряде других стран действует исключительно «короткая шкала», поэтому текст последующих глав, в которых упоминаются большие числа, в данном сборнике был изменен (см. таблицу на с. 116; для получения более полной информации следует обратиться к справочной литературе) (*примеч. ред.*).

| Значение | Название в системе наименования чисел | |
|---|---|---|
| | в России, США, Великобритании, Греции и др. | в Германии, Франции, Италии, Испании и др. |
| $10^0$ | один | один |
| $10^3$ | тысяча | тысяча |
| $10^6$ | миллион | миллион |
| $10^9$ | биллион (миллиард) | миллиард |
| $10^{12}$ | триллион | биллион |
| $10^{15}$ | квадриллион | биллиард |
| $10^{18}$ | квинтиллион | триллион |
| $10^{21}$ | секстиллион | триллиард |
| $10^{24}$ | септиллион | квадриллион |
| $10^{27}$ | октиллион | квадриллиард |
| $10^{30}$ | нониллион | квинтиллион |
| ... | ... | ... |

говоря: в этих странах каждое новое высшее наименование принято присваивать *миллиону* низших (а не *тысяче* низших, как у нас). Во избежание недоразумений следует поэтому наименование всегда сопровождать цифрами. Это, пожалуй, единственный случай в практике, когда обозначение суммы прописью не поясняет, а только затемняет написанное цифрами.

Следует, однако, заметить, что в научных книгах и на практике принят совсем другой способ обозначений числовых великанов, который совершенно исключает всякую возможность их двойных толкований. Этот способ основан на использовании действия «возведение в степень». Например, один *триллион*, т. е. единица с 12 нулями, представляет собой число 10, взятое сомножителем 12 раз. Это кратко записывается так:

$$1\,000\,000\,000\,000 = 1 \times 10^{12} = 10^{12},$$

т. е. один триллион — это единица, умноженная на 10 в 12-й степени.

Приведем еще пример. Число 2 квадриллиона 400 триллионов запишется кратко так: $2{,}4 \times 10^{15}$, потому что 1 квадриллион — это единица с 15 нулями (см. приведенную выше табличку).

При таком способе обозначений очень больших чисел, часто встречающихся в физике и астрономии, сберегается место и, кроме того, гораздо легче прочитать эти числа и производить над ними различные действия[1].

[1] Подробнее см. в книге «Занимательная алгебра», с. 125.

## МИЛЛИАРД

*Миллиард* — одно из самых молодых названий чисел. Оно вошло в употребление лишь со времени окончания франко-прусской войны (1871 г.), когда французам пришлось уплатить Германии контрибуцию в 5000000000 франков. Как и *миллион*, слово *миллиард* происходит от корня «милле» (тысяча) и представляет собою итальянское увеличительное от этого существительного.

Слово «миллиард» употребляется у нас в смысле тысячи миллионов и при денежных вычислениях, и в точных науках. Но, например, в Германии и в Америке под миллиардом иногда разумеют не тысячу, а всего *сто* миллионов. Этим, между прочим, можно объяснить то, что слово «миллиардер» было в ходу за океаном еще тогда, когда ни один из американских богачей не имел состояния в тысячу миллионов. Огромное состояние Рокфеллера незадолго до войны исчислялось «всего» в 900 миллионов долларов, а остальных «миллиардеров» — меньшими числами. Только во время мировой войны 1914–1918 гг. появились в Америке миллиардеры в нашем смысле слова (их иногда называли там «биллионерами»).

Чтобы составить себе представление об огромности миллиарда, подумайте о том, что в книжке, которую вы сейчас читаете, заключается немногим более 300000 букв[1]. В трех таких книжках окажется один миллион букв. А миллиард букв будет заключать в себе стопка из 30000 экземпляров этой книжки — стопка, которая, будучи аккуратно сложена, составила бы столб высотой с Исаакиевский собор.

В одном кубометре содержится кубических миллиметров ровно миллиард (1000 × 1000 × 1000). Попробуем подсчитать, какой высоты получился бы столб, если бы все эти крошечные миллиметровые кубики были поставлены один на другой. Итог получается поразительный — 1000 километров!

*Миллиард минут* составляет более 19 столетий; человечество относительно недавно (29 апреля 1902 года в 10 часов 40 минут) начало считать второй миллиард минут от начала нашей эры.

## ТРИЛЛИОН И КВИНТИЛЛИОН

Ощутить огромность этого числового исполина трудно даже человеку, привычному к обращению с миллионами. Великан-миллион — такой же карлик рядом с сверхвеликаном-триллионом, как единица рядом с миллионом. Об этом взаимоотношении мы обыкновенно забываем и в своем воображении не делаем большой разницы между миллионом и триллионом.

[1] В данном случае Я. П. имеет в виду экземпляр «Занимательной арифметики» 1938 года издания, содержавший 196 страниц (*примеч. ред.*).

Мы уподобляемся здесь тем первобытным народам, которые умеют считать только до 2 или 3, а все числа свыше их обозначают словом *много*.

Подобно тому как ботокудам[1] кажется несущественной разница между двумя и тремя, так и многим современным культурным людям представляется несущественной разница между миллионом и триллионом. По крайней мере они не думают о том, что одно из этих чисел в миллион раз больше другого и что, значит, первое относится ко второму приблизительно так, как расстояние от Москвы до Сан-Франциско относится к ширине улицы.

Волос, увеличенный по толщине в *триллион* раз, был бы раз в 8 шире земного шара, а муха при таком увеличении была бы в 70 раз толще Солнца!

Во всех книгах, которые должны были выйти в свет к концу 1932 г., насчитывалось круглым числом около 100 *триллионов* букв. Расставленные в ряд, вплотную одна к другой, они образовали бы нить, которой можно было бы обернуть земной шар по экватору пять тысяч раз!

Поднимемся еще на одну ступень выше — рассмотрим квинтиллион. Он еще в миллион раз больше. Триллион рядом с ним — все равно что единица рядом с миллионом!

Взаимоотношение между миллионом, триллионом и квинтиллионом можно с некоторою наглядностью представить следующим образом. В Ленинграде еще не так давно было миллион жителей[2].

Вообразите же себе длинный прямой ряд городов, как Ленинград, — целый миллион их: в этой цепи столиц, тянущихся на семь миллионов километров (в 20 раз *дальше Луны*), будет насчитываться *триллион* жителей... Теперь вообразите, что пред вами не один такой ряд городов, а целый миллион рядов, т. е. квадрат, каждая сторона которого состоит из миллиона «ленинградов» и который внутри сплошь уставлен «ленинградами»: в этом квадрате будет миллион триллионов, или *квинтиллион* жителей.

Одним *квинтиллионом кирпичей* можно было бы, размещая их плотным слоем по твердой поверхности земного шара, покрыть все материки равномерным сплошным пластом высотою почти с четырехэтажный дом. Чтобы изготовить такое число кирпичей, кирпичные заводы должны были бы, выпуская по 5 миллиардов штук в год, работать 200 миллионов лет.

Если бы все видимые в сильнейшие телескопы звезды обоих небесных полушарий, — т. е. примерно 500 миллионов звезд, — были обитаемые и населены каждая, как наша Земля, то на всех этих звездах, вместе взятых, насчитывался бы «только» один *квинтиллион* людей.

Последнюю иллюстрацию заимствуем из мира мельчайших частиц, составляющих все тела природы, — из мира молекул. Молекула по ширине меньше точки типографского шрифта этой книги примерно в *миллион* раз.

[1] *Ботокуды* — племя южноамериканских индейцев, проживающих в Восточной Бразилии (*примеч. ред.*).

[2] Текст написан в 1927 году (*примеч. ред.*).

Вообразите же квинтиллион таких молекул, нанизанных вплотную на одну нитку. Какой длины была бы эта нить? Ею можно было бы *семь раз обмотать* земной шар по экватору!

В каждом кубическом сантиметре воздуха (т. е. примерно в наперстке) насчитывается — отметим кстати — от 20 до 30 квинтиллионов молекул. Как велико это число, видно, между прочим, из того, что, достигнув с помощью совершеннейших воздушных насосов самой крайней степени разрежения — в сто миллиардов раз, — мы все-таки будем еще иметь в каждом кубическом сантиметре до 270 миллионов молекул! Не знаешь, чему изумляться больше: огромной численности молекул или их невообразимой малости…

## ЧИСЛА-СВЕРХГИГАНТЫ

В старинной (XVIII в.) «Арифметике» Магницкого, о которой мы не раз уже упоминали, приводится таблица названий классов чисел, доведенная до квадриллиона, т. е. до единицы с 24 нолями[1].

Это было большим шагом вперед по сравнению с более древним числовым инвентарем наших предков. Древняя славянская лестница больших чисел была до XV века гораздо скромнее и достигала только ста миллионов. Вот эта старинная нумерация:

| | | |
|---|---|---|
| «тысяща» | — | 1 000 |
| «тьма» | — | 10 000 |
| «легион» | — | 100 000 |
| «леодр» | — | 1 000 000 |
| «вран» | — | 10 000 000 |
| «колода» | — | 100 000 000 |

Магницкий широко раздвинул в своей табличке древние пределы больших чисел. Но он считал практически бесполезным доводить систему наименований числовых великанов чересчур далеко. Вслед за таблицей он помещает такие стихи:

Число есть безконечно, умомъ намъ не дотечно.
Несть бо намъ о пределно, темъ же есть и безделно
Множайшихъ чиселъ искати, и больше сей писати

[1] Магницкий придерживался той классификации чисел, которая дает каждое новое наименование миллиону низших единиц. Например, биллионом назывался миллион миллионов, т. е. единица с 12 нолями, и т. д. Единица с 24 нолями называлась квадриллионом.

[В системе наименования чисел с короткой шкалой (используемой в современной России) единица с 24 нолями называется *септиллионом* — см. таблицу на с. 116 (*примеч. ред.*).]

Превосходной таблицы, умовъ нашихъ границы.
И аще кому треба, счисляти что внутрь неба,
Довлеетъ числа его к вещемъ всемъ мира сего.

Старинный математик хотел сказать этими стихами, что так как ум человеческий не может объять бесконечного ряда чисел, то бесцельно составлять числа больше тех, которые представлены в его таблице, «умовъ нашихъ границы». Заключающиеся в ней числа (от единицы до септиллиона, т. е. до $10^{24}$ включительно) достаточны, по его мнению, для исчисления всех вещей видимого мира, — для каждого, «кому треба счисляти что внутрь неба».

Любопытно, что еще и в наши дни сейчас упомянутая таблица Магницкого почти достаточна для тех исследователей природы, которым «треба счисляти что внутрь неба». При измерении расстояний до отдаленнейших светил, едва улавливаемых фотоаппаратом с помощью сильнейшего телескопа, астрономам не приходится обращаться к наименованиям свыше миллиона. Самые отдаленные из известных нам небесных тел отстоят от Земли более чем на миллиард световых лет. Если бы мы пожелали даже выразить это расстояние в сантиметрах, то получили бы около 10000 *септиллионов*; значит, мы и тогда не вышли бы еще из пределов таблицы Магницкого.

Обращаясь в другую сторону, к миру весьма малых величин, мы и здесь не ощущаем пока надобности пользоваться числами свыше септиллионов. Число молекул в кубическом сантиметре газа — одно из самых больших множеств, реально исчисленных, — выражается десятками квинтиллионов. Если бы мы вздумали подсчитать, сколько капель в океане (приравнивая объем капли 1 мм$^3$, — что весьма немного), нам и тогда не пришлось бы обратиться к наименованиям выше септиллиона, потому что число это исчисляется только тысячами септиллионов.

И лишь при желании выразить, сколько граммов вещества заключает вся наша солнечная система, понадобились бы наименования выше септиллиона, так как в числе этом 34 цифры: 2 и 33 ноля, или $2 \times 10^{33}$.

## ПОЖИРАТЕЛИ ЧИСЛОВЫХ ИСПОЛИНОВ

В заключение остановимся на арифметическом (вернее, пожалуй, геометрическом) великане особого рода — на кубической миле; мы имеем в виду *географическую* милю, составляющую 15-ю долю экваториального градуса и заключающую 7420 м. С кубическими мерами воображение наше справляется довольно слабо; мы обычно значительно преуменьшаем их величину, особенно для крупных единиц, с которыми приходится иметь дело в астрономии. Но если мы превратно представляем себе уже кубическую милю — самую большую из наших объемных мер, — то как ошибочны должны быть наши представления об объеме земного шара, других планет, Солнца! Стоит поэтому уделить немного времени и внимания, чтобы постараться приобрести более соответствующее представление о кубической миле.

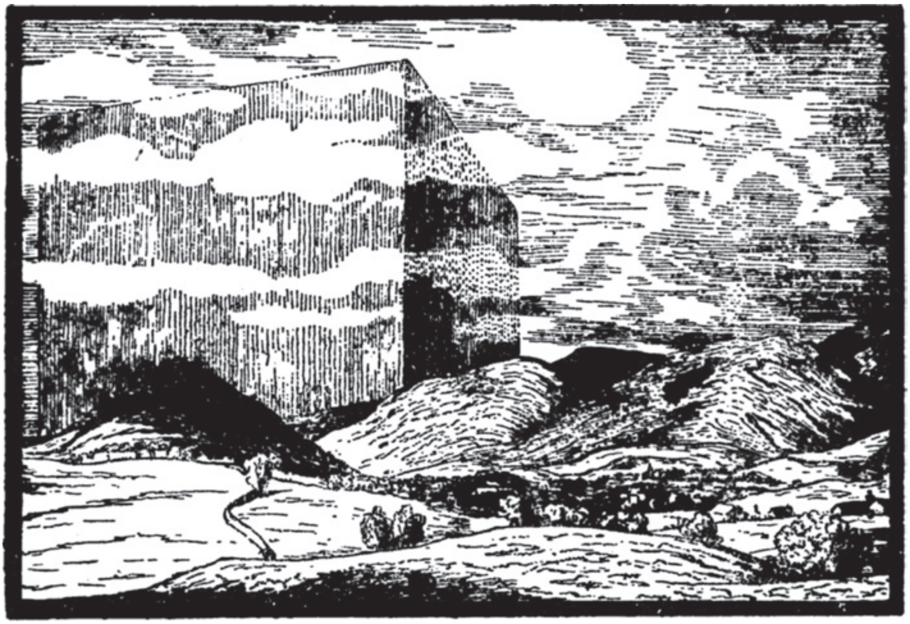
В дальнейшем воспользуемся картинным изложением из одной полузабытой книжечки — «Фантастическое путешествие через Вселенную» (появившейся в середине XIX века[1]):

«Положим, что по прямому шоссе мы можем видеть на целую географическую милю вперед. Сделаем мачту длиной в милю и поставим ее на одном конце дороги, у верстового столба. Теперь взглянем вверх и посмотрим, как высока наша мачта. Положим, что возле этой мачты стоит одинаковой с ней высоты человеческая статуя более 7 км высоты. В такой статуе колено будет находиться на высоте 1800 м; нужно было бы взгромоздить одну на другую 25 египетских пирамид, чтобы достигнуть до поясницы статуи!

Вообразим теперь, что мы поставили две такие мачты, вышиной в милю, на расстоянии мили одна от другой и соединили обе мачты досками; получилась бы стена в милю длины и милю вышины. Это — квадратная миля.

Мы имеем деревянную стену, стоящую отвесно. Представим себе еще четыре подобные стены, сколоченные вместе, как ящик. Сверху прикроем его крышкой в милю длины и милю ширины. Ящик этот займет объем кубической мили. Посмотрим теперь, как он велик, т. е. что и сколько в нем может поместиться.

Начнем с того, что, сняв крышку, бросим в ящик все здания Петербурга. Они займут там очень немного места. Отправимся в Москву и по дороге захватим все крупные



[1] Книга Аарона Бернштейна была напечатана в 1856 году (*примеч. ред.*).

и мелкие города. Но так как все это покрыло только дно ящика, то для заполнения его поищем материалов в другом месте. Возьмем Париж со всеми его триумфальными воротами, колоннами, башнями и бросим туда же. Все это летит, как в пропасть; прибавка едва заметна. Прибавим Лондон, Вену, Берлин. Но так как всего этого мало, чтобы хоть сколько-нибудь заполнить пустоту в ящике, то станем бросать туда без разбора все города, крепости, замки, деревни, отдельные здания. Все-таки мало! Бросим туда все, что только сделано руками человека в Европе; но ящик едва наполняется до одной четверти. Прибавим все корабли мира; и это мало помогает. Бросим в ящик все египетские пирамиды, все рельсы Старого и Нового Света, все машины и фабрики мира — все, что сделано людьми в Азии, Африке, Америке, Австралии. Ящик заполняется едва до половины. Встряхнем его, чтобы в нем улеглось ровнее, и попробуем, нельзя ли дополнить его людьми.

Соберем всю солому и всю хлопчатую бумагу, существующую в мире, и расстелим ее в ящике, — мы получим слой, предохраняющий людей от ушибов, сопряженных с выполнением подобного опыта. Все население Германии уляжется в первом слое. Покроем его мягким слоем в фут толщиною и уложим еще столько же. Покроем и этот слой и, кладя далее слой на слой, поместим в ящике все население Европы, Азии, Африки, Америки, Австралии... Все это заняло не более 50 слоев, т. е. считая слой толщиной в метр, — всего 50 метров. Понадобилось бы в десятки раз больше людей, чем их существует на свете, чтобы наполнить вторую половину ящика...

Что же нам делать? Если бы мы пожелали поместить в ящике весь живой мир — всех лошадей, быков, ослов, мулов, баранов, верблюдов, на них наложить всех птиц, рыб, змей, все, что летает и ползает, — то и тогда не наполнили бы ящика доверху без помощи скал и песка.

Такова кубическая миля. А из земного шара можно сделать 660 миллионов подобных ящиков! При всем почтении к кубической миле, к земному шару приходится питать еще большее уважение».

К сказанному прибавим еще от себя, что кубическая миля пшеничных зерен насчитывала бы их несколько квинтиллионов. Как видите, этот кубический исполин — настоящий пожиратель других исполинов.

## ИСПОЛИНЫ ВРЕМЕНИ

Огромные промежутки времени представляются нам еще более смутно, чем огромные расстояния и объемы. Между тем, геология говорит нам, что со времени отложения наиболее древних пластов земной коры протекли сотни миллионов лет. Как ощутить неизмеримую огромность таких периодов времени? Один немецкий писатель[1] предлагает для этого такой способ:

[1] Лотце, «Древность Земли».

«Все протяжение истории Земли представим в виде прямой линии в 500 километров. Это расстояние пусть изображает те 500 миллионов лет, которые протекли от начала *кембрийской* эпохи (одна из древнейших эпох истории земной коры). Так как километр представляет длительность миллиона лет, то последние 500–1000 метров изобразят длительность *ледникового* периода; а 6000 лет мировой истории сократятся до 6 метров — длина комнаты, в масштабе которой 70 лет жизни человека представляются линией в 7 сантиметров. Если заставить улитку проползти все названное расстояние с нормальной для улитки скоростью 3,1 мм в секунду, то на все расстояние ей понадобится ровно 5 лет. А все протяжение от начала мировой войны до наших дней она одолеет в 3 секунды...

Мы видим, как ничтожны в масштабе истории Земли те небольшие сроки, которые человек может обнять своим умом. Как ничтожна вся история человечества, которую наше самомнение окрестило „всемирной“ историей, и как бесконечно мала в потоке мировых событий одна человеческая жизнь!»

ЗАДАЧА-ШУТКА

Какое число делится
на все числа без остатка?

(Ответ — на с. 131).

Глава IX

# ЧИСЛОВЫЕ ЛИЛИПУТЫ

## ОТ ВЕЛИКАНОВ К КАРЛИКАМ

Гулливер в своих странствованиях, покинув карликов-лилипутов, очутился среди великанов. Мы путешествуем в обратном порядке: познакомившись с числовыми исполинами, переходим к миру лилипутов — к числам, которые во столько же раз меньше единицы, во сколько раз единица меньше числового великана.

Разыскать представителей этого мира не составляет никакого труда: для этого достаточно написать ряд чисел, *обратных* миллиону, миллиарду, триллиону и т. д., т. е. делить единицу на эти числа. Получающиеся дроби

$$\frac{1}{1000000},\ \frac{1}{1000000000},\ \frac{1}{1000000000000}\ \text{и т. д.}$$

есть типичные числовые лилипуты, такие же пигмеи по сравнению с единицей, каким является единица по сравнению с миллионом, миллиардом, триллионом и прочими числовыми исполинами.

Вы видите, что каждому числу-исполину соответствует число-лилипут, и что, следовательно, числовых лилипутов существует не меньше, чем исполинов. Для них также придуман сокращенный способ обозначения. Мы уже упоминали, что весьма большие числа в научных сочинениях (по астрономии, физике) обозначаются так:

1000000 . . . . . . . . . . . . . . . . $10^6$
10000000 . . . . . . . . . . . . . . . . $10^7$
400000000 . . . . . . . . . . . . . . $4 \times 10^8$
6 септиллионов . . . . . . . . . . . $6 \times 10^{24}$, и т. д.

Соответственно этому числовые лилипуты обозначаются следующим образом:

$\frac{1}{1000000}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . $10^{-6}$
$\frac{1}{100000000}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . $10^{-8}$
$\frac{3}{1000000000}$ . . . . . . . . . . . . . . $3 \times 10^{-9}$, и т. д.

Есть ли, однако, реальная надобность в подобных дробях? Приходится ли когда-нибудь действительно иметь дело со столь мелкими долями единицы?

Об этом интересно побеседовать подробнее.

## ЛИЛИПУТЫ ВРЕМЕНИ

Секунда, по обычному представлению, есть настолько малый промежуток времени, что с весьма мелкими частями ее не приходится иметь дела ни при каких обстоятельствах. Легко написать $1/1000$ секунды, — но это чисто бумажная величина, потому что ничего не может произойти в такой ничтожный промежуток времени.

Так думают многие, но ошибаются, потому что в тысячную долю секунды могут успеть совершиться весьма различные явления. Поезд, проходящий 36 километров в час, делает в секунду 10 метров, и, следовательно, в течение 1000-й доли секунды успевает продвинуться на один сантиметр. Звук в воздухе переносится в течение 1000-й доли секунды на 33 сантиметра, а пуля, покидающая ружейный ствол со скоростью 700–800 метров в секунду, переносится за тот же промежуток времени на 70 сантиметров. Земной шар перемещается каждую 1000-ю долю секунды в своем обращении вокруг Солнца на 30 метров. Струна, издающая высокий тон, делает в 1000-ю долю секунды 2–4 и более полных колебаний; даже комар успевает в это время взмахнуть вверх или вниз своими крылышками. Молния длится гораздо меньше 1000-й доли секунды: в течение этого промежутка времени успевает возникнуть и прекратиться столь грозное явление природы (молния простирается в длину на целые километры).

Но, — возразите вы, — 1000-я доля секунды еще не подлинный лилипут, как никто не назовет тысячу числовым гигантом. Если взять *миллионную* долю секунды, то уж наверное можно утверждать, что это — величина не реальная, промежуток времени, в течение которого ничего произойти не может. Ошибаетесь: даже и одна миллионная доля секунды — для современного физика, например, — вовсе не чрезмерно маленький промежуток. В области явлений световых (и электрических) ученому сплошь и рядом приходится иметь дело с гораздо более мелкими частями секунды. Напомним прежде всего, что световой луч пробегает ежесекундно (в пустоте) 300000 километров; следовательно, в 1000000-ю долю секунды свет успевает перенестись на расстояние 300 метров — примерно на столько же, на сколько переносится в воздухе звук в течение целой секунды.

Далее: свет есть явление волновое, и число световых волн, минующих ежесекундно каждую точку пространства, исчисляется сотнями триллионов. Те световые волны, которые, действуя на наш глаз, вызывают ощущение красного света, имеют частоту колебаний 400 триллионов в секунду; это значит, что в течение одной 1 000 000-й доли секунды в наш глаз вступает 400 000 000 волн, а одна волна вступает в глаз в течение 400 000 000 000 000-й доли секунды. Вот подлинный числовой лилипут!

Но этот несомненный, реально существующий лилипут является истинным великаном по сравнению с еще более мелкими долями секунды, с которыми физик встречается при изучении рентгеновских лучей. Эти удивительные лучи, обладающие свойством проникать через многие непрозрачные тела, представляют собою, как и видимые лучи, волновое явление, но частота колебаний у них значительно больше, чем у видимых: она достигает 2500 триллионов в секунду! Волны следуют тут одна за другой в 60 раз чаще, чем в лучах видимого красного света.

Гамма-лучи обладают частотой еще большей, чем лучи Рентгена. Значит, и в мире лилипутов существуют свои великаны и карлики. Гулливер был выше лилипутов всего в дюжину раз и казался им великаном. Здесь же один лилипут больше другого в пять дюжин раз и, следовательно, имеет все права именоваться по отношению к нему исполином.

## ЛИЛИПУТЫ ПРОСТРАНСТВА

Интересно рассмотреть теперь, какие наименьшие *расстояния* приходится отмеривать и оценивать современным исследователям природы.

В метрической системе мер наименьшая единица длины для обиходного употребления — *миллиметр*; он примерно вдвое меньше толщины спички. Чтобы измерить предметы, видимые простым глазом, такая единица длины достаточно мелка. Но для измерения бактерий и других мелких объектов, различимых только в сильные микроскопы, миллиметр чересчур крупен. Ученые обращаются для таких измерений к более мелкой единице — *микрону*[1], который в 1000 раз меньше миллиметра. Так называемые красные кровяные тельца, которые насчитываются десятками миллионов в каждой капельке нашей крови, имеют в длину 7 микронов и в толщину 2 микрона. Стопка из 1000 таких телец имеет толщину спички.

Как ни мелок кажется нам микрон, он все же, оказывается, чрезмерно крупен для расстояний, которые приходится измерять современному физику. Мельчайшие, недоступные даже микроскопу частицы — молекулы, из которых состоит вещество всех тел природы, и слагающие их еще более мелкие атомы имеют размеры от одной 100-й до одной 1000-й доли микрона. Если остановиться на первой, большей величине, то тогда окажется, что миллион таких крупинок (а мы уже знаем, как велик миллион), будучи расположен на одной прямой, вплотную друг к другу, занял бы всего один сантиметр!

Чтобы представить себе наглядно чрезвычайную малость атомов, обратимся к такой картине. Вообразите, что все предметы на земном шаре увеличились в миллион раз. Эйфелева башня (300 м высоты) уходила бы тогда своей верхушкой на 300000 км в мировое пространство и находилась бы в недалеком соседстве от орбиты Луны. Люди были бы величиной в ¼ земного радиуса — 1700 км; один шаг такого человека-гиганта унес бы его на 600–700 км. Мельчайшие красные тельца, миллиардами плавающие в его крови, имели бы каждое более 7 м в поперечнике. Волос имел бы 100 м в толщину. Мышь достигала бы 100 км в длину, муха — 7 км. Каких же размеров будет при таком чудовищном увеличении атом вещества?

Положительно не верится: его размеры предстанут перед вами в виде... типографской точки шрифта этой книги!

Достигаем ли мы здесь крайних пределов пространственной малости, за которые не приходится переступать даже физику с его изощренными приемами измерений? Еще не особенно давно думали так; но теперь известно, что атом — целый мир, состоящий из гораздо более мелких частей и являющийся ареною действия могущественных сил. Атом, например, водорода состоит из центрального ядра и быстро обращающегося вокруг него электрона. Не входя в другие подробности, скажем только, что поперечник электрона измеряется триллионными долями миллиметра. Другими словами, поперечник электрона почти в миллион раз меньше поперечника атома. Если же пожелаете сравнить размеры электрона с размерами пылинки, то расчет покажет вам, что электрон меньше пылинки примерно во столько же раз, во сколько пылинка меньше — чего бы вы думали? — земного шара!

---

[1] Это устаревшее название: в 1967 году решением XIII Генеральной конференции по мерам и весам его отменили. Теперь миллионная часть метра называется *микрометр*, а миллиардная ($10^{-9}$ м) — *нанометр* (*примеч. ред.*).

Вы видите, что атом — лилипут среди лилипутов — является в то же время настоящим исполином по сравнению с электроном, входящим в его состав, — таким же исполином, каким вся Солнечная система является по отношению к земному шару.

Можно составить следующую поучительную лестницу, в которой каждая ступень является исполином по отношению к предыдущей ступени и лилипутом по отношению к последующей:

электрон
атом
пылинка
дом
земной шар
Солнечная система
расстояние до Полярной звезды
Млечный Путь.

Каждый член этого ряда примерно в четверть миллиона раз[1] больше предыдущего и во столько же раз меньше последующего. Ничто не доказывает так красноречиво всю относительность понятий «большой» и «малый», как эта табличка. В природе нет безусловно большого или безусловно малого предмета. Каждая вещь может быть названа и подавляюще огромной и исчезающе малой, — в зависимости от того, как на нее взглянуть, с чем ее сравнить. «Время и пространство — закончим мы словами одного английского физика[2] — понятия чисто относительные. Если бы сегодня в полночь все предметы — в том числе и мы сами, и наши измерительные приборы — уменьшились в 1000 раз, мы совершенно не заметили бы этого изменения. Не было бы никакого указания на то, что произошло такое уменьшение. Точно так же, если бы все события и все часы получили ускорение хода в одинаковом отношении, то мы равным образом ничего не подозревали бы об этой перемене».

## СВЕРХИСПОЛИН И СВЕРХЛИЛИПУТ

Наши беседы о великанах и карликах из мира чисел были бы не полны, если бы мы не рассказали читателю об одной изумительной диковинке этого рода — диковинке, правда, не новой, но стоящей дюжины новинок. Чтобы подойти к ней, начнем со следующей на вид весьма незамысловатой задачи:

---

[1] Имеются в виду *линейные* размеры (а не объемы), т. е. *поперечник* атома, *диаметр* Солнечной системы, *высота* или *длина* дома и т. п. Подробнее о такого рода сопоставлениях см. мою книгу «Знаете ли вы физику?».

[2] Фурнье Дальб, «Два новые мира» (есть русский перевод) (*примеч. ред.*).

**Задача № 63**

Какое самое большое число можно написать тремя цифрами, не употребляя никаких знаков действий?

**Решение**

Хочется ответить: 999, — но, вероятно, вы уже подозреваете, что ответ другой, иначе задача была бы чересчур проста. И, действительно, правильный ответ пишется так:

$$9^{9^9}.$$

Выражение это означает: «девять в степени девять в девятой степени». Другими словами: нужно составить произведение из стольких девяток, сколько единиц в результате умножения:

$$9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9.$$

Достаточно только *начать* вычисление, чтобы ощутить огромность предстоящего результата. Если у вас хватит терпения выполнить перемножение девяти девяток, вы получите число:

$$387420489.$$

Главная работа только начинается: теперь нужно найти

$$9^{387420489},$$

т. е. произведение 387420489 девяток. Придется сделать круглым счетом 400 миллионов умножений...

У вас, конечно, не будет времени довести до конца подобное вычисление. Но я лишен возможности сообщить вам готовый результат по трем причинам, которые нельзя не признать весьма уважительными. Во-первых, число это никогда и никем еще не было вычислено (известен только приближенный результат). Во-вторых, если бы даже оно и было вычислено, то, чтобы напечатать его, понадобилось бы не менее тысячи таких книг, как эта, потому что число наше состоит из 369693100 цифр; набранное обыкновенным шрифтом, оно имело бы в длину 1000 км... Наконец, если бы меня снабдили достаточным количеством бумаги и чернил, я и тогда не мог бы удовлетворить вашего любопытства. Вы легко можете сообразить, почему: если я способен писать, скажем, без перерыва по две цифры в секунду, то в час я напишу 7200 цифр, а в сутки, работая непрерывно день и ночь, — не более 172800 цифр. Отсюда следует, что, не отрываясь ни на секунду от пера, трудясь круглые сутки изо дня в день без отдыха, я просидел бы за работой не менее 7 лет, прежде чем написал бы это число...

Могу сообщить вам об этом числе только следующее: оно начинается цифрами 428124773175747048036987118 и кончается 89. Что находится между этим началом и концом — неизвестно. А ведь там 369693061 цифра!..

Вы видите, что уже *число цифр* нашего результата невообразимо огромно. Как же велико само число, выражаемое этим длиннейшим рядом цифр? Трудно дать хотя бы приблизительное представление о его громадности, потому что такого множества отдельных вещей, считая даже каждый электрон за отдельную вещь — нет в *целой Вселенной*!

Архимед вычислил некогда, сколько песчинок заключал бы в себе мир, если бы весь он до неподвижных звезд был наполнен тончайшим песком. У него получился результат, не превышающий единицы с 63 нулями. Наше число состоит не из 64, а из 370 *миллионов* цифр — следовательно, оно неизмеримо превышает огромное число Архимеда.

Поступим же по примеру Архимеда, но вместо «исчисления песчинок» произведем «исчисление электронов». Вы уже знаете, что электрон меньше песчинки примерно во столько же раз, во сколько раз песчинка меньше земного шара. Для радиуса видимой Вселенной примем расстояние в миллиард световых лет. Так как свет пробегает в секунду 300000 км, а в году 31 миллион секунд, то можно сосчитать, что «световой год» равен круглым счетом 10 триллионам км (гнаться за большой точностью здесь бесполезно). Значит, для радиуса всей известной нам Вселенной получаем величину

10 миллиардов триллионов км,

или — прибегая к способу изображения числовых великанов, объясненному на с. 125, —

$$10^{22} \text{ км.}$$

Объем шара такого радиуса можно вычислить по правилам геометрии: он равен (с округлением) $4 \times 10^{66}$ км$^3$. Умножив это число на число кубических сантиметров в кубическом километре ($10^{15}$), получим для объема видимой Вселенной величину

$$10^{81} \text{ см}^3.$$ [1]

Теперь представим себе, что весь этот объем *сплошь* заполнен самыми тяжелыми из известных нам атомов — атомами элемента урана, которых идет на грамм около $10^{22}$ штук. Их поместилось бы в шаре указанного объема $10^{103}$ штуки. Дознано, что в каждом атоме урана содержится 238 электронов (внешних и внутренних). Поэтому во всей доступной нашему исследованию Вселенной могло бы поместиться не более

$$10^{106} \text{ электронов.}$$

---

[1] Небезынтересно отметить, что Архимед в своем исчислении песчинок определял объем Вселенной в $5 \times 10^{54}$ см$^3$.

[По современным данным, объем видимой Вселенной составляет $3{,}5 \times 10^{86}$ см$^3$ (*примеч. ред.*).]

Число, состоящее «всего лишь» из 107 цифр... Как это мизерно по сравнению с нашим числовым великаном из 370 *миллионов* цифр!

Вы видите, что, наполняя сплошь всю Вселенную — величайшее, что мы знаем — электронами, т. е. мельчайшим из того, что нам известно, мы не исчерпали бы и небольшой доли того исполинского числа, которое скромно скрывается под изображением:

$$9^{9^{9}}.$$

Познакомившись с этим замаскированным гигантом, обратимся к его противоположности.

Соответствующий числовой лилипут получится, если разделим единицу на это число. Будем иметь:

$$\frac{1}{9^{9^{9}}},$$

что равно:

$$\frac{1}{9^{387420489}}.$$

Мы имеем здесь знакомое нам огромное число в знаменателе. Сверхвеликан превратился в сверхлилипута.

ОТВЕТ
на задачу-шутку
(предложенную на с. 123):
Число, которое делится на все числа
без остатка, есть —

*произведение всех чисел*

**Глава X**

# АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПУТЕШЕСТВИЯ

## ВАШЕ КРУГОСВЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ

В молодости я занимался в редакции одного распространенного ленинградского журнала, где состоял секретарем. Однажды мне подали визитную карточку посетителя. Я прочел на ней незнакомое мне имя и совершенно необычайное обозначение профессии: «*первый русский кругосветный путешественник пешком*». По обязанностям службы мне не раз доводилось беседовать с русскими путешественниками по всем частям света и даже с кругосветными, — но о «кругосветном путешественнике пешком» я никогда еще не слыхал. С любопытством поспешил я в приемную, чтобы познакомиться с этим предприимчивым и неутомимым человеком.

Замечательный путешественник был молод и имел очень скромный вид. На вопрос, когда успел он совершить свое необыкновенное путешествие, «первый русский кругосветный и т. д.» объяснил мне, что оно теперь именно и совершается. Маршрут? Шувалово–Ленинград[1]; о дальнейшем он желал посоветоваться со мною... Из разговора выяснилось, что планы «первого русского и т. д.» довольно смутны, но, во всяком случае, не предусматривают оставления пределов России.

[1] *Шувалово* — небольшая станция в 10 километрах от Ленинграда.

— Как же в таком случае совершите вы кругосветное путешествие? — с изумлением спросил я.

— Главное дело длину земного обхвата пройти, а это можно сделать и в России, — разрешил он мое недоумение. — Десять верст уже пройдено, и остается...

— Всего 37490. Счастливого пути!

Не знаю, как странствовал «первый и т. д.» на протяжении остальной части своего пути. Но что он успешно выполнил свое намерение, я нисколько не сомневаюсь. Даже если он больше вовсе не странствовал, а сразу возвратился в родное Шувалово и безвыездно проживал там, — он и в таком случае прошел не менее 40 тысяч км. Беда только, что он не первый и не единственный человек, совершивший такой подвиг. И я, и вы, и большинство других граждан нашего Союза имеют столько же прав на звание «русского кругосветного путешественника пешком», в понимании шуваловского ходока. Потому что каждый из нас, какой бы он ни был домосед, успел в течение своей жизни, сам того не подозревая, пройти пешком путь даже более длинный, чем окружность земного шара. Маленький арифметический подсчет сейчас убедит вас в этом.

В самом деле. В течение каждого дня вы, конечно, не менее 5 часов проводите на ногах: ходите по комнатам, по двору, по улице, словом, так или иначе шагаете. Если бы у вас в кармане был шагомер (прибор для подсчета сделанных шагов), он показал бы вам, что вы ежедневно делаете не менее 30000 шагов. Но и без шагомера ясно, что расстояние, проходимое вами в день, очень внушительно. При самой медленной ходьбе человек делает в час 4–5 км. Это составляет в день, за 5 часов, 20–25 км. Теперь остается умножить этот дневной наш переход на 360 — и мы узнаем, какой путь каждый из нас проходит в течение целого года:

$$20 \times 360 = 7200, \text{ или же } 25 \times 360 = 9000.$$

Итак, самый малоподвижный человек, никогда даже и не покидавший родного города, проходит *ежегодно* пешком около 8000 км. А так как окружность земного шара имеет 40000 км, то нетрудно вычислить, во сколько лет мы совершаем пешеходное путешествие, равное кругосветному:

$$40000 : 8000 = 5.$$

Значит, в течение 5 лет вы проходите путь, по длине равный окружности земного шара. Каждый 13-летний мальчик, если считать, что он начал ходить с двухлетнего возраста, дважды совершил уже «кругосветное путешествие». Каждый 25-летний человек выполнил не менее 4 таких путешествий. А дожив до 60 лет, мы *десять раз обойдем вокруг земного шара*, т. е. пройдем путь более длинный, чем от Земли до Луны (380000 км).

Таков неожиданный результат подсчета столь обыденного явления, как ежедневная наша ходьба по комнате и вне дома.

## ВАШЕ ВОСХОЖДЕНИЕ НА МОНБЛАН

### Задача № 64

Вот еще один интересный подсчет. Если вы спросите почтальона, ежедневно разносящего письма по адресатам, или врача, целый день занятого посещением своих пациентов, совершали ли они восхождение на Монблан, — они, конечно, удивятся такому вопросу. Между тем, вы легко можете доказать каждому из них, что, не будучи альпинистами, они, наверное, совершили уже восхождение на высоту, даже превышающую величайшую вершину Альп. Стоит только подсчитать, на сколько ступеней поднимается почтальон ежедневно, восходя по лестницам при разноске писем, или врач, посещая больных. Окажется, что самый скромный почтальон, самый занятой врач, никогда даже и не помышлявшие о спортивных состязаниях, побивают мировые рекорды горных восхождений. Подсчитайте это.

### Решение

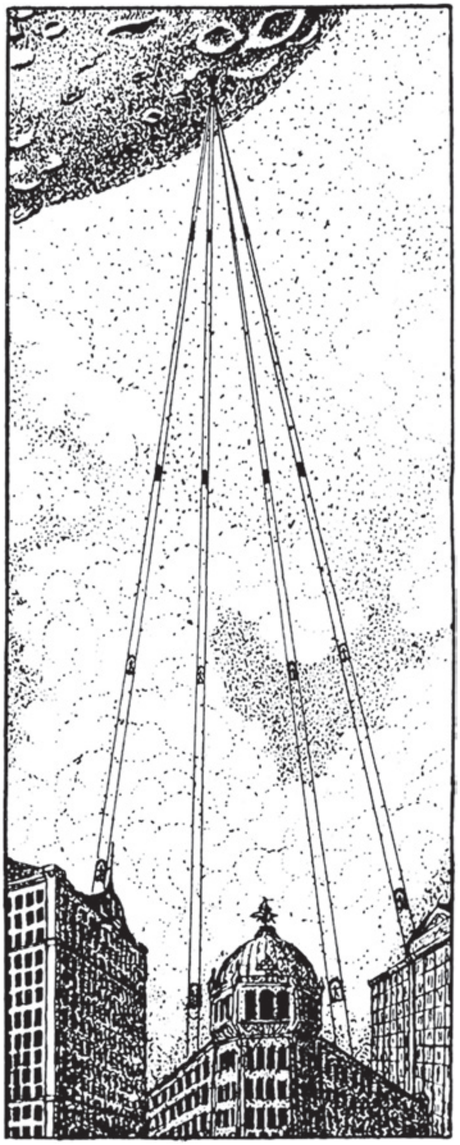
Возьмем для подсчета довольно скромные средние цифры; допустим, что почтальон ежедневно посещает только десять человек, живущих кто на втором этаже, кто на третьем, четвертом, пятом — в среднем возьмем на третьем. Высоту третьего этажа примем для круглого числа в 10 м: следовательно, наш почтальон ежедневно совершает по ступеням лестниц путешествие на высоту

$$10 \times 10 = 100\,\text{м}.$$

Высота Монблана 4800 м. Разделив ее на 100, вы узнаете, что наш скромный почтальон выполняет восхождение на Монблан в 48 дней...

Итак, каждые 48 дней, или примерно 8 раз в год, почтальон поднимается по лестницам на высоту, равную высочайшей вершине Европы. Скажите, какой спортсмен ежегодно по 8 раз взбирается на Монблан?

Для врача у меня имеются не предположительные, а реальные цифры. Врачи квартирной помощи в Ленинграде подсчитали, что в среднем каждый из них за свой рабочий день поднимается к больным на 2500 ступеней. Считая высоту ступеньки равной 15 см и принимая 300 рабочих дней в году, получаем, что за год врач поднимается на 112 км, т. е. совершает 20 раз восхождение на высоту Монблана!



Не надо непременно быть почтальоном или врачом, чтобы выполнять подобные подвиги, конечно, того не ведая. Я живу на 2-м этаже, в квартире, куда ведет лестница с 20 ступеньками — число, казалось бы, весьма скромное. Ежедневно мне приходится взбегать по этой лестнице раз 5, да еще посещать двоих знакомых, живущих, скажем, на такой же высоте. В среднем можно принять, что я поднимаюсь ежедневно 7 раз по лестнице с 20 ступенями, то есть взбегаю вверх каждый день по 140 ступеней. Сколько же это составит в течение года?

$$140 \times 360 = 50400.$$

Итак, ежегодно я поднимаюсь более чем на 50000 ступеней. Если мне суждено дожить до 60-летнего возраста, я успею подняться на вершину сказочно высокой лестницы в три миллиона ступеней (450 км)! Как изумился бы я, если бы ребенком меня подвели к основанию этой уходящей в бесконечную даль лестницы и сказали, что некогда я, быть может, достигну ее вершины... На какие же исполинские высоты взбираются те люди, которые по роду своей профессии только и делают, что поднимаются на высоту, — например, служители при лифтах? Кто-то подсчитал, что, например, служитель при лифте одного из Нью-Йоркских небоскребов совершает за 15 лет службы подъем до высоты... Луны!

## ПАХАРИ-ПУТЕШЕСТВЕННИКИ

**Задача № 65**

Взгляните на странный рисунок, приведенный на следующей странице. Кто те сказочные пахари-богатыри, что проводят борозды кругом земного шара?

Вы полагаете, рисунок — создание чересчур разыгравшейся фантазии художника? Нисколько: художник лишь изобразил наглядно то, о чем скажут вам достоверные арифметические подсчеты, если вы дадите себе труд их произвести. Каждый пахарь проходит со своим плугом в течение нескольких лет (4–6) такое расстояние, которое равно окружности земного шара. Выполнение этого неожиданного по своим результатам арифметического подсчета предоставляю читателю произвести самостоятельно.

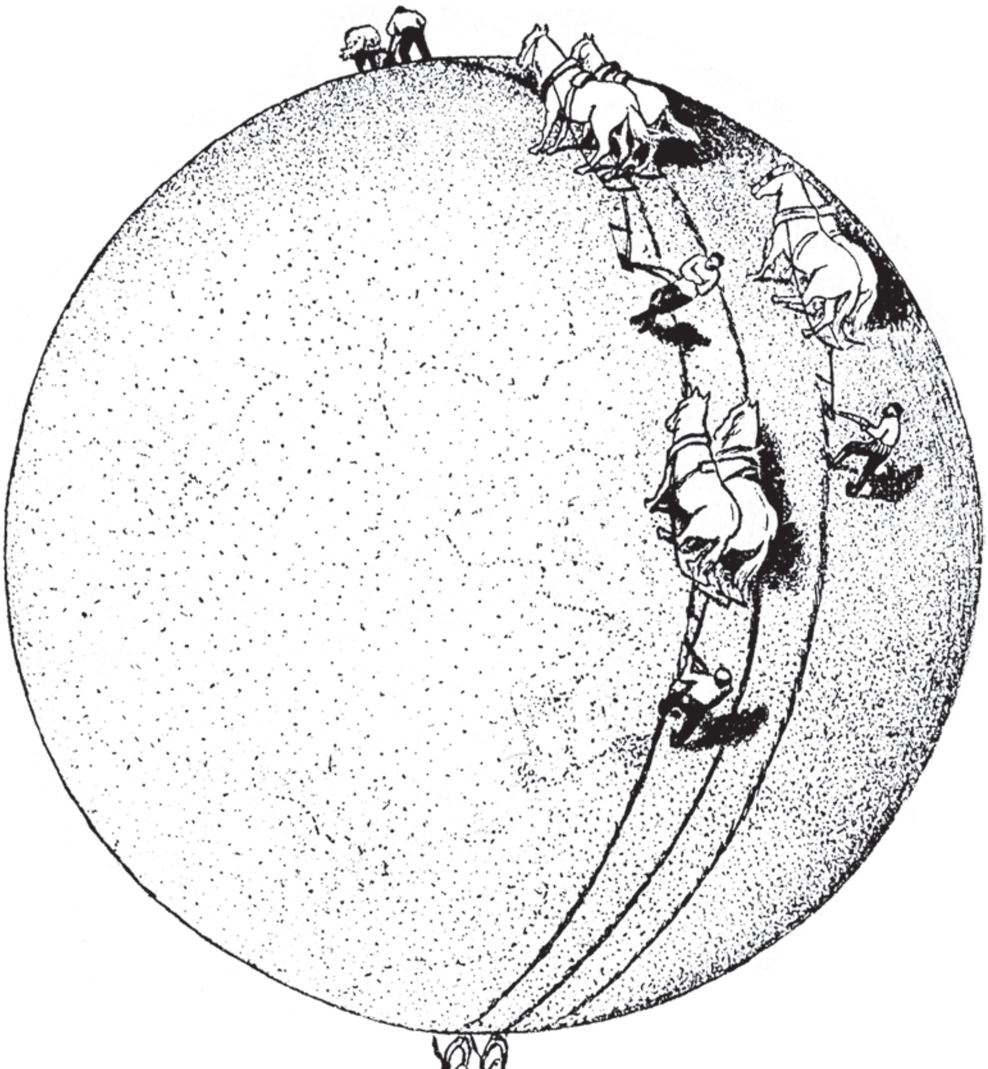
## НЕЗАМЕТНОЕ ПУТЕШЕСТВИЕ НА ДНО ОКЕАНА

Весьма внушительные путешествия выполняют обитатели подвальных помещений, служители таких же складов и т. п. Много раз в день сбегая вниз по ступенькам маленькой лестницы, ведущей в погреб, они в течение нескольких месяцев проходят расстояние в целые километры. Нетрудно рассчитать, во сколько времени мальчик-служитель подвального склада проходит, таким образом, вниз расстояние, равное глубине океана. Если лестница углубляется, скажем, всего на 2 м, и мальчик сбегает по ней ежедневно всего 10 раз, то в месяц он пройдет вниз расстояние в $30 \times 20 = 600$ м, а в год $600 \times 12 = 7200$ м — более 7 км. Вспомним, что глубочайшая шахта простирается в недра Земли всего на 2 км! [1]

Итак, если бы с поверхности океана вела на его дно лестница, то любой служитель подвального торгового помещения достиг бы дна океана в течение одного года (наибольшая глубина Тихого океана — около 9 км)[2].

[1] В 1970–90 гг. в Мурманской области, в 10 км от города Заполярный, в научных целях была пробурена Кольская сверхглубокая скважина (СГ-3); ее глубина составляет 12262 метра. Скважина по сей день является самым глубоким в мире отверстием в земной коре (*примеч. ред.*).

[2] По различным данным, максимальная глубина Марианского желоба (Марианской впадины) в Тихом океане составляет от 10028 до 11034 м ниже уровня моря (*примеч. ред.*).



*Пахари-путешественники*

## ПУТЕШЕСТВУЮЩИЕ, СТОЯ НА МЕСТЕ

### Задача № 66

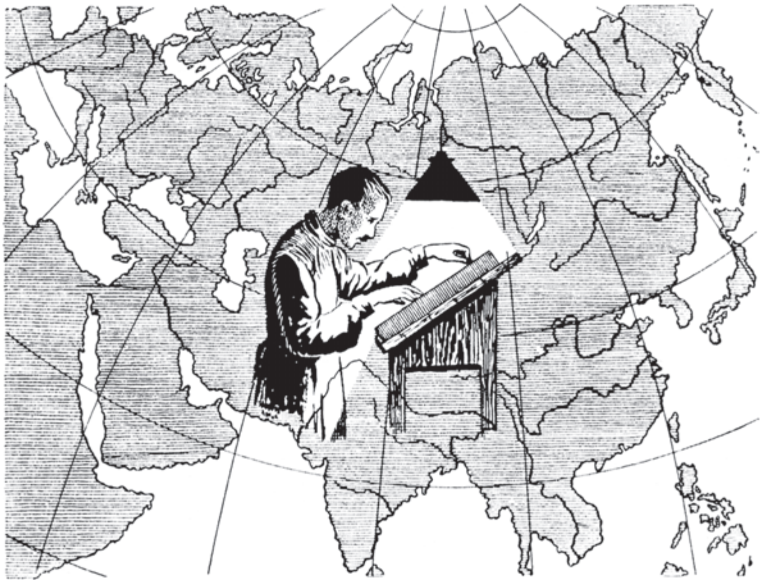
Последние страницы этой книги мне хочется посвятить ее первым читателям, без деятельного сотрудничества которых она не могла бы появиться на свет. Я говорю, конечно, о наборщиках. Они также совершают далекие арифметические путешествия, не выходя из пределов наборной, даже стоя неподвижно у наборных касс. Проворная рука труженика свинцовой армии, скользя ежесекундно от кассы к верстатке, проходит за год огромное расстояние. Сделайте подсчет. Вот данные: наборщик набирает в течение рабочего дня 8000 букв, и для каждой буквы должен переместить руку туда и назад на расстояние в среднем около полуметра. В году считайте 300 рабочих дней.

### Решение

$$2 \times 0{,}5 \times 8000 \times 300 = 2400000 \text{ м, т. е. } 2400 \text{ км}$$

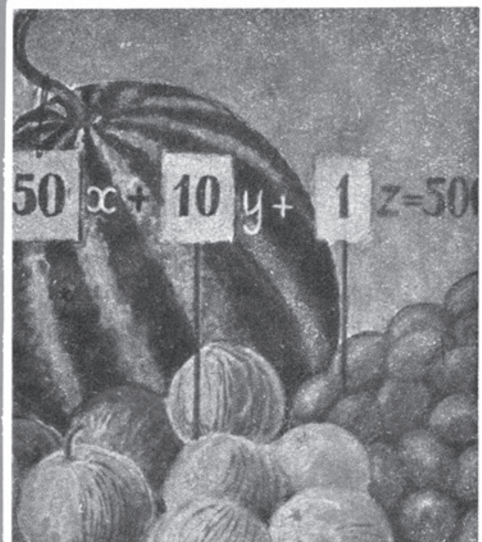
Значит, за 16–17 лет работы даже и наборщик, не отрывающийся от кассы, совершает кругосветное путешествие. «Неподвижный кругосветный путешественник»! Это звучит оригинальнее, чем «путешественник пешком».

Не найдется человека, который так или иначе не совершил бы в этом смысле кругосветного путешествия. Можно сказать, что замечательным человеком является не тот, кто проделал кругосветное путешествие, а тот, кто его не совершил. И если кто-нибудь станет уверять вас, что этого не сделал, вы, надеюсь, сможете математически доказать ему, что он не составляет исключения из общего правила.



Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

# ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА




«ВРЕМЯ»

Текст и иллюстрации воспроизводятся по изданиям:

*Перельман Я. И. Занимательная алгебра. — Л. : Время, 1933,*

*Перельман Я. И. Занимательная алгебра. — 3-е изд. — Л.; М.: Б. и. ОНТИ, Глав. ред. науч.-попул. и юношеской лит-ры, 1937*

Обложка издания 1933 г.

## Предисловие

Не следует на эту книгу смотреть, как на легко понятный учебник алгебры для начинающих. Подобно прочим моим сочинениям той же серии, «Занимательная алгебра» прежде всего не учебное руководство, а книга для вольного чтения. Читатель, которого она имеет в виду, должен уже обладать некоторыми познаниями в алгебре, хотя бы смутно усвоенными или полузабытыми. «Занимательная алгебра» ставит себе целью уточнить, воскресить и закрепить эти разрозненные и непрочные сведения, но главным образом — воспитать в читателе вкус к занятию алгеброй и возбудить охоту самостоятельно пополнить по учебным книгам пробелы своей подготовки. В этом отношении установка «Занимательной алгебры» противоположна задачам такой, например, книги, как превосходный переводной труд Радемахера и Теплица «Числа и фигуры»[1], который не требует от читателя «помнить то, чему мы учились по математике в юные годы». Моя книга, напротив, стремится помочь закреплению школьных знаний и навыков.

Чтобы придать предмету привлекательность и поднять к нему интерес, я пользуюсь в книге разнообразными средствами: задачами с необычными сюжетами, подстрекающими любопытство, занимательными экскурсиями в область истории математики, неожиданными применениями алгебры к практической жизни и т. п.

По объему охватываемого алгебраического материала книга не выходит из рамок школьной программы, затрагивая почти все ее отделы. Соответственно своему назначению, «Занимательная алгебра» избегает трудных теоретических вопросов.

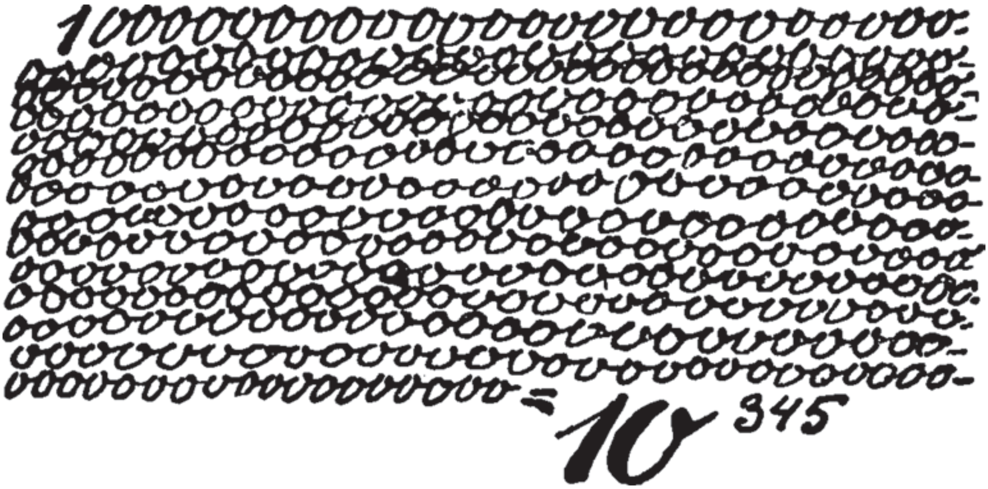
В третьем издании прибавлен в разных местах книги десяток новых страниц и исправлены недосмотры, замеченные во втором.

Читатели, желающие поделиться с автором своими замечаниями, могут направлять письма по адресу: Ленинград, 136, Плуталова, 2, кв. 12, Якову Исидоровичу Перельману.

*Я. П.*

---

[1] *Ганс Адольф Радемахер* (1892–1969) и *Отто Теплиц* (1881–1940) — немецкие математики и популяризаторы науки (*примеч. ред.*).



**Глава первая**

# ПЯТОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ

## ПЯТОЕ ДЕЙСТВИЕ

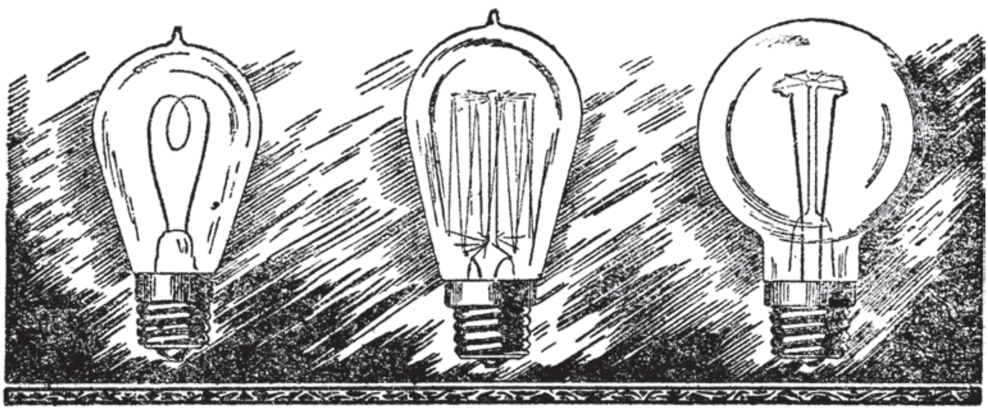
Алгебру называют нередко «арифметикой семи действий», желая подчеркнуть, что к четырем общеизвестным математическим операциям она присоединяет три новых: возвышение в степень и два ему обратных действия. Это гораздо характернее для алгебры, чем употребление буквенных обозначений. В истории математики мы знаем сочинения, даже целый ряд их, которые не содержат вовсе буквенных обозначений и все же представляют собой несомненно учебники алгебры; к таким «риторическим» алгебрам принадлежит, например, знаменитый учебник Фибоначчи (или Леонарда Пизанского), появившийся в 1202 г. и употреблявшийся затем еще в течение трех столетий.

Наши алгебраические беседы начнутся с «пятого действия» – с возвышения в степень.

Вызвана ли потребность в этом новом действии практической жизнью? Безусловно. Мы очень часто сталкиваемся с ним в реальной действительности. Вспомним о многочисленных случаях вычисления площадей и объемов, где обычно приходится возвышать числа во вторую и третью степень. Далее: сила всемирного тяготения, электростатическое и магнитное взаимодействия, свет, звук — ослабевают пропорционально второй степени расстояния. Продолжительность обращения планет вокруг Солнца (и спутников вокруг планет) связана с расстояниями от центра обращения также степенной зависимостью: вторые степени времен обращения относятся между собою как третьи степени расстояний.

Не надо думать, что практика сталкивает нас только со вторыми и третьими степенями, а более высокие показатели существуют только в упражнениях алгебраических задачников. Инженер, производя расчеты на прочность, сплошь и рядом имеет дело с четвертыми степенями, а при других вычислениях (например, диаметра паропровода) — даже с шестой степенью. Исследуя силу, с какою текучая вода увлекает камни, гидротехник наталкивается на зависимость также шестой степени: если скорость течения в одной реке вчетверо больше, чем в другой, то быстрая река способна перекатывать по своему ложу камни в $4^6$, т. е. в 4096 раз более тяжелые, чем медленная[1].

С еще более высокими степенями встречаемся мы, изучая зависимость яркости раскаленного тела — например, нити накала в электрической лампочке — от температуры. Общая яркость растет при белом калении с двенадцатой степенью температуры, а при красном — с тридцатой степенью температуры («абсолютной», т. е. считаемой от минус 273 °С). Это значит, что тело, нагретое, например, от 2000° до 4000° (абсолютных), т. е. в 2 раза сильнее, становится ярче в $2^{12}$, иначе говоря, более чем в 4000 раз. О том, какое значение имеет эта своеобразная зависимость в технике изготовления электрических лампочек, мы еще будем говорить в другом месте, — так же, как и о применении «пятого действия» в явлениях живой природы.



[1] Подробнее об этом см. в моей книге «Занимательная механика», гл. IX.

## АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Никто, пожалуй, не пользуется так широко пятым математическим действием, как астрономы. Исследователям Вселенной на каждом шагу приходится встречаться с огромными числами, состоящими из одной-двух значащих цифр и длинного ряда нулей. Изображение обычным образом подобных числовых исполинов, справедливо называемых «астрономическими числами», неизбежно вело бы к большим неудобствам, особенно когда приходится производить с ними вычисления. Расстояние, например, до туманности Андромеды, написанное обычным порядком, представляется таким числом километров:

23 800 000 000 000 000 000. [1]

При выполнении астрономических расчетов приходится к тому же выражать зачастую небесные расстояния не в километрах или более крупных единицах, а в сантиметрах. Наше число, так раздробленное, удлиняется 5 нулями:

2 380 000 000 000 000 000 000 000.

*Массы* звезд выражаются еще бóльшими числами, особенно если их раздроблять, как требуется для многих расчетов, в граммы. Масса нашего Солнца в граммах равна:

1 989 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000.

Легко представить себе, как затруднительно было бы производить вычисления с такими громоздкими числами и как легко было бы при этом ошибиться. А ведь здесь приведены далеко еще не самые большие астрономические числа!

Пятое математическое действие дает вычислителям простой выход из этого затруднения. Единица, сопровождаемая рядом нулей, представляет собою определенную степень десяти:

$$100 = 10^2;\ 1000 = 10^3 \text{ и т. д.}$$

Приведенные раньше числовые великаны могут быть поэтому представлены в таком виде:

первый ........... $238 \times 10^{22}$,
второй .......... $1989 \times 10^{30}$.

Делается это не только для сбережения места, но и для облегчения расчетов. Если бы потребовалось, например, оба эти числа перемножить, то достаточно было бы найти произведение $38 \times 1989 = 473\,382$ и поставить его впереди множителя $10^{22+30} = 10^{52}$:

$$238 \times 10^{22} \times 1989 \times 10^{30} = 473\,382 \times 10^{52}.$$

[1] Здесь и далее в ряде случаев приведены уточненные современные данные (*примеч. ред.*).

Это, конечно, гораздо удобнее, чем выписывать сначала число с 22 нулями, затем с 30 и, наконец, с 52 нулями, — не только удобнее, но и надежнее, так как при писании десятков нулей можно проглядеть один-два нуля и получить неверный результат.

## СКОЛЬКО ВЕСИТ ВЕСЬ ВОЗДУХ?

Чтобы убедиться, насколько облегчаются практические вычисления при пользовании степенным изображением больших чисел, выполним такой расчет: определим, во сколько раз масса земного шара больше массы всего окружающего его воздуха.

На каждый кв. сантиметр земной поверхности воздух давит, мы знаем, с силой около килограмма[1]. Это означает, что вес того столба атмосферы, который опирается на 1 $см^2$, равен 1 кг. Атмосферная оболочка Земли как бы вся составлена из таких воздушных столбов; их столько, сколько квадратных сантиметров содержит поверхность нашей планеты; столько же килограммов весит вся атмосфера. Заглянув в справочник, узнаем, что поверхность земного шара равна 510 млн $км^2$. В степенном изображении

$$510\,000\,000 = 51 \times 10^7 \text{ км}^2.$$

Сколько квадратных сантиметров в квадратном километре? Рассчитаем. Линейный километр содержит 1000 м, по 100 см в каждом, т. е. 100 000 = $= 10^5$ см, а квадратный километр — $(10^5)^2 = 10^{10}$ $см^2$. Во всей поверхности земного шара заключается поэтому

$$51 \times 10^7 \times 10^{10} = 51 \times 10^{17} \text{ см}^2.$$

Столько же килограммов весит и атмосфера Земли. Переведя в тонны, получим

$$51 \times 10^{17} : 1000 = 51 \times 10^{17} : 10^3 = 51 \times 10^{17-3} = 51 \times 10^{14}.$$

Масса же земного шара выражается числом $6 \times 10^{21}$ тонн.

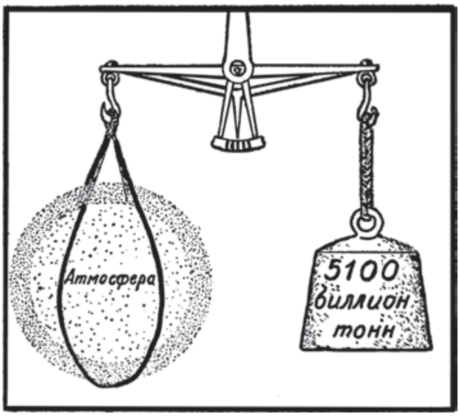
Чтобы определить, во сколько раз наша планета тяжелее ее воздушной оболочки, производим деление:

$$6 \times 10^{21} : 51 \cdot 10^{14} \approx 10^6,$$

т. е. масса атмосферы составляет примерно миллионную долю массы земного шара.

---

[1] Здесь и далее в ряде случаев Я. П. исчисляет вес и давление в граммах, хотя вес — это сила, а сила (в системе СИ, введенной в 1960 г.) измеряется в ньютонах, давление же — в паскалях. В данных случаях это вполне допустимо и в наши дни: мы до сих пор так поступаем во многих повседневных ситуациях — например, когда говорим, что «человек весит 60 килограммов» (*примеч. ред.*).




*Современный художник подписал бы «гирю» иначе —
«5100 триллионов тонн» (см. табл. на с. 116) (примеч. ред.).*

Едва ли бы вы избежали ошибки в числе нулей, если бы проделали весь этот расчет с числами в обычном изображении, не говоря уже о том, что затратили бы на него и больше времени.

## ГОРЕНИЕ БЕЗ ПЛАМЕНИ И ЖАРА

Если вы спросите у химика, почему дрова или уголь горят только при высокой температуре, он скажет вам, что соединение углерода с кислородом происходит, строго говоря, при всякой температуре, но при низких температурах процесс этот протекает чрезвычайно медленно (т. е. в реакцию вступает весьма незначительное число молекул) и потому ускользает от нашего наблюдения. Закон, определяющий скорость химических реакций, гласит, что с понижением температуры на 10° скорость реакции (число участвующих в ней молекул) *уменьшается в два раза*.

«Были измерены реакции, где заметная инверсия сахара (т. е. превращение его в смесь декстрозы и левулозы[1]) наступала только через сутки, если жидкость была при 100°. Если поддерживать температуру при 0°, то скорость реакции будет в $2^{10}$ раз меньше. Значит, при 0° заметная реакция может быть наблюдаема только спустя $2^{10} = 1024$ суток, т. е. на третий год после начала опыта», — пишет Оствальд[2] («Эволюция химии»).

---

[1] *Декстроза* и *левулоза* — ныне глюкоза и фруктоза (*примеч. ред.*).

[2] *Вильгельм Фридрих Оствальд* (1853–1932) — российский и немецкий физико-химик и философ (*примеч. ред.*).

Применим сказанное к реакции соединения древесины с кислородом, т. е. к процессу горения дров. Пусть при температуре пламени 600° сгорает ежесекундно 1 грамм древесины. Во сколько времени сгорит 1 грамм дерева при 20°? Мы уже знаем, что при температуре, которая на $580 = 58 \times 10$ градусов ниже, скорость реакции меньше в $2^{58}$ раз, т. е. 1 грамм дерева сгорит в $2^{58}$ секунд.

Скольким годам равен такой промежуток времени? Мы можем приблизительно подсчитать это, не производя 57 умножений двойки на себя и обходясь без логарифмических таблиц. Воспользуемся тем, что

$$2^{10} = 1024 \approx 10^3.$$

Следовательно,

$$2^{58} = 2^{60-2} = 2^{60} : 2^2 = \tfrac{1}{4} \times 2^{60} = \tfrac{1}{4} \times (2^{10})^6 = \text{около } \tfrac{1}{4} \times 10^{18},$$

т. е. около четверти триллиона секунд. В году около 30 млн., т. е. $3 \times 10^7$ секунд; поэтому

$$\left(\frac{1}{4} \times 10^{18}\right) : \left(3 \times 10^7\right) = \frac{1}{12} \times 10^{11} = \text{около } 10^{10}.$$

Десять миллиардов лет! Вот во сколько примерно времени сгорел бы грамм дерева без пламени и жара.

Итак, дерево и уголь горят и при обычной температуре, не будучи вовсе подожжены. Изобретение орудий добывания огня ускорило этот страшно медленный процесс в миллиарды раз..

## РАЗНООБРАЗИЕ ПОГОДЫ

### Задача

Будем характеризовать погоду только по одному признаку, — покрыто ли небо облаками или нет, т. е. станем различать лишь дни ясные и пасмурные. Как вы думаете, много ли при таком условии возможно шестидневок[1] с различным чередованием погоды?

Казалось бы, немного: пройдет месяца два, и все комбинации ясных и пасмурных дней в шестидневке будут исчерпаны; тогда неизбежно повторится одна из тех комбинаций, которые уже наблюдались прежде.

Попробуем, однако, точно подсчитать, сколько различных комбинаций возможно при таких условиях. Это — одна из задач, неожиданно приводящих к пятому математическому действию.

---

[1] В 1930-е годы шестидневки использовались в СССР параллельно с традиционными неделями как следующие друг за другом подряд шестидневные интервалы, начинавшиеся в фиксированные дни месяца (1-е, 7-е, 13-е, 19-е и 25-е) (*примеч. ред.*).

Итак: сколькими различными способами могут на одной шестидневке чередоваться ясные и пасмурные дни?

**Решение**

Первый день шестидневки может быть либо ясный, либо пасмурный; имеем, значит, пока две «комбинации».

В течение двухдневного периода возможны следующие чередования ясных и пасмурных дней:

ясный и ясный
ясный и пасмурный
пасмурный и ясный
пасмурный и пасмурный.

Итого в течение 2 дней $2^2$ различных рода чередований. В трехдневный промежуток к каждой из 4 комбинаций первых 2 дней присоединяются две комбинации третьего дня; всех родов чередований будет

$$2^2 \times 2 = 2^3.$$

В течение четырехдневки число чередований достигнет

$$2^3 \times 2 = 2^4.$$

В пятидневку возможно $2^5$ и, наконец, в шестидневку — $2^6 = 64$ различного рода чередований.

Отсюда следует, что шестидневок с различным порядком следования ясных и пасмурных дней имеется 64. Спустя $64 \times 6 = 384$ дня необходимо должно повториться одно из прежде бывших сочетаний; повторение, конечно, может случиться и раньше, но 384 дня — срок, по истечении которого такое повторение неизбежно. И обратно: может пройти целый год, даже больше (1 год и 19 дней), в течение которого ни одна шестидневка по погоде не будет похожа на другую.

## ЗАМОК С СЕКРЕТОМ

**Задача**

В одном советском учреждении обнаружен был несгораемый шкаф, сохранившийся с дореволюционных лет. Отыскался и ключ к нему, но, чтобы им воспользоваться, нужно было знать секрет замка; дверь шкафа открывалась лишь тогда, когда имевшиеся на двери 5 кружков с алфавитом на их ободах (36 букв[1]) устанавливались на определенное слово. Так как никто этого

[1] До реформы 1918 г. русская азбука насчитывала 35 букв, при этом в нее формально не входили буквы «ё» и «й» (*примеч. ред.*).

слова не знал, то, чтобы не взламывать шкафа, решено было перепробовать все сочетания букв на кружках. На составление одного сочетания требовалось 3 секунды времени.

Можно ли надеяться, что шкаф будет открыт в течение ближайших 10 рабочих дней?

**Решение**

Подсчитаем, сколько всех буквенных сочетаний надо было перепробовать.

Каждая из 36 букв первого кружка может сопоставляться с каждой из 36 букв второго кружка. Значит, двухбуквенных сочетаний было

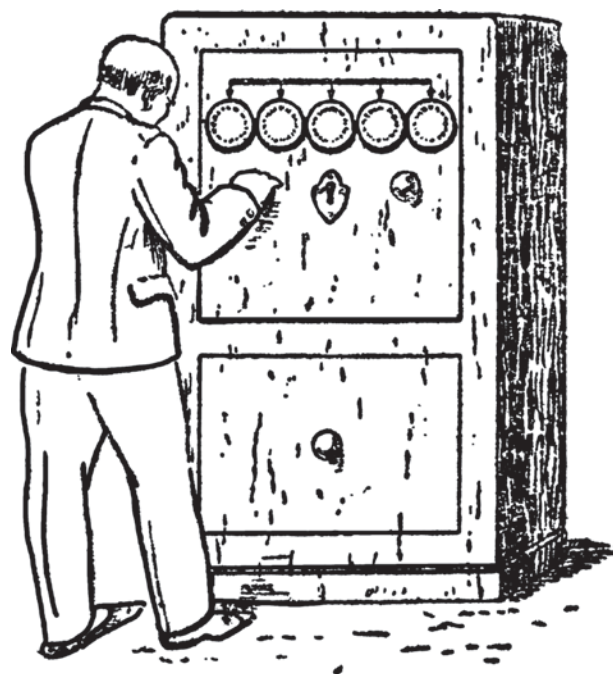
$$36 \times 36 = 36^2.$$

К каждому из этих сочетаний можно присоединить любую из 36 букв третьего кружка. Поэтому трехбуквенных сочетаний было

$$36^2 \times 36 = 36^3.$$

Таким же образом определяем, что четырехбуквенных сочетаний было $36^4$, а пятибуквенных $36^5$, или 60 466 176. Чтобы составить эти 60 с лишним миллионов комбинаций, потребовалось бы времени, считая по 3 секунды на каждую,

$$3 \times 60\,466\,176 = 181\,398\,528 \text{ секунд.}$$



Это составляет более 50 000 часов или почти 6300 восьмичасовых рабочих дней — более 20 лет.

Значит, шансов на то, что шкаф будет открыт в течение ближайших 10 рабочих дней, имеется 10 на 6300, или один из 630. Это очень малая вероятность.

## ДВОЙНИКИ

Подобным же расчетом можно уяснить себе, почему так редко попадаются люди со сходною наружностью, не находящиеся между собой в родстве.

Желая придать конкретность расчету, будем опираться хотя и на произвольные, но правдоподобные числовые данные. А именно предположим, что разнообразие наружности зависит от изменчивости 25 признаков (рост, сложение, толщина, волосы, фасон головы, лоб, брови, глаза, нос, уши, щеки, губы, подбородок, шея и т. п.), из которых

10 допускают по 3 варианта каждый,
10 » » 4 » »
5 » » 5 » »

Нетрудно определить число всех различных комбинаций признаков. Оно равно

$$3^{10} \times 4^{10} \times 5^{5}.$$

Преобразуем это выражение:

$$3^{10} \times 4^{10} \times 5^{5} = 3^{10} \times 2^{20} \times 5^{5} = 3^{10} \times 2^{15} \times 2^{5} \times 5^{5} = 3^{10} \times 2^{15} \times 10^{5} =$$
$$= 59\,049 \times 32\,768 \times 10^{5} = \text{около } 19 \times 10^{13}.$$

Людей же на всем земном шаре около 1 900 млн[1], т. е. $19 \times 10^{8}$. Число возможных изменений наружности больше числа людей в $10^{13-8}$, т. е. в 100 000 раз.

Понятно теперь, почему двойники встречаются лишь в виде исключений. Людей на Земле недостаточно для того, чтобы двойники могли попадаться чаще.

## ИТОГИ ПОВТОРНОГО УДВОЕНИЯ

Разительный пример чрезвычайно быстрого возрастания самой маленькой величины при повторном ее удвоении дает общеизвестная легенда о награде изобретателю шахматной игры[2]. Не останавливаясь на этом классическом примере, вошедшем в поговорку, приведу другие, не столь широко известные.

---

[1] Напоминаем, что текст написан в 1930-х годах (*примеч. ред.*).

[2] См. мою книгу «Живая математика», гл. VII.

### Задача

Инфузория парамеция каждые 27 часов (в среднем) делится пополам. Если бы все нарождающиеся таким образом инфузории оставались в живых, то сколько понадобилось бы времени, чтобы потомство одной парамеции заняло объем, равный объему Солнца?

Данные для расчета: 40-е поколение парамеций, не погибающих после деления, занимает в объеме 1 м$^3$; объем Солнца можно принять равным $10^{27}$ м$^3$. [1]

### Решение

Задача сводится к тому, чтобы определить, сколько раз нужно удваивать 1 м$^3$, чтобы получить объем в $10^{27}$ м$^3$. Делаем преобразования:

$$10^{27} = (10^3)^9 \approx (2^{10})^9 \approx 2^{90},$$

так как $2^{10} \approx 1000$ (точно 1024).

Значит, сороковое поколение должно претерпеть еще 90 делений, чтобы вырасти до объема Солнца. Общее число поколений, считая от первого, равно 40 + 90 = 130. Легко сосчитать, что это произойдет на 140-е сутки.

Заметим, что фактически одним микробиологом (Метальниковым[2]) наблюдалось 8 061 деление парамеции. Предоставляю читателю самому рассчитать, какой колоссальный объем заняло бы последнее поколение, если бы ни одна инфузория из этого количества не погибла...

Вопрос, рассмотренный в этой задаче, можно предложить, так сказать, в обратном виде:

Вообразим, что наше Солнце разделилось пополам, половина также разделилась пополам и т. д. Сколько понадобится таких делений, чтобы получились частицы величиной с инфузорию?

Хотя ответ уже известен читателям — 130, он все же поражает своею несоразмерною скромностью.

Мне предложили ту же задачу в такой форме:

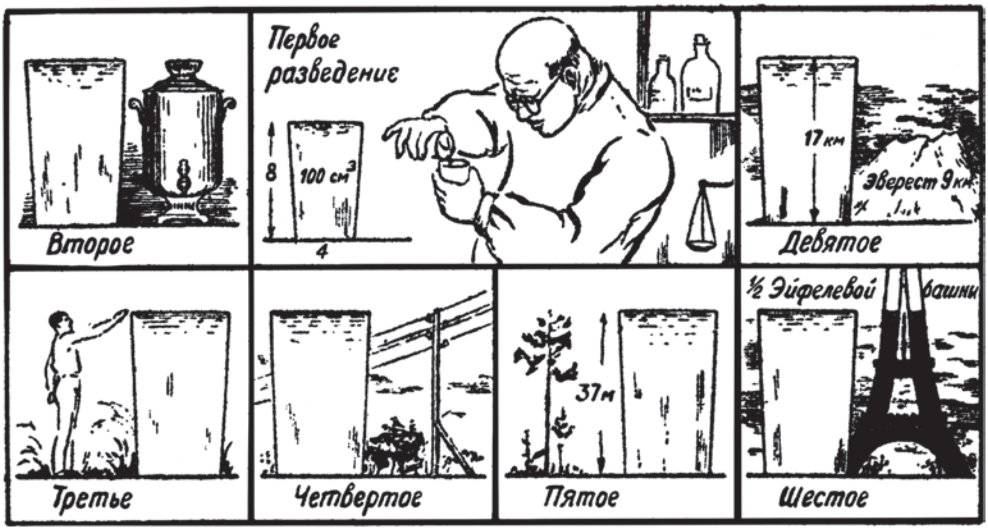
Листок бумаги разрывают пополам, полученную половину снова делят пополам и т. д. Сколько понадобится делений, чтобы получить частицы атомных размеров?

Допустим, что бумажный лист весит 1 г, и примем для веса атома величину порядка $1/10^{24}$ г. Так как в последнем выражении можно заменить $10^{24}$ приближенно равным ему выражением $2^{80}$, то ясно, что делений пополам потребуется всего 80, а вовсе не миллионы, как приходится иногда слышать в ответ на вопрос этой задачи.

---

[1] Более точное значение — $1{,}40927 \times 10^{27}$ м$^3$ (*примеч. ред.*).

[2] *Сергей Иванович Метальников* (1870–1946) — русский врач-иммунолог (*примеч. ред.*).




## НЕОБЫЧАЙНОЕ ЛЕКАРСТВО

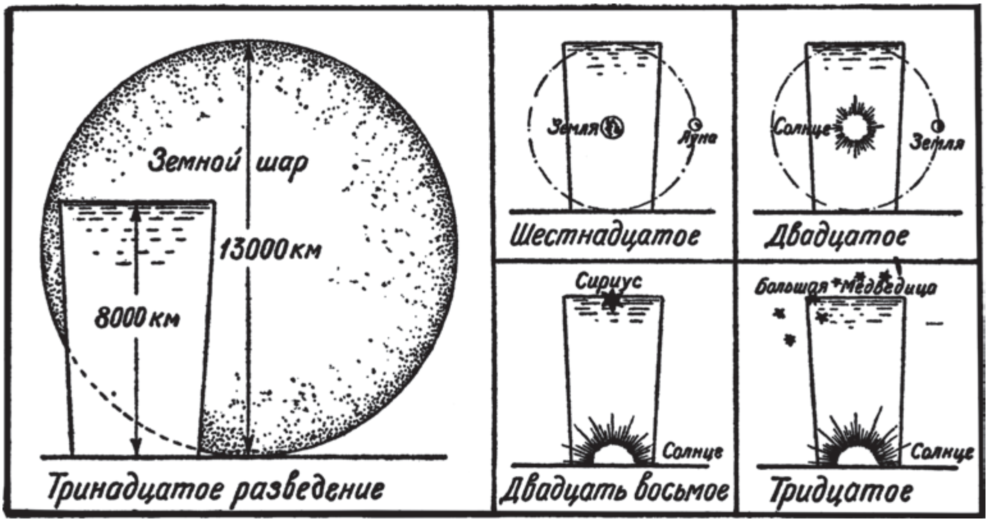
То направление в медицине, которое носит название гомеопатии, признает обычные дозы лекарств вредными и назначает лекарства только в чрезвычайно сильном разведении. Гомеопатические лекарства приготовляются так. Одну часть лекарственного настоя разбавляют в 99 равных частях чистого спирта. Сотую часть полученного раствора вновь смешивают с 99 частями спирта. То же делают с сотой долей нового разведения и т. д., повторяя эту операцию от 18 до 30 раз, Для лечения, например, коклюша настой росянки (Drosera) разбавляют в спирту тридцатью сейчас описанными приемами.

Надо думать, что, назначая подобные дозы лекарств, гомеопаты никогда не пытались математически осознать то, что они делают. Потому что, если подойти к гомеопатическим разведениям с надлежащим расчетом, то обнаружится совершенно неожиданная вещь. Займемся таким вычислением; оно как раз и относится к настоящему разделу нашей книги.

Пусть количество первоначального лекарственного настоя равнялось 100 см³. В гомеопатической аптеке берут 1 сантиметровый кубик настоя и смешивают с 99 кубиками чистого спирта. Получают 100 кубиков раствора, в котором содержится 1 кубик лекарства. Иначе говоря, лекарство разбавлено в 100 раз.

Далее берут 1 см³ этого разбавленного лекарства и смешивают с 99 см³ чистого спирта, т. е. разбавляют снова в 100 раз. Но в новом растворе на 100 см³ жидкости приходится уже только 0,01 см³ первоначального настоя. Следовательно, здесь степень разбавления $0{,}01 \times 0{,}01 = 0{,}0001$, или $1/10^4$.

После третьей подобной же операции первоначальный раствор разбавляется в $100^3$, т. е. в $10^6$; после четвертой — в $10^8$ раз и т. д.




Наконец, после 30-й операции (столько их предписано для лекарства против коклюша) первоначальный настой окажется разбавленным в $10^{60}$ раз. Это значит, что 1 $см^3$ настоя словно влит в $10^{60}$ $см^3$ спирта.

Пока мы видим лишь «астрономическое число», но не подозреваем, что оно означает. Дело предстанет перед нами в новом свете, если сопоставим это число с числом молекул в 1 $см^3$ первоначального лекарства. Физика утверждает (имея на то вполне достаточные основания[1]), что число молекул в 1 $см^3$ настоя порядка $10^{22}$. Иными словами, в объеме $10^{60}$ $см^3$ разбавленной жидкости содержится «только» $10^{22}$ молекул лекарственного вещества, — по одной молекуле на каждые $10^{60} : 10^{22} = 10^{38}$ $см^3$.

Что же это за объем $10^{38}$ $см^3$, содержащий одну молекулу лекарства? Сделаем расчет. В кубическом километре $10^{15}$ $см^3$. Значит, $10^{38}$ $см^3$ заключают в себе $км^3$

$$10^{38} : 10^{15} = 10^{23}.$$

Заглядываем в астрономический справочник и ищем подходящие объемы. Находим, что объем земного шара, $10^{12}$ $км^3$, — микроскопическая величина по сравнению с сейчас полученной. Даже Солнце, имеющее объем $14 \times 10^{17}$ $км^3$, недостаточно велико для наглядного сравнения: оно в 70 000 раз меньше

[1] В грамм-молекуле любого вещества содержится $6{,}602 \times 10^{23}$ молекул (число Авогадро). Грамм-молекулой называется число граммов вещества, равное его молекулярному весу. Грамм-молекула этилового спирта ($C_2H_6O$) весит $12 \times 2 + 6 + 16 = 46$ граммов. Значит, в одном грамме спирта содержится молекул

$$6{,}602 : 10^{23} : 46 \approx 1{,}5 \times 10^{22},$$

а в кубическом сантиметре — около $1{,}2 \times 10^{22}$ (*примеч. ред.*).

того объема раствора, который содержит в себе одну-единственную молекулу лекарственного вещества.

Возвращаясь от астрономии к медицине, приходим к такому выводу. Если признать, что 1 молекула росянкового настоя способна излечить коклюш, то больной должен для своего исцеления проглотить 70 тысяч пилюль, каждая величиной с Солнце, — порция для детского возраста несомненно чрезмерная...

После сказанного естественно поставить вопрос: что же содержат в себе пилюли гомеопатических аптек? Очевидно, все что угодно, только не лекарственное вещество. Легко рассчитать, что уже после 11-го разведения, когда 1 $см^3$ первоначального настоя разбавился на $10^{22}$ раз, в стакане жидкости окажется всего только одна молекула лекарства. Остальные 19 разведений будут состоять уже из чистого спирта, без лекарственного вещества. Ведь, беря из склянки (100 $см^3$) 1 $см^3$, едва ли посчастливится извлечь как раз тот кубик, в котором затеряна наша единственная молекула. 99 шансов против и только один — за. И уже во всяком случае так не будет 19 раз кряду; можно поручиться, что до 30-го разведения *ни одна молекула лекарственного вещества не дойдет*[1].

Раньше было замечено, что гомеопаты никогда не отдают себе отчета в математической стороне своих операций. Это не вполне верно. Русский химик А. М. Бутлеров, принадлежавший к сторонникам гомеопатии, ясно сознавал астрономическую огромность того количества спирта, в котором разводится гомеопатическое лекарство. В одной из его статей читаем:


[1] Автором этого поучительного расчета является не кто иной, как всемирно известный датский физик Нильс Бор.

«Хотя все знают, что гомеопатические лекарства употребляются часто в больших разжижениях, но далеко не все имеют ясное представление, о каких именно величинах идет здесь речь... При каждом разжижении количество вещества делится на 10. Поэтому в сотом разжижении на 1 мм$^3$ первоначальной лекарственной тинктуры приходится такое количество алкоголя, которое, представленное в мм$^3$, выражается цифрой, имеющей после себя сто нулей. Если представить себе всю эту массу жидкости в форме куба, то единица и 30 нулей выразят в метрах величину ребра куба... Простой расчет показывает, что в квинтиллионе метров содержится около 10 триллионов солнечных расстояний и около 7 биллионов расстояний от Земли до Сириуса[1]... Если же взять двухтысячное разведение, то, выражая величину ребра куба жидкости в расстояниях Сириуса, мы имели бы цифру, заключающую не менее 646 знаков».

Это не мешало нашему химику с доверием относиться к сообщению, что «поваренная соль обнаруживает главный максимум действия в двухтысячном разведении».

Чудовищное разведение не смущало сторонников гомеопатии и не ослабляло их веры в действие лекарств потому, что они, не зная числа молекул в 1 см$^3$, ссылались на факт поглощения энергии материей при переходе в более тонкое состояние. «Образование воды из льда, пара из воды сопровождается поглощением тепла; пар является, так сказать, резервуаром „энергии“» (Бутлеров). Но все подобные соображения, каковы бы они ни были, начисто отпадают, когда в пилюле нет буквально ни одной молекулы лекарственного вещества!

Изложенные здесь критические соображения направлены не против гомеопатии в целом, а лишь против веры в действие тех лекарств, при изготовлении которых лекарственное вещество дробится на число частей, превышающих число содержащихся в нем молекул.

## ЧЕТЫРЬМЯ ЕДИНИЦАМИ

### Задача

Четырьмя единицами, не употребляя никаких знаков математических действий, написать возможно большее число.

### Решение

Естественно приходящее на ум решение – 1111 – не отвечает требованию задачи, так как число

$$11^{11}$$

[1] Бутлеров использует в своих рассуждениях систему наименования чисел с длинной шкалой (см. табл. на с. 116) (*примеч. ред.*).

во много раз больше. Вычислять это число десятикратным умножением на 11 едва ли у кого хватит терпения. Но можно определить его величину гораздо быстрее — с помощью логарифмических таблиц. Число это превышает 285 миллиардов и, следовательно, больше числа 1111 в 25 млн. раз.

## ТРЕМЯ ДВОЙКАМИ

Всем, вероятно, известно, как следует написать три цифры, чтобы изобразить ими возможно большее число[1]. Надо взять три девятки и расположить их так:

$$9^{9^{9}},$$

т. е. написать третью «сверхстепень» от 9. [2]

Число это столь чудовищно велико, что никакие сравнения не помогают уяснить себе его грандиозность. Число электронов видимой Вселенной ничтожно по сравнению с ним. В моей «Занимательной арифметике» уже говорилось об этом. Возвращаюсь к этой задаче лишь потому, что хочу предложить здесь по ее образцу другую:

Тремя двойками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

**Решение**

Под свежим впечатлением трехъярусного расположения девяток, вы, вероятно, готовы дать и двойкам такое же расположение:

$$2^{2^{2}}.$$

Однако на этот раз ожидаемого эффекта не получается. Написанное так число довольно мизерно, — меньше даже, чем ординарное 222. В самом деле: ведь мы написали всего лишь $2^4$, т. е. 16.

Подлинно наибольшее число из трех двоек не 222 и не $22^2$ (т. е. 484), а

$$2^{22} = 4\ 194\ 304.$$

Пример очень поучителен. Он показывает, что в математике опасно поступать по аналогии; она легко может повести к ошибочным заключениям.

---

[1] См. задачу № 63 на с. 129 (*примеч. ред.*).

[2] Алгебраический символ для третьей сверхстепени 9 таков: $9^{(3)}$, для четвертой сверхстепени 2-х: $2^{(4)}$ и т. д.

## ТРЕМЯ ТРОЙКАМИ

**Задача**

Теперь, вероятно, вы осмотрительнее приступите к решению следующей задачи.

Тремя тройками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

**Решение**

Трехъярусное расположение и здесь не приводит к ожидаемому эффекту, так как

$$3^{3^{3}},$$

т. е. $3^{27}$, меньше, чем $3^{33}$.

Последнее расположение и дает ответ на вопрос задачи.

## ТРЕМЯ ЧЕТВЕРКАМИ

**Задача**

Тремя четверками, не употребляя знаков действий, написать возможно большее число.

**Решение**

Если в данном случае вы поступите по образцу сейчас рассмотренных двух задач, т. е. дадите ответ

$$4^{44},$$

то промахнетесь, потому что на этот раз трехъярусное расположение

$$4^{4^{4}}$$

как раз дает большее число. В самом деле, $4^4 = 256$, а $4^{256}$ больше, чем $4^{44}$.

## ТРЕМЯ ОДИНАКОВЫМИ ЦИФРАМИ

Попытаемся углубиться в это озадачивающее явление и установить, почему одни цифры порождают числовые исполины при трехъярусном расположении, другие – нет. Рассмотрим общий случай.

Тремя *одинаковыми цифрами*, не употребляя знаков действий, изобразить возможно большее число. Обозначим цифру буквой *а*. Расположению

$$2^{22}, 3^{33}, 4^{44}$$

соответствует написание

$$a^{10a+a}, \text{ т. е. } a^{11a}.$$

Расположение же трехъярусное представится в общем виде так:

$$a^{a^{a}}.$$

Определим, при каком значении $a$ последнее расположение изображает большее число, нежели первое. Так как оба выражения представляют степени с равными целыми основаниями, то бóльшая величина отвечает большему показателю. Когда же

$$a^a > 11a?$$

Разделим обе части неравенства на $a$. Получим:

$$a^{a-1} > 11.$$

Легко видеть, что $a^{a-1}$ больше 11 только при условии, что $a$ больше 3, потому что

$$4^{4-1} > 11,$$

между тем как степени

$$3^2 \text{ и } 2^1$$

меньше 11.

Теперь понятны те неожиданности, с которыми мы сталкивались при решении предыдущих задач: для двоек и троек надо было брать одно расположение, для четверок и более – другое.

## ЧЕТЫРЬМЯ ДВОЙКАМИ

### Задача

Сделаем следующий шаг в развитии задач рассматриваемого рода и поставим наш вопрос для четырех одинаковых цифр, именно для двоек:

При каком расположении четыре двойки изображают наибольшее число?

### Решение

Возможны 8 комбинаций:

$$2222,\ 222^2,\ 22^{22},\ 2^{222},$$
$$22^{2^2},\ 2^{22^2},\ 2^{2^{22}},\ 2^{2^{2^2}}.$$

Какое же из этих чисел наибольшее?

Займемся сначала верхним рядом, т. е. числами в двухъярусном расположении. Первое — 2222 — очевидно меньше трех прочих. Чтобы сравнить следующие два —

$$222^2 \text{ и } 22^{22},$$

преобразуем второе из них:

$$22^{22} = 22^{2 \times 11} = (22^2)^{11} = 484^{11}.$$

Последнее число больше, нежели $222^2$, так как и основание, и показатель у степени $484^{11}$ больше, чем у степени $222^2$.

Сравним теперь $22^{22}$ с четвертым числом первой строки — с $2^{222}$. Заменим $22^{22}$ бóльшим числом $32^{22}$ и покажем, что даже это большее число уступает по величине числу $2^{222}$.

В самом деле,

$$32^{22} = (2^5)^{22} = 2^{110}$$

— степень меньшая, нежели $2^{222}$.

Итак, наибольшее число верхней строки — $2^{222}$.

Теперь нам остается сравнить между собой пять чисел – сейчас полученное и следующие четыре:

$$22^{2^2},\ 2^{22^2},\ 2^{2^{22}},\ 2^{2^{2^2}}.$$

Последнее число, равное всего $2^{16}$, сразу выбывает из состязания. Далее, первое число этого ряда, равное $22^4$ и меньшее, чем $32^4$ или $2^{20}$, меньше каждого из двух следующих. Подлежат сравнению, следовательно, три числа, каждое из которых есть степень 2. Больше, очевидно, та степень 2, показатель которой больше. Но из трех показателей

$$222,\ 484 \text{ и } 2^{20+2}\ (= 2^{10 \times 2} \times 2^2 \approx 10^6 \times 4)$$

последний — явно наибольший.

Поэтому наибольшее число, какое можно изобразить четырьмя двойками, таково:

$$2^{2^{22}}.$$

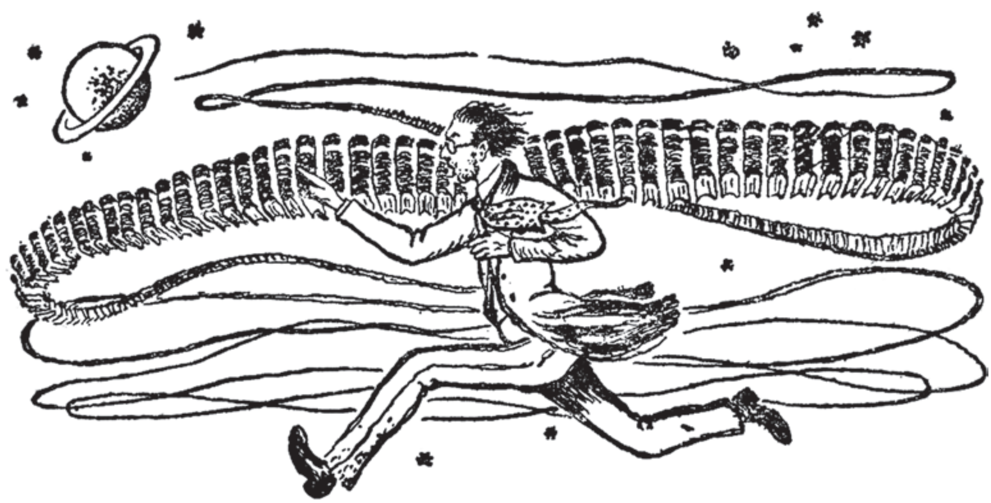
Не обращаясь к услугам логарифмических таблиц, мы можем составить себе приблизительное представление о величине этого числа, пользуясь приближенным равенством

$$2^{10} \approx 1000.$$

В самом деле,

$$2^{22} = 2^{20} \times 2^{2} \approx 4 \times 10^{6},$$
$$2^{2^{22}} \approx 2^{4\,000\,000} > 10^{1\,200\,000}.$$

Итак, в этом числе — свыше миллиона цифр.



## МЫСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ

Испанский философ XIII в. Раймонд Люллий придумал способ автоматически выводить из общих понятий всевозможные истины. Поясним своеобразный ход его рассуждений на примере. Возьмем понятие «золото» и ряд понятий, обозначающих цвета: синий, зеленый, желтый, красный, белый, черный и т. д. Будем сочетать понятие «золото» последовательно со всеми понятиями цвета. Получим ряд положений:

золото — синее, золото — красное, золото — желтое, золото — белое и т. д.

В этом перечне, составленном чисто механическим путем, должно заключаться (если список цветов был полон) среди других также и истинное утверждение о цвете золота. Будь цвет золота нам неизвестен, мы могли бы его узнать, не исследуя вовсе самого металла, — если бы только сумели выудить единственно правильное утверждение из перечня остальных, неверных. Люллий был глубоко убежден, что, сочетая понятие «золото» также с другими понятиями (помимо цвета), удастся путем перекрестного сопоставления различных перечней безошибочно обнаружить в них истинные утверждения. Этот воображаемый метод открывать истины путем автоматического анализа понятий Люллий называл своим «великим искусством».

Этот испанский ученый придумал даже механический прибор для облегчения подобных умственных операций. Прибор состоял из нескольких подвижных концентрических кругов, разделенных радиальными линиями на отделения, в которых обозначались общие понятия. Вследствие концентричности кругов подразделения каждого из них занимали определенное положение относительно подразделений прочих кругов, а вращая круги, можно было получать множество новых сочетаний.


*Рис. 1*

Рис. 1 воспроизводит одну из моделей Люллиевой вертушки. Видны три круга, один внутри другого, вращающиеся около общего центра *T*. На краях наружного круга 9 букв *BEHCF*... означают некоторые общие понятия; в 9 отделениях средней кольцевой полосы помещался другой ряд понятий, и, наконец, на третьем, внутреннем круге возле углов девятиконечной звезды размещался еще третий ряд понятий. Ясно, что, поворачивая круги, можно создать всевозможные комбинации этих групп понятий. Общее число их нетрудно подсчитать:

$$3^9 = 19683.$$

В наши дни с трудом верится, что подобная игрушка могла глубоко волновать умы той сумрачной эпохи. Но не забудем, что Люллий жил в век религиозных и всяких иных суеверий. Радужные надежды, которые изобретатель возлагал на свою вертушку, нашли отклик в сердцах современников и горячо разделялись «ученым миром» его эпохи. Многие прониклись радостным убеждением, что «великое искусство» Люллия открывает прямой путь к быстрому разрешению всех проблем науки, всех загадок бытия, всех тайн земли и неба. С необычайным рвением принялись испытывать «искусство» Люллия. Философы, астрологи, алхимики искали с помощью вертушки разрешения занимавших их вопросов. Все единодушно считали Люллия величайшим ученым эпохи и слепо верили в его учение.

Целое столетие держалось увлечение мыслительной рулеткой, прежде чем передовые умы постигли простую мысль, что эта бесплодная затея не может оправдать возлагаемых на нее надежд. Остановка была за малым: не удавалось найти способа извлекать жемчужины истины из того океана бессмыслицы, которым затопляла человеческие умы вертушка испанского философа. Умственная эпидемия ослабела, машинка Люллия утратила приверженцев, и люди постепенно обратились к единственно верному пути познания мира, основанному на терпеливом исследовании самой природы.

Однако идея Люллия в том или ином виде находила и впоследствии отдельных сторонников. Среди них были и великие мыслители. Джордано Бруно (XVI в.), например, долго пытался извлечь здоровое ядро из учения средневекового философа, много размышляя о его мыслительной вертушке, произносил на эту тему публичные речи, но постепенно пришел к мысли, что возможная польза изобретения Люллия весьма сомнительна и сводится лишь к некоторому облегчению памяти. Столь же безрезультатно занимался «вертушкой понятий» и Афанасий Кирхнер, ученый XVII в.

Мало кому известно (биографы почти не касаются этого), что и такой могучий ум, как Лейбниц, много размышлял над вертушкой Люллия. Но для этого философа и великого математика увлечение идеей механизации мысли не прошло бесследно: в результате он изобрел счетную машину (1671 г.), более совершенную, нежели та, которая двадцатью годами раньше была придумана Паскалем.

Прямой логической связи между вертушкой Люллия и счетной машиной в сущности нет. Идеи, положенные в их основу, скорее противоположны. Машинка Люллия дает всевозможные сочетания, которые все, кроме одного, неверны. В счетной машине, наоборот, появляется только та единственно верная комбинация, которую машинка Люллия бессильна отыскать. Некоторого внешнего сходства между обоими приборами оказалось достаточным, чтобы натолкнуть мысль Лейбница на правильный путь и помочь ему сделать полезное изобретение из бесплодной идеи. Машины для автоматического решения уравнений (мы будем говорить о них дальше) тоже имеют с вертушкой Люллия лишь чисто наружное сходство[1].

[1] То же относится и к так называемой «логической машине» Джевонса.

В эпоху Свифта, 200 лет назад, увлечение мыслительными машинами было, очевидно, еще очень сильно, потому что автор «Путешествий Гулливера» высмеял эту идею в своей бессмертной сатире. В той части, где повествуется о путешествии в Лапуту, находим следующее место, посвященное мыслительной машине:

«Мы зашли во второе отделение Академии. Первый из профессоров, с которым мне пришлось познакомиться, восседал в большой комнате, окруженный 40 студентами. Заметив, что я внимательно рассматриваю стоячую раму, занимавшую бóльшую часть комнаты, он сказал:

— Быть может, вас удивит, что, будучи специалистом по выработке и усовершенствованию отвлеченных знаний, я намерен достичь этой цели посредством механического аппарата. Но мир скоро оценит всю целесообразность моего проекта, и я даже уверен, что никогда еще доселе не зарождалось в мозгу человеческом столь гениальной идеи. Известно, как трудно изучение наук и искусств по общепринятому методу; но едва войдет во всеобщее употребление мой механический аппарат, — самый невежественный человек получит возможность писать всякие книги: философские и юридические трактаты, сочинения по богословию и математике, политические памфлеты и даже стихи, ибо, чтобы сочинять книги, не понадобится тогда ни учености, ни таланта.

С этими словами профессор подвел меня к раме, по бокам которой стояли рядом его ученики. Рама была квадратной формы и имела 20 футов в длину и высоту. По всей раме, от края до края, были натянуты проволоки с нанизанными на них кубиками, в среднем величиной с игральную кость. На сторонах каждого кубика были написаны слова лапутского языка во всех их грамматических формах – временах, наклонениях, падежах, – но без всякой системы. По команде профессора 40 студентов взялись за 40 рукояток по краям рамы, повернули их на один оборот — и расположение слов в раме совершенно изменилось. Профессор приказал 36 студентам прочесть про себя все слова, появившиеся в раме, и когда из них составлялась осмысленная фраза, диктовать ее четырем прочим студентам. Эту манипуляцию проделали раза четыре, — и всякий раз в раме получались новые комбинации слов.

Студенты занимались этой работой по шести часов в день, и профессор показал мне несколько фолиантов, составленных из фраз, которые появлялись на деревяшках. Он намеревался рассортировать этот богатый материал, подобрать по предметам и таким образом обогатить мир полной библиотекой книг по всем отраслям знания. Его работа, говорил он, была бы успешнее, если бы имелись средства на сооружение 500 таких машин и все заведующие машинами работали бы сообща».

---

[*Уильям Стэнли Джевонс* (1835–1882) английский философ-логик и экономист (*примеч. ред.*).]

## ЛИТЕРАТУРНЫЙ АВТОМАТ[1]

Легко вообразить себе буквопечатающий механизм наподобие общеупотребительного нумератора, который последовательно печатает все сочетания, возможные при наборе текста из 1000 букв. Когда работа будет выполнена, т. е. будут целиком исчерпаны все возможные комбинации букв, мы отбросим бессмысленные сочетания, и у нас в руках очутятся все литературные отрывки, какие мыслимо написать тысячей литер. А именно: по отдельным страницам, по полустраницам будем мы иметь все, что когда-либо было написано и когда-либо будет написано в прозе, в стихах на русском и на всех существующих и будущих языках (потому что любое иностранное слово можно ведь передать буквами русского алфавита). Все романы и рассказы, все научные сочинения и доклады, все журнальные и газетные статьи и известия, все стихотворения, все разговоры, когда-либо слышанные всеми прежде жившими людьми, и все то, что еще предстоит передумать и высказать людям грядущих поколений...

Самый механизм можно представить себе осуществленным примерно в таком виде. Вообразите шестеренку, на ободе которой помещается 100 различных литер. Пусть высота и ширина одной литеры 2 мм. Окружность шестеренки в 2 × 100, т. е. в 200 мм, имеет диаметр меньше 7 см. Толщина шестеренки может быть немного шире литеры — пусть в 4 мм. Вообразим 1000 таких шестеренок, насаженных рядом на одну общую ось. Получим вал длиною 4 м и толщиною 7 см. Шестеренки соединены между собой так, как это делается в нумераторах и в счетных машинах, а именно: при полном повороте первой шестеренки вторая повертывается на одну литеру, при полном повороте второй — третья повертывается на одну литеру, и так до последней 1000-й шестеренки. Валик покрывается типографской краской и делает оттиски на длинной, 4-метровой бумажной полосе. Таково устройство машины.

Как же она работает? Шестеренки вращаются последовательно. Сначала начинает вращаться первая и дает на бумаге оттиски своих литер, — это первые 100 «литературных произведений» из категории бессмысленных. Когда она обернется один раз, она вовлекает во вращение вторую шестеренку: та повертывается на одну литеру и остается в этом положении, пока первая продолжает вращаться; получим еще 100 оттисков, теперь уже из двух букв. После 100 таких оборотов вторая шестеренка повертывается еще на одну литеру, опять обе дают 100 новых оттисков, и т. д. Когда же и вторая сделает полный оборот, присоединяется третья шестеренка; получаются всевозможные оттиски из трех литер. И так далее, пока не дойдет очередь до последней,

[1] См. также статью на с. 552. Здесь и далее аналогичные статьи, включенные Я. П. в разные издания свих книг в переработанном или неизменном виде, даются в настоящем сборнике без купюр и без дополнительных комментариев (*примеч. ред.*).

1000-й шестеренки. Когда 1000-я шестеренка сделает полный оборот, все возможные комбинации в 1000 литер будут исчерпаны, и останется лишь работа по разборке оттисков.

Мы нарочно остановились на подробностях конструкции машины, чтобы придать проекту бóльшую конкретность и убедительность. Действительно, на первый взгляд проект кажется вполне осуществимым. Однако несложный расчет обнаруживает его несбыточность. Пусть первая шестеренка вертится с быстротой 30 000 оборотов в минуту — самой большой, достижимой в современной технике. Первые несколько шестеренок будут вступать в работу спустя секунды и минуты одна после другой. Но нетрудно вычислить, что следующие шестеренки будут запаздывать все более и более. Вот расчет:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2-я шестерня вступит в работу, когда первая сделает 1 оборот; | | | | | |
| 3-я — когда первая сделает 100 оборотов; | | | | | |
| 4-я — | » | » | » | $100^2$ | » |
| 5-я — | » | » | » | $100^3$ | » |
| *n*-я — | » | » | » | $100^{n-2}$ | » |

Отсюда устанавливаем, что n-я шестерня вступит в работу спустя

$$\frac{100^{n-2}}{30\,000} \text{ мин, т. е. } 2 \times 10^{2n-7} \text{ сек.}$$

Легко рассчитать, что 10-я шестерня ($n = 10$) начнет работать через 6 400 000 лет, а тысячная ($n = 1000$) спустя

$$2 \times 10^{2000-7} = 2 \times 10^{1993} \text{ сек.} = 7 \times 10^{1985} \text{ лет.}$$

Число, состоящее из 1986 цифр!

Ясно, что все звезды успеют погаснуть миллион раз, прежде чем начнет работать последняя шестеренка, и труд машины будет вполне закончен. Не говорим уже о том, что во Вселенной не хватит материала для всех оттисков.

Ведь в доступной нашему исследованию Вселенной не более $10^{77}$ электронов[1] и протонов; значит, даже если бы каждый оттиск состоял из одного электрона, можно было бы отпечатать лишь ничтожную долю всей продукции «литературной машины». Перерабатывать старые оттиски вновь на бумагу? Но допуская даже при этом ничтожнейшую потерю материи в 1 миллиардную долю, мы должны были бы иметь — считая снова по электрону на оттиск — число оттисков из 1767 цифр; между тем число электронов и протонов содержит всего 74 цифры...

---

[1] По Шепли.

[*Харлоу Шепли* (1885–1972) — американский астроном (*примеч. ред.*).]

Можно возразить, пожалуй, что незачем ждать окончания работы «литературной машины»: шедевры литературы и замечательные открытия могут случайно оказаться среди первого миллиона оттисков. При невообразимо огромном числе возможных сочетаний эта вероятность более ничтожна, чем вероятность случайно наткнуться на один определенный электрон среди всех электронов Вселенной. Число электронов во Вселенной неизмеримо меньше, чем общее число миллионов возможных оттисков нашей машины.

Но пусть даже осуществилось несбыточное, пусть случилось чудо, и в наших руках имеется сообщение о научном открытии, появившееся из-под машины без участия творческой мысли. Сможем ли мы этим открытием воспользоваться?

Нет, мы даже не сможем признать это открытие. Ведь у нас не будет критерия, который позволил бы нам отличить истинное открытие от многих мнимых, столь же авторитетно возвещаемых в процессе работы нашей машины. Пусть, в самом деле, машина дала нам отчет о превращении ртути в золото. Наряду с правильным описанием этого открытия будет столько же шансов иметь множество неправильных его описаний, а кроме того описаний и таких процессов, как превращение меди в золото, марганца в золото, кальция в золото и т. д. Оттиск, утверждающий, что превращение ртути в золото достигается при высокой температуре, ничем не отличается от оттиска, предписывающего прибегнуть к низкой температуре, причем могут существовать варианты оттисков с указанием всех температур от минус 273 до плюс бесконечность. С равным успехом могут появиться из-под машины указания на необходимость пользоваться высоким давлением (тысячи вариантов), электризацией (опять тысячи вариантов), разными кислотами (снова тысячи и тысячи вариантов) и т. п.

Как при таких условиях отличить подлинное открытие от мнимого? Пришлось бы тщательно проверять на опыте каждое указание (кроме, конечно, явно нелепых), т. е. проделать такую огромную лабораторную работу, которая совершенно обесценила бы всю экономичность идеи «литературной машины».

Точно так же пришлось бы проделать обширные исторические изыскания, чтобы проверить правильность каждого исторического факта, утверждаемого каким-нибудь продуктом механического производства открытий. Словом, подобный механический способ двигать науку вперед был бы совершенно бесполезен, даже если бы и удалось дождаться осмысленного оттиска.

Поучителен следующий расчет французского математика Бореля (в книге «Случай»): вероятность выпадения орла 1000 раз подряд при игре в орлянку определяется одним шансом из $2^{1000}$. Так как число $2^{1000}$ содержит около 300 цифр, то этот шанс приблизительно таков же, как и шанс получить две первых строки определенного стихотворения, вынимая наудачу буквы по следующему способу: в шапке 25 букв, одна из них вынимается, записывается и кладется обратно в шапку; после встряхивания вынимается вторая и т. д. Строго говоря, получить таким образом две первых строки определенного стихотворения вполне возможно. «Однако, — справедливо замечает Борель, — это представляется нам до такой степени маловероятным, что если бы подобный опыт удался на наших глазах, мы считали бы это плутовством».

Читателю, вероятно, интересно будет познакомиться с теми соображениями, которые высказаны были по поводу литературного автомата проф. О. Д. Хвольсоном[1]. Покойный физик заинтересовался этой задачей, когда она предложена была мною (в 1924 г.) на страницах вечерней газеты, и изложил свои мысли в остроумном сообщении, присланном в редакцию. Вот несколько выдержек из этого письма:

«Весьма любопытно, до какой степени ничтожными сравнительно с числом $N$ (т. е. числом сочетаний из 100 литер, возможных при наборе текста в 1000 букв) представляются самые чудовищные числа, которые только можно придумать, но которые относились бы к физическому миру. Если число $N$ разделить на эти чудовищные числа, то оно для нас еле заметно меняется. Приведем примеры.

1. В одном кубическом сантиметре воздуха находится примерно $2{,}7 \times 10^{19}$ молекул. Если из сосуда, содержащего это число молекул, выпускать каждую секунду по одному миллиону частиц, то весь сосуд опорожнится через один миллион лет! Легко вычислить, что вся земная атмосфера содержит около $10^{44}$ молекул. Надо взять $10^{1956}$ земных атмосфер, чтобы в них заключалось $N$ молекул ($N = 10^{2000}$). Для нас числа $10^{1956}$ и $10^{2000}$ не отличаются заметно.

2. Число атомов, из которых состоит земной шар, можно принять равным $10^{50}$. Это число надо 40 раз помножить на себя, чтобы получить число $N$. Надо взять $10^{1950}$ таких тел, как Земля, чтобы число их атомов равнялось числу $N$ сочетаний.

3. Вообразим шар, радиус которого так велик, что свету, который проходит 300 000 километров в одну секунду, требуется десять миллионов лет, чтобы пройти от центра шара до его поверхности, которая охватывает отдаленнейшие звездные скопления (если центр находится в Земле). Представим себе, что весь этот шар наполнен таким воздухом, каким мы окружены на поверхности Земли. В этом шаре будут находиться только $10^{95}$ молекул. Надо взять $10^{1905}$ таких шаров, наполненных воздухом, чтобы число молекул в них равнялось числу $N$ сочетаний, которые должна произвести литературная машина.

Оставаясь в мире физическом, мы даже при помощи пылкой фантазии не можем чувствительно для нас уменьшить число $N$.

Совсем другая картина получается, если из мира физического мы перейдем к символам математическим.

---

[1] *Орест Данилович Хвольсон* (1852–1934) — российский и советский физик, педагог, изобретатель, автор пятитомного «Курса физики», а также научных работ по магнетизму, теплопроводности, диффузии света и др. Именно О. Д. Хвольсон вдохновил Я. П. на его многолетнюю писательскую деятельность (*примеч. ред.*).

Всем известен вопрос: какое самое большое число можно написать из трех цифр без других математических знаков? Ответ: это число

$$M = 9^{9^{9}}$$

Число это состоит приблизительно из десяти миллионов цифр[1], между тем как наше число $N$ имеет всего «только» 2000 цифр. Зато число

$$5^{5^{5}}$$

содержит только 2188 цифр, так что оно получится, если к числу $N$ приписать только 188 нулей.

Возвратимся еще раз к нашей литературной машине. Среди „литературных произведений", которые она дает, окажутся некоторые весьма курьезные. Сотня „произведений" будет состоять из 1000 одинаковых букв или 1000 одинаковых знаков препинания. Далее, более $10^{1000}$ произведений будет состоять из одних знаков препинания, а свыше $10^{300}$ будет состоять из одних восклицательных и вопросительных знаков».

## МУЗЫКАЛЬНЫЙ СПОР

В общежитии московского Метростроя возник однажды горячий спор на музыкальную тему. Поводом послужило неожиданное утверждение одной из обитательниц, что «композиционные возможности в музыке сильно ограничены, и чем дальше, тем больше будет музыкальных плагиатов. Число колебаний, воспринимаемых нашим ухом, ограничено. А раз ограничено число звуков, то ограничено и число комбинаций, какие можно из них составить, так что в конце концов не услышишь ни одной безусловно новой мелодии».

Не придя к единодушному решению спора, метростроевцы отправили мне письмо с просьбою разобрать вопрос. Задача не сложна. В той постановке, какую придали вопросу метростроевцы, слишком очевидно, что число комбинаций из всех доступных человеческому слуху тонов хотя и ограничено, но неимоверно огромно — практически бесконечно.

Возможен, однако, и иной подход к той же теме. Один из моих читателей поделился со мной любопытными соображениями на этот счет, сводящимися к следующему. Основную мелодию музыкального произведения всегда можно исполнить на рояли одним пальцем, пользуясь только тремя октавами,

[1] Более чем из 360 миллионов цифр. — *Я. П.* (См. мою «Занимательную арифметику», гл. X.)

т. е. 36 нотами. Всевозможные сочетания из этих 36 нот на протяжении, например, 10 тактов должны охватить все мотивы, состоящие из десятка тактов. Число их, конечно, ограничено, и это обстоятельство, казалось бы, должно заметно стеснять музыкальное творчество. Первый десяток тактов неизбежно должен рано или поздно повториться, и возможно, что современная музыка уже близка к исчерпанию всех комбинаций. Скоро нельзя будет придумать нового вступления; то же относится и к концам пьес; неизбежны повторения и в середине. Быть может, недалеко время, когда все основные мелодии будут исчерпаны.

С другой стороны, — прибавлю от себя — представляется заманчивая возможность создания механизма, который автоматически перебирал бы все основные мотивы, облегчая до крайности творческую работу композиторов. Вместо изобретения новых мелодий им нужно было бы лишь производить их отбор.

Но опасения музыкального кризиса, как и надежды на изобретение автомата, рассеиваются без остатка, когда приступаешь к вопросу с карандашом и бумагой. Мой корреспондент произвел следующий поучительный подсчет: он вычислил, сколько может быть различных комбинаций из 36 тонов на протяжении 8 тактов. При средней продолжительности нот в ¼ такта на протяжении 8 тактов умещается 32 ноты. Рассуждая, как в случае литературной машины, легко исчислить все комбинации.

Число их равно

$$36^{32}.$$

Приблизительно определить величину этой степени можно так:

$$36 = 9 \times 4 = 3^2 \times 2^2.$$

$$36^{32} = 3^{64} \times 2^{64} = 81^{16} \times 2^{64} \approx 80^{16} \times 2^{64} = 2^{48} \times 2^{64} \times 10^{16} =$$

$$= 2^{112} \times 10^{16} = 2^2 \times 2^{110} \times 10^{16} = 4 \times (2^{10})^{11} \times 10^{16}.$$

Принимая $2^{10} \approx 1000$, т, е. $10^3$, имеем

$$36^{32} = 4 \times 10^{33} \times 10^{16} \approx 4 \times 10^{49}$$

или, круглым числом[1], $10^{50}$. Такого числа комбинаций хватит надолго. Если бы все человечество превратилось поголовно в композиторов и ежесекундно каждый обитатель земного шара сочинял основную мелодию, то в миллион лет использовано было бы $10^{23}$ комбинаций. Такая музыкальная деятельность могла бы длиться без повторений мелодий $10^{27}$, т. е. октиллион лет.

[1] Вычисление с помощью логарифмов дает $6 \times 10^{49}$.

## СЕКРЕТ ШАХМАТНОГО АВТОМАТА

Здесь естественно возникает вопрос, хотя и далекий от алгебры, но естественно вытекающий из того, о чем сейчас идет речь. Литературная машина невозможна, автомат для сочинения мелодий бесполезен. Но вот шахматный автомат ведь существовал! Как примирить это с бесконечным числом комбинаций фигур на шахматной доске?

Дело разъясняется очень просто. Существовал не шахматный автомат, а только вера в него. Особенной популярностью пользовался автомат венгерского механика Вольфганга фон Кемпелена (1734–1804), который показывал свою машину при австрийском и русском дворах, а затем демонстрировал публично в Париже и Лондоне. Наполеон I играл с этим автоматом, уверенный, что меряется силами с машиной. В середине прошлого века знаменитый автомат попал в Америку и кончил там свое существование во время пожара в Филадельфии.

Другие автоматы шахматной игры пользовались уже не столь громкой славой. Тем не менее вера в существование подобных машин не иссякла и в позднейшее время.

В действительности ни одна шахматная машина не действовала автоматически. Внутри прятался искусный живой шахматист, который и двигал фигуры. Тот мнимый автомат, о котором мы сейчас упоминали, представлял собою объемистый ящик, заполненный сложным механизмом. На ящике имелась шахматная доска с фигурами, передвигавшимися рукой большой куклы. Перед началом игры публике давали возможность удостовериться, что внутри ящика нет ничего, кроме деталей механизма. Однако в нем оставалось достаточно места, чтобы скрыть человека небольшого роста (эту роль играли одно время знаменитые игроки Иоганн Альгайер и Вильям Льюис). Возможно, что пока публике показывали последовательно разные части ящика, спрятанный человек бесшумно перебирался в соседние отделения. Механизм же никакого участия в работе аппарата не принимал и лишь маскировал присутствие живого игрока. (Кто интересуется бóльшими подробностями, тот может обратиться к статье «История шахматного автомата» в журнале «64» за 1927 г., № 18.)

## ЧИСЛО ВОЗМОЖНЫХ ШАХМАТНЫХ ПАРТИЙ

Читатель, вероятно, пожелает познакомиться с подсчетом, хотя бы приблизительным, того числа различных партий, какие вообще могут быть сыграны на шахматной доске. Быть может, шахматному искусству реально грозит та опасность исчерпать себя, от которой обеспечена, как мы видели, музыка?

Точный подсчет в этом случае немыслим, но мы познакомим читателя с попыткой приближенно оценить величину числа возможных шахматных партий. В книге бельгийского математика М. Крайчика «Математика игр и математические развлечения», весьма разнообразной и богатой по содержанию, находим такой подсчет:

«При первом ходе белые имеют выбор из 20 ходов (16 ходов восьми пешек, каждая из которых может передвинуться на одно или на два поля, и по два хода каждого коня). На каждый ход белых черные могут ответить одним из тех же 20 ходов. Сочетая каждый ход белых с каждым ходом черных, имеем $20 \times 20 = 400$ различных партий после первого хода каждой стороны.

После первого хода число возможных ходов увеличивается. Если, например, белые сделали первый ход *e2 – e4*, они для второго хода имеют выбор из 29 ходов. В дальнейшем число возможных ходов еще больше. Один только ферзь, стоя, например, на поле *d5*, имеет выбор из 27 ходов (предполагая, что все поля, куда он может стать, свободны). Однако, ради упрощения расчета, будем держаться следующих средних чисел:

по 20 возможных ходов для обеих сторон при первых пяти ходах;
по 30 возможных ходов для обеих сторон при последующих ходах.

Примем, кроме того, что среднее число ходов нормальной партии равно 40. Тогда для числа возможных партий найдем выражение

$$(20 \times 20)^5 \times (30 \times 30)^{35}.$$

Чтобы определить приближенно величину этого выражения, пользуемся следующими преобразованиями и упрощениями:

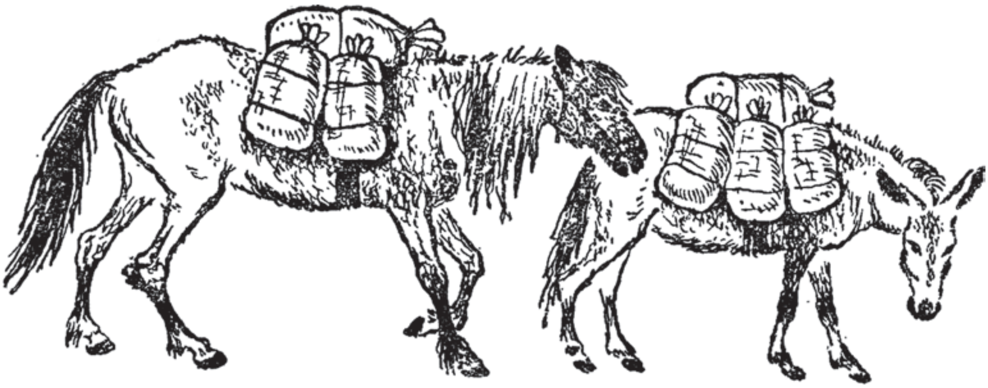
$$(20 \times 20)^5 \times (30 \times 30)^{35} = 20^{10} \times 30^{70} = 2^{10} \times 3^{70} \times 10^{80}.$$

Заменяем $2^{10}$ близким ему числом 1000, т. е. $10^3$. Выражение $3^{70}$ представляем в виде $3^{70} = 3^{68} \times 3^2 \approx 10\,(3^4)^{17} \approx 10 \times 80^{17} \approx 10 \times 8^{17} \times 10^{17} \approx 2^{51} \times 10^{18} \approx 2\,(2^{10})^5 \times$ $\times\, 10^{18} \approx 2 \times 10^{15} \times 10^{18} \approx 2 \times 10^{33}$.

Следовательно,

$$(20 \times 20)^5 \times (30 \times 30)^{35} \approx 10^3 \times 2 \times 10^{33} \times 10^{80} \approx 2 \times 10^{116}».$$

Число это оставляет далеко позади себя легендарное множество пшеничных зерен, испрошенных в награду за изобретение шахматной игры ($2^{64} - 1 \approx$ $\approx 18 \times 10^{18}$). Если бы все население земного шара круглые сутки играло в шахматы, делая ежесекундно по одному ходу, то для исчерпания всех возможных шахматных партий такая непрерывная поголовная игра должна была бы длиться не менее $10^{100}$ веков! Опасаться шахматного кризиса, как видим, не приходится.



**Глава вторая**

# ЯЗЫК АЛГЕБРЫ

## ИСКУССТВО СОСТАВЛЯТЬ УРАВНЕНИЯ

Язык алгебры — уравнения. «Чтобы решить вопрос, относящийся к числам или к отвлеченным отношениям величин, нужно лишь перевести задачу с родного языка на язык алгебраический», — писал великий Ньютон в своем учебнике алгебры, озаглавленном «Всеобщая арифметика». Как именно выполняется такой перевод с родного языка на алгебраический, Ньютон показал на примерах. Вот один из них:

| **На родном языке** | **На языке алгебры** |
|---|---|
| Купец имел некоторую сумму денег. | $x$ |
| В первый год он истратил 100 фунтов. | $x - 100$ |
| К оставшейся сумме добавил третью ее часть. | $(x - 100) + \frac{x-100}{3} = \frac{4x-400}{3}$ |
| В следующем году он вновь истратил 100 фунтов | $\frac{4x-400}{3} - 100 = \frac{4x-700}{3}$ |

| | |
|---|---|
| и увеличил оставшуюся сумму на третью ее часть. | $\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=$ $=\frac{16x-2\,800}{9}$ |
| В третьем году он опять истратил 100 фунтов. | $\frac{16x-2\,800}{9}-100=\frac{16x-3\,700}{9}$ |
| После того как он добавил к остатку третью его часть, | $\frac{16x-3\,700}{9}+\frac{16x-3\,700}{27}=$ $=\frac{64x-14\,800}{27}$ |
| капитал его стал вдвое больше первоначального. | $\frac{64x-14\,800}{27}=2x$ |

Чтобы определить первоначальный капитал купца, остается только решить последнее уравнение.

Решение уравнений – зачастую дело нетрудное; составление уравнений по данным задачи затрудняет больше. Вы видели сейчас, что искусство составлять уравнения действительно сводится к умению переводить «с родного языка на алгебраический». Но язык алгебры весьма немногословен; поэтому перевести на него удается без труда далеко не каждый оборот родной речи. Переводы попадаются различные по трудности, как убедится читатель из ряда приведенных далее примеров на составление уравнений первой степени.

## ЖИЗНЬ ДИОФАНТА

### Задача

История сохранила нам мало черт биографии замечательного древнего математика Диофанта. Все, что известно о нем, почерпнуто из надписи на его гробнице, надписи, составленной в форме математической задачи. Мы приводим далее эту надпись:

| На родном языке: | На языке алгебры: |
|---|---|
| Путник! Здесь прах погребен Диофанта. И числа поведать Могут, о чудо, сколь долог был век его жизни. | $x$ |
| Часть шестую его представляло прекрасное детство: | $\frac{x}{6}$ |

| | |
|---|---|
| Двенадцатая часть протекла<br>еще жизни — покрылся<br>Пухом тогда подбородок. | $\frac{x}{12}$ |
| Седьмую в бездетном<br>Браке провел Диофант. | $\frac{x}{7}$ |
| Прошло пятилетие; он<br>Был осчастливлен рожденьем<br>прекрасного первенца сына, | 5 |
| Коему рок половину лишь жизни<br>прекрасной и светлой<br>Дал на земле по сравненью<br>с отцом. | $\frac{x}{2}$ |
| И в печали глубокой<br>Старец земного удела конец<br>восприял, переживши<br>Года четыре с тех пор,<br>как сына лишился. | $x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4$ |
| Скажи, сколько лет жизни достигнув,<br>Смерть восприял Диофант? | |

**Решение**

Решив уравнение и найдя $x = 84$, узнаем следующие черты биографии Диофанта: он женился 21 года, стал отцом на 38-м году, потерял сына на 80-м году и умер 84 лет.

## ЛОШАДЬ И МУЛ

**Задача**

Вот еще несложная старинная задача, легко переводимая с родного языка на язык алгебры.

«Лошадь и мул шли бок о бок с тяжелой поклажей на спине. Лошадь жаловалась на свою непомерно тяжелую ношу. „Чего ты жалуешься? — отвечал ей мул. — Ведь если я возьму у тебя один мешок, ноша моя станет вдвое тяжелее твоей. А вот если бы ты сняла с моей спины один мешок, твоя поклажа стала бы одинакова с моей».

Скажите же, мудрые математики, сколько мешков несла лошадь и сколько нес мул?»

**Решение**

| | |
|---|---|
| Если я возьму у тебя один мешок, | $x - 1$ |
| ноша моя | $y + 1$ |
| станет вдвое тяжелее твоей. | $y + 1 = 2 \times (x - 1)$ |
| А если бы ты сняла с моей спины один мешок, | $y - 1$ |
| твоя поклажа | $x + 1$ |
| стала бы одинакова с моей. | $y - 1 = x + 1$ |

Мы привели задачу к системе уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{array}{l} y + 1 = 2 \times (x - 1) \\ y - 1 = x + 1 \end{array}\right\} \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ y - x = 2 \end{array}\right.$$

Решив ее, находим $x = 5$, $y = 7$. Лошадь несла 5 мешков, мул 7.

## ЧЕТВЕРО БРАТЬЕВ

**Задача**

У четырех братьев 45 рублей. Если деньги первого увеличить на 2 рубля, деньги второго уменьшить на 2 рубля, деньги третьего увеличить вдвое, а деньги четвертого уменьшить вдвое, — то у всех окажется поровну. Сколько было у каждого?

**Решение**

| | |
|---|---|
| У четырех братьев 45 руб. | $x + y + z + t = 45$ |
| Если деньги первого увеличить на 2 руб., | $x + 2$ |
| деньги второго уменьшить на 2 руб., | $y - 2$ |
| деньги третьего увеличить вдвое, | $2z$ |
| деньги четвертого уменьшить вдвое, | $\frac{t}{2}$ |

| | |
|---|---|
| то у всех окажется поровну. | $x + 2 = y - 2 = 2z = \frac{t}{2}$ |

Расчленяем второе уравнение на три отдельных:

$$x + 2 = y - 2$$
$$x + 2 = 2z$$
$$x + 2 = \frac{t}{2}$$

откуда

$$y = x + 4$$
$$z = \frac{x + 2}{2}$$
$$t = 2x + 4$$

Подставив эти значения в первое уравнение, получаем:

$$x + x + 4 + \frac{x + 2}{2} + 2x + 4 = 45,$$

откуда $x = 8$. Далее находим: $y = 12$; $z = 5$; $t = 20$. Итак, у братьев было:

8 р., 12 р., 5 р., 20 р.

## ПТИЦЫ У РЕКИ

**Задача**

У одного арабского математика XI века находим следующую задачу.

На обоих берегах реки растет по пальме, одна против другой. Высота одной 30 локтей, другой 20 локтей; расстояние между их основаниями 50 локтей.

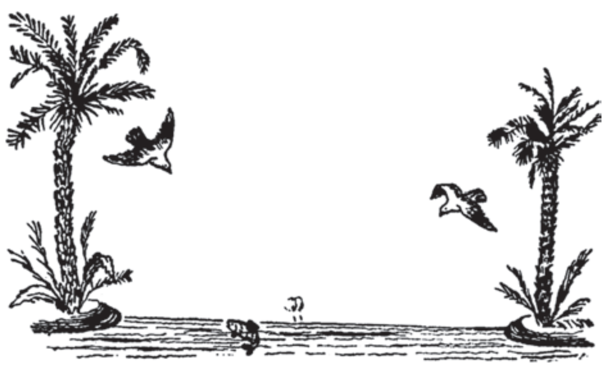


*Рис. 2*

На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно обе птицы заметили рыбу, выплывшую к поверхности воды между пальмами; они кинулись к ней разом и достигли ее одновременно (рис. 2).

В каком расстоянии от основания более высокой пальмы появилась рыба?

**Решение**

Из схематического чертежа (рис. 3), пользуясь теоремой Пифагора, устанавливаем:

$$\overline{AB}^2 = 30^2 + x^2; \qquad \overline{AC}^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

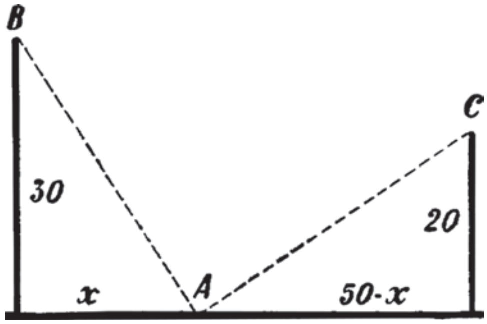



*Рис. 3*

Но $AB = AC$, так как обе птицы пролетели эти расстояния в одинаковое время. Поэтому

$$30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2.$$

Раскрыв скобки и сделав упрощения, получаем уравнение первой степени

$$100x = 2000,$$

откуда

$$x = 20.$$

Рыба появилась в 20 локтях от той пальмы, высота которой 30 локтей.

## ПРОДАЖА ЧАСОВ

**Задача первая**

Куплены двое часов за 220 руб. и затем проданы: одни с 10% прибыли, другие с 10% убытка. В общем итоге получено было 5% прибыли. Сколько заплачено порознь за часы при первоначальной покупке?

**Решение**

Обозначим искомую стоимость первых часов через $x$, тогда стоимость вторых выразится через $220 - x$.

Первые часы проданы были с прибылью в 0,1 их стоимости, т. е. за $x + 0{,}1x = 1{,}1x$; вторые проданы с убытком в 0,1 их стоимости, т. е. за $0{,}9\,(220 - x)$.

Сумма, вырученная от продажи обоих часов, на 5% больше их стоимости, т. е. составляла $220 + 0{,}05 \times 220 = 220 \times 1{,}05$. Имеем уравнение:

$$1{,}1x + 0{,}9\,(220 - x) = 220 \times 1{,}05,$$

отсюда $x = 165$; $220 - x = 55$.

Первые часы стоили 165 руб., вторые 55 руб.

**Задача вторая**

Двое часов проданы по одной цене. При продаже первых получено 20% убытка, при продаже вторых – 20% прибыли. В общем же продажа дала 5 рублей убытка. Определить себестоимость часов.

**Решение**

Здесь два неизвестных: себестоимость первых часов, которую мы обозначим через $x$, и себестоимость вторых $y$. Продажная цена первых часов $x - 0{,}2x = 0{,}8x$, вторых $y + 0{,}2y = 1{,}2y$.

Имеем уравнение

$$0{,}8x = 1{,}2y, \text{ или } 2x = 3y.$$

Так как у нас два неизвестных, то одного уравнения недостаточно для их нахождения. Составим второе, выразив в нем ту часть условия, которая не вошла в перовое уравнение, а именно, что продажа дала 5 рублей убытка:

$$(x + y) - (0{,}8x + 1{,}2y) = 5.$$

Преобразуем его:

$$\begin{gathered} x + y - 0{,}8x - 1{,}2y = 5 \\ 0{,}2x - 0{,}2y = 5 \\ 2x - 2y = 50. \end{gathered}$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x = 3y \\ 2x - 2y = 50. \end{cases}$$

Подставив во второе уравнение вместо $2x$ равную им величину $3y$, получаем

$$y = 50.$$

Легко найти теперь, что $x = 75$ руб.

Себестоимость часов 75 руб. и 50 руб.

## ПРОГУЛКА

### Задача

Следующая задача изложена одним английским писателем в беллетристической форме:

— Зайдите ко мне завтра днем на чашку чая, – сказал старый доктор своему знакомому.

— Благодарю вас. Я выйду в три часа. Может быть, и вы надумаете прогуляться, так выходите в то же время, встретимся на полпути.

— Вы забываете, что я старик, шагаю в час всего только 3 км, а вы, молодой человек, проходите при самом медленном шаге 4 км в час. Не грешно бы дать мне небольшую льготу.

— Справедливо. Так как я прохожу больше вас на 1 км в час, то, чтобы уравнять нас, дам вам этот километр, т. е. выйду на четверть часа раньше. Достаточно?

— Очень любезно с вашей стороны, — поспешил согласиться старик.

Молодой человек так и сделал: вышел из дому в три четверти третьего и шел со скоростью 4 км в час. А доктор вышел ровно в три и делал по 3 км в час. Когда они встретились, старик повернул обратно и направился домой вместе с молодым другом.

Только за чаем сообразил молодой человек, что с льготной четвертью часа вышло не совсем ладно. Он сказал доктору, что из-за этого ему придется в общем итоге пройти вдвое больше, чем доктору.

— Не вдвое, а вчетверо, — возразил доктор, и был прав.

Как далеко от дома доктора до дома его молодого знакомого?

### Решение

Обозначим расстояние между домами через $x$. Молодой человек всего прошел $2x$, а доктор вчетверо меньше, т. е. $\frac{x}{2}$ . До встречи доктор прошел половину пройденного им пути, т. е. $\frac{x}{4}$ , а молодой человек — остальное, т. е. $\frac{x}{12}$ . Свою часть пути доктор прошел в $\frac{3x}{4}$ часа, а молодой человек — в $\frac{3x}{16}$ часа, причем мы знаем, что он был в пути на ¼ часа дольше, чем доктор.

Имеем уравнение:

$$\frac{3x}{16} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4},$$

откуда $x = 2,4$ км.

От дома молодого человека до дома доктора — 2,4 км.

## ЗАДАЧА ЛЬВА ТОЛСТОГО

Известный физик А. В. Цангер в своих воспоминаний о Л. Н. Толстом рассказывает о следующей задаче, которой занимался Л. Н. Толстой:

«Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца; вторая же половина косила малый луг, на котором к вечеру еще остался участок, скошенный на другой день одним косцом за один день работы.

Сколько косцов было в артели?»

**Решение**

В этом случае, кроме главного неизвестного — числа косцов, которое мы обозначим через $x$, — приходится ввести еще и вспомогательное, именно — размер участка, скашиваемого одним косцом в 1 день; обозначим его через $y$. Хотя задача и не требует его определения, оно облегчит нам нахождение главного неизвестного.

Выразим через $x$ и $y$ площадь большего луга. Луг этот косили полдня $x$ косцов; они скосили $x \times ½ \times y = \frac{xy}{2}$.

Вторую половину дня его косила только половина артели, т. е. $\frac{x}{2}$ косцов; они скосили $\frac{x}{2} \times ½ \times y = \frac{xy}{4}$.

Так как к вечеру скошен был весь луг, то площадь его равна

$$\frac{xy}{2} + \frac{xy}{4} = \frac{3xy}{4}.$$

Выразим теперь через $x$ и $y$ площадь меньшего луга. Его полдня косили $\frac{x}{2}$ косцов и скосили площадь $\frac{x}{2} \times ½ \times y = \frac{xy}{4}$. Прибавим недокошенный участок, как раз равный $y$ (площади, скашиваемой одним косцом в 1 рабочий день), и получим площадь меньшего луга:

$$\frac{xy}{4} + y = \frac{xy + 4y}{4}.$$

Остается перевести на язык алгебры фразу: «первый луг вдвое больше второго», — и уравнение составлено:

$$\frac{3xy}{4} : \frac{xy + 4y}{4} = 2 \quad \text{или} \quad \frac{3xy}{xy + 4y} = 2$$

Сократим дробь в левой части уравнения на $y$, вспомогательное неизвестное благодаря этому исключается, и уравнение принимает вид

$$\frac{3x}{x+4} = 2 \quad \text{или} \quad 3x = 2x + 8,$$

откуда $x = 8$.

В артели было 8 косцов.

После напечатания первого издания «Занимательной алгебры» проф. А. В. Цингер прислал мне подробное и весьма интересное сообщение, касающееся этой задачи. Главный эффект задачи, по его мнению, в том, что «она совсем не алгебраическая, а арифметическая и притом крайне простая, затрудняющая только своей нешаблонной формой».

«История этой задачи такова, — продолжает проф. А. В. Цингер. — В Московском университете на математическом факультете в те времена, когда там учились мой отец и мой дядя И. И. Раевский (близкий друг Л. Толстого), среди прочих предметов преподавалось нечто вроде педагогики. Для этой цели студенты должны были посещать отведенную для университета городскую народную школу и там в сотрудничестве с опытными искусными учителями упражняться в преподавании. Среди товарищей Цингера и Раевского был некий студент Петров, по рассказам — чрезвычайно одаренный и оригинальный человек. Этот Петров (умерший очень молодым, кажется, от чахотки) утверждал, что на уроках арифметики учеников портят, приучая их к шаблонным задачам и к шаблонным способам решения. Для подтверждения своей мысли Петров изобретал задачи, которые вследствие нешаблонности очень затрудняли „опытных искусных учителей“, но легко решались более способными учениками, еще не испорченными учебой. К числу таких задач (их Петров сочинил несколько) относится и задача об артели косцов. Опытные учителя, разумеется, легко могли решать ее при помощи уравнения, но простое арифметическое решение от них ускользало. Между тем задача настолько проста, что привлекать для ее решения алгебраический аппарат совсем не стоит.

Если большой луг полдня косила вся артель и полдня пол-артели, то ясно, что в полдня пол-артели скашивает $\frac{1}{3}$ луга. Следовательно, на малом лугу остался $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Если один косец в день скашивает $\frac{1}{6}$ луга, а скошено было $\frac{6}{6} + \frac{2}{6} = \frac{8}{6}$, то косцов было 8.

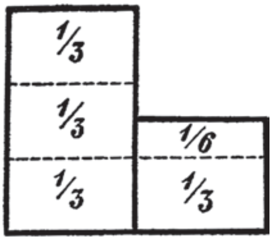


*Рис. 4*

Толстой, всю жизнь любивший фокусные, не слишком хитрые задачи, эту задачу знал от моего отца еще с молодых лет. Когда об этой задаче пришлось беседовать мне с Толстым — уже стариком, — его особенно восхитило то, что задача делается гораздо яснее и прозрачнее, если при решении пользоваться самым примитивным чертежом (рис. 4).

Мне несчетное число раз приходилось рассказывать об этой задаче самой разнообразной публике, начиная с профессоров-математиков и кончая деревенскими школярами. По моему мнению, всем без всякого исключения чертежик весьма облегчал решение. Сам я еще в детстве, помню, понял решение задачи по объяснению отца, который намечал размеры лугов пальцем на шахматной доске в 6 и в 3 квадратика».

Нельзя не согласиться с автором письма, что название *задача Л. Толстого* «по-существу, неправильно, так же как в свое время было неправильным ее название *задача проф. А. В. Цингера*, под которым она была известна московским, петербургским и провинциальным математикам».

## КОРОВЫ НА ЛУГУ

### Задача

«При изучении наук задачи полезнее правил», — писал Ньютон в своей «Всеобщей арифметике» и сопровождал теоретические указания рядом примеров. В числе этих упражнений находим задачу о быках, пасущихся на лугу, — родоначальницу особого типа своеобразных задач наподобие следующей:

«Трава на всем лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее в 24 дня, а 30 коров — в 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву луга в 96 дней?»

Задача эта в одном английском журнале послужила сюжетом для юмористического рассказа, напоминающего чеховский «Репетитор». Двое взрослых, родственники школьника, которому эту задачу задали для решения, безуспешно трудятся над нею и недоумевают:

« — Выходит что-то странное, — говорит один из решающих: — Если в 24 дня 70 коров поедают всю траву луга, то сколько коров съедят ее в 96 дней? Конечно, ¼ от 70, т. е. 17½ коров... Первая нелепость! А вот вторая: 30 коров поедают траву в 60 дней; сколько коров съедят ее в 96 дней? Получается еще хуже: 18¾ коровы. Кроме того: если 70 коров поедают траву в 24 дня, то 30 коров употребляют на это 56 дней, а вовсе не 60, как утверждает задача.

— А приняли вы в расчет, что трава все время растет? — спрашивает другой».

Замечание резонное: трава непрерывно растет, и если этого не учитывать, то не только нельзя решить задачи, но и само условие ее будет казаться противоречивым.

Как же решается задача?

**Решение**

Введем и здесь вспомогательное неизвестное, которое будет обозначать суточный прирост травы в долях ее запаса на лугу. В одни сутки прирастает $y$, в 24 дня — $24y$; если общий запас выразить через 1, то в течение 24 дней коровы съедают

$$1 + 24y.$$

В сутки все стадо (из 70 коров) съедает

$$\frac{1 + 24y}{24},$$

а одна корова съедает в сутки

$$\frac{1 + 24y}{24 \times 70}.$$

Подобным же образом из того, что 30 коров поели бы траву того же луга в 60 суток, выводим, что одна корова съедает в одни сутки

$$\frac{1 + 60y}{30 \times 60}.$$

Но количество травы, съедаемое коровой в сутки, для обоих стад одинаково. Поэтому

$$\frac{1 + 24y}{24 \times 70} = \frac{1 + 60y}{30 \times 60},$$

откуда

$$y = \frac{1}{480}.$$

Найдя $y$ (величину прироста), легко уже определить, какую долю первоначального запаса травы съедает одна корова в сутки:

$$\frac{1 + 24y}{24 \times 70} = \frac{1 + 24 \times \frac{1}{480}}{24 \times 70} = \frac{1}{1600}.$$

Наконец, составляем уравнение для окончательного решения задачи: если искомое число коров $x$, то

$$\frac{1 + 96 \times \dfrac{1}{480}}{96x} = \frac{1}{1600}\ .$$

откуда $x = 20$.

20 коров поели бы всю траву в 96 дней.

## ЗАДАЧА НЬЮТОНА

Рассмотрим теперь подлинную ньютонову задачу о быках, по образцу которой составлена сейчас рассмотренная.

Задача, впрочем, придумана не самим Ньютоном; она является продуктом народного математического творчества.

«Три луга, покрытые травой одинаковой густоты и скорости роста, имеют площади: $3\frac{1}{3}$ га, 10 га и 24 га. Первый прокормил 12 быков в продолжение 4 недель; второй — 21 быка в течение 9 недель. Сколько быков может прокормить третий луг в течение 18 недель?»

**Решение**

Введем вспомогательное неизвестное $y$, означающее, какая доля первоначального запаса травы прирастает на 1 га в течение недели. На первом лугу в течение недели прирастает травы $3\frac{1}{3}y$, а в течение 4 недель

$$3\tfrac{1}{3}\,y \times 4 = \frac{40}{3}\,y$$

того запаса, который первоначально на нем имелся. Это равносильно тому, как если бы первоначальная площадь луга увеличилась и сделалась равной

$$3\tfrac{1}{3} + \frac{40}{3}\,y \text{ гектаров.}$$

Другими словами, быки съели столько травы, сколько покрывает луг площадью $3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}y$ гектаров. В одну неделю 12 быков поели $\frac{1}{4}$ этого количества, а 1 бык в неделю — $\frac{1}{48}$, т. е. запас, растущий на площади

$$\left(3\frac{1}{3} + \frac{40}{3}\,y\right) : 48 = \frac{10 + 40y}{114} \text{ га.}$$

Подобным же образом находим площадь луга, кормящего одного быка в течение недели, из данных для второго луга:

недельный прирост на 1 га = $y$
9-недельн. прирост на 1 га = $9y$
9-недельн. прирост на 10 га = $90y$.

Площадь участка, содержащего запас травы для прокормления 21 быка в течение 9 недель, равна

$$10 + 90y.$$

Площадь, достаточная для прокормления 1 быка в течение 1 недели, —

$$\frac{10 + 90y}{9 \times 21} = \frac{10 + 90y}{189} \text{ га.}$$

Обе нормы прокормления должны быть одинаковы:

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 90y}{189} \text{ га.}$$

Решив это уравнение, находим $y = 1/12$.

Определим теперь площадь луга, наличный запас травы которой достаточен для прокормления одного быка в течение недели:

$$\frac{10 + 40y}{144} = \frac{10 + 40 \times \frac{1}{12}}{144} = \frac{5}{54} \text{ га.}$$

Наконец, приступаем к вопросу задачи. Обозначив искомое число быков через $x$, имеем

$$\frac{23 + 24 \times 18 \times \frac{1}{12}}{18\,x} = \frac{5}{54} \text{ га,}$$

откуда $x = 36$. Третий луг может прокормить в течение 18 недель 36 быков.

## СЕМЕРО ИГРОКОВ

### Задача

Семь игроков условились, что каждый проигравший платит каждому из остальных шести партнеров столько денег, сколько у того имеется, — другими словами, удваивает его деньги.

Сыграли 7 партий. Проиграли все — каждый по разу.

По окончании игры подсчитали, сколько у каждого денег. Оказалось у всех поровну — 12 руб. 80 коп.

Сколько у каждого было денег до начала игры?

### Решение

Несмотря на кажущуюся сложность, задача решается довольно просто, если сообразить, что во время игры общая сумма денег у всех игроков оставалась неизменной: деньги только переходили из кармана одного в карман другого. Отсюда следует, что до начала игры общее количество денег было то же, что и к концу, т. е. равнялось $7 \times 12{,}8$ рублей.

Проследим за тем, как во время игры менялось количество денег игрока, проигравшего первым. До начала игры у него было $x$ рублей.

После *первой* партии он, проиграв, уплатил шестерым партнерам столько, сколько у всех их имелось, т. е. $7 \times 12{,}8 - x$. Осталось у него после первой партии $x - (7 \times 12{,}8 - x) = 2x - 7x \times 12{,}8$.

После *второй* партии деньги его удвоились и, значит, стали равны

$$2(2x - 7 \times 12{,}8).$$

После *третьей* партии деньги его снова удвоились и составляли

$$22\ (2x - 7 \times 12{,}8).$$

После *четвертой* партии у него оказалось

$$23\ (2x - 7 \times 12{,}8).$$

После *7-й* партии, т. е. по окончании игры, у него было 12,8 р.; следовательно,

$$26\ (2x - 7 \times 12{,}8) = 12{,}8.$$

Решаем это уравнение:

$$64\ (2x - 7 \times 12{,}8) = 12{,}8$$
$$2x - 7 \times 12{,}8 = 0{,}2$$
$$2x - 89{,}6 = 0{,}2;\ x = 44{,}9.$$

Итак, до начала игры первый игрок имеет 44 р. 90 к.

Таким же образом определим и деньги игрока, проигравшего вторым. До начала игры у него было $y$.

После *первой* партии у него стало $2y$.

*Вторую* партию он проиграл и выплатил $7 \times 12{,}8 - 2y$; осталось у него $2y - (7 \times 12{,}8 - 2y) = 4y - 7 \times 12{,}8$.

После *третьей* партии у него было

$$2\ (4y - 7 \times 12{,}8).$$

После *четвертой*:

$$22\ (4y - 7 \times 12{,}8).$$

После *седьмой*:

$$25\ (4y - 7 \times 12{,}8).$$

Имеем уравнение

$$25\ (4y - 7 \times 12{,}8) = 12{,}8,$$

откуда $y = 22$ р. 50 к.

Подобным же образом находим деньги третьего игрока — 11 р. 30 к.

Предоставляем читателю самостоятельно определить деньги остальных игроков. Проверкой решения будет то, что сумма денег всех игроков до и после игры должна быть одна и та же.

## ЧИСЛЕННОСТЬ ПЛЕМЕНИ

**Задача**

Племя в мужской своей части состоит из прадеда, 3 дедов, 12 внуков и некоторого числа правнуков. Отцов в 10 раз меньше, нежели сыновей. Какова общая численность мужчин в племени?

**Решение**

Задача окажется весьма простой, если сообразить, что человек может быть одновременно и отцом, и сыном. Имея это в виду, мы поймем, что число всех отцов в племени равно[1]

$$1 + 3 + 12.$$

Число же всех сыновей (если правнуков x) выразится так:

$$3 + 12 + x.$$

Первых, мы знаем, в 10 раз меньше, чем вторых. Имеем уравнение:

$$10\,(1 + 3 + 12) = 3 + 12 + x,$$

т. е.

$$160 = x - 15,$$

откуда $x = 145$. Общая численность мужчин в племени $145 + 12 + 3 + 1 = 161$.

## МНИМАЯ НЕЛЕПОСТЬ

**Задача**

Вот задача, которая может показаться совершенно абсурдной:

Чему равно 84, когда $8 \times 8 = 54$?

Этот странный вопрос далеко не лишен смысла, и задача может быть решена помощью уравнений. Попробуйте расшифровать ее.

**Решение**

Вы догадались, вероятно, что числа, входящие в задачу, написаны не по десятичной системе, — иначе вопрос «чему равно 84» был бы нелеп. Пусть

[1] Предполагая, что каждый внук имел сыновей.

основание неизвестной системы счисления есть $x$. Число «84» означает тогда 8 единиц второго разряда и 4 единицы первого, т. е.

$$«84» = 8x + 4.$$

Число «54» означает $5x + 4$.

Имеем уравнение:

$$8 \times 8 = 5x + 4,$$

т. е. в десятичной системе

$$64 = 5x + 4,$$

откуда $x = 12$. Числа написаны по двенадцатиричной системе, и «84» = $8 \times \times 12 + 4 = 100$.

Значит, «84» = 100, когда $8 \times 8$ = «54».

Подобным же образом решается и другая задача в этом роде:

Чему равно 100, когда $5 \times 6 = 33$?

Ответ: 81 (девятеричная система счисления).

## УРАВНЕНИЕ ДУМАЕТ ЗА НАС

Если вы сомневаетесь в том, что уравнение бывает иной раз предусмотрительнее нас самих, решите следующую задачу:

Отцу 32 года, сыну 5 лет. Через сколько лет отец будет в 10 раз старше сына?

Обозначим искомый срок через $x$. Спустя $x$ лет отцу будет $32 + x$ лет, сыну $5 + x$. И так как отец должен тогда быть в 10 раз старше сына, то имеем уравнение:

$$(32 + x) = 10\,(5 + x).$$

Решив его, получаем $x = -2$.

«Через минус 2 года» означает: «два года назад». Когда мы составляли уравнение, мы не подумали о том, что возраст отца никогда в будущем не окажется в 10 раз превосходящим возраст сына, но что такое соотношение могло быть только в прошлом. Уравнение оказалось вдумчивее нас и напомнило о сделанном упущении.

## КУРЬЕЗЫ И НЕОЖИДАННОСТИ

При решении уравнений мы наталкиваемся иногда на ответы, которые могут поставить в тупик малоопытного математика. Приведем несколько примеров.

**I.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ x = 5 - \dfrac{y}{3} \end{cases}$$

Подставив в первое уравнение значение x из второго, имеем:

$$3\left(5 - \frac{y}{3}\right) + y = 12,$$

а после преобразований:

$$15 = 12.$$

У нас не определились значения ни x, ни y, зато мы узнали, что 15 = 12… Что это значит?

Это означает лишь, что чисел, удовлетворяющих данным уравнениям, не существует и что уравнения эти противоречат одно другому. В самом деле: умножив второе уравнение на 3 и перенеся y в левую часть, получим

$$3x + y = 15.$$

Одна и та же величина $(3x + y)$ согласно первому уравнению равна 12, согласно же второму 15. Это возможно было бы лишь, если 12 = 15, т. е. безусловно невозможно.

Подобное же недоразумение ожидает решающего следующую систему уравнений[1]

$$\begin{cases} x^2y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases}.$$

Разделив первое уравнение на второе, получаем

$$xy = 2,$$

а сопоставляя сейчас полученное уравнение со вторым, видим, что

$$\begin{cases} xy = 4 \\ xy = 2 \end{cases},$$

[1] Незадолго до смерти знаменитый американский изобретатель Эдисон пожелал поощрить денежной помощью (стипендией) самого сметливого юношу США. По его приглашению с разных концов республики были направлены к нему наиболее одаренные школьники по одному от каждого штата, и великий изобретатель во главе целой комиссии (куда входили, между прочим, «автомобильный король» Форд и знаменитый летчик Линдберг) подверг их испытанию, чтобы выделить «лучшего из лучших». Каждый юноша должен был ответить на ряд вопросов самого разнообразного характера и решить ряд задач. Одну из них мы и приводим здесь.

т. е. $4 = 2$. Чисел, удовлетворяющих этой системе, не существует. (Уравнения, которые, подобно сейчас рассмотренным, не имеют общих решений, называются *несовместными*.)

**II.** С иного рода неожиданностями встречаемся мы, решая задачи, подобные следующей:

Разность цифр двузначного числа 3. Если к этому числу прибавить 27, то получится число, отличающееся от искомого только порядком цифр. Что это за число?

Составляем уравнение. Если цифру десятков обозначим через $x$, то число единиц выразится через $x + 3$. Переводя задачу на язык алгебры, получим:

$$10x + (x + 3) + 27 = 10\,(x + 3) + x.$$

Сделав упрощения, приходим к равенству:

$$0 = 0.$$

Это равенство неоспоримо верно, но оно ничего не говорит нам о значении $x$. Значит ли это, что чисел, удовлетворяющих требованию задачи, не существует?

Напротив, это означает, что составленное нами уравнение есть тождество, т. е. что оно верно при любом значении неизвестного $x$. Действительно, легко убедиться, что указанным в задаче свойством обладает каждое двузначное число с разностью цифр 3:

| | |
|---|---|
| $14 + 27 = 41$ | $58 + 27 = 85$ |
| $47 + 27 = 74$ | $36 + 27 = 63$ |
| $25 + 27 = 52$ | $69 + 27 = 96$ |

**III.** Найти трехзначное число, обладающее следующими свойствами:

1) цифра десятков 7;

2) цифра сотен на 4 меньше цифры единиц;

3) если цифры этого числа разместить в обратном порядке, то новое число будет на 396 больше искомого.

Составим уравнение, обозначив цифру сотен через $x$:

$$100x + 70 + x - 4 - [100\,(x - 4) + 70 + x] = 396.$$

Уравнение это после упрощений приводит к равенству

$$0 = 0.$$

Читатели уже знают, как надо толковать подобный результат. Он означает, что каждое трехзначное число, в котором первая цифра на 4 меньше третьей, увеличивается на 396, если цифры поставить в обратном порядке.

* * *

До сих пор мы рассматривали задачи, имеющие более или менее искусственный, книжный характер; их назначение — помочь приобрести навык в составлении и решении уравнений. Теперь, вооруженные теоретически, займемся несколькими примерами задач практических — из области производства, обихода, военного дела, спорта.

## В ПАРИКМАХЕРСКОЙ

### Задача

Может ли алгебра понадобиться в парикмахерской? Оказывается, что такие случаи бывают. Мне пришлось убедиться в этом, когда однажды в парикмахерской подошел ко мне мастер с неожиданной просьбой:

— Не поможете ли нам разрешить задачу, с которой мы никак не справимся?

— Уж сколько раствора испортили из-за этого! — добавил другой.

— В чем задача? — осведомился я.

— У нас имеется два раствора перекиси водорода, 30-процентный и 3-процентный. Нужно их смешать так, чтобы составился 12-процентный раствор. Не можем подыскать правильной пропорции...

Мне дали бумажку, и требуемая пропорция была отыскана.

Она оказалась очень простой. Какой именно?

### Решение

Задачу можно решить и арифметически, но язык алгебры приводит здесь к цели проще и быстрее. Пусть для составления 12-процентной смеси требуется взять $x$ граммов 3-процентного раствора и $y$ граммов 30-процентного. В первой порции берется тогда $0{,}03x$ граммов чистой перекиси водорода, во второй $0{,}3y$, а всего

$$0{,}03x + 0{,}3y.$$

При этом получается $x + y$ граммов раствора, в котором чистой перекиси $0{,}12\,(x + y)$. Имеем уравнение

$$0{,}03x + 0{,}3y = 0{,}12(x + y).$$

Умножив все члены уравнения на 100 и раскрыв скобки, получаем

$$3x + 30y = 12x + 12y,$$

откуда

$$8y = 9x \text{ и } \frac{x}{y} = 2.$$

Значит, 3-процентного раствора надо взять вдвое больше, чем 30-процентного.

Проверим. Возьмем два литра 3-процентного раствора и 1 литр 30-процентного. Чистой перекиси мы будем тогда иметь

$$0{,}03 \times 2000 + 0{,}3 \times 1000 = 60 + 300 = 360 \text{ см}^3.$$

В трех литрах (3000 см$^3$) смеси окажется 360 см$^3$ перекиси: процентное содержание ее составляет

$$\frac{360}{3000} \times 100 = 12\%,$$

как и требовалось.

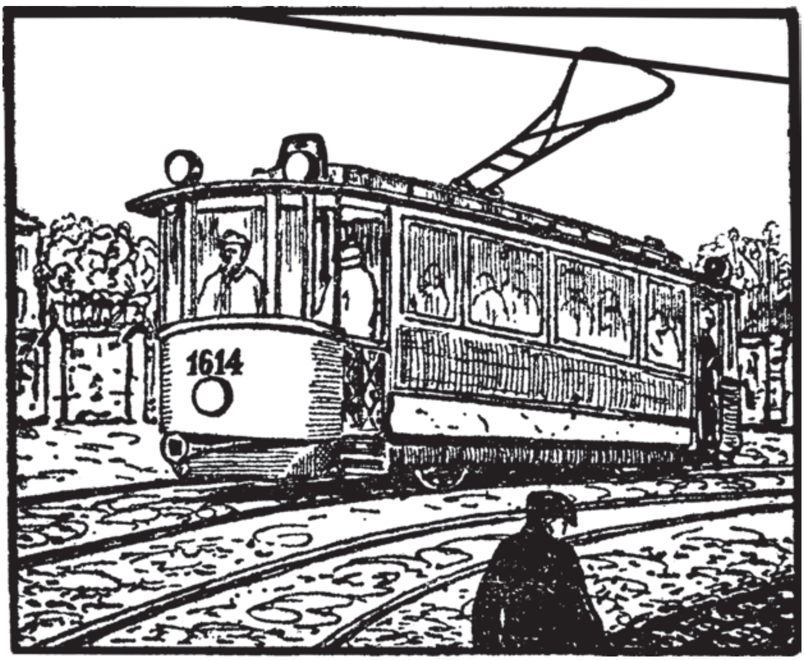
Мы имеем здесь пример, когда посредством уравнения решается вопрос, относящийся не к «числам», а к «отвлеченным отношениям величин».

## ТРАМВАЙ И ПЕШЕХОД

**Задача**

Идя вдоль трамвайного пути, я заметил, что каждые 12 минут меня нагоняет трамвайный вагон, а каждые 4 минуты я сам встречаю трамвайный вагон. И я, и трамвай движемся с равномерной скоростью.

Через сколько минут один после другого покидают трамвайные вагоны свои конечные пункты?



### Решение

Если вагоны покидают свои конечные пункты каждые $x$ минут, то это значит, что в то место, где я встретился с одним из вагонов, через $x$ минут приходит следующий вагон. Если он догоняет меня, то в оставшиеся $12 - x$ минут он должен пройти тот путь, который я успеваю пройти в 12 минут. Значит тот путь, который я прохожу в 1 минуту, трамвай проходит в $\frac{12 - x}{12}$ минут.

Если же трамвай идет мне навстречу, то он встретит меня через 4 минуты, а в оставшиеся $x - 4$ минуты он проходит тот путь, который я успел пройти в эти 4 минуты. Следовательно, тот путь, который я прохожу в 1 минуту, трамвай проходит в $\frac{x - 4}{4}$ минуты.

Получаем уравнение:

$$\frac{12 - x}{12} = \frac{x - 4}{4}.$$

Отсюда $x = 6$. Вагоны отходят каждые 6 минут.

## ДВЕ ЖЕСТЯНКИ КОФЕ

### Задача

Две жестянки, наполненные кофе, имеют одинаковую форму и сделаны из одинаковой жести. Первая весит 2 килограмма и имеет в высоту 12 см; вторая весит 1 килограмм и имеет в высоту 9,5 см. Каков чистый вес кофе в жестянках?

### Решение

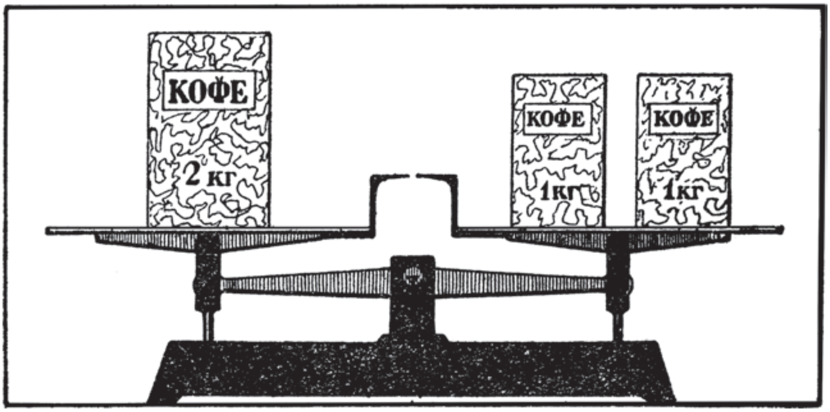
Обозначим вес содержимого большей жестянки через $x$, меньшей — через $y$. Вес самих жестянок обозначим соответственно через $z$ и $t$. Имеем уравнения:

$$\begin{cases} x + z = 2 \\ y + t = 1 \end{cases}$$

Так как веса содержимого полных жестянок относятся, как их объемы, т. е. как кубы их высот[1], то

$$\frac{x}{y} = \frac{12^3}{9{,}5^3} = 2{,}02 \text{ или } x = 2{,}02\,y.$$

[1] Пропорцией этой позволительно пользоваться лишь в том случае, когда стенки жестянок не слишком толсты (так как наружная и внутренняя поверхности жестянок, строго говоря, не подобны).




Веса же пустых жестянок относятся как их полные поверхности, т. е. как квадраты их высот. Поэтому

$$\frac{z}{t} = \frac{12^2}{9{,}5^2} = 1{,}69 \text{ или } z = 1{,}69t\,.$$

Подставив значения $x$ и $z$ в первое уравнение, получаем систему

$$\begin{cases} 2{,}02\,y + 1{,}69\,t = 2 \\ y + t = 1 \end{cases}$$

Решив ее, узнаем:

$$y = \frac{31}{33} = 0{,}94 \text{ или } t = 0{,}06.$$

И, следовательно,

$$x = 1{,}9; \quad z = 0{,}1.$$

Вес кофе без упаковки: в большей жестянке 1,9 килограмма, в меньшей — 0,94 килограмма.

## НА ПУТИ К ЗАВОДУ

### Задача

Двое рабочих, живущих вместе и работающих на одном заводе, вышли из дому на свой завод, один на 5 минут раньше другого. Тот, который вышел раньше, обычно проходит путь от дома до завода в 30 минут. Его более молодой сожитель проходит то же расстояние в 20 минут. Через сколько времени он догонит старшего товарища?

**Решение**

Рабочий, делающий весь путь в 30 минут, проходит ежеминутно $\frac{1}{30}$ пути; его товарищ $\frac{1}{20}$. Если встреча произойдет через $x$ минут после выхода второго, то первый в течение $5 + x$ минут пройдет долю

$$\frac{5+x}{30} \text{ всего пути;}$$

второй —

$$\frac{x}{20}.$$

Так как оба пройдут от дома до места встречи один и тот же путь, то

$$\frac{5+x}{30} = \frac{x}{20},$$

откуда $x = 10$. Младший рабочий нагонит старшего через 10 минут после выхода из дому.

## ВЕЧЕРИНКА

**Задача**

На вечеринке было 42 танцующих. Мария танцевала с семью танцорами, Ольга — с восемью, Вера — с девятью и так далее до Нины, которая танцевала со всеми танцорами. Сколько танцоров (мужчин) было на вечеринке?

**Решение**

Задача решается очень просто, если удачно выбрать неизвестное. Будем искать число не танцоров, а танцорок, которое обозначим через $x$:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1-я, Мария, | танцевала с | 6 + 1 | танцорами |
| 2-я, Ольга, | » | « 6 + 2 | » |
| 3-я, Вера, | » | « 6 + 3 | » |
| x-я, Нина, | » | « 6 + x | » |

Имеем уравнение

$$x + (6 + x) = 42,$$

откуда

$$x = 18,$$

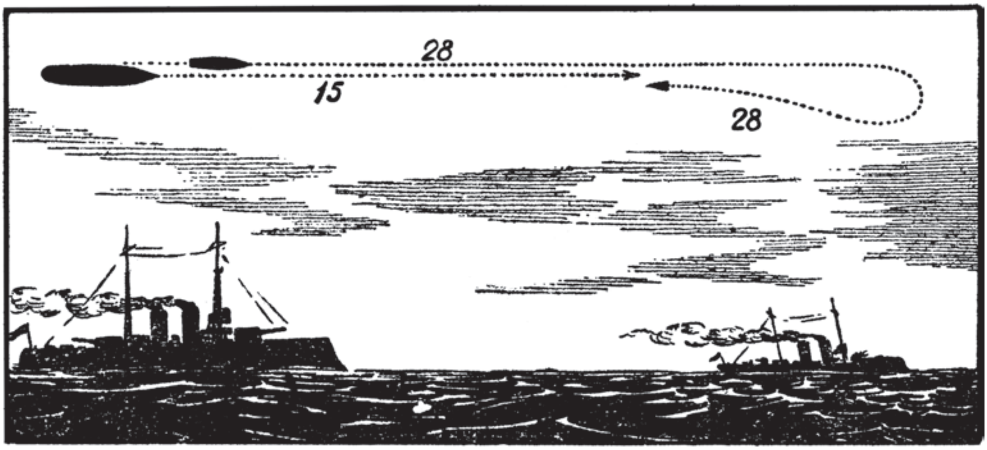
а следовательно, число танцоров

$$42 - 18 = 24.$$

## МОРСКАЯ РАЗВЕДКА

**Задача первая**

Разведчику (разведывательному кораблю), имеющему скорость 28 миль в час, дано задание обследовать район моря по курсу эскадры, т. е. в направлении ее движения, в расстоянии 70 миль. Скорость эскадры 15 миль (в час). Требуется определить, через сколько времени разведчик возвратится к эскадре[1].




**Решение**

Обозначим искомое число часов через $x$. За это время эскадра успела пройти 15x миль, разведывательный же корабль $28x$. Последнее судно прошло вперед 70 миль и часть этого пути обратно; эскадра же прошла остальную часть того же пути. Вместе они прошли путь в $28x + 15x$, равный $2 \times 70$. Имеем уравнение

$$28x + 15x = 140,$$

откуда

$$x = \frac{140}{43} = 3 \text{ ч. } 15 \text{ м.}$$

Разведчик возвратится к эскадре через 3 часа 15 минут.

[1] К. А. Мигаловский, «Из заметок по тактической навигации», 1926 (пояснения в скобках мои — *Я. П.*).

### Задача вторая

Разведывательное судно получило приказ произвести разведку впереди эскадры по направлению ее движения. Через 3 часа судно это должно вернуться к эскадре. Спустя сколько времени после оставления эскадры разведывательное судно должно повернуть назад, если скорость его 25 узлов, а эскадры 15 узлов?

### Решение

Пусть разведчик должен повернуть спустя **x** часов; значит, он удалялся от эскадры **x** часов, а шел навстречу ей (3 – **x**) часов. Пока все корабли шли в одном направлении, разведчик успел за **x** часов удалиться от эскадры на разность пройденных ими путей, т. е. на

$$25x - 15x = 10x.$$

При возвращении разведчика он прошел путь навстречу эскадре $25(3 - x)$, сама же эскадра прошла $15(3 - x)$. Тот и другой прошли вместе $10x$. Следовательно,

$$25(3 - x) + 15(3 - x) = 10x,$$

откуда

$$x = 2\tfrac{2}{5}.$$

Разведчик должен изменить курс на обратный спустя 2 ч. 24 м. после того, как он покинул эскадру.

## НА ВЕЛОДРОМЕ

### Задача

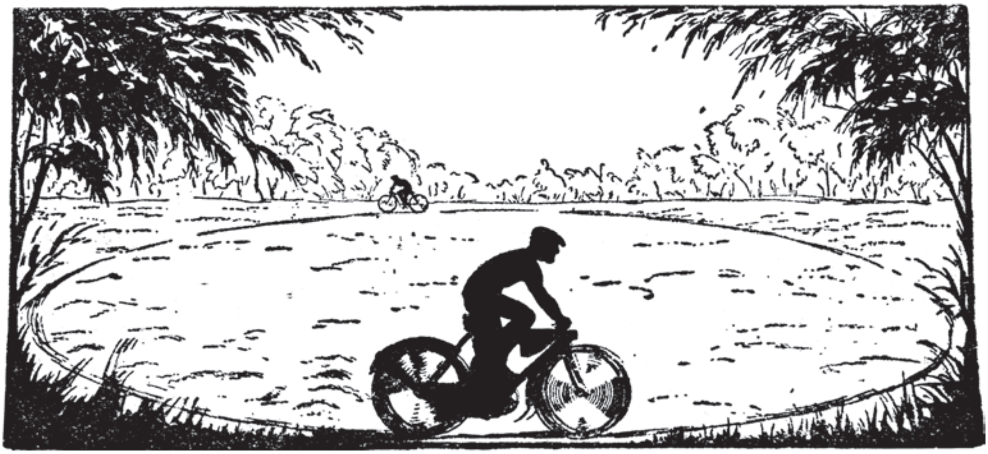
По круговой дороге велодрома едут два велосипедиста с неизменными скоростями. Когда они едут в противоположных направлениях, то встречаются каждые 10 секунд; едучи же в одном направлении, они настигают друг друга каждые 170 секунд. Какова скорость каждого велосипедиста, если длина круговой дороги 170 м?

### Решение

Если скорость первого велосипедиста $x$, то в 10 секунд он проезжает $10x$ метров. Второй же, двигаясь ему навстречу, проезжает от встречи до встречи остальную часть круга, т. е. $170 - 10x$ метров. Если скорость второго $y$, то это составляет $10y$ метров:

$$170 - 10x = 10y.$$

Если же велосипедисты едут навстречу друг другу, то в 170 секунд первый проезжает $170x$ метров, а второй $170y$ метров. Если первый едет быстрее



второго, то от одной встречи до другой он проезжает на один круг больше второго, т. е.

$$170x - 170y = 170.$$

После упрощения этих уравнений получаем:

$$x + y = 17;\ x - y = 1,$$

откуда

$$x = 9 \text{ м в секунду};\quad y = 8 \text{ м в секунду}.$$

## ЭСКАЛАТОР МЕТРО

**Задача**

На одной из станций московского метро человек пробежал по ступеням поднимающегося эскалатора до высоты 10 м и обратно, употребив на пробег в оба конца 73 секунды. В другой раз он проделал то же самое на спускающемся эскалаторе и употребил на это 4 мин. 22 сек.

Найти скорость подъема эскалатора, зная, что человек сбегал вниз по его ступеням на 35% быстрее, нежели взбегал вверх.

**Решение**

Обозначив скорость подъема эскалатора через $x$, а скорость взбегания человека по ступеням через $y$, составляем систему уравнений:

$$\frac{10}{x+y} + \frac{10}{1{,}35 - x} = 73\ ,$$

$$\frac{10}{y-x} + \frac{10}{1{,}35y + x} = 262\ .$$

После преобразований получаем

$$\frac{23{,}5}{73}\,y = 1{,}35\,y^2 + 0{,}35\,xy - x^2; \qquad \frac{23{,}5}{262}\,y = 1{,}35\,y^2 - 0{,}35\,xy - x^2;$$

Вычтя второе уравнение из первого, имеем

$$23{,}5\,y\left(\frac{1}{73} - \frac{1}{262}\right) = 0{,}7\,xy$$

или (так как $y$ не равно нулю)

$$x = \frac{23{,}5}{0{,}7}\left(\frac{1}{73} - \frac{1}{262}\right) = 0{,}33.$$

Скорость подъема эскалатора равна 0,33 м в сек.

## СОСТЯЗАНИЕ АВТОМОБИЛЕЙ

**Задача**

При автомобильных состязаниях одна из трех стартовавших одновременно машин, делавшая в час на 15 км меньше первой и на 3 км больше третьей, пришла к конечному пункту на 12 минут позже первой и на 3 минуты раньше третьей. Остановок в пути не было.

Требуется определить:

a) Как велик участок пути?

b) Как велика скорость каждой машины?

c) Какова продолжительность пробега каждой машины?

**Решение**

Хотя требуется определить 7 неизвестных величин, мы обойдемся при решении задачи только двумя: составим систему двух уравнений с двумя неизвестными.

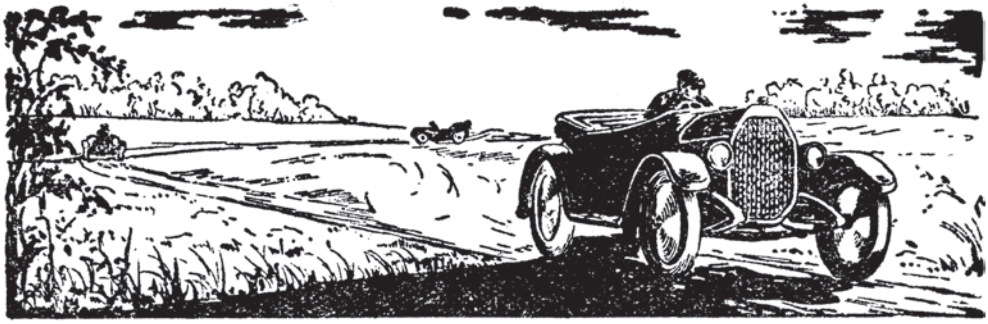
Обозначим скорость второй машины через $x$. Тогда скорость первой выразится через $x + 15$, а третьей — через $x - 3$.

Длину участка обозначим буквой $y$. Тогда продолжительность пробега обозначится:

для первой машины через ... $\frac{y}{x+15}$

для второй » » ... $\frac{y}{x}$

для третьей » » ... $\frac{y}{x-3}$



Мы знаем, что вторая машина была в пути на 12 минут (т. е. на ⅕ часа) дольше первой. Поэтому

$$\frac{y}{x} - \frac{y}{x+15} = \frac{1}{5}\ .$$

Третья машина была в пути на 3 минуты (т. е. на 1/20 часа) больше второй. Следовательно,

$$\frac{y}{x-3} - \frac{y}{x} = \frac{1}{20}\ .$$

Первое уравнение преобразуем:

$$5y(x+15) - 5xy = x(x+15)$$
$$5xy + 75y - 5xy = x(x+15)$$
$$75y = x(x+15).$$

Второе уравнение также преобразуем:

$$20xy - 20y(x-3) = x(x-3)$$
$$20xy - 20xy + 60y = x(x-3)$$
$$60y = x(x-3).$$

Имеем систему

$$\begin{cases} 75y = x(x+15) \\ 60y = x(x-3) \end{cases}$$

Первое уравнение делим на второе, сокращая при этом на $x$ и $y$ (обе величины, мы знаем, не равны нулю). Получаем уравнение:

$$\frac{5}{4} = \frac{x+15}{x-3}\ .$$

или

$$5x - 15 = 4x + 60,$$

откуда

$$x = 75.$$

Зная $x$, находим $y$ из уравнения

$$60y = x(x - 3) = 75 \times 72, \quad y = 90.$$

Итак, скорости машин определены:

90 км, 75 км, 72 км.

Длина всего пути = 90 км.
Продолжительность пробегов:

первой машины $\frac{90}{90} = 1$ час.

второй » $\frac{90}{75} = 1$ ч. 12 мин.

третьей » $\frac{90}{72} = 1$ ч. 15 мин.

Таким образом все 7 неизвестных величин задачи определены.

## СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ ЕЗДЫ

### Задача

Автомобиль проехал расстояние между двумя городами со скоростью 30 км в час и возвратился со скоростью 20 км в час. Какова была средняя скорость его езды?

### Решение

Обманчивая простота задачи вводит многих в заблуждение. Не вникнув в условия вопроса, вычисляют среднеарифметическое между 30 и 20, т. е. находят полусумму

$$\frac{30 + 20}{2} = 25.$$

Это «простое» решение было бы правильно, если бы поездка в одну сторону и в обратном направлении длилась одинаковое время. Но ясно, что обратная поездка должна была отнять больше времени, чем езда туда, во столько раз, во сколько скорость езды туда (30 км в час) превышает скорость возвращения (20 км в час), т. е. в $\frac{3}{2}$ раза. Значит, со скоростью 30 км в час автомобиль двигался $\frac{2}{3}$ того промежутка времени, в течение которого он ехал со скоростью 20 км в час. Учтя это, мы поймем, что ответ 25 — неверен.

И действительно, уравнение дает другой ответ. Составить уравнение нетрудно, если ввести вспомогательное неизвестное — именно величину $l$ расстояния между городами. Обозначив искомую среднюю скорость через $x$, составляем уравнение

$$\frac{2l}{x} = \frac{l}{30} + \frac{l}{20}\ .$$

Так как $l$ не равно нулю, можем уравнение разделить на $l$; получаем:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{30} + \frac{1}{20}\ .$$

После преобразований имеем:

$$1200 = 20x + 30x,$$

откуда $x = 24$.

Итак, правильный ответ не 25 км в час, а 24.

## МАШИНЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Беседа об уравнениях в плане «Занимательной алгебры» не может пройти мимо машин, решающих уравнения (притом весьма трудные) автоматическим путем. Это не утопия, как «литературная» или «мыслительная» машины, рассмотренные в первой главе, и не миф, существующий лишь в умах легковерных людей, как мнимые шахматные автоматы. Машины для решения уравнений существуют на самом деле и автоматически находят корни таких трудных уравнений, как

$$x^9 + ax^8 + b = 0$$
$$x^9 + ax^7 + b = 0$$
$$x^5 + ax^4 + bx^3 + c = 0$$

Наш академик А. Н. Крылов[1] изобрел математическую машину, еще более удивительную: она справляется с уравнениями высшей математики (интегрирует дифференциальные уравнения).

Чтобы понять идею устройства подобных машин, вспомним, как решаются *графически* хотя бы уравнения первой степени. Возьмем для примера уравнение

$$2x - 8 = 0.$$

Мы можем заменить его такой несложной «системой»

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ \phantom{2x - {}} y = 8 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = 2x \\ y = 8. \end{cases}$$

[1] *Алексей Николаевич Крылов* (1863–1945) — выдающийся русский и советский ученый-математик, механик и инженер-кораблестроитель; в1904 г. изобрел первую механическую вычислительную машину, решающую дифференциальные уравнения (применялась при проектировании кораблей) (*примеч. ред.*).

Уравнения $y = 2x$ и $y = 8$ можно рассматривать как уравнения двух прямых линий; абсцисса точки их пересечения и будет искомое $x$ (рис. 5). Легко представить себе механический прибор, осуществляющий этот метод решения уравнений первой степени. Корни уравнения второй степени могут быть разысканы механическим прибором, осуществляющим пересечение параболы и прямой линии. Практически скорее и проще в этих случаях, конечно, находить корни вычислением, и потому подобные приборы могли бы иметь разве лишь дидактическое значение. Иное дело уравнения более высоких степеней, вычисление корней которых представляет долгую и утомительную работу; здесь создание механического прибора вполне оправдывается практической потребностью.

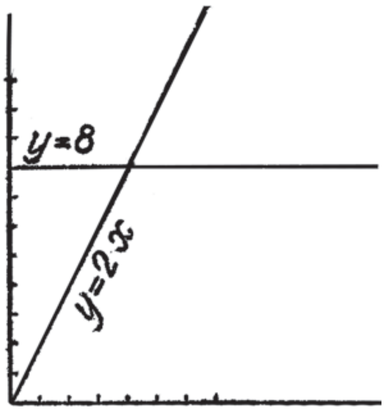


*Рис. 5*

На рис. 6 изображена машина для решения четырехчленных уравнений вида:

$$x^p + ax^m + bx^n + c = 0$$

3-й, 4-й и 5-й степеней. Объяснять подробности устройства этой машины было бы в нашей книге неуместно; укажу только, что корень отыскивается в ней путем пересечения пространственной кривой с плоскостью. Никаких зубчаток, никаких сложных передач в этой «машине» нет, так что лучше, пожалуй, называть ее не машиной, а прибором или аппаратом. В ней три отвесных масштабных стойки, по одной из которых скользит диоптр (просверленная пластинка). Пространственная кривая (шкала $x$) нанесена на особом цилиндре. На делениях стоек отмечают коэфициенты $a$, $b$, $c$, причем две из этих пометок соединяются ниткой, а через диоптр третьей стойки замечают пометки тех точек кривой, которые отвечают местам ее пересечения с ниткой. Прибор этот изобретен проф. Мемке [1]в Штутгарте.

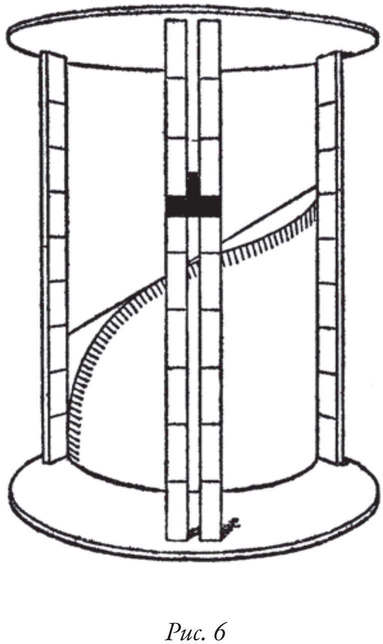
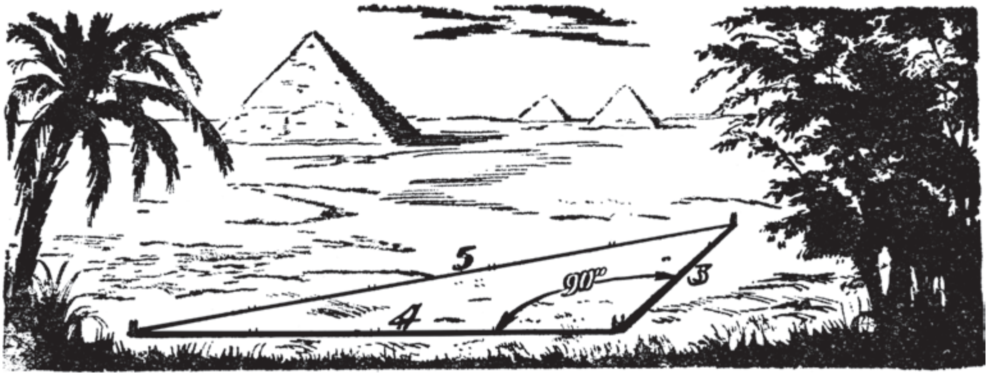


*Рис. 6*

[1] *Рудольф Мемке* (1857–1944) — немецкий математик (*примеч. ред.*).




**Глава третья**

# В ПОМОЩЬ АРИФМЕТИКЕ И ГЕОМЕТРИИ

Арифметика зачастую не в силах собственными средствами строго доказать правильность иных из ее утверждений. Ей приходится в таких случаях прибегать к обобщающим приемам алгебры. К подобным арифметическим положениям, обосновываемым алгебраически, принадлежат, например, многие правила сокращенного выполнения действий, любопытные особенности некоторых чисел, признаки делимости и др. Рассмотрению вопросов этого рода и посвящается настоящая глава.

## МГНОВЕННОЕ УМНОЖЕНИЕ

Замечательный счетчик-виртуоз д-р Фред Браунс[1], затмивший славу своих предшественников и побивший все их рекорды, во многих случаях облегчает себе вычислительную работу, прибегая к несложным алгебраическим преобразованиям.

Например,

$$988^2$$

он выполняет так:

$$988 \times 988 = (988 + 12) \times (988 - 12) + 12^2 =$$
$$= 1000 \times 976 + 144 = 976\,144.$$

[1] Также д-р Браунс запомнился современникам способностью запомнить число из 500 цифр за 13 минут (*примеч. ред.*).

Легко сообразить, что счетчик в этом случае пользуется следующим алгебраическим преобразованием:

$$(a + b)(a - b) + b^2 = a^2 - b^2 + b^2 = a^2.$$

Далее, умножение 986 × 997 выполняется Браунсом так:

$$986 \times 997 = (986 - 3) \times 1000 + 3 \times 14 = 983\,042.$$

На чем основан этот прием? Представим множители в виде:

$$(1000 - 14)\times(1000 - 3)$$

и перемножим эти двучлены по правилам алгебры:

$$1000 \times 1000 - 1000 \times 14 - 1000 \times 3 + 14 \times 3.$$

Делаем преобразования:

$$\begin{gathered} 1000\,(1000 - 14) - 1000 \times 3 + 14 \times 3 = \\ = 1000 \times 986 - 1\,000 \times 3 + 14 \times 3 = \\ = 1000\,(986 - 3) + 14 \times 3. \end{gathered}$$

Последняя строка и изображает прием немецкого счетчика.

Интересен применяемый им способ перемножения двух трехзначных чисел, у которых число десятков одинаково, а цифры единиц составляют в сумме 10. Например, умножение

$$783 \times 787$$

д-р Браунс выполняет так:

$$78 \times 79 = 6162; \quad 3 \times 7 = 21;$$

Результат: 616 221.

Обоснование способа ясно из следующих преобразований:

$$\begin{gathered} (780 + 3)\,(780 + 7) = \\ = 780 \times 780 + 780 \times 3 + 780 \times 7 + 3 \times 7 = \\ = 780 \times 780 + 780 \times 10 + 3 \times 7 = \\ = 780\,(780 + 10) + 3 \times 7 = 780 \times 790 + 21 = \\ = 616\,200 + 21. \end{gathered}$$

Другой прием для выполнения подобных умножений, также практикуемый немецким виртуозом, проще:

$$\begin{gathered} 783 \times 787 = (785 - 2)\,(785 + 2) = 785^2 - 4 = \\ = 616\,225 - 4 = 616\,221. \end{gathered}$$

На практике мы можем с успехом пользоваться для устных выкладок формулой

$$a^2 = (a + b)(a - b) + b^2.$$

Например:

$$27^2 = (27 + 3)\,(27 - 3) + 3^2 = 729$$
$$63^2 = 66 \times 60 + 3^2 = 3\,969$$
$$18^2 = 20 \times 16 + 2^2 = \quad 324$$
$$37^2 = 40 \times 34 + 7^2 = 1\,369$$
$$48^2 = 50 \times 46 + 2^2 = 2\,304$$
$$54^2 = 58 \times 50 + 4^2 = 2\,916.$$

Очень удобен также следующий способ быстрого возвышения в квадрат чисел, оканчивающихся на 5:

$$35^2; \quad 3 \times 4 = 12; \quad \text{Отв. } 1\,225.$$
$$65^2; \quad 6 \times 7 = 42; \quad \text{Отв. } 4\,225.$$
$$75^2; \quad 7 \times 8 = 56; \quad \text{Отв. } 5\,625.$$

Правило состоит в том, что умножают число десятков на ближайшее высшее число и к произведению приписывают 25.

Прием основан на следующем. Если число десятков $a$, то все число можно изобразить так:

$$10a + 5.$$

Квадрат этого числа, как квадрат двучлена, равен

$$100a^2 + 100a + 25 = 100a\,(a + 1) + 25.$$

Выражение $a(a + 1)$ есть произведение числа десятков на ближайшее высшее число. Умножить число на 100 и прибавить 25 все равно, что *приписать* к числу 25.

Прием этот годен лишь для чисел, оканчивающихся на 5. Но так как большинство людей склонно округлять конец числа до 5, то надобность в возвышении в квадрат подобных чисел возникает чаще, чем для прочих.

Из того же приема вытекает простой способ возвышать в квадрат числа, состоящие из целого и ½. Например:

$$\left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 3{,}5^2 = 12{,}25 = 12\frac{1}{4}$$
$$\left(7\frac{1}{2}\right)^2 = 56\frac{1}{4}$$
$$\left(8\frac{1}{2}\right)^2 = 72\frac{1}{4}, \quad \text{и т. п.}$$

## ЦИФРЫ 1, 5 и 6

Вероятно, все заметили, что от перемножения ряда чисел, оканчивающихся единицей или пятеркой, получается число, оканчивающееся той же цифрой. Менее известно, что сказанное относится и к числу 6. Поэтому, между прочим, всякая степень числа, оканчивающегося на 6, также оканчивается шестеркой.

Например:

$$46^2 = 2116; \quad 46^3 = 97\,336.$$

Обосновать эту любопытную особенность цифр 1, 5 и 6 можно только алгебраическим путем. Рассмотрим ее для 6.

Числа, оканчивающиеся 6, изображаются так:

$$10a + 6, \quad 10b + 6 \quad \text{и т. д.},$$

где $a$ и $b$ могут быть любые целые числа.

Произведение двух таких чисел равно

$$100ab + 60b + 60a + 36 =$$
$$= 10(10ab + 6b + 6a) + 30 + 6 =$$
$$= 10\,(10ab + 6b + 6a + 3) + 6.$$

Как видим, произведение составляется из некоторого числа десятков и из цифры 6, которая, разумеется, должна оказаться на конце.

Тот же прием доказательства можно приложить к 1 и к 5.

Сказанное дает нам право утверждать, что, например,

$336^{2567}$ оканчивается на 6,
$815^{723}$ » » 5
$491^{1732}$ » » 1 и т. п.

## ЧИСЛА 25 и 76

Есть и двузначные числа, обладающие тем же свойством, как и числа 1, 5 и 6. Это 25 и — что, вероятно, для многих будет неожиданностью, — число 76. Всякие два числа, оканчивающиеся на 76, дают в произведении число, оканчивающееся на 76.

Докажем это. Общее выражение для подобных чисел

$$100a + 76; \quad 100b + 76 \quad \text{и т. д.}$$

Перемножим два таких числа; получим

$$10000ab + 7600b + 7600a + 5776 = 10000ab +$$
$$+ 7600b + 7600a + 5700 + 76 = 100\,(100ab + 76b + 76a + 57) + 76.$$

Положение доказано: произведение будет оканчиваться числом 76.

Отсюда следует, что всякая *степень* числа, оканчивающегося на 76, есть подобное же число:

$$376^2 = 141\,376; \quad 576^3 = 191\,102\,976 \text{ и т. п.}$$

Существуют и более длинные группы цифр, которые, находясь на конце чисел, сохраняются и в их произведении. Примером могут служить числа:

$$376; \quad 625; \quad 90\,625.$$

Например,

$$90\,625^2 = 8\,212\,890\,625.$$

Предоставляем читателю доказать это положение самостоятельно.

## ДОПЛАТА

*Старинная народная задача*

Однажды, в старые времена, произошел такой случай. Двое прасолов[1] продали принадлежавший им гурт волов, получив при этом за каждого вола столько рублей, сколько в гурте было волов. На вырученные деньги купили стадо овец по 10 рублей за овцу и одного ягненка. При дележе поровну одному досталась лишняя овца, другой же взял ягненка и получил с компаньона соответствующую доплату. Как велика была доплата?

### Решение

Задача не поддается прямому переводу «на алгебраический язык», для нее нельзя составить уравнения. Приходится решать ее особым путем, так сказать, по свободному математическому соображению. Но и здесь алгебра оказывает арифметике существенную помощь.

Стоимость всего стада в рублях есть точный квадрат, так как стадо приобретено на деньги от продажи $n$ волов по $n$ рублей за вола. Одному из компаньонов досталась лишняя овца, следовательно, число овец нечетное; нечетным, значит, является и число десятков в числе $n^2$. Какова же цифра единиц?

Можно доказать, что если в точном квадрате число десятков нечетное, то цифра единиц в нем может быть только 6.

Как это доказать? Весьма просто.

Квадрат всякого числа из $a$ десятков и $b$ единиц, т, е. $(10a + b)^2$, равен

$$100a^2 + 20ab + b^2 = (10a^2 + 2ab) \times 10 + b^2.$$

Десятков в этом числе $10a^2 + 2ab$ да еще некоторое число десятков, заключающихся в $b^2$. Но $10a^2 + 2ab$ делится на 2, это число четное. Оно сделается

[1] *Прасол* — скупщик скота, птицы, рыбы для дальнейшей перепродажи (*примеч. ред.*).

нечетным, если в числе $b^2$ окажется нечетное число десятков. Вспомним, что такое $b^2$. Это квадрат цифры единиц, т. е. одно из следующих 10 чисел:

$$0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.$$

Среди них нечетное число *десятков* имеют только 16 и 36 — оба оканчивающиеся на 6. Значит, точный квадрат

$$100a^2 + 20ab + b^2$$

может иметь нечетное число десятков только в том случае, если оканчивается на 6.

Теперь легко найти ответ на вопрос задачи. Ясно, что ягненок пошел за 6 рублей. Компаньон, которому он достался, получил, следовательно, на 4 рубля меньше другого. Чтобы уравнять доли, обладатель ягненка должен дополучить от своего компаньона 2 рубля.

Доплата равна 2 рублям.

## ДЕЛИМОСТЬ НА 11

Алгебра весьма облегчает отыскание признаков, по которым можно заранее, не выполняя деления, установить, делится ли данное число на тот или иной делитель. Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 — общеизвестны. Выведем признак делимости на 11; он довольно прост и практичен.

Каждое многозначное число $N$ может быть в общем виде представлено так:

$$N = 10^n a + 10^{n-1} b + 10^{n-2} c + \ldots + 10^3 p + 10^2 u + 10v + w.$$

Посмотрим, какие остатки получаются от деления отдельных слагаемых этого числа. Начнем с конца:

$w$ — число, меньшее 11, дает в остатке, конечно, само себя, т. е. $w$

$$10v = 11v - v.$$

Мы можем сказать, что при делении на 11 это слагаемое дает отрицательный остаток — $v$:

$$10^2 u = 100u = 99u + u; \quad \text{остаток } u.$$

$10^3 p = 1000p = 1001p - p$. Так как 1001 делится на 11, то остаток равен $p$.

Легко видеть, что остаток от деления $N$ на 11 должен равняться алгебраической сумме всех этих остатков, т. е.

$$a - b + c - d + e - \ldots - p + u - v + w =$$
$$= (a + c + e + \ldots + u + w) - (b + d + \ldots + p + v).$$

Иными словами: надо из суммы всех цифр, стоящих на нечетных местах, вычесть сумму всех цифр, занимающих четные места; если в разности получится 0 либо число (положительное или отрицательное), кратное 11, то и испытуемое число кратно 11.

Испытаем, например, число 87 635 064:

$$8 + 6 + 5 + 6 = 25$$
$$7 + 3 + 0 + 4 = 14$$
$$25 - 14 = 11;$$

значит, данное число делится на 11.

Существует и другой признак делимости, удобный для не очень длинных чисел. Он состоит в том, что испытуемое число разбивают справа налево на грани по две цифры в каждой и складывают эти грани. Если полученная сумма делится без остатка на 11, то и испытуемое число кратно 11. Например, пусть требуется испытать число 528. Разбиваем число на грани (5/28) и складываем обе грани:

$$5 + 28 = 33.$$

Так как 33 делится без остатка на 11, то и число 528 кратно 11:

$$528 : 11 = 48.$$

Докажем этот признак делимости, например, для любого пятизначного и шестизначного числа.

Такие числа можно представить в виде

$$N = 10000x + 100y + z,$$

где $x$ — число десятков тысяч в нашем числе, $y$ — число сотен, $z$ — число единиц (т. е. $x$, $y$, $z$ — грани нашего числа, расчлененного, как было указано). Делаем следующие преобразования:

$$N = 9999x + x + 99y + y + z,$$
$$N = (9999x + 99y) + (x + y + z).$$

Так как $9999x + 99y$ кратно 11, то для делимости на 11 числа $N$ необходимо и достаточно, чтобы $x + y + z$ (т. е. сумма граней) была кратна 11. [1]

## ДЕЛИМОСТЬ НА 19

Найти основание следующего признака делимости:

Число делится без остатка на 19, если половина числа его десятков, сложенная с цифрой единиц, кратна 19.

При нечетном числе десятков остаток от их деления на 2 (т. е. 10) прибавляется к единицам.

---

[1] Не желая присваивать себе чужих заслуг, должен отметить, что изложенный признак делимости придуман моим сыном-школьником.

### Решение

Всякое число $N$ можно представить в виде

$$N_1 = 10x + y,$$

где $x$ — *число* десятков (не *цифра* в разряде десятков, а общее число целых десятков во всем числе), $y$ — цифра единиц. Докажем сначала, что если при $x$ четном (т. е. $x = 2z$) число

$$N_2 = \frac{x}{2} + y = z + y$$

кратно 19, то и $20z + y$ (т. е. $N_1$) кратно 19. Для этого составим разность $N_1 - N_2 = R$.

$$R = 20z + y - z - y = 19z,$$

откуда

$$N_1 = N_2 + R = 19z + N_2.$$

Ясно, что если $N_2$ кратно 19, то и кратно тому же числу. Это мы и хотели доказать.

Рассмотрим теперь случай, когда число десятков $x$ нечетное, т. е. равно $2z + 1$. Докажем, что число делится без остатка на 19, если число

$$N_3 = \frac{2z}{2} + 10 + y = z + y + 10$$

кратно 19. Составим разность:

$$N_1 - N_3 = 10\,(2z + 1) + y - z - y - 10 = R$$
$$R = 20z + 10 + y - z - y - 10 = 19z.$$

Опять имеем

$$N_1 = 19z + N_3,$$

равенство, подтверждающее правильность указанного признака делимости.

Покажем на примере, как им пользуются. Пусть требуется определить, делится ли на 19 число

47 045 881.

Применяем последовательно наш признак делимости:

$$\frac{4\,704\,588}{2} + 1 = 2\,352\,295$$

$$\frac{235\,228}{2} + 15 = 117\,629$$

$$\frac{11\,762}{2} + 9 = 5\,890$$

$$\frac{588}{2} + 10 = 304$$

$$\frac{30}{2} + 4 = 19$$

Так как 19 делится на 19 без остатка, то кратны 19 и числа

304, 5890, 117 629, 2 352 295, 47 045 881.

Итак, число наше делится на 19.

Нельзя сказать, чтобы этот признак делимости был практичен. Пожалуй, немногим больше времени отняло бы непосредственное испытание данного числа делением его на 19. Однако лучшего признака делимости на 19 не найдено.

## ПИФАГОРОВЫ ЧИСЛА

### Задача

Удобный и очень точный способ, употребляемый землемерами для проведения на местности перпендикулярных линий, состоит в следующем. Пусть через точку $A$ требуется к линии $MN$ провести другую линию под прямым углом (рис. 7). Откладывают от $A$ по направлению $AM$ три раза какое-нибудь расстояние $a$. Затем завязывают на шнуре три узла, расстояния между которым равны $4a$ и $5a$. Приложив крайние узлы к точкам $A$ и $B$, натягивают шнур за средний узел. Шнур расположится треугольником, в котором угол $A$ прямой.

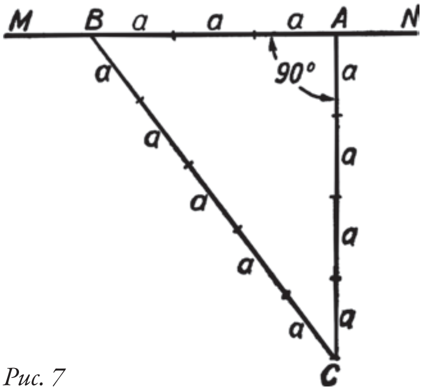


*Рис. 7*

Этот древний способ, применявшийся еще тысячелетия назад строителями египетских пирамид, основан на том, что каждый треугольник, стороны которого относятся как 3 : 4 : 5, – прямоугольный, согласно общеизвестной теореме Пифагора:

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Вместо чисел 3, 4, 5 можно выбрать и другие «пифагоровы числа», которых существует бесчисленное множество. Например:

$$5^2 + 12^2 = 13^2; \qquad 15^2 + 112^2 = 113^2;$$
$$7^2 + 24^2 = 25^2; \qquad 17^2 + 144^2 = 145^2;$$
$$8^2 + 15^2 = 17^2; \qquad 20^2 + 21^2 = 29^2;$$

$$9^2 + 40^2 = 41^2; \qquad 24^2 + 143^2 = 145^2;$$
$$11^2 + 60^2 = 61^2; \qquad 57^2 + 176^2 = 185^2;$$
$$13^2 + 84^2 = 85^2; \qquad 120^2 + 209^2 = 241^2;$$

и т. д.

Рассматривая эти группы, убеждаемся, что в каждой из них есть четное число («четный катет»). Случайность ли это? Или все три пифагоровы числа не могут быть нечетными?

**Решение**

Станем рассуждать «от противного».

Допустим, что все три пифагоровы числа нечетные;

$$2x + 1; \quad 2y + 1; \quad 2z + 1.$$

Квадраты их:

$$(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1,$$
$$(2y + 1)^2 = 4y^2 + 4y + 1,$$
$$(2z + 1)^2 = 4z^2 + 4z + 1.$$

Сумма первых двух из этих чисел, например,

$$(2x + 1)^2 + (2^y + 1)^2, \text{ составляет}$$
$$4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = 4x^2 + 4y^2 + 4x + 4y + 2,$$

т. е. число четное (кратное 2) и, очевидно, не может равняться нечетному числу $4z^2 + 4z + 1$. Поэтому группы из нечетных пифагоровых чисел не существует.

Остается еще одна возможность: оба «катета» нечетные, а «гипотенуза» — «четная». Нетрудно доказать, что такая комбинация не существует. В самом деле: если «катеты» имеют вид

$$2x + 1 \text{ и } 2y + 1,$$

то сумма их квадратов равна

$$4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = 4(x^2 + x + y^2 + \mathrm{y}) + 2,$$

т. е. представляет собою число, которое при делении на 4 дает в остатке 2. Между тем квадрат всякого четного числа должен делиться на 4 без остатка. Значит, сумма квадратов двух нечетных чисел не может быть квадратом четного числа; иначе говоря, наши три числа — не пифагоровы.

Итак, мы должны заключить, что в группе пифагоровых чисел один из «катетов» необходимо должен быть четным. Эта задача соприкасается тесно с геометрией, но она все же по существу относится к свойствам чисел и, следовательно, должна быть рассматриваема как арифметическая.

Пифагоровы числа обладают вообще рядом любопытных особенностей, которые мы перечисляем далее без доказательств:

1) Один из «катетов» должен быть кратным трем.

2) Один из «катетов» должен быть кратным четырем.

4) Одно из пифагоровых чисел должно быть кратно пяти.

Читатель может удостовериться в наличии этих свойств, просматривая приведенные выше примеры групп пифагоровых чисел.

## ТЕОРЕМА СОФИИ ЖЕРМЕН

Вот задача, предложенная известной французской математичкой Жермен: Доказать, что каждое число вида $a^4 + 4$ есть составное (если $a$ не равно 1).

**Решение**

Доказательство вытекает из следующих преобразований:

$$a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 + 4 - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - 4a^2 =$$
$$= (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 - 2a)\,(a^2 + 2 + 2a).$$

Число $a^4 + 4$ может быть, как мы убеждаемся, представлено в виде произведения двух множителей, не равных ему самому и единице[1]; иными словами, оно — *составное.*

## СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА

Число так называемых простых чисел, т. е. целых чисел, не делящихся без остатка ни на какие другие целые числа, кроме единицы и самих себя, — бесконечно велико.

Начинаясь числами 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31..., ряд их простирается без конца. Вклиниваясь между числами составными, они разбивают натуральный ряд чисел на более или менее длинные участки составных чисел. Какой длины бывают эти участки? Следует ли где-нибудь подряд, например, тысяча составных чисел, не прерываясь ни одним простым числом?

Можно доказать, — хотя это и кажется неправдоподобным, — что участки составных чисел между простыми бывают *любой длины.* Нет границы для длины таких участков: они могут состоять из тысячи, из миллиона, из триллиона и т. д. составных чисел.

Мы докажем это, если найдем общее выражение для ряда из $n$ составных чисел, каждое из которых на единицу больше предыдущего. Для удобства придется в этом случае пользоваться условным символом $n!$, который обозначает произведение всех чисел от 1 до $n$ включительно. Например, $5! = 1 \times \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$. Мы сейчас докажем, что ряд

---

[1] Последнее — потому что $a^2 + 2 - 2a = (a^2 - 2a + 1) + 1 = (a - 1)^2 + 1 \neq 1$, если $a \neq 1$).

$[(n + 1)! + 2]$, $[(n + 1)! + 3]$, $[(n + 1)! + 4]$ ... до $[(n + 1)! + n + 1]$ включительно

состоит из $n$ последовательных составных чисел.

Числа эти идут непосредственно друг за другом в натуральном ряду, так как каждое следующее на 1 больше предыдущего. Надо доказать, однако, что все они — составные.

Первое число

$$(n + 1)! + 2 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \dots \times (n + 1) + 2$$

— четное, так как оба его слагаемые содержат множитель 2. А всякое четное число, большее 2 — составное.

Второе число

$$(n + 1)! + 3 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \dots (n + 1) + 3$$

состоит из двух слагаемых, каждое из которых кратно 3. Значит, и это число составное.

Третье число

$$(n + 1)! + 4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \dots (n + 1) + 4$$

делится без остатка на 4, так как состоит из слагаемых, кратных 4.

Подобным же образом устанавливаем, что следующее число

$$(n + 1)! + 5$$

кратно 5, и т. д. Иначе говоря, каждое число нашего ряда содержит множитель, отличный от единицы и его самого; оно является, следовательно, составным.

Если вы желаете написать например, пять последовательных составных чисел, вам достаточно в приведенное раньше общее выражение подставить вместо $n$ число 5. Вы получаете ряд

$$722,\ 723,\ 724,\ 725,\ 726.$$

Но это не единственный ряд из 5 последовательных составных чисел. Есть и другие. Например

$$62,\ 63,\ 64,\ 65,\ 66.$$

Или еще меньшие числа:

$$24,\ 25,\ 26,\ 27,\ 28.$$

Попробуем теперь решить задачу:

Написать *десять* последовательных составных чисел.

**Решение**

На основании ранее сказанного устанавливаем, что первое из искомых десяти чисел есть

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots \times 10 \times 11 + 2 = 39\,816\,802.$$

Искомая серия чисел, следовательно, такова:

39 816 802, 39 816 803, 39 816 804 и т. д.

Однако существуют серии из десяти гораздо меньших составных чисел. Так, можно указать на серию даже не из десяти, а из тринадцати составных последовательных чисел уже во второй сотне:

114, 115, 116, 117 и т. д. до 126 включительно.

## ЧИСЛО ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Мы сейчас убедились, что практически всегда возможно найти ряд из любого числа последовательных составных чисел — из тысячи, из миллиона, из квадриллиона и т. д. Существование сколь угодно длинных серий последовательных чисел сплошь *составных* способно возбудить сомнение в том, действительно ли ряд *простых* чисел не имеет конца. Не лишним будет поэтому привести здесь доказательство бесконечности ряда простых чисел.

Доказательство это принадлежит гениальному основателю геометрии, древнегреческому математику Евклиду и входит в его знаменитые «Начала». Оно относится к разряду доказательств «от противного». Предположим, что ряд простых чисел конечен, и обозначим последнее простое число в этом ряду буквою $N$. Составим произведение

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \dots N = N!$$

и прибавим к нему 1. Получим

$$N! + 1.$$

Число это не делится без остатка ни на одно из чисел, меньших, чем $N$, — всякий раз получится остаток 1. Но, быть может, оно делится на какое-нибудь число, *большее*, чем $N$? Что же это, однако, может быть за делитель? Конечно, не простое число, так как простых чисел, бóльших, нежели $N$, не существует (мы ведь из этого исходим). Значит, оно составное, разлагающееся на множители. Но среди этих множителей должно непременно быть меньшее $N$ (потому что разлагаемое число меньше $N!$), а мы уже знаем, что $N! + 1$ не делится ни на одно из чисел, меньших $N$, — следовательно, не может делиться и на их произведение или на число, содержащее множителем хотя бы одно из них.

Итак, нельзя было принять, что ряд простых чисел конечен: предположение это приводит к противоположному заключению. Какую бы длинную серию последовательных составных чисел мы ни встретили в ряду натуральных чисел, мы можем быть убеждены, что за нею найдется еще бесконечное множество простых чисел.

## ОТВЕТСТВЕННЫЙ РАСЧЕТ

В вычислительной практике встречаются такие чисто арифметические выкладки, выполнение которых без помощи облегчающих методов алгебры чрезвычайно затруднительно. Пусть требуется, например, найти результат таких действий:

$$\frac{2}{1+\dfrac{1}{90\,000\,000\,000}}.$$

(Вычисление это необходимо для того, чтобы установить, вправе ли современная техника пользоваться прежним законом сложения скоростей, не считаясь с теми изменениями, которые внесены в механику теорией относительности. Согласно старой механике, скорость тела, участвующего в двух одинаково направленных движениях, каждое со скоростью 1 км в секунду, равна 2 км в секунду. Новое же учение дает для этой скорости выражение, приведенное выше. На сколько же разнятся эти результаты? Уловима ли разница для тончайших измерительных приборов? Для выяснения этого важного вопроса и приходится выполнить такое вычисление.)

Сделаем это вычисление двояко: сначала обычным арифметическим путем, а затем покажем, как получить результат приемами алгебры. Достаточно одного взгляда на приведенные далее длинные ряды цифр, чтобы убедиться в неоспоримых преимуществах алгебраического способа.

Прежде всего преобразуем нашу «многоэтажную» дробь:

$$\frac{2}{1+\dfrac{1}{90\,000\,000\,000}} = \frac{180\,000\,000\,000}{90\,000\,000\,001}.$$

Произведем теперь деление числителя на знаменатель.

180000000000 | 90000000001

90000000001 | 1,99999999977

899999999990

810000000009

899999999810

810000000009

899999998010

810000000009

899999980010

810000000009

899999800010

810000000009

899998000010

810000000009

899980000010

810000000009

899800000010

810000000009

898000000010

810000000009

880000000010

810000000009

700000000010

630000000007

70000000003

Вычисление, как видите, утомительное, кропотливое; в нем легко запутаться и ошибиться. Между тем, для решения задачи важно в точности знать, на котором именно месте обрывается ряд девяток и начинается серия других цифр.

Сравните теперь, как коротко справляется с тем же расчетом алгебра. Она пользуется следующим приближенным равенством: если $a$ весьма малая дробь, то

$$\frac{1}{1+a} \approx 1 - a,$$

где знак ≈ означает «приближенно равно».

Убедиться в справедливости этого утверждения очень просто: сравним делимое 1 с произведением делителя на частное

$$1 = (1 + a)\,(1 - a),$$

т. е.

$$1 = 1 - a^2.$$

Так как $a$ — весьма малая дробь (например, 0,001), то $a^2$ еще меньшая дробь (0,000001), и ею можно пренебречь.

Применим сказанное к нашему расчету[1]:

$$\frac{2}{1+\dfrac{1}{90\,000\,000\,000}} = \frac{2}{1+\dfrac{1}{9\times10^{10}}} =$$

$$= 2 - 0{,}222\ldots\times10^{-10} = 2 - 0{,}0000000000222\ldots =$$

$$= 1{,}9999999999777\ldots$$

Мы пришли к тому же результату, что и раньше, но гораздо более коротким и надежным путем.

(Читателю, вероятно, интересно знать, каково значение полученного результата в поставленной нами задаче из области механики. Он показывает, что уклонение от старого закона сложения скоростей хотя и существует, но ни в коем случае не может быть обнаружено; оно сказывается на одиннадцатой цифре определяемого числа, а самые точные измерения длины не идут далее 7-й цифры, в технике же ограничиваются 3–4 цифрами. Мы вправе поэтому утверждать без всяких оговорок, что новая, эйнштейнова механика[2] практически ничего не меняет в современной технике.)

## КОГДА БЕЗ АЛГЕБРЫ ПРОЩЕ

Наряду со случаями, когда алгебра оказывает арифметике существенные услуги, бывают и такие, когда вмешательство алгебры вносит лишь ненужное осложнение. Истинное знание математики состоит в умении так распоряжаться математическими средствами, чтобы избирать всегда самый прямой и надежный путь, не считаясь с тем, относится ли метод решения задачи к арифметике, алгебре, геометрии и т. д. Полезно будет поэтому рассмотреть случай, когда привлечение алгебры способно лишь запутать решающего. Поучительным примером может служить следующая задача:

---

[1] Мы пользуемся далее приближенным равенством:

$$\frac{A}{1+a} \approx A\,(1-a).$$

[2] Напоминаем, что текст написан в 1930-х годах (*примеч. ред.*).

Найти наименьшее из всех тех чисел, которые при делении

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| на 2 | дают | в | остатке | 1 |
| » 3 | » | » | » | 2 |
| » 4 | » | » | » | 3 |
| » 5 | » | » | » | 4 |
| » 6 | » | » | » | 5 |
| » 7 | » | » | » | 6 |
| » 8 | » | » | » | 7 |
| » 9 | » | » | » | 8 |

**Решение**

Задачу эту предложили мне со словами: «Как вы решили бы такую задачу? Здесь слишком много уравнений, не выпутаться из них».

Ларчик просто открывается; никаких уравнений, никакой алгебры для решения задачи не требуется, — она решается несложным арифметическим рассуждением.

Прибавим к искомому числу единицу. Какой остаток даст оно тогда при делении на 2? Остаток $1 + 1 = 2$; другими словами — число разделится на 2 без остатка.

Точно так же разделится оно без остатка и на 3, на 4, на 5, на 6, на 7, на 8 и на 9. Наименьшее из таких чисел есть

$$9 \times 8 \times 7 \times 5 = 2520,$$

а искомое число — 2519, что нетрудно проверить испытанием.


**Глава четвертая**

# ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ

## ПОКУПКА ШЛЯПЫ

### Задача

Вы должны уплатить за купленную в магазине шляпу 19 руб. У вас одни лишь трехрублевки, у кассира — только пятирублевки. Можете ли вы при наличии таких денег расплатиться с кассиром и как именно?

Вопрос задачи сводится к тому, чтобы узнать, сколько должны вы дать кассиру трехрублевок, чтобы, получив сдачу пятирублевками, уплатить 19 рублей. Неизвестных в задаче два – число ($x$) трехрублевок и число ($y$) пятирублевок. Но можно составить только одно уравнение

$$3x - 5y = 19.$$

Хотя одно уравнение с двумя неизвестными имеет бесчисленное множество решений, это все же не значит, что задача наша неразрешима. Ведь вполне достаточно в данном случае найти хотя бы одно решение. Вот почему алгебра разработала метод решения подобных «неопределенных» уравнений. Заслуга введения их в алгебру принадлежит первому европейскому представителю этой науки, знаменитому математику древности Диофанту, отчего такие уравнения часто называют «диофантовыми».

**Решение**

На приведенном ранее примере покажем, как следует решать подобные уравнения.

Надо найти значения $x$ и $y$ в уравнении

$$3x - 5y = 19,$$

зная при этом, что $x$ и $y$ — числа целые и положительные (вспомним, что это — числа кредитных билетов).

Уединим то неизвестное, коэффициент которого меньше, т. е. член $3x$; получим:

$$3x = 19 + 5y,$$

откуда

$$x = \frac{19}{3} + \frac{5y}{3} = 6\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3}y = 6 + y + \frac{1 + 2y}{3}.$$

Так как $x$, 6 и $y$ — числа целые, то равенство может быть верно лишь при условии, что $\frac{1 + 2y}{3}$ есть также целое число. Обозначим его буквою $t$. Тогда

$$x = 6 + y + t,$$

где

$$t = \frac{1 + 2y}{3},$$

и, значит,

$$3t = 1 + 2y; \quad 2y = 3t - 1.$$

Из последнего уравнения определяем $y$:

$$y = \frac{3t}{2} - \frac{1}{2} = t + \frac{t - 1}{2}.$$

Так как $y$ и $t$ – числа целые, то и $\frac{t - 1}{2}$ должно быть некоторым целым числом $t_1$. Следовательно,

$$y = t + t_1,$$

причем

$$t_1 = \frac{t - 1}{2},$$

откуда

$$2t_1 = t - 1 \quad \text{и} \quad t = 2t_1 + 1.$$

Значение $t = 2t_1 + 1$ подставляем в предыдущие равенства:

$$y = t + t_1 = (2t_1 + 1) + t_1 = 3t_1 + 1;$$
$$x = 6 + y + t = 6 + (3t_1 + 1) + (2t_1 + 1) = 8 + 5t_1.$$

Итак, для $x$ и $y$ мы нашли выражения:

$$x = 8 + 5t_1,$$
$$y = 3t_1 + 1.$$

Числа $x$ и $y$, мы знаем, не только целые, но и положительные, т. е. бóльшие, чем 0. Следовательно,

$$8 + 5t_1 > 0,$$
$$3t_1 + 1 > 0.$$

Из этих неравенств находим:

$$5t_1 > -8 \quad \text{и} \quad t_1 > -\frac{8}{5};$$
$$3t_1 > -1 \quad \text{и} \quad t_1 > -\frac{1}{3}.$$

Этим величина $t_1$ ограничивается; она больше, чем $-\frac{1}{3}$ (и, значит, подавно больше $-\frac{8}{5}$). Но так как $t_1$ число целое, то для него возможны лишь следующие значения:

$$t_1 = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Соответствующие значения для $x$ и $y$ таковы:

$$x = 8 + 5t_1 = 8, 13, 18, 23 \ldots$$
$$y = 3t_1 + 1 = 1, 4, 7, 10 \ldots$$

Теперь мы установили, как может быть произведена уплата:
вы либо платите 8 трехрублевок, получая одну пятирублевку сдачи:

$$8 \times 3 - 5 = 19,$$

либо платите 13 трехрублевок, получая сдачи 4 пятирублевки:

$$13 \times 3 - 4 \times 5 = 19$$

и т. д.

Теоретически задача имеет бесчисленный ряд решений, практически же число решений ограничено, так как ни у покупателя, ни у кассира нет бесчисленного множества кредитных билетов. Если, например, у каждого всего по 10 билетов, то расплата может быть произведена только одним способом: выдачей 8 трехрублевок и получением 5 рублей сдачи. Как видим, неопределенные уравнения практически могут давать вполне определенные пары решений.

Возвращаясь к нашей задаче, предлагаем читателю в качестве упражнения самостоятельно решить ее вариант, а именно, — рассмотреть случай, когда у покупателя только пятирублевки, а у кассира только трехрублевки. В результате получите такой ряд решений:

$$x = 5, 8, 11 \dots$$
$$y = 2, 7, 12 \dots$$

Действительно:

$$5 \times 5 - 2 \times 3 = 19$$
$$8 \times 5 - 7 \times 3 = 19$$
$$11 \times 5 - 12 \times 3 = 19.$$

Мы могли бы получить эти результаты также и из готового уже решения основной задачи, воспользовавшись простым алгебраическим приемом. Так как давать пятирублевки и получать трехрублевки все равно, что «получать отрицательные пятирублевки» и «давать отрицательные трехрублевки», то новый вариант задачи решается тем же уравнением, которое мы составили для основной задачи:

$$3x - 5y = 19$$

при условии, что $x$ и $y$ – числа отрицательные. Поэтому из равенств

$$x = 8 + 5t_1,$$
$$y = 3t_1 + 1$$

мы, зная, что $x < 0$ и $y < 0$, выводим:

$$8 + 5t_1 < 0,$$
$$3t_1 + 1 < 0$$

и, следовательно,

$$t_1 < -\frac{8}{5}\ .$$

Принимая $t_1 = -2, -3, -4$ и т. д., получаем из предыдущих формул следующие значения для $x$ и $y$:

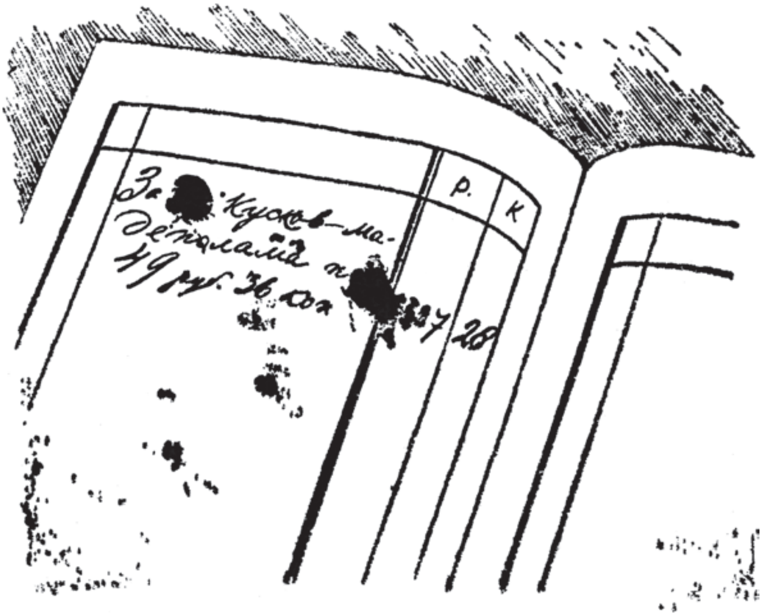
| $t_1 = -2$ | $-3$ | $-4$ |
|---|---|---|
| $x = -2$ | $-7$ | $-12$ |
| $y = -5$ | $-8$ | $-11$ |

Первая пара решений, $x = -2$, $y = -5$ означает, что покупатель «платит минус 2 трехрублевки» и «получает минус 5 пятирублевок», т. е. в переводе на обычный язык — платит 5 пятирублевок и получает сдачи 2 трехрублевки. Подобным же образом истолковываем и прочие решения.

## РЕВИЗИЯ КООПЕРАТИВА

**Задача**

При ревизии торговых книг кооператива одна из записей оказалась залитой чернилами и имела такой вид:




*«За ... кусков мадеполама по 49 р. 36 к. кусок ... 7 р. 28 к.».*

Невозможно было разобрать число проданных кусков, но было несомненно, что число это не дробное; в вырученной сумме можно было различить только последние три цифры, да установить еще, что перед ними были три каких-то других цифры.

Может ли ревизионная комиссия по этим следам установить запись?

**Решение**

Обозначим число кусков через $x$. Выученная сумма выразится в копейках через

$$4936\,x.$$

Число, выражаемое тремя залитыми цифрами в записи денежной суммы, обозначим через $y$. Это, очевидно, число тысяч копеек, а вся сумма в копейках изобразится так:

$$1000y + 728.$$

Имеем уравнение:

$$4936x = 1000y + 728,$$

или, после сокращения на 8,

$$617x - 125y = 91.$$

В этом уравнении $x$ и $y$ — числа целые, и притом у не больше 999, так как более чем из трех цифр оно состоять не может. Решаем уравнение, как раньше было указано:

$$125y = 617x - 91,$$

$$y = 5x - 1 + \frac{34 - 8x}{125} = 5x - 1 + \frac{2\,(17 - 4x)}{125} = 5x - 1 + 2t.$$

(Здесь мы приняли $\frac{617}{125} = 5 - \frac{8}{125}$, так как нам выгодно иметь возможно меньшие остатки.)

Дробь $\frac{2\,(17 - 4x)}{125}$ есть целое число, а так как 2 не делится на 125, то $\frac{17 - 4x}{125}$ должно быть целым числом, которое мы и обозначили через $t$.

Далее из уравнения

$$\frac{17 - 4x}{125} = t$$

имеем

$$x = 4 - 31t + \frac{1 - t}{4} = 4 - 31t + t_1\,,$$

где

$$t_1 = \frac{1 - t}{4}\,,$$

и, следовательно,

$$4t_1 = 1 - t; \quad t = 1 - 4t_1,$$

$$x = 125t_1 - 27, \quad y = 617t_1 - 134.$$ [1]

Мы знаем, что

$$100 \le y < 1000.$$

Следовательно,

$$100 \le (617t_1 - 134) < 1000,$$

[1] Обратите внимание на то, что коэффициенты при $t_1$ равны коэффициентам при $x$ и $y$ в исходном уравнении $617x - 125y = 91$, причем у одного из коэффициентов при $t_1$ знак обратный. Это не случайность: можно доказать, что так должно быть всегда.

откуда

$$t_1 \geq \frac{234}{617} \quad \text{и} \quad t_1 \geq \frac{1134}{617}$$

или

$$0{,}4 < t_1 < 1{,}8.$$

Очевидно, для $t_1$ существует только одно целое значение:

$$t_1 = 1,$$

и тогда $x = 98$, $y = 483$: было отпущено 98 кусков на сумму 4837 р. 28 к. Запись восстановлена.

## ПОКУПКА ПОЧТОВЫХ МАРОК

### Задача

Требуется на 1 рубль купить 20 штук почтовых марок — 15-копеечных, 5-копеечных и копеечных. Сколько окажется марок каждого достоинства?

### Решение

В этом случае у нас имеется два уравнения с тремя неизвестными:

$$15x + 5y + z = 100,$$
$$x + y + z = 20,$$

где $x$ — число марок 15-копеечных, $y$ — пятикопеечных, $z$ — копеечных. Вычтя из первого уравнения второе, получим одно уравнение с двумя неизвестными:

$$14x + 4y = 80.$$

Делим все члены на 4:

$$7 \times \frac{x}{2} + y = 20.$$

Очевидно, $\frac{x}{2}$ число целое. Обозначим его через $t$. Имеем

$$7t + y = 20; \quad y = 20 - 7t, \quad x = 2t.$$

Подставляем выражения для $x$ и $y$ во второе из исходных уравнений:

$$2t + 20 - 7t + z = 20;$$

имеем

$$z = 5t.$$

Так как $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$, то нетрудно установить границы для $t$:

$$0 < t < 2\frac{6}{7},$$

откуда заключаем, что для t возможны только два целых значения

$$t = 1 \quad \text{и} \quad t = 2,$$

Соответствующие значения $x$, $y$, $z$ таковы:

| $t =$ | 1 | 2 |
|---|---|---|
| $x =$ | 2 | 4 |
| $y =$ | 13 | 6 |
| $z =$ | 5 | 10 |

Проверка:

$$2 \times 15 + 13 \times 5 + 5 = 100$$
$$4 \times 15 + 6 \times 5 + 10 = 100$$

Итак, покупка марок может быть произведена только двумя способами. Следующая задача в том же роде.

## ПОКУПКА ФРУКТОВ

**Задача**

На 5 руб. куплено 100 штук разных фруктов. Цены на фрукты в кооперативе таковы:

арбузы, штука 50 к.
яблоки » 10 »
сливы » 1 »

Сколько фруктов каждого рода было куплено?

**Решение**

Обозначив число арбузов через x, яблок через $y$ и слив через $z$, составляем два уравнения:

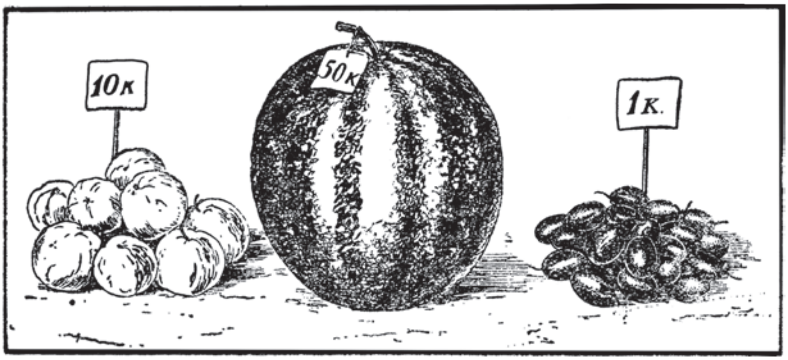
$$\begin{cases} 50x + 10y + z = 500 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

Вычтя из первого второе, имеем

$$49x + 9y = 400.$$

Дальнейший ход решения таков:

$$y = \frac{400 - 49x}{9} = 44 - 5x + \frac{4(1 - x)}{9} = 44 - 5x + 4t;$$




$$t = \frac{1 - x}{9}; \quad x = 1 - 9t;$$

$$y = 44 - 5(1 - 9t) + 4t = 39 + 49t.$$

Из неравенств

$$1 - 9t > 0 \quad \text{и} \quad 39 + 49t > 0$$

устанавливаем, что

$$\frac{1}{9} > t > -\frac{39}{49}$$

и, следовательно, $t = 0$. Поэтому

$$x = 1, \quad y = 39.$$

Подставив эти значения $x$ и $y$ во второе уравнение, определяем $z = 60$.

Итак, куплен был 1 арбуз, 39 яблок и 60 слив.

Других комбинаций быть не может.

## ОТГАДАТЬ ДЕНЬ РОЖДЕНИЯ

**Задача**

Уменье решать неопределенные уравнения дает возможность выполнить следующий математический фокус.

Вы предлагаете товарищу умножить число даты его рождения на 12, а номер месяца — на 31. Он сообщает вам сумму обоих произведений, и вы вычисляете по ней дату рождения.

Если, например, товарищ ваш родился 9 февраля, то он выполняет следующие выкладки:

$$9 \times 12 = 108, \quad 2 \times 31 = 62, \quad 108 + 62 = 170.$$

Это последнее число, 170, он сообщает вам, и вы определяете задуманную дату. Как?

**Решение**

Задача сводится к решению неопределенного уравнения

$$12x + 31y = 170$$

в целых и положительных числах, причем число месяца $x$ не больше 31, а номер месяца $y$ не больше 12. Решаем:

$$6x + 31 \times \frac{y}{2} = 85,$$

$$6x + 31t = 85, \quad y = 2t,$$

$$x = \frac{85 - 31t}{6} = 14 - 5t + \frac{1 - t}{6} = 14 - 5t + t_1,$$

$$1 - t = 6t_1; \quad t = 1 - 6t_1,$$

$$x = 14 - 5(1 - 6t_1) + t_1 = 9 + 31t_1,$$

$$y = 2(1 - 6t_1) = 2 - 12t_1.$$

Зная, что $31 \geq x > 0$ и $12 \geq y > 0$, находим границы для $t_1$:

$$-\frac{5}{6} \leq t_1 \leq \frac{22}{31}$$

Следовательно,

$$t_1 = 0; \quad x = 9; \quad y = 2.$$

Дата рождения 9 число второго месяца, т. е. 9 февраля. Теоретически можно доказать, что какая бы дата ни отгадывалась, уравнение имеет всегда только одно решение, т. е. фокус удается без отказа.

## ПРОДАЖА КУР

**Старинная задача**

Три сестры пришли на рынок с курами. Одна принесла для продажи 10 кур, другая 16, третья 26. До полудня они продали часть своих кур по одной и той же цене. После полудня, опасаясь, что не все куры будут проданы, они понизили цену и распродали оставшихся кур снова по одинаковой цене. Домой все трое вернулись с одинаковой выручкой: каждая сестра получила от продажи 35 рублей.

По какой цене продавали они кур до и после полудня?

**Решение**

Обозначим число кур, проданных каждой сестрой до полудня, через $x$, $y$, $z$. Во вторую половину дня они продали $10 - x$, $16 - y$, $26 - z$. Цену до полудня обозначим через $m$, после полудня — через $n$. Для ясности сопоставим эти обозначения:

| | Число кур | | | Цена |
|---|---|---|---|---|
| До полудня ..... | $x$ | $y$ | $z$ | $m$ |
| После полудня .. | $10 - x$ | $16 - y$ | $26 - z$ | $n$ |

Первая сестра выручила:

$$mx + n\,(10 - x);\ \text{следовательно,}\ mx + n\,(10 - x) = 35,$$

вторая —

$$my + n\,(16 - y);\ \text{следовательно,}\ my + n\,(16 - y) = 35,$$

третья —

$$mz + n\,(26 - z);\ \text{следовательно,}\ mz + n\,(26 - z) = 35.$$

Преобразуем эти три уравнения; получаем:

$$\begin{cases} (m - n)\,x + 10n = 35 \\ (m - n)\,y + 16n = 35 \\ (m - n)\,z + 26n = 35 \end{cases}$$

Вычтя из третьего уравнения первое, затем второе, получим последовательно

$$\begin{cases} (m - n)\,(z - x) + 16n = 0 \\ (m - n)\,(z - y) + 10n = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (m - n)\,(x - z) = 16n \\ (m - n)\,(y - z) = 10n. \end{cases}$$

Делим первое из этих уравнений на второе:

$$\frac{x - z}{y - z} = \frac{8}{5}, \quad \text{или} \quad \frac{x - z}{8} = \frac{y - z}{5}.$$

Так как $x$, $y$, $z$ — числа целые, то и разности $x - z$, $y - z$ тоже целые числа. Поэтому для существования равенства

$$\frac{x - z}{8} = \frac{y - z}{5}$$

необходимо, чтобы $x - z$ делилось на 8, а $y - z$ на 5. Следовательно:

$$\frac{x - z}{8} = t = \frac{y - z}{5},$$

откуда

$$x = z + 8t,$$
$$y = z + 5t.$$

Так как $x < 10$, то

$$z + 8t < 10.$$

При целых и положительных $z$ и $t$ последнее неравенство удовлетворяется только в одном случае: когда $z = 1$ и $t = 1$. Подставив эти значения в уравнения

$$x = z + 8t \quad \text{и} \quad y = z + 5t,$$

находим $x = 9$, $y = 6$.

Теперь, обращаясь к уравнениям

$$mx + n\,(10 - x) = 35,$$
$$my + n\,(16 - y) = 35,$$
$$mz + n\,(26 - z) = 35$$

и подставив в них значения $x$, $y$, $z$, узнаем цены, по каким продавались куры:

$$m = 3\tfrac{3}{4} \text{ руб.}; \quad n = 1\tfrac{1}{4} \text{ руб.}$$

Итак, куры продавались до полудня по 3 руб. 75 коп., после полудня по 1 руб. 25 коп.

## ДВА ЧИСЛА И ЧЕТЫРЕ ДЕЙСТВИЯ

### Задача

Предыдущую задачу, которая привела к трем уравнениям с пятью неизвестными, мы решили не по общему образцу, а по свободному математическому соображению. Точно так же будем решать и следующие задачи, приводящие к неопределенным уравнениям второй степени.

Вот первая из них.

Над двумя целыми числами сделаны были следующие 4 действия:

1) их сложили;
2) вычли из большего меньшее;
3) перемножили;
4) разделили большее на меньшее.

Полученные результаты сложили — составилось 243. Найти эти числа.

### Решение

Если большее число $x$, меньшее $y$, то

$$x + y + x - y + xy + \frac{x}{y} = 243.$$

Делаем следующие преобразования:

$$2x + xy + \frac{x}{y} = 243$$

$$2xy + xy^2 + x = 234y$$

$$x\,(2y + y^2 + 1) = 234y.$$

Но $(2y + y^2 + 1) = (y + 1)^2$. Поэтому

$$x = \frac{243y}{(y+1)^2}.$$

Чтобы $x$ было целым числом, знаменатель $(y + 1)^2$ должен быть одним из делителей числа 243 (потому что $y$ не может иметь общие множители с $y + 1$). Зная, что $243 = 3^5$, заключаем, что 243 делится только на следующие числа, являющиеся точными квадратами: 1, $3^2$, $9^2$. Итак, $(y + 1)^2$ должно быть равно 1, $3^2$ или $9^2$, откуда (вспоминая, что $y$ должно быть *положительным*) находим, что $y = 8$ или 2. Тогда

$$x = \frac{243 \times 8}{81} \quad \text{или} \quad \frac{243 \times 2}{9}.$$

Итак, искомые числа: 24 и 8 или 52 и 2.

## КАКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНИК?

**Задача**

Стороны прямоугольника выражаются целыми числами. Какой длины должны они быть, чтобы сумма их численно равнялась площади прямоугольника?

**Решение**

Обозначив стороны прямоугольника через $x$ и $y$, составляем уравнение

$$2x + 2y = xy.$$

Преобразуем его:

$$x\,(y - 2) = 2y,$$

$$x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2}{1 - \frac{2}{y}}$$

Чтобы $x$ было числом положительным, необходимо иметь

$$1 - \frac{2}{y} > 0 \quad \text{и, следовательно,} \quad y > 2.$$

Итак, $y$ должно быть больше 2. Это условие необходимо, чтобы $x$ было положительным, но еще недостаточно. Заметим, что

$$x = \frac{2y}{y-2} = \frac{2(y-2)+4}{y-2} = 2 + \frac{4}{y-2}.$$

Так как $x$ должно быть целым числом, то и выражение $\frac{4}{y-2}$ должно быть целым числом. Но при $y > 2$ это возможно лишь, если $y = 3$, 4 или 6. Соответствующие значения $x$ будут 6, 4, 3. Итак, искомая фигура есть либо прямоугольник со сторонами 3 и 6, либо квадрат со сторонами 4.

## ДВА ДВУЗНАЧНЫХ ЧИСЛА

### Задача

Числа 46 и 96 обладают любопытной особенностью: их произведение не меняет своей величины, если переставить их цифры.

Действительно,

$$46 \times 96 = 4416 = 64 \times 69.$$

Требуется установить, существуют ли еще другие пары двузначных чисел с тем же свойством. Как разыскать их все?

### Решение

Обозначив цифры искомых чисел через $x$ и $y$, $z$ и $t$, составляем уравнение

$$(10x + y)(10z + t) = (10y + x)(10t + z).$$

Раскрыв скобки, получаем после упрощений

$$xz = yt,$$

где $x$, $z$, $y$, $t$ — целые числа, меньшие 10. Для разыскания решений составляем из 9 цифр все пары с равными произведениями:

$$\begin{array}{ll} 1 \times 4 = 2 \times 2 & 2 \times 8 = 4 \times 4 \\ 1 \times 6 = 2 \times 3 & 2 \times 9 = 3 \times 6 \\ 1 \times 8 = 4 \times 2 & 3 \times 8 = 4 \times 6 \\ 1 \times 9 = 3 \times 3 & 4 \times 9 = 6 \times 6 \\ 2 \times 6 = 3 \times 4 & \end{array}$$

Всех равенств 9. Из каждого можно составить одну или две искомых группы чисел. Например, из равенства $1 \times 4 = 2 \times 2$ составляем одно решение:

$$12 \times 42 = 21 \times 24.$$

Из равенства $1 \times 6 = 2 \times 3$ находим два решения:

$$12 \times 63 = 21 \times 36; \quad 13 \times 62 = 31 \times 26.$$

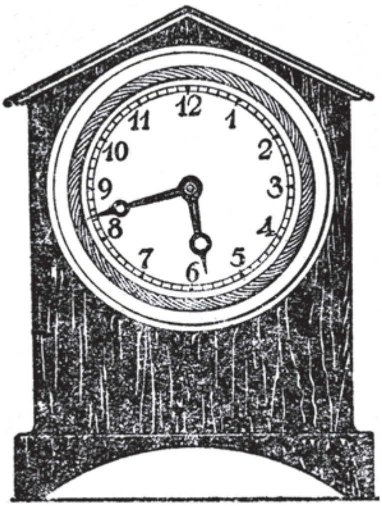
Таким образом разыскиваем следующие 14 решений:

$$\begin{array}{ll} 12 \times 42 = 21 \times 24 & 23 \times 96 = 32 \times 69 \\ 12 \times 63 = 21 \times 36 & 24 \times 63 = 42 \times 36 \\ 12 \times 84 = 21 \times 48 & 24 \times 84 = 42 \times 48 \\ 13 \times 62 = 31 \times 26 & 26 \times 93 = 62 \times 39 \\ 13 \times 93 = 31 \times 39 & 34 \times 86 = 43 \times 68 \\ 14 \times 82 = 41 \times 28 & 36 \times 84 = 63 \times 48 \\ 23 \times 64 = 32 \times 46 & 46 \times 96 = 64 \times 69 \end{array}$$

## ОБМЕН ЧАСОВЫХ СТРЕЛОК

### Задача

Биограф и друг знаменитого физика А. Эйнштейна, небезызвестный математик А. Мошковский[1], желая однажды развлечь своего приятеля во время болезни, предложил ему задачу, относящуюся к рассматриваемому нами отделу алгебры.




«— Возьмем, — сказал Мошковский, — положение стрелок в 12 часов. Если бы в этом положении большая и малая стрелки обменялись местами, они дали бы все же правильные показания. Но в другие моменты, — например, в 6 часов, взаимный обмен стрелок привел бы к абсурду, к положению, какого на правильно идущих часах быть не может: минутная стрелка не может стоять на 6, когда часовая показывает 12. Возникает вопрос:

Когда и как часто стрелки часов занимают такие положения, что замена одна другой дает новое положение, тоже возможное на правильных часах?

— Да, — ответил Эйнштейн, — это вполне подходящая задача для человека, вынужденного из-за болезни оставаться в постели: достаточно интересная и не слишком легкая. Боюсь только, что развлечение продлится недолго: я уже напал на путь к решению.

И, приподнявшись на постели, он несколькими штрихами набросал на бумаге схему, изображающую условия задачи. Для решения ему понадобилось не больше

[1] *Александр Мошковский* (1851–1934) — немецко–польский писатель, издатель, популяризатор науки (*примеч. ред.*).

времени, чем мне на формулировку задачи. Получилось неопределенное уравнение, которое он решил в целых числах».

Как же решается эта задача?

**Решение**

Будем измерять расстояния стрелок по кругу циферблата от точки, где цифра 12, в 60-х долях окружности.

Так как минутная стрелка обходит полный круг в час, а часовая успевает в то же время пройти только $\frac{1}{12}$ часть круга, то каждое деление, составляющее $\frac{1}{60}$ круга, минутная стрелка проходит в 1 минуту, а часовая — в 12 минут.

Пусть одно из требуемых положений стрелок наблюдалось в $x$ часов $y$ минут (рис. 8). Минутная стрелка находится от цифры 12 в $y$ делениях, часовая — на некотором расстоянии в $z$ делений. Установим зависимость между $x$, $y$ и $z$. Так как от 12 прошло $x$ часов, то минутная стрелка сделала $x$ полных оборотов и еще $y$ делений, т. е. в итоге продвинулась на $60x + y$ делений. Часовая стрелка, движущаяся в 12 раз медленнее, прошла 12-ю долю от $60x + y$, значит, ее расстояние ($z$ делений) от цифры 12 составляет

$$z = \frac{60x + y}{12}.$$

Когда стрелки обменяются местами, часы будут показывать новое число $x_1$ часов и $z$ минут, причем часовая стрелка будет отстоять от цифры 12 на $y$ делений. Это расстояние $y$ должно равняться

$$y = \frac{60x_1 + z}{12}.$$

Имеем систему двух уравнений с 4 неизвестными:

$$\begin{cases} z = \dfrac{60x + y}{12} \\[2ex] y = \dfrac{60x_1 + z}{12} \end{cases}$$

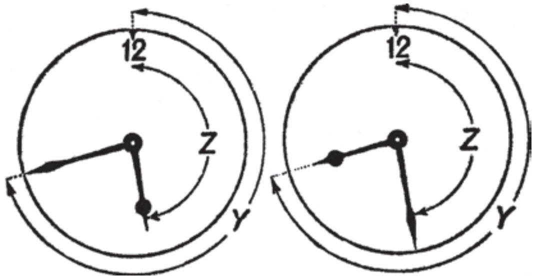



*Рис. 8*

в которых $x$ и $x_1$ целые числа от 0 до 11. [1] Чтобы найти эти значения неизвестных, выразим $z$ и $y$ через $x$ и $x_1$. Получим

$$y = \frac{60(x + 12x_1)}{143}$$

$$z = \frac{60(x_1 + 12x)}{143}$$

В этих двух выражениях $x$ и $x_1$ целые числа часов; они могут меняться от 0 до 11:

$$x = 0, 1, 2, 3, \ldots 11,$$
$$x_1 = 0, 1, 2, 3, \ldots 11.$$

Давая $x$ и $x_1$ эти значения, мы определим все требуемые моменты. Так как каждое из 12 значений $x$ можно сопоставлять с каждым из 12 значений $x_1$, то, казалось бы, что число всех решений равно $12 \times 12 = 144$. Но в действительности оно равно 143, потому что при $x = 0, x_1 = 0$ и при $x = 11, x_1 = 11$ получается одно и то же положение стрелок.

При $x = 0, x_1 = 0$ имеем

$$z = 0, y = 0,$$

т. е. часы показывают 12.

Всех возможных положений мы рассматривать не станем; возьмем лишь два примера.

$$x = 1, \qquad x_1 = 1,$$

$$y = \frac{60 \times 13}{143} = 5\frac{5}{11};$$

$$z = 5\frac{5}{11},$$

т. е. часы показывают 1 ч. 5 $\frac{5}{11}$ мин., и притом стрелки встречаются; их положение, конечно, может быть обменено (как и при всех других встречах стрелок).

Второй пример:

$$x = 5, \qquad x_1 = 8,$$

$$y = \frac{60\,(5 + 12 \times 8)}{143} = 42{,}3$$

$$z = \frac{60\,(8 + 12 \times 5)}{143} = 28{,}5$$

[1] Значения $x = 12, x_1 = 12$ практически равнозначны $x = 0, x_1 = 0$.

Соответствующие моменты: 5 ч. 42,3 мин. и 8 ч. 28,5 мин.

Число решений, мы знаем, 143. Чтобы найти все точки циферблата, которые дают требуемые положения стрелок, надо окружность циферблата разделить на 143 равные части: получим 143 точки, являющиеся искомыми. В промежуточных точках требуемые положения стрелок невозможны.

Первоначальным автором этой задачи является известный французский математик Ш. Лезан[1], прославившийся у нас талантливой книжкой «Начатки математики». Задача была опубликована им во французском «Журнале элементарной математики» в 1882 г.

## СТО ТЫСЯЧ ЗА ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Одна задача из области неопределенных уравнений приобрела в последние десятилетия громкую известность, так как за правильное ее решение завещано целое состояние: 100 000 немецких марок!

Задача состоит в том, чтобы доказать следующее положение, носящее название теоремы, или «великого предложения», Ферма:

> сумма одинаковых степеней двух целых чисел не может быть тою же степенью какого-либо третьего числа. Исключение составляет лишь вторая степень, для которой это возможно.

Иначе говоря, надо доказать, что уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

неразрешимо в целых числах для $n > 2$:

Поясним сказанное. Довольно легко подобрать сколько угодно пар чисел, сумма вторых степеней которых также есть вторая степень. Простейший пример: $3^2 + 4^2 = 5^2$. Но попробуйте составить аналогичный пример для третьих степеней: ваши поиски останутся тщетными[2].

Тот же неуспех ожидает вас и при подыскании примеров для четвертой, пятой, шестой и т. д. степеней. Это и утверждает «великое предложение Ферма».

Что же требуется от соискателей премии? Они должны доказать это положение. Дело в том, что теорема Ферма еще не доказана и висит, так сказать, в воздухе.

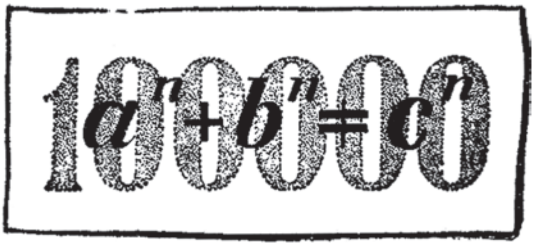
Прошло свыше двух столетий с тех пор, как она высказана, но математикам не удалось до сих пор найти ее доказательства. Величайшие математики

---

[1] *Шарль-Анж Лезан* (1841–1920) — французский математик (*примеч. ред.*).

[2] Любопытно, однако, что сумма кубов трех целых чисел может быть кубом четвертого целого числа, как, например, в ряду следующих четырех чисел:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$



трудились над этой проблемой, — однако в лучшем случае им удавалось доказать теорему лишь для того или иного отдельного показателя или для групп показателей; необходимо же найти общее доказательство для всякого целого показателя.

Замечательно, что неуловимое доказательство теоремы Ферма, по-видимому, однажды уже было найдено, но затем вновь утрачено. Автор теоремы, гениальный математик XVII в. Пьер Ферма[1] утверждал, что ее доказательство ему известно. Свое «великое предложение» он записал (как и ряд других теорем из теории чисел) в виде заметки на полях сочинения Диофанта, сопроводив его такой припиской:

«Я нашел поистине удивительное доказательство этого предложения, но здесь мало места, чтобы его привести».

Ни в бумагах великого математика, ни в его дружеской переписке, нигде вообще в другом месте следов этого доказательства найти не удалось.

Последователям Ферма пришлось идти самостоятельным путем. Вот результаты этих усилий: Эйлер (в 1770 г.) доказал теорему Ферма для третьей степени; для пятой степени[2] ее доказал Лежандр (в 1825 г.), для седьмой – Ламе и Лебег (1839). В 1849 г. Куммер доказал теорему для обширной группы степеней и между прочим — для всех показателей меньше ста. Эти последние работы далеко выходят за пределы той области математики, какая знакома была Ферма, и становится загадочным, как мог последний разыскать общее доказательство своего «великого предложения»[3].

Завещание, сделавшее теорему Ферма столь популярной, оставлено в 1907 году на имя геттингенской Академии наук. Вот текст соответствующего объявления этой академии, опубликованного 27 июня 1908 г.:

---

[1] Ферма (1603–1665) не был профессионалом-математиком. Юрист по образованию, советник парламента, он занимался математическими изысканиями лишь между делом. Это не помешало ему сделать ряд чрезвычайно важных открытий, которых он, впрочем, не публиковал, а по обычаю той эпохи сообщал в письмах к своим ученым друзьям: к Паскалю, Декарту, Гюйгенсу, Робервалю и др.

[2] Для составных показателей особого доказательства не требуются: эти случаи сводятся к случаям с первоначальными показателями.

[3] Теорема Ферма доказана в 1994 году английским и американским математиком *Эндрю Уайлсом* (прим. ред.).

«Согласно завещанию, оставленному на наше имя покойным доктором Павлом Вольфскелем[1] в Дармштадте, объявляется премия в 100 000 марок тому, кому раньше всех удастся найти доказательство „великой теоремы Ферма". Д-р Вольфскель обращает внимание на то, что Ферма высказал утверждение, что уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет целых решений для всех нечетных простых показателей. Теорема Ферма должна быть доказана либо в самой общей форме, либо в форме дополнения к исследованиям Куммера, — но во всяком случае для всех показателей $n$, для которых теорема вообще имеет место.

Премия учреждается на следующих условиях:

Геттингенской Академии наук принадлежит право свободно решить, кому должна быть присуждена премия. Никаких *рукописей*, имеющих отношение к соисканию премии, она не принимает; она рассматривает только такие математические сочинения, которые появились в журналах или выпущены отдельными книгами, имеющимися в продаже. Академия предлагает авторам подобных сочинений прислать ей 5 печатных экземпляров.

Академия слагает с себя ответственность за нерассмотрение работ, о которых она не была осведомлена, а также за недоразумения, могущие возникнуть из-за того, что истинный автор работы (или части ее) остался Академии неизвестным.

Присуждение премии последует не ранее двух лет с момента появления сочинения, достойного премии. В течение этого срока все германские и иные математики могут высказаться по поводу правильности предложенного решения.

Акт о присуждении премии не может быть оспариваем. Если к 13 сентября 2007 года премия не будет присуждена, то никаких притязаний на нее предъявлено быть не может».

К объявлению геттингенской Академии, которое приведено здесь с несущественными пропусками, интересно присоединить замечания, сделанные по этому поводу знаменитым германским математиком Ф. Клейном, ныне умершим:

«Со времени первого опубликования завещания Вольфскеля в геттингенскую Академию поступило уже несколько сот так называемых „доказательств" теоремы Ферма, и надо думать, что после официального объявления о премии число их значительно возрастет. При этом число подлинных математиков, участвующих в соискании, весьма незначительно. Бóльшая часть решений поступает от инженеров, учащихся, учителей и т. д. И ни один из соискателей не вступил на путь исследований, основанных на теории чисел, — путь, который во всяком случае имел в виду завещатель. Очевидно, желание овладеть 100 000 марок гораздо более распространено, чем интерес к глубоким соотношениям в области современной математики.

При таком положении дела, очевидно, невозможно и даже бесполезно для Академии вступать в переписку с отдельными соискателями по поводу ошибочности

[1] *Пауль Вольфскель* (1856–1906) — немецкий промышленник (*примеч. ред.*).

их доказательств. Академия выступит только тогда, когда ей будет доставлено правильное доказательство. Пока же она молчит, до сих пор, следовательно, правильное решение еще не предложено».

Какие ошибки возможны в поисках этого неуловимого доказательства, показывает случай с выдающимся немецким математиком Ф. Линдеманом.

В 1909 году он выпустил сочинение, в котором предложены были им два доказательства теоремы Ферма. Его готовы были уже считать лауреатом премии, как выяснилось, что в ход его выкладок вкрались ошибки: в одном месте — ошибочная подстановка, в другом — простая описка (показатель 6 вместо 5). Ошибки были обнаружены одним из русских математиков.

Необычайный в науке трюк выкинули немецкие математики Дюринги — отец и сын. Незадолго до империалистической войны[1] они печатно объявили, что доказательство теоремы Ферма ими найдено, но... они не желают его оглашать. Излишне добавлять, что подобные заявления никем не могут быть приняты серьезно.

Как бы то ни было, премия до сих пор никому не присуждена; только из процентов, наросших на завещанный капитал, была выдана некоторая сумма двум математикам за их работы, относящиеся к рассматриваемой проблеме.

Впрочем, завещатель, очевидно, и не ожидал быстрого разрешения поставленной задачи: завещание предусматривает столетний срок существования премии[2].

Среди читателей «Занимательной алгебры» нашлось немало таких, которые пытались разрешить задачу Ферма. К сожалению, они лишь увеличили и без того богатую коллекцию неправильных доказательств «великого предложения». Наиболее распространенная ошибка состояла в следующем: равенство $x^n + y^n = z^n$ преобразовывалось в такое, одна часть которого алгебраически разлагается на множители, содержащиеся в другой части. Насколько такой прием недоказателен, видно хотя бы из того, что, пользуясь им, легко «доказать» невозможность существования пифагоровых чисел, т. е. доказать неразрешимость в целых числах уравнения

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

В самом деле: представив его в виде

$$x^2 - z^2 = -y^2,$$

видим, что левая часть равенства делится на $x + z$ и на $x - z$, в то время как правая не делится на эти выражения. Но разве отсюда следует неразрешимость в целых числах уравнения $x^2 + y^2 = z^2$? Ряд примеров, приведенных на с. 212–213, служит ответом на этот вопрос.

[1] Я. П. имеет в виду Первую мировую войну 1914–1918 гг. (*примеч. ред.*).

[2] В настоящее время (1930-е гг.) в связи с послевоенной инфляцией марки премия Вольфскеля потеряла свою ценность.

В заключение небезынтересно отметить, что уравнение

$$x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}} = z^{\frac{1}{n}}$$

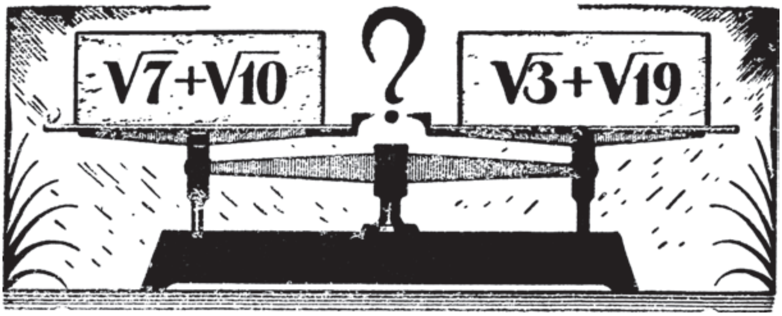
легко разрешается в целых и положительных числах для всякого целого $n$. Возьмем для примера $n = 5$. Тогда понадобится найти корни уравнения:

$$x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{5}} = z^{\frac{1}{5}}, \text{ или } \sqrt[5]{x} + \sqrt[5]{y} = \sqrt[5]{z};$$

выбрав для $x$ и $y$ пятые степени любых чисел, например, приравняв $x = 2^5$, $y = 3^5$, получаем для $\sqrt[5]{z}$ значение $\sqrt[5]{2^5} + \sqrt[5]{3^5} = 5$, откуда $z = 5^5$. Уравнение превращается в тождество:

$$32^{\frac{1}{5}} + 243^{\frac{1}{5}} = 3125^{\frac{1}{5}}.$$

Интересующимся историей и современным состоянием задачи Ферма можно рекомендовать брошюру А. Я. Хинчина «Великая теорема Ферма». Написанная специалистом брошюра эта предполагает у читателя лишь элементарные знания из математики.




**Глава пятая**

# ШЕСТОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ

## ШЕСТОЕ ДЕЙСТВИЕ

Сложение и умножение имеют по одному обратному действию, которое называется вычитанием и делением. Пятое математическое действие — возвышение в степень — имеет *два* обратных: разыскание основания и разыскание показателя. Разыскание основания есть *шестое* математическое действие и называется извлечением корня. Нахождение показателя — седьмое действие — называется логарифмированием. Причину того, что возвышение в степень имеет два обратных действия, в то время как сложение и умножение — только по одному, понять нетрудно: разыскание каждого из чисел, участвующего в сложении и умножении, производится одинаковыми приемами, но разыскание основания степени и ее показателя выполняется совершенно различным образом.

Шестое действие, извлечение корня, обозначается знаком $\sqrt{\phantom{x}}$. Не все знают, что это — видоизменение латинской буквы *r*, начальной в слове, означающем «корень». Было время (XVI в.), когда знаком корня служила не строчная, а прописная буква *R*, а рядом с ней ставилась первая буква латинских слов «квадратный» (*q*) или кубический (*c*), чтобы указать, какой именно корень требуется извлечь[1]. Например, писали

$$R.\ q.\ 4352$$

вместо нынешнего обозначения

$$\sqrt{4\,352}\,.$$

[1] В учебнике математики Магницкого, по которому обучались у нас в течение всей первой половины XVIII в., вовсе нет особого знака для действия извлечения корня.

Если прибавить к этому, что в ту эпоху еще не вошли в общее употребление нынешние знаки для плюса и минуса, а вместо них писали буквы *p.* и *m.*, и что наши скобки заменяли знаками $\llcorner\ \lrcorner$, то станет ясно, какой необычный для современного глаза вид должны были иметь тогда алгебраические выражения.

Вот пример из книги старинного математика Бомбелли (1572 г.):

$$R.c. \llcorner R.q.\ 4\,352\ p.\ 16 \lrcorner\ \mathrm{m.}\ R.c. \llcorner R.q.\ 4\,352\ m.\ 16 \lrcorner$$

Мы написали бы то же самое иными знаками:

$$\sqrt[3]{\sqrt{4\,352}+16}-\sqrt[3]{\sqrt{4\,352}-16.}$$

Кроме обозначения $\sqrt[n]{a}$ теперь употребляется для того же действия еще и другое, $a^{\frac{1}{n}}$, весьма удобное в смысле обобщения: оно наглядно подчеркивает, что каждый корень есть не что иное, как степень, показатель которой — дробное число. Оно предложено было замечательным голландским математиком XVI в. Стевином[1].

## НАКИДКИ

### Задача

Чтобы показать, как может возникнуть извлечение корня даже высоких степеней в практическом обиходе, рассмотрим следующую задачу.

Товар, прежде чем дойти до потребителя, прошел восемь учреждений, каждое из которых накидывало одинаковое число процентов к той цене, по какой само получало. В результате потребителю пришлось приобретать товар с надбавкой в 100% к первоначальной цене.

Сколько процентов накидывало каждое учреждение?

### Решение

Если первоначальная цена товара $a$ и каждое учреждение накидывало $x$ процентов, то второе учреждение платило за товар

$$a + a \times \frac{x}{100} = a\left(1+\frac{x}{100}\right);$$

третье учреждение получило товар за цену

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)+a\left(1+\frac{x}{100}\right)\frac{x}{100} = a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right) = a\left(1+\frac{x}{100}\right)^2.$$

[1] *Симон Стевин* (1548/1549–1620) — фламандский математик, механик и инженер (*примеч. ред.*).

Таким же образом мы найдем, что четвертое учреждение приобрело товар по цене

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)=a\left(1+\frac{x}{100}\right)^3.$$

Восьмое — по цене

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)^7.$$

А до потребителя, после восьмой накидки, товар дошел по цене

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)^8.$$

Из условия задачи известно, что окончательная цена была выше первоначальной на 100%, т. е. равнялась $2a$; следовательно,

$$a\left(1+\frac{x}{100}\right)^8=2a \quad \text{и} \quad \left(1+\frac{x}{100}\right)^8=2,$$

откуда

$$1+\frac{x}{100}=\sqrt[8]{2}.$$

Чтобы вычислить $\sqrt[8]{2}$, представим этот корень в виде

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

и вычислим последовательно:

$$\sqrt{2}=1{,}41; \quad \sqrt{1{,}41}=1{,}19; \quad \sqrt{1{,}19}=1{,}09;$$

Значит,

$$1+\frac{x}{100}=1{,}09 \text{ и } x=9.$$

Каждое учреждение накидывало 9%.

## ИЗ ЗАДАЧ ЭДИСОНА

### Задача

Твердое знание алгебры предполагает уверенное обращение с радикалами, прочные навыки в безошибочном их преобразовании. На практике это — умение целесообразно преобразовывать сложные выражения, содержащие радикалы, приводя их к более простому виду, весьма важно, — и недаром в числе вопросов, предложенных Эдисоном юным соискателям его стипендии, мы находим довольно сложную задачу этого рода.

Вот она:

Упростить выражение

$$\frac{1}{\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}} \times$$

$$\times \left[ \frac{(\sqrt{x+1}+1)\,\frac{1}{2}\,(x+1)^{-\frac{1}{2}} - (\sqrt{x+1}-1)\,\frac{1}{2}\,(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x+1}+1)^{2}} \right]$$

**Решение**

Займемся сначала числителем дроби, заключенной в скобки. Вынеся за скобки

$$\frac{1}{2}\,(x+1)^{-\frac{1}{2}},$$

получим:

$$\frac{1}{2}\,(x+1)^{-\frac{1}{2}}\,(\sqrt{x+1}+1-\sqrt{x+1}+1) =$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\,(x+1)^{-\frac{1}{2}} = (x+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Дробь, стоящую впереди квадратных скобок, представим в виде

$$\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}$$

и умножим числитель и знаменатель этой дроби на ее числитель.

$$\frac{(\sqrt{x+1}+1)^{2}}{(\sqrt{x+1}-1)\,(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{(\sqrt{x+1}+1)^{2}}{(\sqrt{x+1})^{2}-1} = \frac{(\sqrt{x+1}+1)^{2}}{x}.$$

Мы привели первоначальное выражение к виду:

$$\frac{(\sqrt{x+1}+1)^{2}}{x} \times \frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x+1}+1)^{2}}\ .$$

После сокращения и несложного преобразования оно упрощается в

$$\frac{1}{x\sqrt{x+1}}\ .$$

## ЧТО БОЛЬШЕ?

### Задача первая

Что больше: $\sqrt[5]{5}$ или $\sqrt{2}$?

Эту и следующие задачи требуется решить, *не вычисляя значения корней*.

### Решение

Возвысив оба выражения в 10-ю степень, получаем

$$\left(\sqrt[5]{5}\right)^{10} = 5^2 = 25 \qquad \left(\sqrt{2}\right)^{10} = 2^5 = 32,$$

так как 32 > 25, то

$$\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}.$$

### Задача вторая

Что больше: $\sqrt[4]{4}$ или $\sqrt[7]{7}$?

### Решение

Возвысив оба выражения в 28-ю степень, получаем

$$\left(\sqrt[4]{4}\right)^{28} = 4^7 = 2^{14} = 2^7 \times 2^7 = 128^2$$

$$\left(\sqrt[7]{7}\right)^{28} = 7^4 = 7^2 \times 7^2 = 49^2.$$

Так как $128^2 > 49^2$, то и

$$\sqrt[4]{4} > \sqrt[7]{7}.$$

### Задача третья

Что больше:

### Решение

Возвысив оба выражения в квадрат, получаем:

$$\left(\sqrt{7} + \sqrt{10}\right)^2 = 17 + 2\sqrt{70}$$

$$\left(\sqrt{3} + \sqrt{19}\right)^2 = 22 + 2\sqrt{57}.$$

Уменьшим оба выражения на 17; у нас останется:

$$2\sqrt{70} \quad \text{и} \quad 5 + 2\sqrt{57}.$$

Возвышаем эти выражения в квадрат. Имеем:

$$280 \text{ и } 253 + 20\sqrt{57}.$$

Отняв по 253, сравниваем

$$27 \text{ и } 20\sqrt{57}.$$

Так как $\sqrt{57}$ больше 7, то $20\sqrt{57} > 27$ и, следовательно,

$$\sqrt{3} + \sqrt{19} > \sqrt{7} + \sqrt{10}.$$

## РЕШИТЬ ОДНИМ ВЗГЛЯДОМ

**Задача**

Взгляните внимательнее на уравнение $x^{x^3} = 3$ и скажите, чему равен $x$.

**Решение**

Каждый, хорошо освоившийся с алгебраическими символами, сообразит, что

$$x = \sqrt[3]{3}.$$

В самом деле:

$$x^3 = (\sqrt[3]{3})^3 = 3.$$

Но если

$$x^3 = 3,$$

то

$$x = \sqrt[3]{3}.$$

Для кого это «решение одним взглядом» является непосильным, тот может облегчить себе поиски неизвестного следующим образом:

Пусть

$$x^3 = y.$$

Тогда

$$x = \sqrt[3]{y},$$

и уравнение получает вид

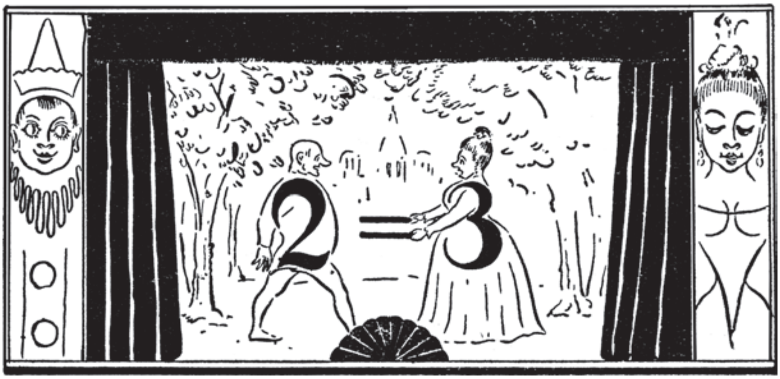
$$(\sqrt[3]{y})^y = 3.$$

Ясно, что $y = 3$ и, следовательно,

$$x = \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{3}.$$

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ

Шестое математическое действие дает возможность разыгрывать настоящие алгебраические комедии и фарсы на такие сюжеты, как $2 \times 2 = 5$, $2 = 3$ и т. п. Юмор подобных математических представлений кроется в том, что ошибка — довольно элементарная — несколько замаскирована и не сразу бросается в глаза. Исполним две пьесы этого комического репертуара из области алгебры.




**Задача первая**

«2 = 3».

На сцене сперва появляется неоспоримое равенство:

$$4 - 10 = 9 - 15.$$

В следующем «явлении» к обеим частям равенства прибавляется по равной величине 6¼:

$$4 - 10 + 6\tfrac{1}{4} = 9 - 15 + 6\tfrac{1}{4}.$$

Дальнейший ход комедии состоит в преобразованиях:

$$2^2 - 2 \times 2 \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \times 3 \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2.$$

Извлекая из обеих частей равенства квадратный корень, получают

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}\ .$$

Прибавляя по 5/2 к обеим частям, приходят к нелепому равенству

$$2 = 3.$$

В чем же кроется ошибка?

**Решение**

Ошибка проскользнула в следующем заключении: из того, что

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2,$$

был сделан вывод, что

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}\ .$$

Но из того, что квадраты равны, вовсе не следует, что равны первые степени. Ведь $(-5)^2 = 5^2$, но $-5$ не равно 5. Квадраты могут быть равны и тогда, когда первые степени разнятся знаками. В нашем примере мы имеем именно такой случай

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

но $-\frac{1}{2}$ не равно $\frac{1}{2}$.

**Задача вторая**

Другой алгебраический фарс

«2 × 2 = 5»

разыгрывается по образцу предыдущего и основан на том же трюке. На сцене появляется не внушающее сомнения равенство

$$16 - 36 = 25 - 45.$$

Прибавляются равные числа

$$16 - 36 + 20\tfrac{1}{4} = 25 - 45 + 20\tfrac{1}{4}$$

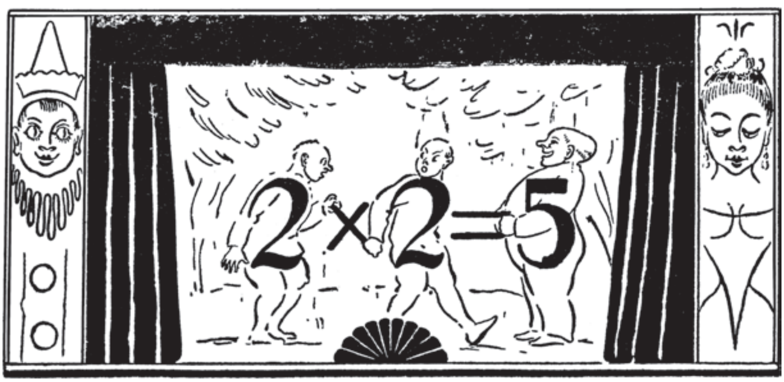
и делаются следующие преобразования

$$4^2 - 2 \times 4 \times \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2, \qquad \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2.$$

Затем с помощью того же незаконного заключения переходят к финалу:

$$4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}\ ; \qquad 4 = 5; \qquad 2 \times 2 = 5.$$

Эти комические случаи должны предостеречь малоопытного математика от неосмотрительных операций с уравнениями, содержащими неизвестное под знаком корня.



Глава шестая

# УРАВНЕНИЯ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

## РУКОПОЖАТИЯ

**Задача**

Любую задачу, приводящую к уравнению *первой* степени, можно решить и без уравнения, по свободному соображению. Иное дело — задачи, приводящие к уравнению *второй* степени: справиться с ними приемами арифметики удается очень редко, даже если задача и вовсе не сложна. Пусть читатель попытается арифметически решить, например, такую задачу.

Участники заседания обменялись рукопожатиями, и кто-то подсчитал, что всех рукопожатий было 66. Сколько человек явилось на заседание?

### Решение

Алгебраически задача решается весьма просто. Каждый из $x$ участников пожал $x - 1$ рук. Значит, всех рукопожатий должно было быть $x(x - 1)$; но надо принять во внимание, что когда Иванов пожимает руку Петрова, то и Петров пожимает руку Иванова; эти два рукопожатия следует считать за одно. Поэтому число пересчитанных рукопожатий вдвое меньше, нежели $x(x - 1)$. Имеем уравнение

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66$$

или, после преобразований,

$$x^2 - x - 132 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 528}}{2},$$

$$x_1 = 12; \quad x_2 = -11.$$

Так как отрицательное решение (–11 человек) в данном случае лишено реального смысла, мы его отбрасываем и сохраняем только первый корень: в заседании участвовало 12 человек.

Арифметически решить эту задачу можно лишь соответствующим подбором множителей числа 132: ряд проб приведет к числам 12 × 11.

## ПЧЕЛИНЫЙ РОЙ

### Задача

В древней Индии распространен был своеобразный вид спорта — публичное соревнование в решении головоломных задач. Индусские математические руководства имели отчасти целью служить пособием для подобных состязаний на первенство в умственном спорте. «По изложенным здесь правилам, — пишет составитель одного из таких учебников, — мудрый может придумать тысячу других задач. Как солнце блеском своим затмевает звезды, так и ученый человек затмит славу другого в народных собраниях, предлагая и решая алгебраические задачи». В подлиннике это высказано поэтичнее, так как вся книга написана стихами. Задачи тоже облекались в форму стихотворений. Приведем одну из них в прозаической передаче.

Пчелы, в числе, равном квадратному корню из половины всего их роя, сели на куст жасмина, оставив позади себя $^8/_9$ роя. И только одна пчелка из того же роя кружится возле лотоса, привлеченная жужжанием подруги, неосторожно попавшей в западню сладко пахнущего цветка. Сколько всего пчел в рое?

**Решение**

Для устного решения задача нелегка; она приводит к квадратному уравнению и потому не поддается разрешению арифметическими приемами. Если обозначить искомую численность роя через $x$, то уравнение имеет вид

$$\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x.$$

Мы можем придать ему более простой вид, введя вспомогательное неизвестное

$$y = \sqrt{\frac{x}{2}}.$$

Тогда $x = 2y^2$ и уравнение получится такое:

$$y + \frac{16y^2}{9} + 2 = 2y^2, \quad \text{или} \quad 2y^2 - 9y - 18 = 0.$$

Решив его, получаем два значения для $y$:

$$y_1 = 6; \quad y_2 = -\frac{3}{2}.$$

Соответствующие значения для $x$:

$$x_1 = 72; \quad x_2 = 4{,}5.$$

Так как число пчел должно быть целое и положительное, то удовлетворяет задаче только первый корень: рой состоял из 72 пчел. Проверим:

$$\sqrt{\frac{72}{2}} + \frac{8}{9} \times 72 + 2 = 6 + 64 + 2 = 72.$$

## СТАЯ ОБЕЗЬЯН

**Задача**

Другую индусскую задачу я имею возможность привести в стихотворной передаче, так как ее перевел автор превосходной книжечки «Кто изобрел алгебру?» Вас. Ив. Лебедев:

На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась;
Криком радостным двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Вместе сколько, ты мне скажешь,
Обезьян там было в роще?

**Решение**

Если общая численность стаи $x$, то

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x,$$

откуда

$$x_1 = 48, \quad x_2 = 16.$$

Задача имеет два положительных решения: в стае могло бы быть или 48 животных, или 16. Оба ответа вполне удовлетворяют задаче.

## ПРЕДУСМОТРИТЕЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ

В рассмотренных случаях полученными двумя решениями уравнений мы распоряжались различно, в зависимости от условия задачи. В первом случае мы отбросили отрицательный корень, как не отвечающий содержанию задачи; во втором отказались от дробного и отрицательного корня. В третьей задаче, напротив, воспользовались обоими корнями. Существование второго решения является иной раз полной неожиданностью не только для решившего задачу, но даже и для придумавшего ее. Приведем пример, когда уравнение оказывается словно предусмотрительнее того, кто его составил.

Мяч брошен вверх со скоростью 25 м в секунду. Через сколько секунд он будет на высоте 20 м над землей?

**Решение**

Для тел, брошенных вверх, при отсутствии сопротивления воздуха, механика устанавливает следующее соотношение между высотою поднятия ($h$), начальной скоростью ($v$), ускорением тяжести[1] ($g$) и числом секунд поднятия ($t$):

$$h = vt - \frac{gt^2}{2}.$$

Сопротивлением воздуха мы можем в данном случае пренебречь, так как при незначительных скоростях оно не столь велико, а мы за строгой точностью не гонимся. Ради упрощения расчетов примем $g$ равным не 9,8 м/с$^2$, а 10 м/с$^2$ (ошибка всего в 2%). Подставив в приведенную формулу значения $h$, $v$ и $g$, получаем уравнение:

$$20 = 25t - \frac{10t^2}{2},$$

а после упрощения

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

[1] Т. е. ускорением свободного падения (*примеч. ред.*).

Решив уравнение, имеем

$$t_1 = 1, \text{ и } t_2 = 4.$$

Мяч будет на высоте 20 м дважды: через 1 секунду и через 4 секунды.

Это может, пожалуй, показаться невероятным и, не вдумавшись, мы готовы второе решение отбросить. Но так поступить было бы ошибкой! Второе решение имеет полный смысл; мяч должен действительно дважды побывать на высоте 20 м: раз при подъеме и вторично — при обратном падении. Легко рассчитать, что мяч при начальной скорости 25 м в секунду должен лететь вверх 2,5 секунды и залететь на высоту 31,25 м. Достигнув через 1 секунду высоты 20 м, мяч будет подниматься еще 1,5 сек., затем столько же времени опускаться вниз снова до уровня 20 м и, спустя секунду, достигнет земли.

## ЗАДАЧА ЭЙЛЕРА

Стендаль в «Автобиографии» рассказывает следующее о годах своего учения:

«Я нашел у него (учителя математики) Эйлера и его задачи о числе яиц, которые крестьянка несла на рынок... Это было для меня открытием. Я понял, что значит пользоваться орудием, называемым алгеброй. Но, черт возьми, никто мне об этом ничего не говорил...»

Вот эта задача из «Введения в алгебру» Эйлера, произведшая на ум молодого Стендаля столь сильное впечатление.

Две крестьянки принесли на рынок вместе 100 яиц, одна больше, нежели другая; обе выручили одинаковые суммы. Первая сказала тогда второй: «Будь у меня твои яйца, я выручила бы 15 крейцеров». Вторая ответила: «А будь твои яйца у меня, я выручила бы за них 6 ⅔ крейцера». Сколько яиц было у каждой?

### Решение

Пусть у первой крестьянки $x$ яиц, у второй $100 - x$. Если бы первая имела $100 - x$ яиц, она выручила бы, мы знаем, 15 крейцеров. Значит, первая крестьянка продала яйца по цене

$$\frac{15}{100 - x}.$$

Таким же образом находим, что вторая крестьянка продавала яйца по цене

$$6\frac{2}{3} : x = \frac{20}{3x}.$$

Теперь определяется действительная выручка каждой крестьянки:

первой:

$$x \times \frac{15}{100 - x} = \frac{15x}{100 - x};$$

второй:

$$(100 - x) \times \frac{20}{3x} = \frac{20(100 - x)}{3x}.$$

Так как выручки обеих одинаковы, то

$$\frac{15x}{100 - x} = \frac{20(100 - x)}{3x}.$$

После преобразований имеем:

$$x^2 + 160x - 8000 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 40; \quad x_2 = -200.$$

Отрицательный корень в данном случае не имеет смысла; у задачи только одно решение: первая крестьянка принесла 40 яиц, вторая 60.

Задача может быть решена еще другим, более кратким способом. Этот способ гораздо остроумнее, но зато и отыскать его значительно труднее.

Предположим, что вторая крестьянка имела в $k$ раз больше яиц, чем первая. Выручили они одинаковые суммы; это значит, что первая крестьянка продавала свои яйца в $k$ раз дороже, чем вторая. Если бы перед торговлей они поменялись яйцами, то первая крестьянка имела бы в $k$ раз больше яиц, чем вторая, и продавала бы их в $k$ раз дороже. Это значит, что она выручила бы в $k^2$ больше денег, чем вторая. Следовательно, имеем:

$$\mathrm{k}^2 = 15 : \ 6\frac{2}{3} = \frac{45}{20} = \frac{9}{4};$$

отсюда

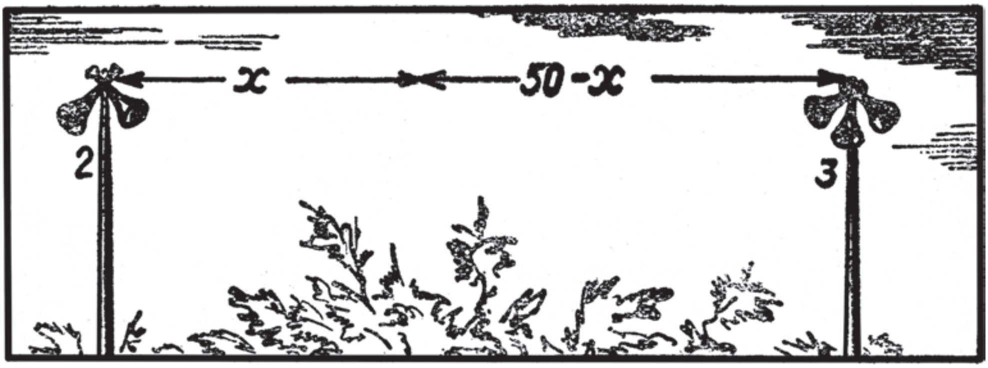
$$k = \frac{3}{2}.$$

Теперь остается 100 яиц разделить в отношении 3 : 2. Легко находим, что первая крестьянка имела 40, а вторая 60 яиц.

## ГРОМКОГОВОРИТЕЛИ

### Задача

На площади установлено 5 громкоговорителей, разбитые на две группы: в одной 2, в другой 3 аппарата. Расстояние между группами 50 м. Где надо стать, чтобы звуки обеих групп доносились с одинаковой силой?




**Решение**

Если расстояние искомой точки от меньшей группы обозначим через $x$, то расстояние ее от большей группы выразится через $50 - x$. Зная, что сила звука ослабевает пропорционально квадрату расстояния, имеем уравнение:

$$\frac{2}{3} = \frac{x^2}{(50 - x)^2},$$

которое после упрощения приводится к виду

$$x^2 + 200x - 5000 = 0.$$

Решив его, получаем два корня:

$$x_1 = 22{,}5$$
$$x_2 = -222{,}5.$$

Положительный корень прямо отвечает на вопрос задачи: точка равной слышимости расположена в 22,5 м от группы из двух громкоговорителей и, следовательно, в 27,5 м от группы трех аппаратов.

Но что означает отрицательный корень уравнения? Имеет ли он смысл?

Безусловно. Знак минус означает, что вторая точка равной слышимости лежит в направлении, *противоположном* тому, которое принято было за положительное при составлении уравнения.

Отложив от местонахождения двух аппаратов в требуемом направлении 222,5 м, найдем точку, куда звуки обеих групп громкоговорителей доносятся с одинаковой силой. От группы из трех аппаратов точка эта отстоит в 222,5 + + 50 = 272,5 м.


*Две точки равной слышимости*

Нетрудно убедиться, что пропорция

$$\frac{2}{3} = \frac{222{,}5^2}{272{,}5^2}$$

справедлива. Взяв произведение крайних членов

$$2 \times 272{,}5^2$$

и сравнив его с произведением средних

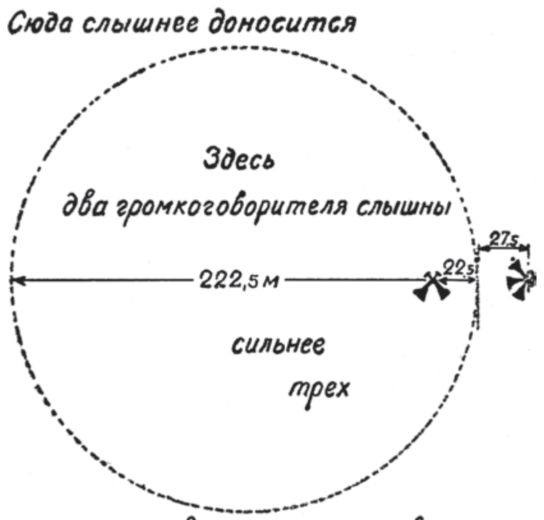
$$3 \times 222{,}5^2,$$

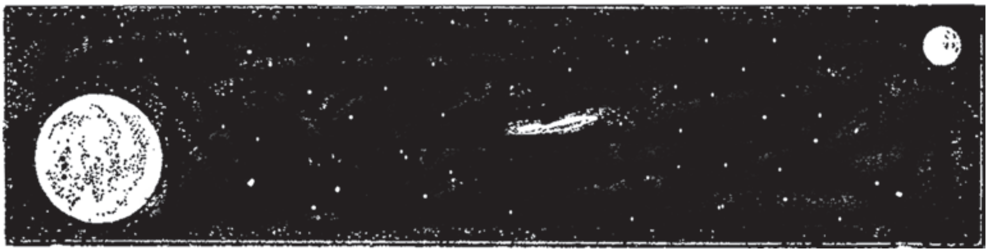
мы получим достаточное согласие:

$$149000 = 149000.$$

Согласие не идет далее третьей цифры — как и следовало ожидать, раз мы, решая уравнение, извлекли корень только с тремя цифрами (по числу цифр в подкоренном количестве).

Итак, нами разысканы две точки равной слышимости из тех, что лежат на прямой, соединяющей источники звука. Других таких точек на этой линии нет, — но они имеются вне ее. В подробных курсах геометрии доказывается, что геометрическое место точек, удовлетворяющих требованию нашей задачи, есть окружность, проведенная через обе сейчас найденные точки, как через концы диаметра. Окружность эта ограничивает участок, — как видим, довольно обширный, — внутри которого слышимость группы двух громкоговорителей пересиливает слышимость группы трех аппаратов; а за пределами круга наблюдается обратное явление.





## АЛГЕБРА ЛУННОГО ПЕРЕЛЕТА

Рассмотренная сейчас задача о громкоговорителях находится в неожиданно близкой связи с проблемой перелета на Луну на ракетном корабле. Многие высказывают опасения, не окажется ли чересчур трудным делом метко попасть в такую маленькую мишень на небе: ведь поперечник Луны усматривается нами под углом всего в полградуса. Ближайшее рассмотрение вопроса выясняет, что цель предприятия будет достигнута, если ракете удастся перелететь через точку равного притяжения Земли и Луны, — дальше ракетный корабль уже неизбежно должен двигаться к Луне под действием ее притяжения. Разыщем эту точку равного притяжения.

По закону Ньютона, сила взаимного притяжения двух тел прямо пропорциональна произведению притягивающихся масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Если масса Земли $M$, а расстояние ракеты от нее $x$, то сила, с какою Земля притягивает каждый грамм массы ракеты, выразится через

$$\frac{Mk}{x^2},$$

где $k$ — сила взаимного притяжения одного грамма одним граммом на расстоянии в 1 см.

Сила, с какой Луна притягивает каждый грамм ракеты в той же точке, равна

$$\frac{mk}{(l-x)^2},$$

где $m$ — масса Луны, а $l$ — ее расстояние от Земли (ракета предполагается находящейся между Землей и Луной на прямой линии, соединяющей их центры). Задача требует, чтобы

$$\frac{Mk}{x^2} = \frac{mk}{(l-x)^2}$$

или

$$\frac{M}{m} = \frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2}.$$

Отношение $\frac{M}{m}$ равно — как известно из астрономии — 81,6; подставив, имеем:

$$\frac{x^2}{l^2 - 2lx + x^2} = 81{,}6,$$

откуда

$$80{,}6x^2 - 163{,}2lx + 81{,}6l^2 = 0.$$

Решив уравнение относительно $x$, получаем:

$$x_1 = 0{,}9l\,; \quad x_2 = 1{,}11l.$$

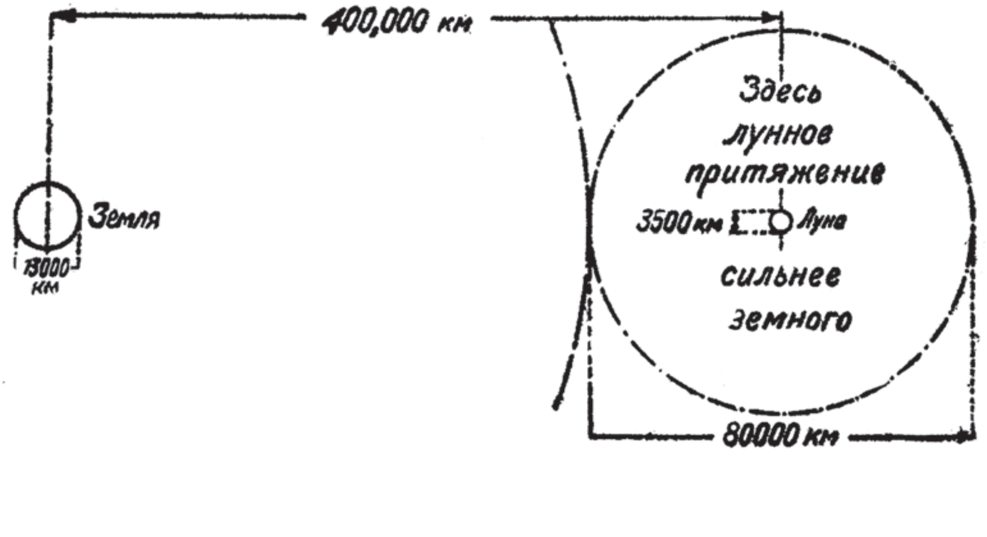
Как и в задаче о громкоговорителях, мы приходим к заключению, что на линии Земля — Луна существуют две искомые точки, — две точки, где ракета должна одинаково притягиваться обоими светилами; одна на 0,9 расстояния между ними, считая от центра Земли, другая – на 1,11 того же расстояния. Так как расстояние $l$ между центрами Земли и Луны = 384 000 км, то одна из искомых точек отстоит от земли на 342 000 км, другая – на 426 000 км.

Но мы знаем (см. предыдущую задачу), что тем же свойством обладают и все точки окружности, проходящей через найденные две точки как через концы диаметра. Если будем вращать эту окружность около линии, соединяющей центры Земли и Луны, то она опишет шаровую поверхность, все точки которой будут удовлетворять требованиям задачи.

Диаметр этого шара равен, как легко сообразить,

$$0{,}1l + 0{,}11l = 0{,}21l = 80\,000 \text{ км}.$$

Если ракета очутится внутри этого шара (обладая не слишком значительной скоростью), она неизбежно должна будет упасть на поверхность Луны, так как сила лунного притяжения в этой области превозмогает силу притяжения Земли.



Мишень, в которую должна попасть ракета, мы видим, гораздо больше, чем можно думать. Она занимает на небе не полградуса, а — как показывает несложный геометрический расчет — около 12°. Это значительно облегчает задачу звездоплавателей[1].

На этот раз уравнение оказалось словно прозорливее того, кто его составлял. Приступая к задаче, разве думали вы, что земное притяжение сильнее лунного не только впереди Луны, но и позади нее? Алгебраический анализ неожиданно раскрыл вам это обстоятельство и помог в точности разграничить сферы влияния обоих светил.

## «ТРУДНАЯ ЗАДАЧА»

Картина Богданова-Бельского «Трудная задача» известна многим, но мало кто из видевших эту картину вникал в содержание той «трудной задачи», которая на ней изображена. Состоит она в том, чтобы устным счетом быстро найти результат вычисления:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}.$$

Задача в самом деле нелегкая. С нею, однако, хорошо справлялись ученики того учителя, который с сохранением портретного сходства изображен на картине, именно С. А. Рачинского, профессора естественных наук, покинувшего университетскую кафедру, чтобы сделаться рядовым учителем сельской школы. Талантливый педагог культивировал в своей школе устный счет, основанный на виртуозном использовании свойств чисел. Числа 10, 11, 12, 13 и 14 обладают любопытной особенностью:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

Так как $100 + 121 + 144 = 365$, то легко рассчитать в уме, что воспроизведенное на картине выражение равно 2.

Алгебра дает нам средство поставить вопрос об этой интересной особенности ряда чисел более широко: единственный ли это ряд из пяти последовательных чисел, сумма квадратов первых трех из которых равна сумме квадратов двух последних?

[1] На подробностях проектов лунных перелетов мы здесь, конечно, останавливаться не можем. Интересующиеся этой проблемой найдут ее изложение и разбор связанных с ней математических вопросов в моей книге «Межпланетные путешествия», изд. 9-е, 1934.

**Решение**

Обозначив первое из искомых чисел через $x$, имеем уравнение:

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2 + (x+4)^2.$$

Удобнее, однако, обозначить через x не первое, а *второе* из искомых чисел. Тогда уравнение будет иметь более простой вид:

$$(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2 + (x+3)^2.$$

Раскрыв скобки и сделав упрощения, получаем:

$$x^2 - 10x - 11 = 0,$$

откуда

$$x = 5 \pm \sqrt{25+11}; \;\; x_1 = 11; \;\; x_2 = -1.$$

Существуют, следовательно, два ряда чисел, обладающих требуемым свойством: ряд Рачинского

$$10, 11, 12, 13, 14$$

и ряд

$$-2, -1, 0, 1, 2.$$

В самом деле,

$$(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2.$$

## СУММА КУБОВ

**Задача**

С рассмотренной сейчас задачей сходна следующая.

Найти четыре таких последовательных числа, куб последнего из которых равен сумме кубов трех предыдущих.

**Решение**

В этом случае уравнение получается более простого вида, если через $x$ обозначить *первое* из искомых чисел:

$$x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3.$$

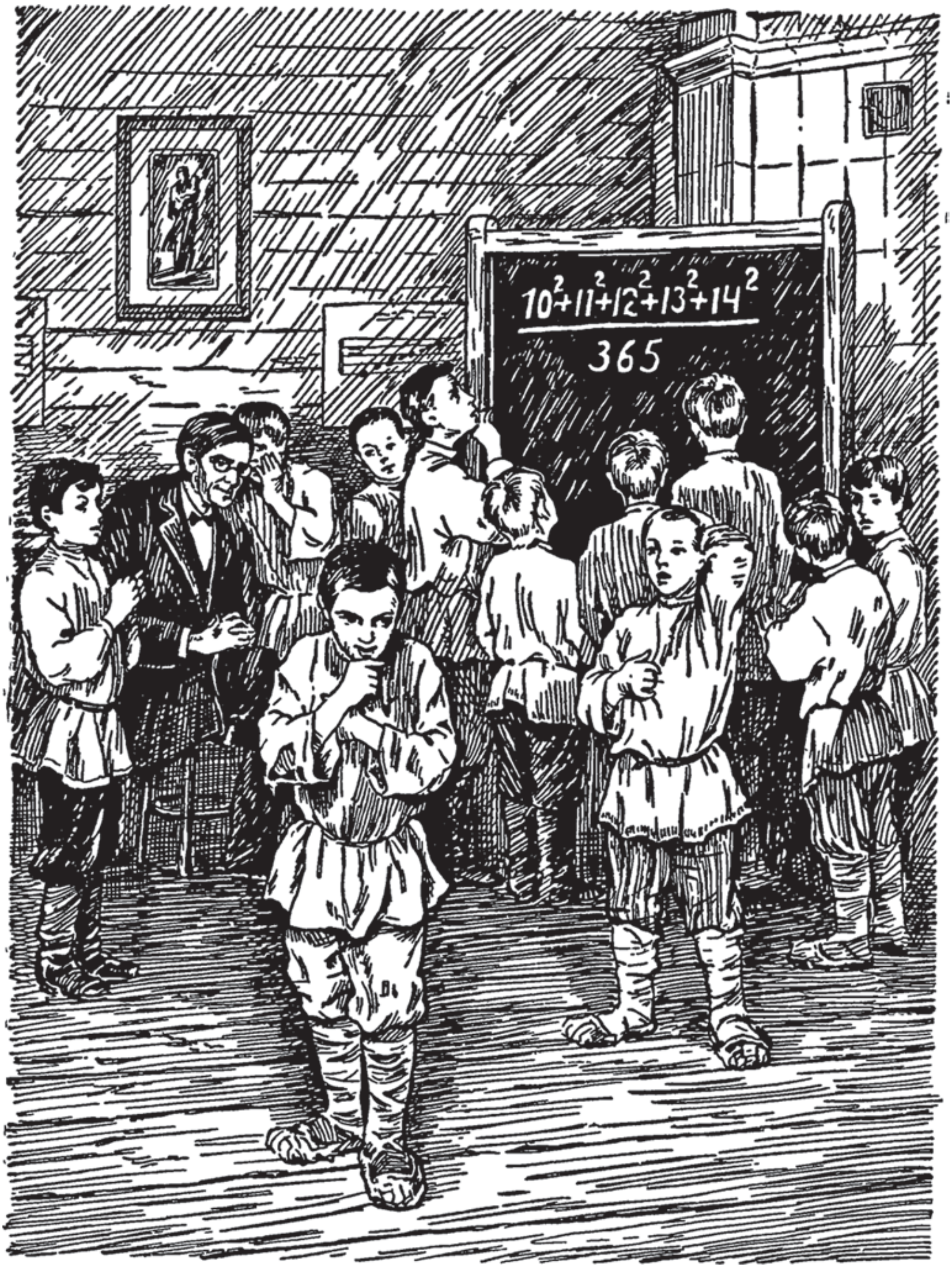
Раскрыв скобки и сделав приведение, получаем:

$$x^3 - 6x - 9 = 0.$$

Мы имеем уравнение *третьей* степени, которое однако, можно привести к квадратному. Для этого представим его в виде

$$x^3 - 9x + 3x - 9 = 0.$$

и преобразуем так:




*Н. П. Богданов-Бельский, «Трудная задача»*

$$x\,(x^2 - 9) + 3\,(x - 3) = 0$$
$$x\,(x + 3)\,(x - 3) + 3\,(x - 3) = 0$$
$$(x - 3)\,[x\,(x + 3) + 3] = 0$$
$$(x - 3)\,(x^2 + 3x + 3) = 0$$

Произведение двух множителей может равняться нулю, когда один из них или оба равны нулю, т. е когда

$$x - 3 = 0 \quad \text{или} \quad x^2 + 3x + 3 = 0.$$

Из первого уравнения следует, что $x = 3$: это один корень кубического уравнения. Два другие найдем, решив уравнение

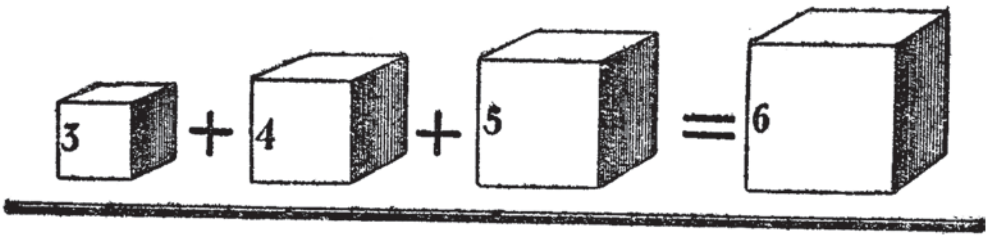
$$x^2 + 3x + 3 = 0,$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{3}.$$

Так как квадратный корень из отрицательного числа есть величина мнимая, то два последних корня приходится отбросить. Задача, следовательно, имеет только одно решение, а именно 3, 4, 5 и 6:

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Это означает, между прочим, что куб, ребро которого 6 см, равновелик сумме трех кубов, ребра которых равны 3 см, 4 см и 5 см — соотношение, которое, по преданию, весьма занимало Платона.




## КАКИЕ ЧИСЛА?

**Задача**

Найти три последовательных числа, отличающиеся тем свойством, что квадрат среднего на 1 больше произведения двух остальных.

**Решение**

Если первое из искомых чисел $x$, то уравнение имеет вид:

$$(x + 1)^2 = x\,(x + 2) + 1.$$

Раскрыв скобки, получаем

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1,$$

или 0 = 0, — равенство, из которого нельзя определить величину $x$. Это показывает, что составленное нами равенство есть тождество; оно справедливо при любом значении входящей в него буквы, а не при некоторых лишь, как в случае уравнения. Значит, всякие три последовательных числа обладают требуемым свойством. В самом деле, возьмем наугад числа

17, 18, 19.

Мы убеждаемся, что

$$18^2 - 17 \times 19 = 324 - 323 = 1.$$

Необходимость такого соотношения выступает нагляднее, если обозначить через $x$ второе число. Тогда получим равенство

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1),$$

т. е. очевидное тождество.

## ДВА ПОЕЗДА

### Задача

Два железнодорожных пути скрещиваются под прямым углом. К месту скрещения одновременно мчатся по этим путям два поезда: один со станции, находящейся в 40 км от скрещения, другой — со станции в 50 км от того же места скрещения. Первый делает в минуту 800 м, второй – 600 м.

Через сколько минут, считая с момента отправления, паровозы были в наименьшем взаимном расстоянии? И как велико это расстояние?

### Решение

Эта и следующие задачи принадлежат к весьма интересному роду задач на разыскание наибольшего или наименьшего значения некоторой величины. Они могут быть решены различными приемами, один из которых мы сейчас покажем.

Начертим схему движения поездов нашей задачи. Пусть прямые $AB$ и $CD$ — скрещивающиеся пути (рис. 9). Станция $B$ расположена в 40 км от точки скрещения $O$, станция $D$ — в 50 км от нее. Предположим, что спустя $x$ минут паровозы будут в кратчайшем взаимном расстоянии друг от друга $MN = m$. Поезд, вышедший из $B$, успел к этому моменту пройти путь $BM = 0{,}8x$, так как его минутная скорость равна 800 м = 0,8 км. Следовательно, $OM = 40 - 0{,}8x$. Точно так же найдем, что $ON = 50 - 0{,}6x$. По теореме Пифагора

$$MN = m = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{ON}^2} = \sqrt{(40 - 0{,}8x)^2 + (50 - 0{,}6x)^2}.$$

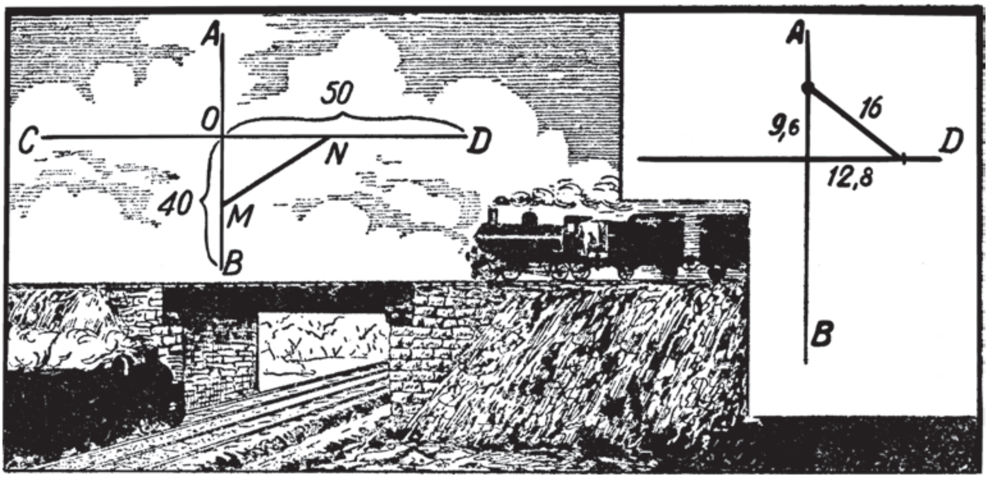



*Рис. 9 и 10*

Возвысив в квадрат обе части уравнения

$$m = \sqrt{(40 - 0{,}8x)^2 + (50 - 0{,}6x)^2}$$

и сделав упрощения, получаем

$$x^2 + 124x + 4100 - m^2 = 0.$$

Решив это уравнение относительно $x$, имеем

$$x = 62 \pm \sqrt{m^2 - 256}.$$

Так как $x$ — число протекших минут — не может быть мнимым, то $m^2 - 256$ должно быть величиной положительной, или, в крайнем случае, равняться нулю. Последнее соответствует *наименьшему* значению $m$, и тогда

$$m^2 = 256, \quad \text{т. е.} \quad m = 16.$$

Очевидно, что меньше 16-ти $m$ быть не может, — иначе $x$ становится мнимым. А если $m^2 - 256 = 0$, то $x = 62$.

Итак, паровозы окажутся всего ближе друг к другу через 62 мин., и взаимное их удаление тогда будет 16 км.

Определим, как они в этот момент расположены. Вычислим длину $OM$; она равна

$$40 - 62 \times 0{,}8 = -9{,}6.$$

Знак минус означает, что паровоз пройдет за скрещение на 9,6 км. Расстояние же $ON$ равно

$$50 - 62 \times 0{,}6 = 12{,}8,$$

т. е. второй паровоз не дойдет до скрещения на 12,8 км. Расположение паровозов показано на рис. 10. Как видим, оно вовсе не то, какое мы представляли себе до решения задачи. Уравнение оказалось достаточно терпимым и, несмотря на неправильную схему, дало правильное решение. Нетрудно понять, откуда эта терпимость: она обусловлена алгебраическими правилами знаков.

## ГДЕ УСТРОИТЬ ПОЛУСТАНОК?

**Задача**

В стороне от прямолинейного участка железнодорожного пути, в 20 км от него, лежит селение *B* (рис. 11).

Где надо устроить полустанок *C*, чтобы проезд от *A* до *B* по железной дороге *AC* и по шоссе *CB* отнимал возможно меньше времени? Скорость движения по железной дороге 0,8 км в минуту, по шоссе 0,2 км.

**Решение**

Обозначим расстояние *AD* (от *A* до основания перпендикуляра *BD* и *AD*) через *a*, *CD* через *x*. Тогда $AC = AD - CD = a - x$, а $CB = \sqrt{CD^2 + BD^2} = \sqrt{x^2 + 20^2}$. Время, в течение которого поезд проходит путь *AC*, равно

$$\frac{AC}{0{,}8} = \frac{a - x}{0{,}8}.$$

Время прохождения пути *CB* по шоссе равно

$$\frac{CB}{0{,}2} = \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0{,}2}.$$

А общая продолжительность переезда из *A* в *B* равна

$$\frac{a - x}{0{,}8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0{,}2}.$$

Эта сумма, которую обозначим через *m*, должна быть наименьшей.

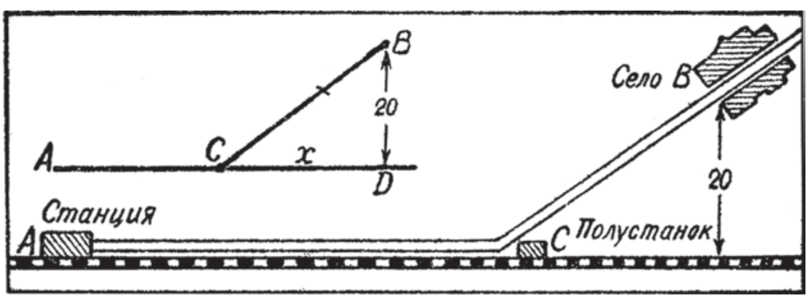



*Рис. 11*

Уравнение

$$\frac{a - x}{0{,}8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0{,}2} = m$$

представляем в виде

$$-\frac{x}{0{,}8} + \frac{\sqrt{x^2 + 20^2}}{0{,}2} = m - \frac{a}{0{,}8}.$$

Умножим на 0,8, имеем

$$-x + 4\sqrt{x^2 + 20^2} = 0{,}8\,m - a.$$

Обозначив $0{,}8\,m - a$ через $k$ и освободив уравнение от радикала, получаем квадратное уравнение

$$15x^2 - 2kx + 6400 - k^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{k \pm \sqrt{16k^2 - 96\,000}}{15}$$

и, следовательно,

$$x = \frac{k \pm 0}{15} = \frac{\sqrt{6\,000}}{15} = 5{,}16.$$

Полустанок должен быть устроен приблизительно в 5 км от точки $D$, какова бы ни была длина $a = AD$.

Но, разумеется, наше решение имеет смысл только для случаев, когда $x < a$, так как, составляя уравнение, мы считали выражение $a - x$ за число положительное.

Если $x = a = 5{,}16$, то полустанка вообще строить не надо; придется ехать прямо на станцию. Так же нужно поступать и в случаях, когда расстояние $a$ короче 5,16 км.

На этот раз мы оказываемся предусмотрительнее, нежели уравнение. Если бы мы слепо доверились уравнению, нам пришлось бы в рассматриваемом случае построить полустанок за станцией, — что было бы явной нелепостью: никто не минует станции, когда спешит попасть на поезд. Случай поучительный, показывающий, что при пользовании математическим орудием надо с должной осмотрительностью относиться к получаемым результатам: логика реальной действительности не всегда полностью совпадает с логикой того математического уравнения, в которое мы облекаем жизненные явления.

## КАК ПРОВЕСТИ ШОССЕ?

### Задача

Из приречного города $A$ надо направлять грузы в пункт $B$, расположенный на $a$ километров ниже по реке и в $d$ километрах от берега (рис. 12). Как провести шоссе от $B$ к реке, чтобы провоз грузов из $A$ и $B$ обходился возможно дешевле?

Провозная плата с тонно-километра по реке вдвое меньше, чем по шоссе.

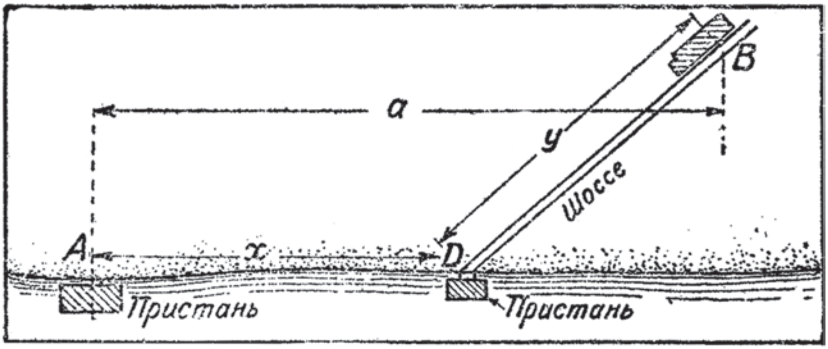



*Рис. 12*

### Решение

Обозначим расстояние $AD$ через $x$, длину $DB$ шоссе — через $y$, длину $AC$ — через $a$, $BC$ — через $d$.

Так как провоз по шоссе вдвое дороже, чем по реке, то сумма

$$x + 2y$$

должна быть, согласно требованию задачи, наименьшая. Обозначим это наименьшее значение через $m$. Имеем уравнение

$$x + 2y = m.$$

Но $x = a - DC$, а $DC = \sqrt{y^2 - d^2}$; наше уравнение получает вид:

$$a - \sqrt{y^2 - d^2} + 2y = m$$

или, по освобождении от радикала,

$$3y^2 + 4(a - m)y + (a - m)^2 + d^2 = 0.$$

Решаем его:

$$y = -\frac{2}{3}(a - m) \pm \frac{\sqrt{(a - m)^2 - 3d^2}}{3}.$$

Чтобы $y$ было вещественным, $(a - m)^2$ должно быть не меньше $3d^2$. Наименьшее значение $(a - m)^2$ равно $3d^2$, и тогда

$$m - a = d\sqrt{3};\ \ y = \frac{2(m-a)+0}{3} = \frac{2d\sqrt{3}}{3}.$$

$\operatorname{Sin} BDC = d : y$, т. е.

$$d : \frac{2d\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Но угол, синус которого равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$, заключает 60°. Значит, шоссе надо провести под углом в 60° к реке, — каково бы ни было расстояние $AC$.

Здесь наталкиваемся снова на ту же особенность, с которой мы встретились в предыдущей задаче. Решение имеет смысл только при определенном условии. Если пункт расположен так, что шоссе, проведенное под углом в 60° к реке, пройдет по ту сторону города $A$, то решение неприложимо; в таком случае надо непосредственно связать пункт $B$ с городом $A$ шоссе, вовсе не пользуясь рекой для перевозки.

## КОГДА ПРОИЗВЕДЕНИЕ НАИБОЛЬШЕЕ?

Для решения многих задач «на максимум и минимум», т. е. на разыскание наибольшего и наименьшего значений переменной величины, можно успешно пользоваться одной алгебраической теоремой, с которой мы сейчас познакомимся. Рассмотрим задачу:

На какие две части надо разбить данное число, чтобы произведение их было наибольшее?

### Решение

Пусть данное число $a$ и одна из частей, на которые мы разбили наше число, есть $x$. Произведение обеих частей обозначим через $m$:

$$x(a - x) = m.$$

Чтобы определить, при каком значении $x$ величина $m$ наибольшая, решим это уравнение относительно $x$:

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4m}}{2}.$$

Наибольшая величина $4m$ есть $a^2$, т. е.

$$4m = a^2;\ \text{тогда}\ m = \frac{a^2}{4}\quad \text{и}\ x = \frac{a}{2}.$$

Итак, число надо разделить *пополам*: произведение двух чисел, сумма которых неизменна, будет наибольшим тогда, когда эти числа равны между собой.

Рассмотрим тот же вопрос для *трех* чисел.

На какие три части надо разбить данное число, чтобы произведение их было наибольшее?

**Решение**

При решении этой задачи будем опираться на предыдущую. Пусть три части, на которые разбито данное число, — $x$, $y$, $z$; само же число обозначим через $a$. Имеем

$$x + y + z = a.$$

Допустим, что $x$ и $y$ не равны между собой. Если каждое из них заменим их полусуммой $\frac{x+y}{2}$, то сумма трех множителей не изменится:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + z = x + y + z = a.$$

Но мы уже знаем, что произведение равных множителей при неизменной сумме больше произведения неравных, т. е.

$$\frac{x+y}{2} \times \frac{x+y}{2} > xy.$$

Поэтому

$$\frac{x+y}{2} \times \frac{x+y}{2} \times z > xyz.$$

Вообще, если среди множителей $xyz$ есть хотя бы два неравных, то можно подобрать числа, которые, не меняя общей суммы, дадут произведение большее, чем $xyz$. И только при равенстве множителей произвести такой замены нельзя: произведение трех *равных* множителей при неизменной сумме наибольшее.

Подобным же образом можно доказать эту теорему и для *четырех* множителей, для *пяти* и т. д. Рассмотрим теперь более общий случай.

Найти, при каких значениях $x$ и $y$ выражение $x^p y^q$ наибольшее, если $x + y = $ a.

**Решение**

Надо найти, при каком значении $x$ выражение

$$x^p(a - x)^q$$

достигает наибольшей величины.

Умножим это выражение на число $\frac{1}{p^p q^q}$. Получим новое выражение

$$\frac{x^p}{p^p}\ \frac{(a-x)^q}{q^q},$$

которое, очевидно, достигает наибольшей величины тогда же, когда и первоначальное.

Представим сейчас полученное выражение в виде:

$$\underbrace{\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\ldots}_{p\ \text{раз}}\times\underbrace{\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\times\ldots}_{q\ \text{раз}}$$

Сумма всех множителей этого выражения равна

$$\underbrace{\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\frac{x}{p}+\ldots}_{p\ \text{раз}}+\underbrace{\frac{a-x}{q}+\frac{a-x}{q}+\frac{a-x}{q}+\ldots}_{q\ \text{раз}}=$$

$$=\frac{px}{p}+\frac{q(a-x)}{q}=x+a-x=a\ ,$$

т. е. величине постоянной.

На основании ранее доказанного (с. 270–271) заключаем, что произведение

$$\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\frac{x}{p}\times\ldots\times\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\times\frac{a-x}{q}\times\ldots$$

достигает максимума при равенстве всех его отдельных множителей, т. е. когда

$$\frac{x}{p}=\frac{a-x}{q}\ .$$

Зная, что $a - x = y$, получаем, переставив члены, пропорцию

$$\frac{x}{y}=\frac{p}{q}\ .$$

Итак, произведение $x^p y^q$ при постоянстве суммы $x + y$ достигает наибольшей величины тогда, когда

$$x : y = p : q.$$

Таким же образом можно доказать, что произведения

$$x^p y^q z^r,\ x^p y^q z^r t^u \text{ и т. п.}$$

при постоянстве сумм $x + y + z$, $x + y + z + t$ и т. д. достигают наибольшей величины тогда, когда

$$x : y : z = p : q : r,\ \ x : y : z : t = p : q : r : u \quad \text{и т. д.}$$

## КОГДА СУММА НАИМЕНЬШАЯ?

Читатель, желающий испытать свои силы на доказательстве полезных алгебраических теорем, пусть докажет сам следующие положения:

1. Сумма двух чисел, произведение которых неизменно, становится наименьшей, когда эти числа равны.

Например, для произведения 36:

$$4 + 9 = 13;\ 3 + 12 = 15;\ \ 2 + 18 = 20;\ \ 1 + 36 = 37;\ \text{и, наконец,}\ \ 6 + 6 = 12.$$

2. Сумма нескольких чисел, произведение которых неизменно, становится наименьшей, когда эти числа равны.

Например, для произведения 216:

$$3 + 12 + 6 = 21;\ 2 + 18 + 6 = 24;\ \ 9 + 6 + 4 = 19,\ \text{между тем как}$$
$$6 + 6 + 6 = 18.$$

* * *

На ряде примеров покажем, как применяются на практике эти теоремы.

## БРУС НАИБОЛЬШЕГО ОБЪЕМА

**Задача**

Из цилиндрического бревна надо выпилить прямоугольный брус наибольшего объема. Какой формы должно быть его сечение (рис. 13)?

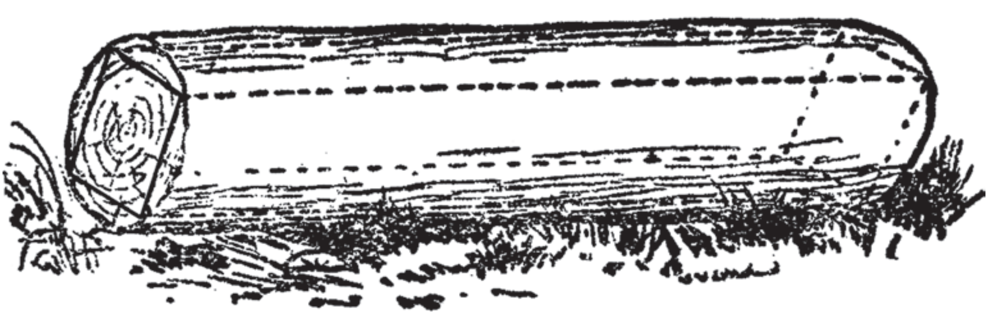


*Рис. 13*

### Решение

Если стороны прямоугольного сечения $x$ и $y$, то по теореме Пифагора

$$x^2 + y^2 = d^2,$$

где $d$ — диаметр бревна. Объем бруса наибольший, когда площадь его сечения наибольшая, т. е. когда $xy$ достигает наибольшей величины. Но если $xy$ наибольшая, то наибольшим будет и произведение $x^2y^2$. Так как сумма $x^2 + y^2$ неизменна, то произведение $x^2y^2$ наибольшее, когда $x^2 = y^2$, или $x = y$.

Итак, сечение бруса должно быть *квадратное*.

## ДВА ЗЕМЕЛЬНЫХ УЧАСТКА

### Задачи

1. Какой формы должен быть прямоугольный участок данной площади, чтобы длина ограничивающей его изгороди была наименьшая?

2. Какой формы должен быть прямоугольный участок, чтобы при данной длине изгороди площадь его была наибольшая?

### Решения

1. Форма прямоугольного участка определяется соотношением его сторон $x$ и $y$. Площадь участка со сторонами $x$ и $y$ равна $xy$, а длина изгороди $2x + 2y$. Длина изгороди будет наименьшей, если $x + y$ достигнет наименьшей величины.

При постоянном произведении $xy$ сумма $x + y$ наименьшая в случае равенства $x = y$. Следовательно, искомый прямоугольник — квадрат.

2. Если стороны прямоугольника $x$ и $y$, то длина изгороди $2x + 2y$, а площадь $xy$. Это произведение будет наибольшим тогда же, когда и произведение $4xy$, т. е. $2x \times 2y$; последнее же произведение при постоянной сумме его множителей $(2x + 2y)$ становится наибольшим при $2x = 2y$, т. е. когда участок имеет форму квадрата.

К известным нам из геометрии свойствам квадрата мы можем, следовательно, прибавить еще следующее: из всех прямоугольников он обладает наименьшим периметром при данной площади и наибольшей площадью при данном периметре.

## БУМАЖНЫЙ ЗМЕЙ

### Задача

Змею, имеющему вид сектора, желают придать такой фасон, чтобы он вмещал в данном периметре наибольшую площадь. Какова должна быть форма сектора?

### Решение

Уточняя требование задачи, мы должны разыскать, при каком соотношении длины дуги сектора и его радиуса площадь его достигает наибольшей величины при данном периметре.

Если радиус сектора $x$, а дуга $y$, то его периметр $l$ и площадь $S$ выразятся так (рис. 14):

$$l = 2x + y; \quad S = \frac{xy}{2} = \frac{x(l-2x)}{2} \; .$$

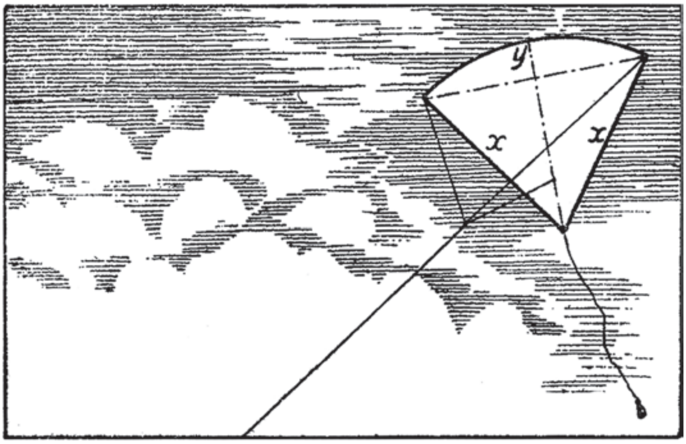



*Рис. 14*

Величина $S$ достигает максимума при том же значении $x$, что и произведение

$$2x(l-2x),$$

т. е. учетверенная площадь. Так как сумма множителей

$$2x + (l-2x) = l,$$

т. е. величина постоянная, то произведение их наибольшее, когда

$$2x = l - 2x,$$

откуда

$$x = \frac{l}{4}; \qquad y = l - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \; .$$

Итак, сектор при данном периметре замыкает наибольшую площадь в том случае, когда его радиус составляет половину дуги (т. е. длина его дуги равна сумме радиусов, или длина кривой части его периметра равна длине прямолинейной). Угол сектора равен 115° — двум радианам. Каковы летные качества такого широкого змея, — вопрос другой, рассмотрение которого в нашу задачу не входит.

# ПОСТРОЙКА ДОМА

**Задача**

На месте разрушенного дома, от которого уцелела одна стена, желают построить новый. Длина уцелевшей стены 12 м. Площадь нового дома должна равняться 112 м$^2$. Хозяйственные условия работы таковы:

1) ремонт погонного метра стены обходится в 25% стоимости кладки новой;

2) разбор погонного метра старой стены и кладка из полученного материала новой стены стоит 50% того, во что обходится постройка погонного метра стены из нового материала.

Как при таких условиях наивыгоднейшим образом использовать уцелевшую стену?

**Решение**

Пусть от прежней стены сохраняется $x$ метров, а остальные $12 - x$ метров разбираются, чтобы из полученного материала возвести заново часть стены нового дома (рис. 15). Если стоимость кладки погонного метра стены из нового материала равна $a$, то ремонт $x$ метров старой стены будет стоить $\frac{ax}{4}$; возведение участка длиною $12 - x$ обойдется $\frac{a(12-x)}{2}$; прочей части этой стены $a[y - (12 - x)]$, т. е. $a(y + x - 12)$; третьей стены $ax$, четвертой $ay$. Вся работа обойдется

$$\frac{ax}{4} + \frac{a(12-x)}{2} + a(y + x - 12) + ax + ay = \frac{a(7x+8y)}{4} - 6a.$$

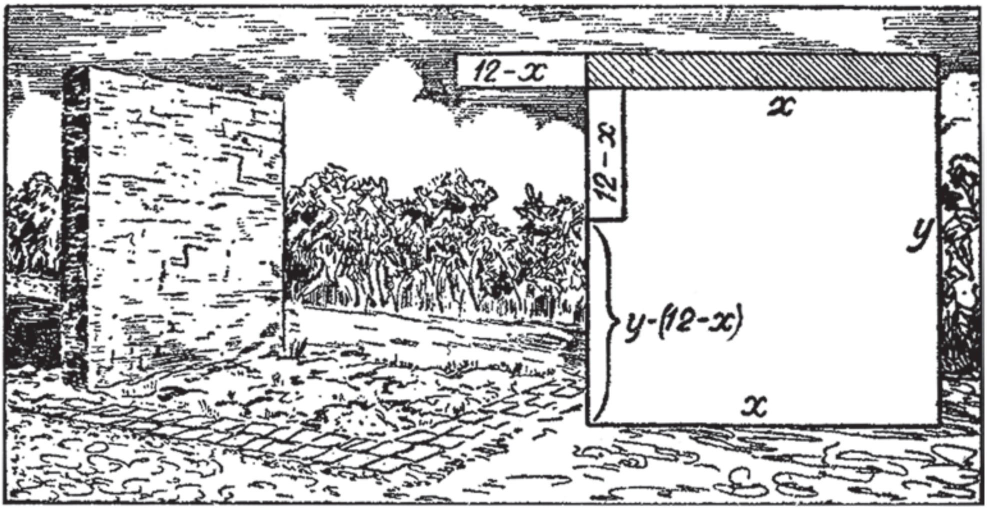



*Рис. 15*

Последнее выражение достигает наименьшей величины тогда же, когда и сумма

$$7ax + 8ay.$$

Мы знаем, что площадь дома $xy$ равна 112; следовательно,

$$7ax \times 8ay = 112 \times 56a^2.$$

При постоянном произведении сумма $7ax + 8ay$ достигает наименьшей величины тогда, когда

$$7ax = 8ay,$$

откуда

$$y = \frac{7}{8}x.$$

Подставив это выражение для $y$ в уравнение

$$xy = 112,$$

имеем

$$\frac{7}{8}x^2 = 112, \qquad x = \sqrt{128} = 11{,}3.$$

А так как длина старой стены 12 м, то подлежит разборке только 0,7 м этой стены.

Читатель может самостоятельно убедиться, что решение не изменится, если из материала разобранной стены класть другую стену.

## ЖЕЛОБ НАИБОЛЬШЕГО СЕЧЕНИЯ

### Задача

Прямоугольный металлический лист (рис. 16) надо согнуть желобом с сечением в форме равнобокой трапеции. Это можно сделать различными способами, как видно из рис. 17. Какой ширины должны быть боковые полосы, и под каким углом они должны быть отогнуты, чтобы сечение желоба имело наибольшую площадь (рис. 18)?

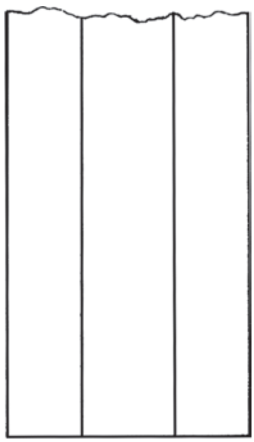


*Рис. 16*

### Решение

Пусть ширина листа $l$. Ширину отгибаемых боковых полос обозначим через $x$, а ширину дна желоба через $y$. Введем еще одно неизвестное $z$, значение которого ясно из рис. 18.

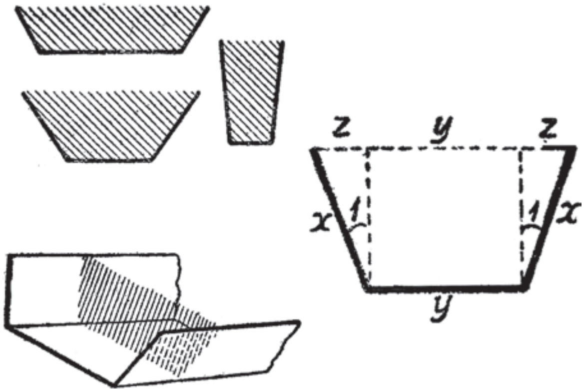



*Рис. 17 и 18*

Площадь $S$ трапеции, представляющей сечение желоба равна

$$S = \frac{(z+y+z)+y}{2}\sqrt{x^2-z^2} = \sqrt{(y+z)^2\,(x^2-z^2)}\ .$$

Задача свелась к определению тех значений $x$, $y$, $z$, при которых величина $S$ достигает наибольшей величины; при этом сумма $2x + y$ (т. е. ширина листа) сохраняет постоянную величину $l$. Делаем преобразования:

$$S^2 = (y+z)^2\,(x+z)\,(x-z).$$

$S^2$ становится наибольшим при тех же значениях $x$, $y$, $z$, как и $3S^2$, последнее же достигает максимума одновременно с выражением

$$(y+z)\,(y+z)\,(x+z)\,(3x-3z).$$

Сумма этих четырех множителей

$$y+z+y+z+x+z+3x-3z = 2y+4x = 2l,$$

т. е. неизменна. Поэтому произведение наших четырех множителей максимально, когда они равны между собой, т. е.

$$y+z = x+z \qquad\qquad y+z = 3x-3z.$$

Из первого уравнения имеем

$$y = x,$$

а так как $y + 2x = l$, то

$$x = y = \frac{l}{3}\,.$$

Из второго уравнения находим

$$z = \frac{x}{2} = \frac{l}{6}\,.$$

Далее, так как катет $z$ равен половине гипотенузы $x$ (рис. 18), то противолежащий этому катету угол равен 30°, а угол наклона боков желоба ко дну равен

$$90 + 30 = 120°.$$

Итак, желоб будет иметь наибольшее сечение, когда грани его согнуты в форме трех смежных сторон правильного шестиугольника.

## ВОРОНКА НАИБОЛЬШЕЙ ВМЕСТИМОСТИ

**Задача**

Из жестяного круга нужно изготовить коническую часть воронки. Для этого в круге вырезают сектор и остальную часть круга свертывают конусом (рис. 19). Сколько градусов должно быть в дуге сектора, чтобы конус получился наибольшей вместимости?

**Решение**

Длину дуги той части круга, которая свертывается в конус, обозначим через $x$ (в линейных мерах). Следовательно, образующей конуса будет радиус $R$ жестяного круга, а окружность основания будет равна $x$. Радиус $r$ основания конуса определяем из равенства

$$2\pi r = x; \qquad r = \frac{x}{2\pi}.$$

Высота $H$ конуса равна (по теореме Пифагора) (рис. 19)

$$H = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}};$$

Объем $V$ этого конуса равен

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 H = \frac{\pi}{3}\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4\pi^2}}.$$

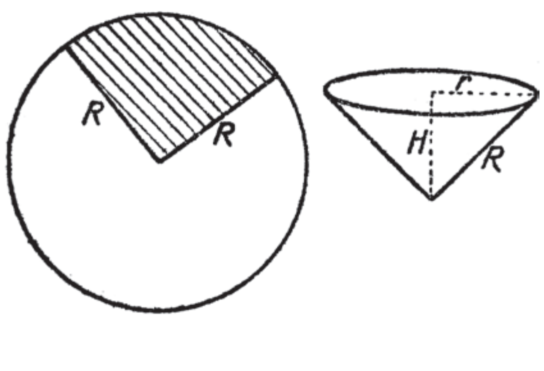



*Рис. 19*

Это выражение достигает наибольшей величины одновременно с выражением

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \sqrt{R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2}$$

и его квадратом

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^4 \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right].$$

Так как

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = R^2$$

есть величина постоянная, то (на основании доказанного на с. 270–271) последнее произведение имеет максимум при том значении $x$, когда

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 : \left[R^2 - \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2\right] = 2 : 1,$$

откуда

$$\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 - 2\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2,$$

$$3\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = 2R^2 \quad \text{и} \quad x = \frac{2\pi}{3} R\sqrt{6} = 5{,}14R.$$

В градусах дуга $x = 294°$ и, значит, дуга вырезаемого сектора должна содержать 66°.

## САМОЕ ЯРКОЕ ОСВЕЩЕНИЕ

### Задача

На какой высоте над столом должно находиться пламя свечи, чтобы всего ярче освещать лежащую на столе монету?

### Решение

Может показаться, что для достижения наилучшего освещения надо поместить пламя возможно ниже. Это неверно: при низком положении пламени лучи падают очень отлого. Поднять свечу так, чтобы лучи падали круто, — значит удалить источник света. Наиболее выгодна в смысле освещения, очевидно, некоторая средняя высота пламени над столом. Обозначим ее через $x$ (рис. 20). Расстояние $BC$ монеты $B$ от основания $C$ перпендикуляра, проходящего через пламя $A$, обозначим через $a$. Если яркость пламени $i$, то освещенность монеты, согласно законам оптики, выразится так:

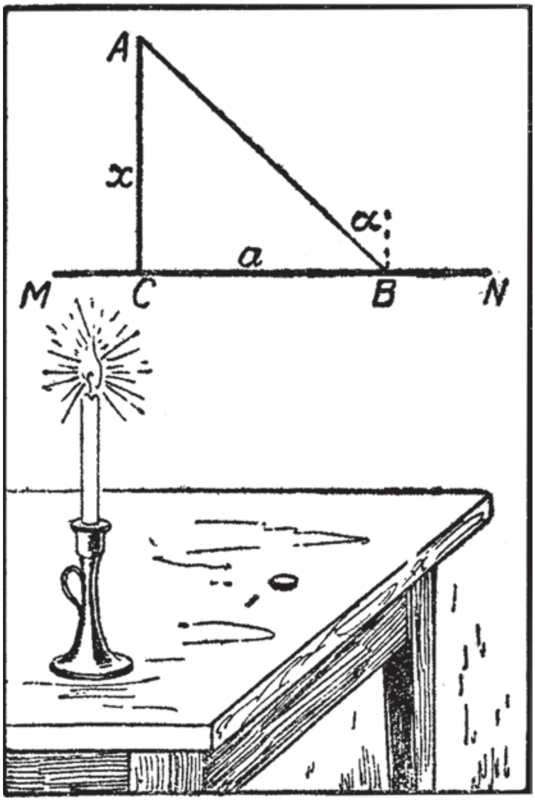



*Рис. 20*

$$\frac{i}{AB^2}\cos\alpha = \frac{i\cos\alpha}{(\sqrt{a^2+x^2})^2} = \frac{i\cos\alpha}{a^2+x^2},$$

где $\alpha$ — угол падения пучка лучей $AB$. Так как

$$\cos\alpha = \cos A = \frac{x}{AB} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

то *освещенность* равна

$$\frac{i}{a^2+x^2} \times \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{ix}{(a^2+x^2)^{3/2}}.$$

Это выражение достигает максимума при том же значении $x$, как и его квадрат, т. е.

$$\frac{i^2x^2}{(a^2+x^2)^3}.$$

Множитель $i^2$, как величину постоянную, опускаем, а остальную часть исследуемого выражения преобразуем так:

$$\frac{x^2}{(a^2+x^2)^3} = \frac{1}{(a^2+x^2)^2}\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)^2\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right),$$

потому что

$$1-\frac{a^2}{x^2+a^2} = \frac{x^2}{x^2+a^2}\ .$$

Преобразованное выражение достигает максимума одновременно с выражением

$$\left(\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)^2\times\left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right),$$

так как введенный постоянный множитель $a^2$ не влияет на то значение $x$, при котором произведение достигает максимума. Замечая, что сумма первых степеней этих множителей

$$\frac{a^2}{x^2+a^2} + 1 - \frac{a^2}{x^2+a^2} = 1,$$

т. е. величина постоянная, заключаем, что рассматриваемое произведение становится наибольшим, когда

$$\frac{a^2}{x^2+a^2}\ :\ \left(1-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right) = 2:1.$$

Имеем уравнение

$$a^2 = 2x^2 + 2a^2 - 2a^2.$$

Решив это уравнение, находим:

$$x^2 = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0{,}71a.$$

Монета освещается всего ярче, когда источник света находится на высоте 0,71 расстояния от проекции источника до монеты.

Знание этого соотношения помогает при устройстве наилучшего освещения рабочего места.

## Глава седьмая

# ПРОГРЕССИИ

## ДРЕВНЕЙШАЯ ПРОГРЕССИЯ

### Задача

Древнейшая задача на прогрессии — не вопрос о вознаграждении изобретателя шахмат, насчитывающий за собою двухтысячелетнюю давность, а гораздо более старая задача о делении хлеба, которая записана в знаменитом египетском папирусе Ринда. Папирус этот, разысканный Риндом полвека назад, составлен около 2000 лет до нашей эры и является списком с другого, еще более древнего математического сочинения, относящегося, быть может, к третьему тысячелетию до нашей эры. В числе арифметических, алгебраических и геометрических задач этого документа имеется такая (приводим ее в вольной передаче):

Сто мер хлеба разделить между пятью людьми так, чтобы второй получил на столько же больше первого, на сколько третий получил больше второго, четвертый больше третьего и пятый больше четвертого. Кроме того, двое первых должны получить в 7 раз меньше трех остальных. Сколько нужно дать каждому?

**Решение**

Очевидно, количества хлеба, полученные участниками раздела, составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Пусть первый ее член $x$, разность $y$. Тогда

| | | |
|---|---|---|
| доля | первого | $x$ |
| » | второго | $x + y$ |
| » | третьего | $x + 2y$ |
| » | четвертого | $x + 3y$ |
| » | пятого | $x + 4y$. |

На основании условий задачи составляем следующие два уравнения:

$$\begin{cases} x + (x + y) + (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y) = 100 \\ 7\,[x + (x + y)] = (x + 2y) + (x + 3y) + (x + 4y). \end{cases}$$

После упрощений первое уравнение получает вид:

$$x + 2y = 20,$$

а второе:

$$11x = 2y.$$

Решив эту систему, имеем

$$x = 1\,\frac{2}{3}\,; \qquad y = 9\,\frac{1}{6}\,.$$

Значит, хлеб должен быть разделен на следующие части:

$$1\,\frac{2}{3}\,;\quad 10\,\frac{5}{6}\,;\quad 20\,;\quad 29\,\frac{1}{6}\,;\quad 38\,\frac{1}{3}\,.$$

## АЛГЕБРА НА КЛЕТЧАТОЙ БУМАГЕ

Несмотря на пятидесятивековую древность этой задачи на прогрессии, в нашем школьном обиходе прогрессии появились сравнительно недавно. В учебнике Магницкого, изданном двести лет назад и служившем целых полвека основным руководством для школьного обучения, прогрессии хотя и имеются, но общих формул, связывающих входящие в них величины между собою, в нем не дано. Сам составитель учебника не без затруднений справлялся поэтому с такими задачами.

Между тем формулу суммы членов арифметической прогрессии легко вывести простым и наглядным приемом с помощью клетчатой бумаги. На такой бумаге любая арифметическая прогрессия изображается ступенчатой фигурой. Например, фигура $ABC$ на рис. 21 изображает прогрессию:

$$2;\ 5;\ 8;\ 11;\ 14.$$

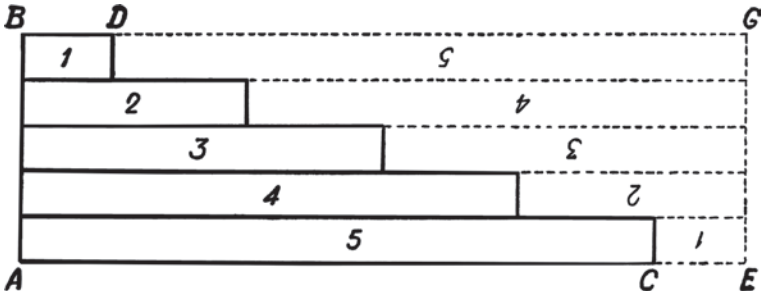



*Рис. 21*

Чтобы определить сумму ее членов, дополним чертеж до прямоугольника $ABGE$. Получим две равные фигуры $ABDC$ и $DGEC$. Площадь каждой из них изображает сумму членов нашей прогрессии. Значит, двойная сумма прогрессии равна площади прямоугольника $ABGE$, т. е.

$$(AC + CE) \times AB.$$

Но $AC + CE$ изображает сумму 1-го и 5-го членов прогрессии; $AB$ — число членов прогрессии. Поэтому двойная сумма

$$2S = (\text{сумма крайних членов}) \times (\text{число членов})$$

или

$$S = \frac{(\text{первый} + \text{последний член}) \times (\text{число членов})}{2}.$$

## ПОЛИВКА ОГОРОДА

**Задача**

В огороде 30 грядок, каждая длиною 16 м и шириною 2,5 м. Поливая грядки, огородник приносит ведра с водою из колодца, расположенного в 14 м от края огорода (рис. 22), и обходит грядки по меже, причем воды, приносимой за один раз, достаточно для поливки только одной грядки.

Какой длины путь должен пройти огородник, поливая весь огород? Путь начинается и кончается у колодца.

**Решение**

Для поливки первой грядки огородник должен пройти путь

$$14 + 16 + 2{,}5 + 16 + 2{,}5 + 14 = 65 \text{ м}.$$

При поливке второй он проходит

$$14 + 2{,}5 + 16 + 2{,}5 + 16 + 2{,}5 + 2{,}5 + 14 = 65 + 5 = 70 \text{ м}.$$

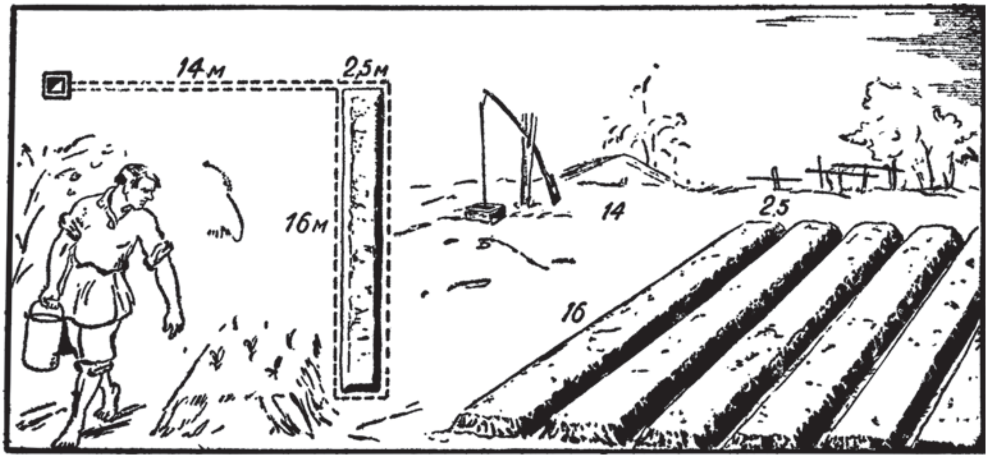



*Рис. 22*

Каждая следующая грядка требует пути на 5 м длиннее предыдущей. Имеем прогрессию:

$$65;\ 70;\ 75;\ \ldots;\ 65 + 5 \times 29.$$

Сумма ее членов равна

$$\frac{(65 + 65 + 29 \times 5) \times 30}{2} = 4\,125 \text{ м}.$$

Огородник при поливке всего огорода проходит путь в 4,125 км.

## КУРИНОЕ СТАДО

### Задача

Для прокормления стада из 31 курицы запасено некоторое количество корма из расчета по декалитру в неделю на каждую курицу. При этом предполагалось, что численность стада меняться не будет. Но так как в действительности число куриц каждую неделю убывало на 1, то заготовленного корма хватило на двойной срок.

Как велик был запас корма и на сколько времени был он первоначально рассчитан?

### Решение

Пусть запасено было $x$ декалитров корма на $y$ недель. Так как корм рассчитан на 31 курицу по 1 декалитру на курицу в неделю, то

$$x = 31y.$$

В первую неделю израсходовано было 31 дл, во вторую 30, в третью 29 и т. д. до последней недели всего удвоенного срока, когда израсходовано было:

$$(31 - 2y + 1) \text{ дл.}$$ [1]

Весь запас составлял, следовательно:

$$x = 31y = 31 + 30 + 29 + .... + (31 - 2y + 1).$$

Сумма $2y$ членов прогрессии, первый член которой 31, а последний $31 - 2y + 1$, равна

$$31y = \frac{(31 + 31 - 2y + 1)\, 2y}{2} = (62 - 2y + 1)\, y.$$

Так как $y$ не может быть равен нулю, то мы вправе обе части равенства сократить на этот множитель. Получаем

$$31 = 62 - 2y + 1 \quad \text{и} \quad y = 16,$$

откуда

$$x = 31y = 496.$$

Запасено было 496 декалитров корма на 16 недель.

## АРТЕЛЬ ЗЕМЛЕКОПОВ

### Задача

Артель землекопов подрядилась вырыть канаву. Если бы она работала в полном составе, канава была бы вырыта в 24 часа. Но в действительности к работе приступил сначала только один землекоп. Спустя некоторое время присоединился второй; еще через столько же времени — третий, за ним через такой же промежуток четвертый и так до последнего. При расчете оказалось, что первый работал в 11 раз дольше последнего.

Сколько времени работал последний?

### Решение

Пусть последний землекоп работал $x$ часов, тогда первый работал $11x$ часов. Далее, если число членов артели $y$, то общее число часов работы определится как сумма $y$ членов убывающей прогрессии, первый член которой $11x$, а последний $x$, т. е.

---

[1] Поясним: расход корма в течение

| | | |
|---|---|---|
| 1-й недели | | 31 дл, |
| 2-й | » | 31 – 1 дл, |
| 3-й | » | 31 – 2 дл, |
| $2y$-й | » | $31 (2y - 1) = (31 - 2y + 1)$ дл. |

$$\frac{(11x + x)y}{2} = 6xy.$$

С другой стороны, известно, что артель из $y$ человек, работая в полном составе, выкопала бы канаву в 24 часа, — т. е. что для выполнения работы необходимо $24y$ рабочих часов. Следовательно, $6xy = 24y$.

Число $y$ не может равняться нулю; на этот множитель можно поэтому уравнение сократить:

$$6x = 24 \quad \text{и} \quad x = 4.$$

Итак, землекоп, приступивший к работе последним, работал 4 часа.

Мы ответили на вопрос задачи; но если бы мы полюбопытствовали узнать, сколько рабочих входило в артель, то не могли бы этого определить, — несмотря на то, что в уравнении число это фигурировало (под буквою $y$). Для решения этого вопроса в задаче не приведено достаточных данных.

## ЯБЛОКИ

### Задача

Садовник продал первому покупателю половину всех своих яблок и еще пол-яблока; второму покупателю — половину оставшихся и еще пол-яблока; третьему — половину оставшихся и еще пол-яблока, и т. д. Седьмому покупателю он продал половину оставшихся яблок и еще пол-яблока; после этого яблок у него не осталось. Сколько яблок было у садовника?

### Решение

Если первоначальное число яблок $x$, то первый покупатель получил

$$\frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2};$$

второй:

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{x+1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2^2};$$

третий:

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{x+1}{2^3};$$

7-й покупатель

$$\frac{x+1}{2^7}.$$

Имеем уравнение:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2^2} + \frac{x+1}{2^3} + \ldots + \frac{x+1}{2^7} = x$$

или

$$(x+1)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^7}\right) = x.$$

откуда

$$\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{2^7}, \quad \text{и} \quad x = 2^7 - 1 = 127.$$

Всех яблок было 127.

## НОВОСТЬ

### Задача

Некто, узнав в 10 час. утра важную новость, рассказал о ней в течение ближайшего часа 4 товарищам. Каждый из них в течение ближайшего часа сообщил о ней четверым другим; каждый из вновь узнавших в течение часа успел поделиться известием с четырьмя знакомыми. Сколько человек может быть осведомлено таким путем к 7 часам вечера?

### Решение

Задача сводится к нахождению суммы 10 членов геометрической прогрессии:

$$1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^9 = \frac{4^{10} - 1}{4 - 1} = \frac{2^{20} - 1}{3}.$$

Последнее выражение можно вычислить приближенно, принимая $2^{10} =$ $= 1024 \approx 1000$,

$$\frac{2^{20}-1}{3} \approx \frac{10^6-1}{3},$$

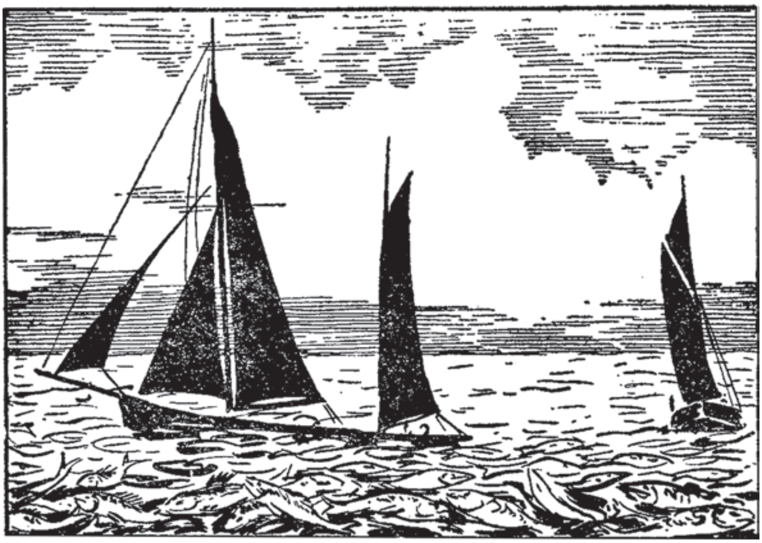
т. е. около трети миллиона. Все население большого города может быть таким образом осведомлено о новости в течение одного дня.

Поразительнее другой расчет в том же роде: если бы новость передавалась так, что каждый, узнавший ее, сообщал ее в течение четверти часа двоим другим, то все человечество было бы осведомлено в 7½ часов.

## ПРОГРЕССИЯ РАЗМНОЖЕНИЯ

Многочисленные примеры геометрических прогрессий постоянно дает нам сама окружающая нас природа, потому что размножение во всем органическом мире совершается именно по такому закону. Этот факт является одним из камней в фундаменте учения Дарвина. Вот что писал об этом великий натуралист (в «Происхождении видов»):

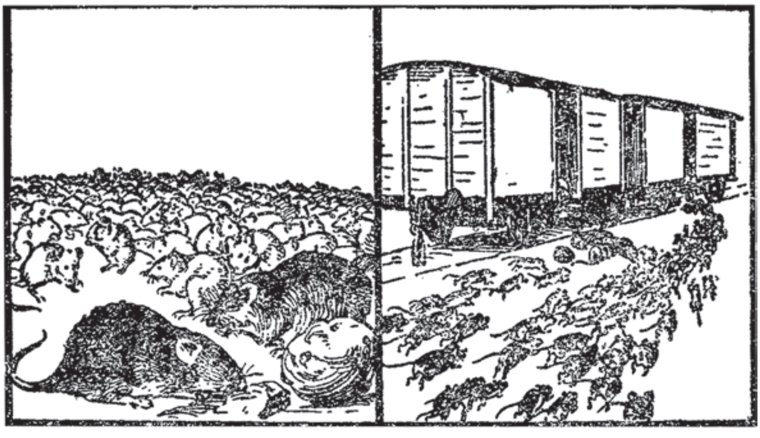
«Борьба за существование неизбежно вытекает из быстрой прогрессии, в какой стремятся к размножению все органические существа. Каждое существо, в течение своей жизни производящее несколько яиц или семян, неминуемо должно подвергаться истреблению в каком-нибудь возрасте, в какой-нибудь период года или, наконец, в какие-нибудь случайные годы — иначе, в силу геометрической прогрессии



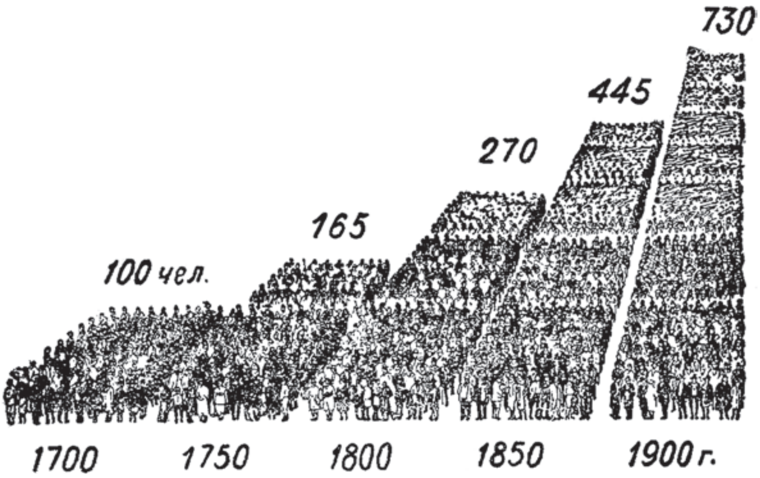
*Если бы выживали все появляющиеся на свет рыбы, то потомство одной пары в 10 лет сплошь заполнило бы все океаны* размножения, численность его достигла бы таких размеров, что ни одна страна в мире не могла бы прокормить или вместить его потомства. Отсюда — так как производится больше особей, чем может выжить, — должна во всех случаях возникать борьба между особями одного вида, либо между особями различных видов, либо же с физическими условиями жизни. Если, быть может, некоторые виды в настоящее время и разрастаются более или менее быстро, — то все виды такого явления представлять не могут, так как Земля не вместила бы их.

Не существует ни одного исключения из правила, по которому любое органическое существо естественно размножается в такой прогрессии, что, не подвергайся оно истреблению, потомство одной пары покрыло бы всю землю. Даже медленно размножающийся человек в 25 лет удваивается в числе, и при такой прогрессии без малого через 1000 лет для его потомства не достало бы места, где стоять. Линней вычислил, что если бы какое-нибудь однолетнее растение производило по два семени (а растений с такой слабой производительностью не существует), то через 20 лет его потомство возросло бы до миллиона. Слон плодится медленнее всех известных животных, и я вычислил минимальные размеры его размножения. Он начинает плодиться не ранее 30-летнего возраста и до 90 лет приносит не более 6 детенышей, живет же до 100; допустив эти числа, получим, что в период 740–750 лет от одной пары получилось бы 19 млн.

Но мы имеем свидетельства более убедительные, чем эти теоретические соображения, — именно, случаи поразительно быстрого размножения некоторых животных в природном состоянии, когда условия почему-либо им благоприятствуют в течение ряда лет. Еще поразительнее факты, касающиеся одичания домашних животных в различных странах; если бы указания на быстрое размножение столь медленно плодящегося рогатого скота и лошадей в Южной Америке и Австралии не опирались на самые достоверные свидетельства, они представлялись бы просто невероятными.



*Потомство одной пары крыс в год доходит до 860 — — крысиная армия, поедающая в год 30 тонн хлеба*




*Прогрессия размножения человека*

То же и с растениями; можно было бы привести примеры растений, сделавшихся совершенно обыкновенными на протяжении целых островов в период менее 10 лет после того, как они были ввезены. Геометрическая прогрессия их размножения, результаты которой всегда нас поражают, весьма просто объясняет быстрое возрастание их численности и широкое расселение в новом отечестве.

Мы с уверенностью можем утверждать, что все животные и растения стремятся размножиться в геометрической прогрессии, что они переполнили бы все места, в которых только могли бы ужиться, и что стремление к размножению в геометрической прогрессии должно удерживаться в границах только истреблением в каком-нибудь периоде жизни».

Проверку приведенных в этом отрывке расчетов предоставляю читателю проделать самостоятельно — по образцу тех вычислений, которые выполняются в ряде следующих примеров.

## РАЗВЕДЕНИЕ КРОЛИКОВ

### Задача

Кролик — одно из наиболее быстро размножающихся млекопитающих. Самка в течение года рождает 7 раз, принося каждый раз до 8 детенышей, которые в течение одного года вырастают настолько, что становятся в свою очередь способны к размножению. Вычислите примерную численность потомства одной пары кроликов после 10 лет беспрепятственного размножения.

**Решение**

Так как расчет требуется только приблизительный, то для облегчения вычислений будем округлять числа. Примем, что самка кролика в течение года приносит около 50 детенышей, среди которых 25 самок. Тогда численность потомства в последовательные годы будет составлять по истечении

1 года $50$
2 лет $50 + 25 \times 50$
3 лет $50 + 25 \times 50 + 25 \times 25 \times 50 = 50 + 50 \times 25 + 50 \times 252$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
10 лет $50 + 50 \times 25 + 50 \times 252 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 50 \times 259$

Последний ряд чисел представляет геометрическую прогрессию с знаменателем 25. Сумма ее 10 членов равна

$$\frac{50 \times 25^9 \times 25 - 50}{25 - 1} \approx 2 \times 25^{10}.$$

Приближенное вычисление этой степени можно выполнить без логарифмов следующим образом:

$$25^{10} = \left(\frac{100}{4}\right)^{10} = \left(\frac{10}{2}\right)^{20} = \frac{10^{20}}{2^{20}} = \frac{10^{20}}{2^{10} \times 2^{10}}.$$

Но $2^{10} = 1024 \approx 1000$, или $10^3$; поэтому

$$2 \times 25^{10} \approx \frac{2 \times 10^{20}}{10^3 \times 10^3} = 200 \times 10^{12},$$

или двести триллионов. Вспомним, что число квадратных метров поверхности всей суши почти вдвое меньше этого: 125 триллионов!

При разведении кроликов значительная часть их потребляется с хозяйственной целью. Предположим, что потребляется 80% приплода, и рассчитаем, какое при таком условии накопится стадо по истечении 10 лет.

По истечении:

1 года $50 - 50 \times 0{,}8 = 50 \times 0{,}2 = 10$
2 лет $10 + 50 \times 5 \times 0{,}2 = 10 + 10 \times 5$
3 лет $10 + 10 \times 5 + 5 \times 5 \times 50 \times 0{,}2 = 10 + 10 \times 5 + 10 \times 52$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
10 лет $10 + 10 \times 5 + 10 \times 52 + \ldots + 10 \times 59$.

Сумма членов последнего ряда чисел равна

$$\frac{10 \times 5^9 \times 5 - 10}{5 - 1} = \frac{10}{4} \times 5^{10} = \frac{5}{2} \times \left(\frac{10}{2}\right)^{10} \approx 2{,}5 \times \frac{10^{10}}{2^{10}}.$$

Но $2^{10} \approx 10^3$; поэтому искомая сумма приблизительно равна

$$2{,}5 \times \frac{10^{10}}{10^3} = 2{,}5 \times 10^7 = 25 \text{ млн.}$$

Кроличье стадо даже при потреблении 80% приплода достигло бы через 10 лет численности в десятки миллионов!

## САРАНЧА

От разведения полезного в хозяйстве животного перейдем к размножению вредителей возделываемых растений: здесь геометрическая прогрессия размножения является для нас злом, с которым приходится вести упорную борьбу. Типичный вредитель из мира насекомых — саранча, самка которой кладет в год около сотни яичек. Полагая, что в каждом поколении половину составляют самки, вычислите, какую площадь займет *десятое* поколение саранчи. Считайте для простоты, что взрослое насекомое занимает площадь в 5 см$^2$.

**Решение**

Первое поколение насчитывает 100 насекомых. Второе $50 \times 100$; третье — $50 \times 50 \times 100$, или $100 \times 50^2$, и т. д. до десятого, численность которого должна равняться

$$100 \times 50^9 = 2 \times 50^{10} = 2\left(\frac{100}{2}\right)^{10} = 2\left(\frac{10^{20}}{2^{10}}\right) \approx 2 \times \frac{10^{20}}{10^3}.$$

Получаем приближенно

$$2 \times 10^{17}.$$

Число квадратных сантиметров, занимаемых таким числом насекомым, равно

$$5 \times 2 \times 10^{17} = 10^{18}.$$

Так как в квадратном километре $10^5 \times 10^5$, т. е. $10^{10}$ см$^2$, то эта площадь равна

$$10^{18} : 10^{10} = 10^8 \text{ км}^2.$$

Поверхность земного шара равна $5 \times 10^8$ м$^2$, т. е. всего в 5 раз больше. Значит, при беспрепятственном размножении саранча в течение 10 лет буквально покрыла бы все материки нашей планеты. К счастью, помимо недостатка пищи, «размножение саранчевых обыкновенно сильно ограничивается их естественными врагами, главным образом паразитами-грибками, некоторыми насекомыми; грибки обусловливают иногда целые эпидемии» (Холодковский). Тем не менее, перелетная саранча появляется нередко настоящими тучами, заслоняющими солнце, наблюдались случаи, когда численность скопления саранчи оценивалась в сто и более триллионов особей.

## ПОКУПКА ЛОШАДИ

**Задача**

В старинной арифметике Магницкого мы находим следующую забавную задачу, которую привожу здесь, не сохраняя языка подлинника:

Некто продал лошадь за 156 руб. Но покупатель, приобретя лошадь, раздумал ее покупать и возвратил продавцу, говоря:

— Нет мне расчета покупать за такую цену лошадь, которая таких денег не стоит.

Тогда продавец предложил другие условия:

— Если, по-твоему, цена лошади высока, то купи только ее подковные гвозди, лошадь же получишь тогда в придачу бесплатно. Гвоздей в каждой подкове 6. За первый гвоздь дай мне всего ¼ коп., за второй — ½ коп., за третий — 1 коп. и т. д.

Покупатель, соблазненный низкой ценой и желая даром получить лошадь, принял условия продавца, рассчитывая, что за гвозди придется уплатить не более 10 рублей.

На сколько покупатель проторговался?

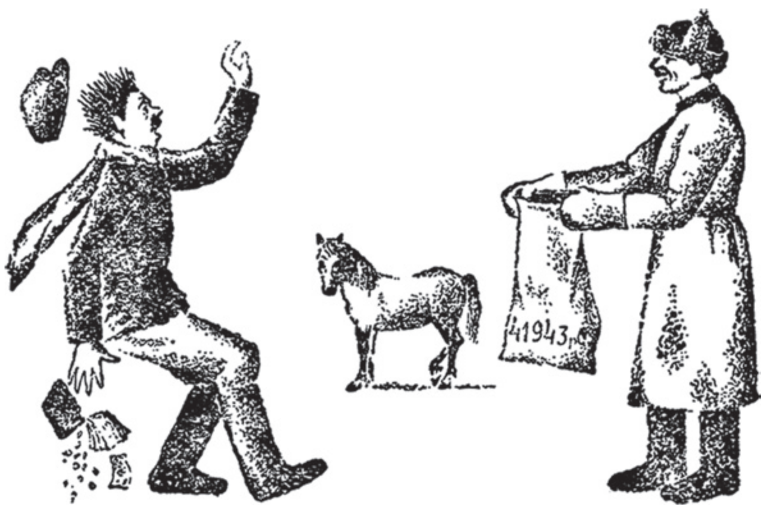
**Решение**

За 24 подковных гвоздя пришлось уплатить

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 22 + 23 + \ldots + 2^{24-3}.$$

Сумма эта равна

$$\frac{2^{21} \times 2 - \frac{1}{4}}{2 - 1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4\,194\,303\ \frac{3}{4}\ \text{коп.},$$



т. е. около 42 тысяч рублей. При таких условиях не обидно дать и лошадь в придачу.

Любопытно, что известный знаток истории математики проф. В. В. Бобынин считал эту задачу ниоткуда Магницким не заимствованной, а придуманной им самостоятельно. Однако она встречается в книге современного английского физика Лоджа «Легкая математика». Так как Лодж едва ли читал Магницкого, то ясно, что интересующая нас задача принадлежит к числу тех, которые столетия назад были придуманы безвестными математиками из народа.

## ВОЗНАГРАЖДЕНИЕ ВОИНА

### Задача

Из другого старинного русского учебника математики, носящего пространное заглавие:

*«Полный курс чистой математики, сочиненный Артиллерии Штык-Юнкером и Математики партикулярным Учителем Ефимом Войтяховским в пользу и употребление юношества и упражняющихся в Математике»* (1795),

заимствую следующую задачу:

«Служившему воину дано вознаграждение за первую рану 1 коп., за другую 2 коп., за третью 4 коп. и т. д. По исчислению нашлось, что воин получил всего вознаграждения 655 р. 35 к. Спрашивается число его ран».

### Решение

Составляем уравнение:

$$65\,535 = 1 + 2 + 22 + 23 + \ldots + 2x - 1$$

или

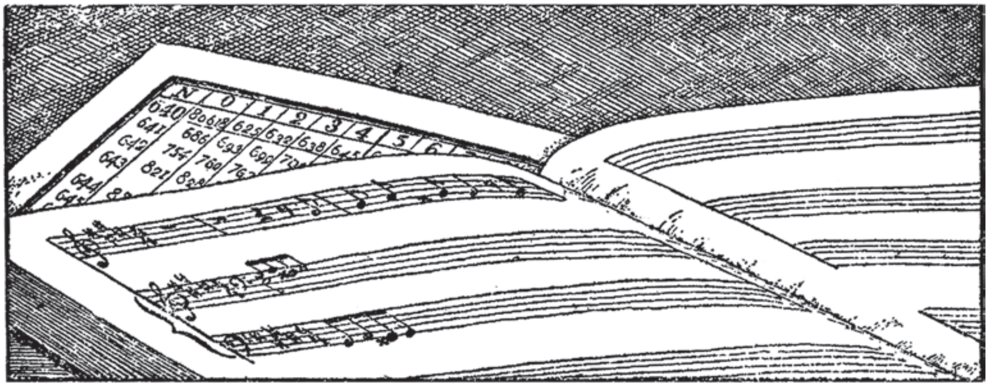
$$65535 = \frac{2^{x-1} \times 2 - 1}{2 - 1} = 2^x - 1,$$

откуда имеем

$$65\,536 = 2^x \text{ и } x = 16,$$

— результат, который легко находим путем испытаний.

При столь великодушной системе вознаграждения боец должен получить 16 ран и остаться притом в живых, чтобы удостоиться награды в 655 р. 35 к.



Глава восьмая

# СЕДЬМОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ

## СЕДЬМОЕ ДЕЙСТВИЕ

Мы упоминали уже, что пятое действие — возвышение в степень — имеет два обратных. Если

$$a^b = c,$$

то разыскание $a$ есть одно обратное действие — извлечение корня; нахождение же $b$ — другое, логарифмирование. Полагаю, что читатель этой книги знаком с основами учения о логарифмах в объеме школьного курса. Для него, вероятно, не составит труда сообразить, чему, например, равно такое выражение:

$$a^{\lg_a b}.$$

Нетрудно понять, что если основание логарифмов ($a$) возвысить в степень логарифма числа $b$, то должно получиться это число $b$.

Для чего были придуманы логарифмы? Конечно, для ускорения и упрощения вычислений. Изобретатель первых логарифмических таблиц, гениальный математик-любитель Непер, так говорит о своих побуждениях:

«Я старался, насколько мог и умел, отделаться от трудности и скуки вычислений, докучность которых обычно отпугивает весьма многих от изучения математики».

В самом деле, логарифмы чрезвычайно облегчают и ускоряют вычисления, — не говоря уже о том, что они дают возможность производить такие операции, которые без их помощи совершенно невыполнимы (извлечение корня любой степени). Не без основания писал Лаплас, что «изобретение логарифмов, сокращая вычисления нескольких месяцев в труд нескольких дней, словно удваивает жизнь астрономов». Великий математик говорит об астрономах, так как им приходится делать особенно сложные и утомительные вычисления. Но слова его с полным правом могут быть отнесены ко всем вообще, кому приходится иметь дело с числовыми выкладками.

Нам, привыкшим к употреблению логарифмов и к доставляемым ими облегчениям выкладок, трудно представить себе то изумление и восхищение, которое вызвали они при своем появлении. Современник Непера, талантливый математик Бригг, прославившийся позднее изобретением десятичных логарифмов, писал, получив сочинение Непера: «Своими новыми и удивительными логарифмами Непер заставил меня усиленно работать и головой и руками. Я надеюсь увидеть его летом, так как никогда не читал книги, которая нравилась бы мне больше и приводила бы в большее изумление». Бригг осуществил свое намерение и направился в Шотландию, чтобы посетить изобретателя логарифмов. При встрече оба математика первые четверть часа безмолвно рассматривали друг друга; наконец Бригг сказал:

«Я предпринял это долгое путешествие с единственной целью видеть вас и узнать, с помощью какого орудия остроумия и искусства были вы приведены к первой мысли о превосходном пособии для астрономии — логарифмах. Впрочем, теперь я больше удивляюсь тому, что никто не нашел их раньше, — настолько кажутся они простыми после того, как о них узнаешь».

## СОПЕРНИКИ ЛОГАРИФМОВ

Ранее изобретения логарифмов потребность в ускорении выкладок породила таблицы иного рода, с помощью которых действие умножения заменяется не сложением, а вычитанием. Устройство этих таблиц основано на тождестве:

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4},$$

в верности которого легко убедиться, раскрыв скобки.

Имея готовые четверти квадратов, можно находить произведение двух чисел, не производя умножения, а вычитая из четверти квадрата суммы этих чисел четверть квадрата их разности. Те же таблицы облегчают возвышение в квадрат и извлечение квадратного корня, а в соединении с таблицей обратных чисел — упрощают и действие деления. Их преимущество перед таблицами логарифмическими состоит в том, что с помощью их получаются результаты *точные*, а не приближенные. Зато они уступают логарифмическим в ряде других пунктов, практически гораздо более важных. В то время как таблицы четвертей квадратов позволяют перемножать только *два* числа, логарифмы дают возможность находить *сразу* произведение любого числа множителей, а кроме того — возвышать в *любую* степень и извлекать корни с *любым* показателем (целым или дробным). Вычислять, например, сложные проценты с помощью таблиц четвертей квадратов нельзя.

Тем не менее таблицы четвертей квадратов издавались и после того, как появились логарифмические таблицы всевозможных родов. В 1856 г. во Франции вышли таблицы под заглавием:

*«Таблица квадратов чисел от 7 до 100 миллионов, с помощью которой находят точное произведение чисел весьма простым приемом, более удобным, чем помощью логарифмов. Составил Александр Коссар».*

Идея эта возникает у многих, не подозревающих о том, что она уже давно осуществлена. Ко мне раза два обращались изобретатели подобных таблиц как с новинкой и очень удивлялись, узнав, что их изобретение имеет более чем трехсотлетнюю давность.

Другим, более молодым соперником логарифмов являются вычислительные таблицы, имеющиеся во многих технических справочниках. Это сводные таблицы, содержащие следующие графы: квадраты чисел, кубы, квадратные корни, кубические корни, обратные числа, длины, окружности и площади кругов для чисел от 2 до 1000. Для многих технических расчетов таблицы эти очень удобны; однако они не всегда достаточны; логарифмические имеют гораздо более обширную область применения.

## ЭВОЛЮЦИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ТАБЛИЦ

В современных школах у нас чаще всего употребляются 5-значные, в Германии же — 4-значные логарифмические таблицы. Следовало бы и нам остановиться окончательно на 4-значных, так как они вполне достаточны для технических расчетов. А для большинства практических надобностей можно успешно обходиться даже 3-значными мантиссами: ведь обиходные измерения редко выполняются более чем с тремя знаками. Мысль о достаточности более коротких мантисс осознана сравнительно недавно. Я помню еще время, когда в наших школах были в употреблении увесистые томы 7-значных логарифмов, уступившие свое место 5-значным лишь после упорной борьбы. Французский астроном Лаланд, составитель первых 5-значных таблиц, много способствовал их проникновению в школьный обиход заявлением, что все свои астрономические вычисления он выполняет именно по таким таблицам.

Но и 7-значные логарифмы при своем появлении (1794 г.) казались непозволительным новшеством. Первые десятичные логарифмы, созданные трудом лондонского математика Генриха Бригга (1624 г.), были 14-значные. Их сменили спустя несколько лет 10-значные таблицы голландского математика Андриана Влакка.

Как видим, эволюция ходовых логарифмических таблиц шла от многозначных мантисс к более коротким и не завершилась еще в наши дни, так как и теперь многими не осознана та простая мысль, что точность вычислений не может превосходить точности измерений.

Укорочение мантисс влечет за собой два важных практических следствия: 1) заметное уменьшение объема таблиц и связанное с этим 2) упрощение пользования ими, а значит — и ускорение выполняемых с помощью их вычислений. Семизначные логарифмы чисел занимают около 200 страниц большого формата; 5-значные — 30 страничек вдвое меньшего формата; 4-значные занимают вдесятеро меньший объем, умещаясь на двух страницах большого формата[1]; трехзначные же могут поместиться на одной странице, как видно из приложенного в конце нашей книги образчика[2].

Что же касается быстроты вычислений, то один немецкий астроном (Энке) установил следующее соотношение: расчет, выполняемый по 5-значным таблицам, берет втрое меньше времени, чем по 7-значным.

## ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ДИКОВИНКИ

Если вычислительные потребности практической жизни и технического обихода вполне обеспечиваются 3- и 4-значными таблицами, то, с другой стороны, к услугам теоретического исследователя имеются таблицы и с гораздо бо́льшим числом знаков, чем даже 14-значные логарифмы Бригга. Вообще говоря, логарифм в большинстве случаев есть число иррациональное и не может быть выражен совершенно точно никаким числом цифр; логарифмы большинства чисел, сколько бы знаков ни брать, выражают их истинную величину лишь приближенно, — тем точнее, чем больше цифр в их мантиссе. Для научных работ оказывается иногда недостаточной точность 14-значных логарифмов[3]; но среди 500 всевозможных образцов логарифмических таблиц, вышедших в свет со времени их изобретения, исследователь всегда найдет такие, которые его удовлетворят. Назовем, например, 20-значные логарифмы чисел от 2 до 1200, изданные во Франции Калле (1795). Для еще более ограниченной группы чисел имеются таблицы логарифмов с огромным числом десятичных знаков — настоящие логарифмические диковинки, о существовании которых, как я убедился, не подозревают и многие математики.

Вот эти логарифмы-исполины; все они не десятичные, а натуральные[4]:

---

[1] Исключение составляют 4-значные таблицы Н. П. Каменщикова, которые вследствие нерационального устройства по объему не уступают 5-значным.

[2] См. с. 323.

[3] 14-значные логарифмы Бригга имеются, впрочем, только для чисел от 1 до 20 000 и от 90 000 до 100 000.

[4] Натуральными называются логарифмы, вычисленные не при основании 10, а при основании числа 2,718..., о котором у нас еще будет речь впереди.

48-значные таблицы Вольфрама для чисел до 10 000;

61-значные таблицы Шарпа;

102-значные таблицы Паркхерста и, наконец, логарифмическая сверхдиковинка:

260-значные логарифмы Адамса.

В последнем случае мы имеем, впрочем, не таблицу, а только так называемые натуральные логарифмы 5 чисел: 2, 3, 5, 7 и 10 и переводный (260-значный) множитель для перечисления их в десятичные. Нетрудно, однако, понять, что, имея логарифмы этих пяти чисел, можно простым сложением или умножением получить логарифмы множества составных чисел; например, логарифм 12 равен сумме логарифмов 2, 2 и 3, и т. п.

К логарифмическим диковинкам можно было бы с полным основанием отнести и счетную линейку — «деревянные логарифмы» — если бы этот остроумный прибор не сделался благодаря своему удобству столь же обычным счетным орудием для техников, как десятикосточковые счеты среди конторских работников. Привычка угашает чувство изумления перед прибором, работающим по принципу логарифмов и тем не менее не требующим от пользующихся им даже знания того, что такое логарифм.

Подлинной логарифмической диковинкой является дорогой и редкий *прибор для вычисления логарифмов*. Утомительные и долгие выкладки заменяются работой остроумно придуманного механизма, который не только вычисляет один логарифм за другим, но и заготовляет типографский стереотип[1] для их печатания. Свыше 2½ страниц набора таблиц машина изготовляет за то время, пока самый искусный наборщик успеет набрать только одну страницу с готового оригинала.

## ПРОСТЕЙШАЯ ТАБЛИЦА ЛОГАРИФМОВ

Самая простая логарифмическая таблица, вполне пригодная для практических целей, дана в конце настоящей книги. Это — трехзначные логарифмы в том виде, в каком они предложены английским физиком Лоджем и усовершенствованы мною (прибавлением готовых поправок). Способ обращения с таблицей не требует долгих пояснений; он ясен из сопровождающего ее текста. Такую табличку полезно иметь всегда при себе.

Впрочем, если в дороге или на экскурсии она при вас не окажется, вы без большого труда и обширных познаний в математике сами сможете ее вычислить. Вообще говоря, вычисление логарифмов — дело весьма нелегкое, особенно когда желают получить мантиссу с большим числом знаков. Труд, затраченный на это составителями первых таблиц, — совершенно беспримерен в истории математики. Чтобы вычислить, например, логарифм 2,

[1] *Стереотип* — клише, используемое в типографском деле.

Бригг выполнил 47 последовательных извлечений квадратного корня из числа 1024, — каждое с 18 десятичными знаками! Этот египетский труд был облегчен позднее, с тех пор как в конце XVII в. математик Меркатор нашел более легкий и быстрый способ (логарифмический ряд).

Сейчас сказанное относится к логарифмам с многозначной мантиссой; трехзначные же логарифмы вычисляются весьма просто, если воспользоваться приемом, которым — в числе прочих — Бригг облегчал свою чудовищную вычислительную работу.

Вычислим, например, логарифм 2. Мы знаем, что $2^{10} = 1024$. Значит, $10 \lg 2 = \lg 1024$ и

$$\lg 2 = \frac{\lg 1024}{10}.$$

Приближенно — с точностью до двух цифр — мы можем принять, что lg 1024 равен lg 1000. Тогда, употребляя знак приближенного равенства,

$$\lg 2 \approx 0{,}30.$$

Ошибка, допущенная нами, равна $\frac{0{,}024}{10}$, т. е. 0,0024 от 2. Так как небольшую прибавку логарифма можно считать пропорциональной соответствующей прибавке числа, то приближенный результат 0,30 надо исправить прибавлением к нему 0,0024 его величины,

$$0{,}30 \times 0{,}0024 = 0{,}000720 \approx 0{,}001,$$
$$\lg 2 = 0{,}30 + 0{,}001 = 0{,}301.$$

Сходным образом вычисляем lg 3. При этом исходим из равенства $3^4 = 81$. Значит, $4 \lg 3 = \lg 81$,

$$\lg 3 = \frac{\lg 81}{4} \approx \frac{\lg 80}{4}.$$

Но $80 = 10 \times 2^3$; $\lg 80 = 1 + 3 \lg 2 = 1{,}903$,

$$\lg 3 \approx \frac{1{,}903}{4} \approx 0{,}476.$$

Исправляем этот приближенный результат на $\frac{1}{4} \times \frac{1}{80}$, т. е. на $\frac{1}{320}$, или 0,003 его величины (округленной до 0,48):

$$0{,}48 \times 0{,}003 \approx 0{,}001$$
$$0{,}476 + 0{,}001 = 0{,}477.$$

Логарифмы 4, 5, 6 находим еще проще, потому что

$$\lg 4 = 2 \lg 2 = 0{,}602,$$
$$\lg 5 = \lg 10 - \lg 2 = 1 - 0{,}301 = 0{,}699,$$
$$\lg 6 = \lg 2 + \lg 3 = 0{,}778.$$

Чтобы найти lg 7, подыскиваем такую степень 7, которая мало отличается от числа, получаемого перемножением чисел 2, 3 и 5. Бригг воспользовался равенством 74 = 2401; последуем его примеру:

$$\lg 7 = \frac{\lg 2401}{4} \approx \frac{\lg 2400}{4},$$

Но 2400 = 100 × 23 × 3; значит, lg 2 400 = 2 + 3 lg 2+ lg 3 = 2 + 0,903 + 0,477 = = 3,380.

$$\lg 7 = \frac{3{,}380}{4} = 0{,}845.$$

Исправлять этот логарифм нет надобности, так как соответствующая поправка, составляющая 1/96000 его величины, не влияет на 3-ю цифру мантиссы.

Читатель, уловивший из этих примеров сущность приема, сам может вычислить другие логарифмы. Трудность представляют только числа простые; логарифмы чисел составных определяются, как суммы логарифмов их простых множителей. Что же касается простых чисел, то всегда можно найти подходящую степень или кратное, которое нас выручит. Приведем несколько примеров.

Для вычисления lg 11 мы, следуя Бриггу, можем воспользоваться равенством

$$99^2 = 9801,$$

$$3^2 \times 11^2 \approx 9800,$$

$$11^2 \approx \frac{7^2 \times 2 \times 100}{3^2}$$

и, следовательно,

$$\lg 11 \approx \frac{2\lg 7 + \lg 2 + 2 - 2\lg 3}{2}.$$

Так как lg 7, lg 2 и lg 3 уже известны, то вычисление этим путем вполне возможно; поправка излишня.

Чтобы вычислить lg 13, исходим из равенства

$$13^3 = 2197 \approx 2\,200.$$

Для lg 17 прибегаем к равенству

$$17^3 = 4913 \approx 4900.$$

Для lg 19 – к равенству

$$19^2 = 361 \approx 360.$$

Для lg 23 – к равенству

$$23^2 = 529 \approx 530.$$

Для lg 29 – к равенству

$$29^2 = 841 \approx 840.$$

Для lg 31 – к равенству

$$31^2 = 961 \approx 960.$$

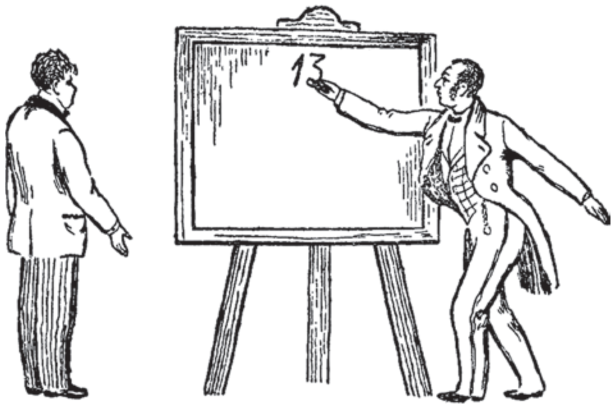
И так далее до lg 97, который вычисляется с помощью равенства

$$97^2 = 9409 \approx 9400.$$

Логарифмы же трехзначных чисел — 111 и т. д. — можно вычислять пропорциональным изменением логарифмов чисел — 110 и т. д. Только для 101, 102 и др. понадобится прибегнуть к степеням:

$$101^2 = 10201 \approx 10200 \approx 2 \times 3 \times 17 \times 100$$

и т. д.




## ЛОГАРИФМЫ НА ЭСТРАДЕ

Самый поразительный из номеров, выполняемых перед публикой профессиональными счетчиками, без сомнения, следующий. Предуведомленные афишей, что счетчик-виртуоз будет извлекать в уме корни высоких степеней из многозначных чисел, вы заготовляете дома путем терпеливых выкладок 31-ю степень какого-нибудь числа и намерены сразить счетчика 35-значным числовым линкором. В надлежащий момент вы обращаетесь к счетчику со словами:

— А попробуйте извлечь корень 31-й степени из следующего 35-значного числа! Запишите, я продиктую.

Виртуоз-вычислитель берет мел, но прежде чем вы успели открыть рот, чтобы произнести первую цифру, у него уже написан результат: 13.

Не зная числа, он извлек из него корень, да еще 31-й степени, да еще в уме, да еще с молниеносной быстротой!..

Вы изумлены, уничтожены, — а между тем во всем этом нет ничего сверхъестественного. Секрет просто в том, что существует только одно число, именно 13, которое в 31-й степени дает 35-значный результат. Числа меньшие 13 дают меньше 35 цифр, большие — больше.

Откуда, однако, счетчик знал это? Как разыскал он число 13? Ему помогли логарифмы, *двузначные* логарифмы, которые он помнит наизусть для первых 15–20 чисел. Затвердить их вовсе не так трудно, как кажется, особенно, если пользоваться тем, что логарифмы чисел составных равны сумме логарифмов их простых множителей. Зная твердо логарифмы 2, 3 и 7, [1] вы уже знаете логарифмы чисел первого десятка; для второго десятка требуется помнить логарифмы еще четырех чисел.

Как бы то ни было, эстрадный вычислитель мысленно располагает следующей табличкой двузначных логарифмов:

| Числа | Лог. | Числа | Лог. |
|---|---|---|---|
| 2 | 0,3 | 11 | 1,04 |
| 3 | 0,48 | 12 | 1,08 |
| 4 | 0,6 | 13 | 1,11 |
| 5 | 0,7 | 14 | 1,15 |
| 6 | 0,78 | 15 | 1,18 |
| 7 | 0,84 | 16 | 1,20 |
| 8 | 0,9 | 17 | 1,23 |
| 9 | 0,95 | 18 | 1,25 |
| | | 19 | 1,28 |

Изумивший вас математический трюк состоял в следующем:

$$\lg \sqrt[31]{(35\text{ цифр})} = \frac{34,\ldots}{31}.$$

Искомый логарифм может заключаться между пределами

$$\frac{34}{31} \text{ и } \frac{34,99}{31}, \text{ или между } 1,09 \text{ и } 1,13.$$

[1] Напомним, что $\lg 5 = \lg \frac{10}{2} = 1 - \lg 2$.

В этом интервале имеется только логарифм одного целого числа, именно 1,11 – логарифм 13-ти. Таким путем и найден ошеломивший вас результат. Конечно, чтобы быстро проделать все это в уме, надо обладать находчивостью и сноровкой профессионала, — но по существу, дело, как видите, достаточно просто. Вы и сами можете теперь проделывать подобные фокусы, если не в уме, то на бумаге.

Предположим, вам предложена задача: извлечь корень 64-й степени из 20-значного числа.

Не осведомившись о том, что это за число, вы можете объявить результат извлечения: корень равен 2.

В самом деле:

$$\lg \sqrt[64]{(20 \text{ цифр})} = \frac{19,\ldots}{64};$$

он должен, следовательно, заключаться между

$$\frac{19}{64} \text{ и } \frac{19{,}99}{64}, \text{ т. е. между } 0{,}29 \text{ и } 0{,}31.$$

Такой логарифм для целого числа только один: 0,3, т. е. логарифм 2.

Вы даже можете окончательно поразить загадчика, сообщив ему, какое число он собирался вам продиктовать: знаменитое «шахматное» число

$$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.$$

## ЛОГАРИФМЫ НА СКОТНОМ ДВОРЕ

### Задача

Количество так называемого «поддерживающего» корма (т. е. то наименьшее количество его, которое лишь пополняет траты организма на теплоотдачу, работу внутренних органов, восстановление отмирающих клеток и т. п.)[1] пропорционально наружной поверхности тела животного. Зная это, определите калорийность поддерживающего корма для вола, весящего 420 кг, если при тех же условиях вол 630 кг весом нуждается в 13 500 калориях.

### Решение

Чтобы решить эту практическую задачу из области животноводства, понадобится кроме алгебры привлечь на помощь и геометрию. Согласно условию задачи, искомая калорийность $x$ пропорциональна поверхности ($s$) вола, т. е.

$$\frac{x}{13\,500} = \frac{s}{s_1},$$

[1] В отличие от «продуктивного» корма, т. е. части корма, идущей на выработку продукции животного, ради которой оно содержится.

где $s_1$ – поверхность тела вола, весящего 930 кг. Из геометрии мы знаем, что поверхности ($s$) подобных тел относятся как квадраты из линейных размеров ($l$), а объемы (и, следовательно, веса) — как кубы линейных размеров. Поэтому

$$\frac{s}{s_1} = \frac{l^2}{l_1^2}; \quad \frac{420}{630} = \frac{l^3}{l_1^3}, \text{ и значит, } \quad \frac{l}{l_1} = \frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}},$$

откуда

$$\frac{x}{13\,500} = \frac{\sqrt[3]{420}}{\sqrt[3]{630}} = \sqrt[3]{\left(\frac{420}{630}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$x = 13\,500 \sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

С помощью логарифмических таблиц находим

$$x = 10\,300.$$

Вол нуждается в 10 300 калориях.

## ЛОГАРИФМЫ В МУЗЫКЕ

Музыканты редко увлекаются математикой; большинство их, питая к этой науке чувство уважения, предпочитает держаться от нее подальше. Между тем музыканты — даже те, которые не проверяют, подобно Сальери у Пушкина, «алгеброй гармонию», — соприкасаются с математикой гораздо чаще, чем сами подозревают, и притом с такими страшными вещами, как логарифмы. Позволю себе по этому поводу привести отрывок из статьи нашего известного физика проф. А. Эйхенвальда[1]:

«Товарищ мой по гимназии любил играть на рояле, но не любил математики. Он даже говорил с оттенком пренебрежения, что музыка и математика друг с другом ничего не имеют общего. „Правда, Пифагор нашел какие-то соотношения между звуковыми колебаниями, — но ведь как раз пифагорова-то гамма для нашей музыки и оказалась неприменимой“.

Представьте же себе, как неприятно был поражен мой товарищ, когда я доказал ему, что, играя по клавишам современного рояля, он играет, собственно говоря, на логарифмах... И действительно, так называемые „ступени“ темперированной хроматической гаммы не расставлены на равных расстояниях ни по отношению к числам

[1] Она была напечатана в «Русском астрономическом календаре на 1919 г.» и озаглавлена «О больших и малых расстояниях».

колебаний, ни по отношению к длинам волн соответствующих звуков, а представляют собою *логарифмы* этих величин. Только основание этих логарифмов равно 2, а не 10, как принято в других случаях.

Положим, что нота *do* самой низкой октавы — будем ее называть *нулевой* октавой — определена $n$ колебаниями в секунду. Тогда *do* первой октавы будет делать в секунду $2n$ колебаний, а $m$-й октавы $n \times 2m$ колебаний и т. д. Обозначим все ноты хроматической гаммы рояля номерами $p$, принимая основной тон *do* каждой октавы за нулевой; тогда, например, тон *sol* будет 7-й, *la* будет 9-й и т. д.; 12-й тон будет опять *do*, только октавой выше. Так как в темперированной хроматической гамме каждый последующий тон имеет в $\sqrt[12]{2}$ большее число колебаний, чем предыдущий, то число колебаний любого тона можно выразить формулой

$$N_{pm} = n \times 2^m(\sqrt[12]{2})^p.$$

Логарифмируя эту формулу, получаем:

$$\lg N_{pm} = \lg n + m \lg 2 + p\,\frac{\lg 2}{12}$$

или

$$\lg N_{pm} = \lg n + \left(m + \frac{p}{12}\right) \lg 2,$$

а принимая число колебаний самого низкого *do* за единицу ($n = 1$) и переводя все логарифмы к основанию, равному 2 (или попросту принимая $\lg 2 = 1$), имеем

$$\lg_2 N_{pm} = m + \frac{p}{12}.$$

Отсюда видим, что номера клавишей рояля представляют собою логарифмы чисел колебаний соответствующих звуков. Мы даже можем сказать, что номер октавы представляет собою характеристику, а номер звука в данной октаве — мантиссу этого логарифма».

Например, — поясним от себя, — в тоне *sol* третьей октавы, т. е. в числе $3 + {}^7/_{12}$ (= 3,083), число 3 есть характеристика логарифма числа колебаний этого тона, а ${}^7/_{12}$ (= 0,083) — мантисса того же логарифма при основании 2; число колебаний, следовательно, в 23,083, т. е. в 8,47 раза больше числа колебаний тона *do* первой октавы.

## ЗВЕЗДЫ, ШУМ И ЛОГАРИФМЫ

Заголовок этот, связывающий столь, казалось бы, несоединимые вещи, не притязает быть пародией на произведения Козьмы Пруткова; речь в самом деле пойдет о звездах и о шуме в тесной связи с логарифмами.

Шум и звезды объединяются здесь потому, что и громкость шума и яркость звезд оцениваются одинаковым образом — по логарифмической шкале.

Астрономы распределяют звезды по степеням видимой яркости на светила первой величины, второй величины, третьей и т. д. Последовательные звездные величины воспринимаются глазом как члены арифметической прогрессии. Но физическая яркость их изменяется по иному закону: объективные яркости составляют геометрическую прогрессию с знаменателем 2,5. Легко понять, что «величина» звезды представляет собою не что иное, как логарифм ее физической яркости. Звезда, например, 3-й величины ярче звезды 1-й величины в 2,5(3 – 1) т. е. в 6,25 раза. Короче сказать, оценивая видимую яркость звезд, астроном оперирует с таблицей логарифмов, составленной при основании 2,5. Не останавливаюсь здесь подробнее на этих интересных соотношениях, так как им уделено достаточно страниц в другой моей книге «Занимательная астрономия».

Сходным образом оценивается и громкость шума. Вредное влияние промышленных шумов на здоровье рабочих и на производительность труда побудило выработать приемы точной числовой оценки громкости шума. Единицей громкости служит «бел»[1], практически — его десятая доля, «децибел». Последовательные степени громкости — 1 бел, 2 бела и т. д. (практически — 10 децибел, 20 децибел и т. д.) составляют для нашего слуха арифметическую прогрессию. Физическая же «сила» этих шумов (точнее — энергия) составляет прогрессию геометрическую со знаменателем 10. Разности громкостей в 1 бел отвечает отношение силы шумов 10. Значит, громкость шума, выраженная в белах, равна десятичному логарифму его физической силы.

[1] По имени одного из изобретателей телефона — Белла.

Дело станет яснее, если рассмотрим несколько примеров.

Тихий шелест листьев оценивается в 1 бел, громкая разговорная речь — в 6,5 бел, рычанье льва — в 8,7 бел. Отсюда следует, что по силе звука разговорная речь превышает шелест листьев в

$$10^{(6,5-1)} = 10^{5,5} = 316\,000 \text{ раз};$$

львиное рычанье сильнее громкой разговорной речи в

$$10^{(8,7-6,5)} = 10^{2,2} = 158 \text{ раз}.$$

Шум, громкость которого больше 8 бел, признается вредным для человеческого организма. Указанная норма на многих заводах превосходится: здесь бывают шумы в 10 и более бел; удары молотка в стальную плиту порождают шум в 11 бел. Шумы эти в 100 и в 1000 раз сильнее допустимой нормы и в 10–100 раз громче самого шумного места Ниагарского водопада (9 бел).

Случайность ли то, что и при оценке видимой яркости светил, и при измерении громкости шума мы имеем дело с логарифмической зависимостью между величиною ощущения и порождающего его раздражения? Нет, то и другое — следствие общего закона (называемого «психофизическим законом Фехнера»), гласящего: величина ощущения пропорциональна логарифму величины раздражения.

Как видим, логарифмы вторгаются и в область психологии.

## ЛОГАРИФМЫ В ЭЛЕКТРООСВЕЩЕНИИ

### Задача

Причина того, что наполненные газом (часто называемые — неправильно — «полуваттными») лампочки дают более яркий свет, чем пустотные с металлическою нитью из такого же материала, кроется в различной температуре нити накала. По правилу, установленному в физике (Луммером), общее количество света, испускаемое при белом калении, растет пропорционально 12-й степени абсолютной температуры. Зная это, проделаем такое вычисление: определим, во сколько раз «полуваттная» лампа, температура нити накала которой 2500° абсолютной шкалы (т. е. при счете от –273 °С), испускает больше света, чем пустотная с нитью накаленной до 2200°.

### Решение

Обозначив искомое отношение через $x$, имеем уравнение

$$x = \left(\frac{2\,500}{2\,200}\right)^{12} = \left(\frac{25}{22}\right)^{12},$$

откуда

$$\lg x = 12\,(\lg 25 - \lg 22); \qquad x = 4{,}6.$$

Наполненная газом лампа испускает света в 4,6 раза больше, нежели пустотная. Значит, если пустотная дает свет в 50 свечей, то наполненная газом при тех же условиях даст 230 свечей.

Сделаем еще расчет: какое повышение абсолютной температуры (в процентах) необходимо для удвоения яркости лампочки?

**Решение**

Составляем уравнение

$$\left(1+\frac{x}{100}\right)^{12}=2,$$

откуда

$$\lg\left(1+\frac{x}{100}\right)=\frac{\lg 2}{12} \quad \text{и} \quad x=6\%.$$

Наконец, третье вычисление: на сколько — в процентах — возрастет яркость лампочки, если температура ее нити (абсолютная) поднимется на 1%?

**Решение**

Выполняя с помощью логарифмов вычисление

$$x = 1{,}01^{12}$$

находим

$$x = 1{,}12.$$

Яркость возрастет на 12%.

Проделав вычисление для повышения температуры на 2%, найдем увеличение яркости на 28%; при повышении температуры на 3% — увеличение яркости на 43%.

Отсюда ясно, почему техника изготовления электролампочек так заботится о повышении температуры нити накала, дорожа каждым лишним градусом.

## ЗАВЕЩАНИЯ НА СОТНИ ЛЕТ

Кто не слыхал о том легендарном числе пшеничных зерен, какое будто бы потребовал себе в награду изобретатель шахматной игры? Число это составилось путем последовательного удвоения единицы: за первое поле шахматной доски изобретатель потребовал 1 зерно, за второе 2 и т. д., все удваивая, до последнего 64-го поля. Однако, с неожиданной стремительностью числа растут не только при последовательном удвоении, но и при гораздо более умеренной норме увеличения. Капитал, приносящий 5%, увеличивается ежегодно в 1,05 раза. Как будто едва заметное возрастание. А между тем по прошествии достаточного промежутка времени капитал успевает вырасти в огромную сумму.

Этим объясняется поражающее увеличение капиталов, завещанных на весьма долгий срок. Кажется странным, что, оставляя довольно скромную сумму, завещатель делает распоряжения об уплате огромных капиталов. Известно завещание знаменитого государственного деятеля, изобретателя громоотвода Веньямина Франклина. Оно опубликовано в «Собрании разных сочинений Веньямина Франклина». Вот извлечение из него:

«Препоручаю тысячу фунтов стерлингов бостонским жителям. Если они примут эту тысячу фунтов, то должны поручить ее отборнейшим гражданам, а они будут давать их, с процентами по 5 на сто в год, в заем молодым ремесленникам[1]. Сумма эта через сто лет возвысится до 131 000 фунтов стерлингов. Я желаю, чтобы тогда 100 000 фунтов употреблены были на постройку общественных зданий, остальные же 31 000 фунтов отданы были в проценты на 100 лет. По истечении второго столетия сумма возрастет до 4 061 000 фунтов стерлингов, из коих 1 060 000 фунтов оставляю в распоряжении бостонских жителей, а 3 000 000 — правлению Массачусетской коммуны. Далее не осмеливаюсь простирать своих видов».

Оставляя всего 1000 фунтов, Франклин распределяет миллионы. Здесь нет, однако, никакого недоразумения. Математический расчет удостоверяет, что соображения завещателя вполне реальны. 1000 фунтов, увеличиваясь ежегодно в 1,05 раза, через 100 лет должны превратиться в

$$x = 1000 \times 1{,}05^{100} \text{ фунтов.}$$

Это выражение можно вычислить с помощью логарифмов:

$$\lg x = \lg 1000 + 100 \lg 1{,}05 = 5{,}11893,$$

откуда

$$x = 131\,000,$$

в строгом соответствии с текстом завещания. Далее, 31 000 фунтов в течение следующего столетия превратятся в

$$y = 31\,000 \times 1{,}05^{100},$$

откуда, вычисляя с помощью логарифмов, находим

$$y = 4\,076\,500$$

— сумму, несущественно отличающуюся от указанной в завещании.

Франклин умер в 1790 г.; первая часть его завещания, надо думать, была осуществлена; срок же исполнения прочих распоряжений истечет только в 1990 г.

Предоставляю читателю самостоятельно решить следующую задачу, почерпнутую из «Господ Головлевых» Салтыкова:

[1] В Америке в ту эпоху еще не было кредитных учреждений.

«Порфирий Владимирович сидит у себя в кабинете, исписывая цифирными выкладками листы бумаги. На этот раз его занимает вопрос: сколько было бы у него теперь денег, если бы маменька подаренные ему при рождении дедушкой на зубок сто рублей не присвоила себе, а положила в ломбард на имя малолетнего Порфирия? Выходит однако, не много: всего восемьсот рублей».

Предполагая, что Порфирию в момент расчета было 50 лет и сделав допущение, что он произвел вычисление правильно (допущение маловероятное, так как едва ли Головлев знал логарифмы и справлялся с сложными процентами), требуется установить, по сколько процентов платил в то время ломбард.

## ДВА АМЕРИКАНСКИХ ДОЛГА

Остановимся еще на двух примерах быстрого роста капитала, выплывших в связи с полемикой западных держав о военных долгах. Первый пример связан с именем Бомарше — прославленного автора «Севильского цирюльника» и «Женитьбы Фигаро». Мало кому известно, что в эпоху войны американцев с Англией за независимость Бомарше по поручению правительства Людовика XVI поставлял американцам контрабандным путем (под видом торговли табаком) военное снаряжение. Поставка производилась в кредит, и сумма долга была в 1793 г. установлена Соединенными Штатами в размере 2 280 000 франков. Деньги, однако, не были Франции уплачены. О них просто забыли, и только в наши дни про долг вспомнили англичане, в связи с долговой полемикой, возгоревшейся между американскими и английскими публицистами. Было подсчитано, что если Соединенным Штатам предъявить обязательство уплаты долга Бомарше, то, считая из 5 сложных процентов, составилась бы сумма долга свыше

2000 млн. франков.

Проверим этот расчет. Начальный капитал — 2 280 000, срок — 140 лет, норма роста 5% (сложных).

Искомый капитал равен

$$2\,280\,000 \times 1{,}05^{140} = 2\,111\,200\,000 \text{ франков.}$$

Английский писатель Гриббль, вспомнивший о долге Бомарше, не кончает на Бомарше историю англо-американской войны. И дальнейшее изложение им истории англо-американской войны построено на той же теории сложных процентов. Мистер Гриббль предъявляет Соединенным Штатам, по его мнению, очень скромный счет. Его расчет таков: сумма, которую уплатили английские налогоплательщики на покрытие издержек по содержанию так называемых лойялистов, оставшихся верными Англии, составляет, по расчетам Гриббля, около 6 млн. фунтов стерлингов. Он не требует всей суммы, а хочет получить с Соединенных Штатов только 1 млн. фунтов, но из скромного расчета сложных пяти процентов за 150 лет. А это уже составило бы сумму в 1024 млн. фунтов ст., т. е. бóльшую, чем сумма военных долгов Англии Соединенным Штатам[1]. Проверим:

$$1\,000\,000 \times 1{,}05^{150} = 1\,508\,400\,000 \text{ ф. ст.}$$

Расчет публициста, как видим, сильно преуменьшен.

Надо думать, он пользовался популярным правилом (верным лишь приближенно), что капитал из 5 сложных процентов удваивается каждые 15 лет; 10 удвоений дают 1024.

## НЕПРЕРЫВНЫЙ РОСТ КАПИТАЛА

В сберкассах процентные деньги присоединяются к основному капиталу ежегодно. Если присоединение совершается чаще, то капитал растет быстрее, так как в образовании процентов участвует бóльшая сумма. Возьмем чисто теоретический, весьма упрощенный пример. Пусть в сберкассу положено 100 руб. из 100% годовых. Если процентные деньги будут присоединены к основному капиталу лишь по истечении года, то к этому сроку 100 руб. превратятся в 200 руб. Посмотрим теперь, во что превратятся 100 рублей, если процентные деньги присоединять к основному капиталу каждые полгода. По истечении полугодия 100 руб. вырастут в

$$100 \times 1{,}5 = 150 \text{ руб.}$$

А еще через полгода в

$$150 \times 1{,}5 = 225 \text{ руб.}$$

Если присоединение делать каждые ⅓ года, то по истечении года 100 руб. превратятся в $100 \times (1\tfrac{1}{3})^3 = 237$ руб.

Будем учащать сроки присоединения процентных денег до 0,1 года, до 0,01 года и т. д. Тогда из 100 руб. спустя год получится:

$$100 \times 1{,}1^{10} = 259 \text{ руб.}$$
$$100 \times 1{,}01^{100} = 270 \text{ руб. } 50 \text{ коп.}$$

В подробных курсах алгебры доказывается, что при безграничном сокращении сроков присоединения наращенный капитал не растет беспредельно, а приближается к некоторому пределу, равному приблизительно[2]

271 р. 83 к.

---

[1] «За рубежом», 1934.

[2] Дробные доли копейки мы отбросили.

Больше чем в 2,7183 раза капитал, положенный из 100%, увеличиться не может, даже если бы наросшие проценты присоединялись к капиталу каждую секунду.

## ЧИСЛО «*e*»

Сейчас полученное число 2,7183..., играющее в высшей математике огромную роль, — не меньшую, пожалуй, чем знаменитое число $\pi$, — имеет особое обозначение: $e$. Это число иррациональное: оно не может быть точно выражено конечным числом цифр[1], но вычисляется только приближенно, с любою степенью точности, с помощью следующего ряда:

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4}+\frac{1}{1\times 2\times 3\times 4\times 5}\ldots$$

Из приведенного выше примера с ростом капитала по сложным процентам легко видеть, что число $e$ есть предел выражения

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

при беспредельном возрастании $n$.

По многим причинам, которых мы здесь изложить не можем, число $e$ очень целесообразно принять за основание системы логарифмов. Такие таблицы («натуральных логарифмов») существуют и находят себе широкое применение в науке и технике. Те логарифмы-исполины из 48, из 61, из 102 и из 260 цифр, о которых мы говорили ранее имеют основанием именно число $e$.

Число $e$ появляется нередко там, где его вовсе не ожидали. Поставим себе, например, такую задачу:

На какие части надо разбить данное число $a$, чтобы произведение всех частей было наибольшее?

Мы уже знаем, что наибольшее произведение при постоянной сумме дают числа тогда, когда они равны между собой. Ясно, что число $a$ надо разбить на равные части. Но на сколько именно равных частей? На две, на три, на десять? Приемами высшей математики можно установить, что наибольшее произведение получается, когда части возможно ближе к числу $e$.

Например, 10 надо разбить на такое число равных частей, чтобы части были возможно ближе к 2,7183... Для этого надо найти частное

$$\frac{10}{2{,}718\ldots}=3{,}679\ldots$$

[1] Кроме того, оно, как и число $\pi$, трансцендентно, т. е. не может получиться в результате решения какого бы то ни было алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами.

Так как разделить на 3,679... равных части нельзя, то приходится выбрать делителем ближайшее целое число — 4. Мы получим, следовательно, наибольшее произведение частей 10-ти, если эти части равны $^{10}/_{4}$, т. е. 2,5.

Значит

$$(2{,}5)^4 = 39{,}0625$$

есть самое большое число, какое может получиться от перемножения частей числа 10-ти. Действительно, разделив 10 на 3 или на 5 равных частей, мы получим меньшие произведения:

$$\left(\frac{10}{3}\right)^3 = 37; \quad \left(\frac{10}{5}\right)^5 = 32;$$

Число 20 надо для получения наибольшего произведения его частей разбить на 7 частей, потому что

$$20 : 2{,}718 = 7{,}37 \approx 7.$$

Число 50 надо разбить на 18 частей, а 100 — на 37, потому что

$$50 : 2{,}718 = 18{,}4$$
$$100 : 2{,}718 = 36{,}8.$$

Что касается других применений числа *e*, то о разнообразии вопросов, при математическом рассмотрении которых приходится пользоваться этим числом, можно судить хотя бы по подзаголовкам статьи проф. М. Гребенча «Число *e* и его значение в естествознании и технике» (см. сборник «Математика и физика в средней школе», 1934, № 2):

Барометрическая формула.

Формула Эйлера[1].

Работа сжатия воздуха.

Скорость уменьшения стоимости оборудования.

Закон Ньютона (для охлаждения тел).

Распад радия и возраст Земли.

Рост клеток.

Прибавлю к этому еще формулу Циолковского для вычисления скорости ракеты (см. мою книгу «Межпланетные путешествия»).

## СКОЛЬКО ЛЮДЕЙ ЖИЛО НА СВЕТЕ?

Стремительное нарастание чисел, увеличивающихся в геометрической прогрессии, дает иногда повод к ошибочным заключениям. Поучительный

[1] О ней см. ст. «Жюль-верновский силач и формула Эйлера» во 2-й книге моей «Занимательной физики».

пример подобного заблуждения оставил нам поэт Бенедиктов, посвящавший свой досуг занятиям математикой, вернее — математическим развлечениям. Сохранилась составленная им рукописная «увеселительная арифметика», с которой я имел возможность познакомиться. Последняя глава ее носит название «Громадное число живших на земном шаре его обитателей» и заключает любопытный подсчет.

«Предположим, что первоначально от одной пары людей произошло две пары, что от каждой из этих пар произошло по две пары, и потом каждая пара производит две пары. По этому предположению размножение на земле людей шло в геометрической прогрессии: 1, 2, 4, 8, 16, 32... Возьмем столько членов этой прогрессии, сколько могло пройти человеческих поколений в течение 7376 лет. [Бенедиктов наивно опирался на библейские данные о древности человечества.] Положим на каждое поколение 50 лет». Насчитывая всех поколений, начиная от первой пары человеческих существ, 140 и беря 140 членов прогрессии, автор приходит к выводу, что число всех живших на Земле людей достигает 4 *септаллионов*. «Половину из этого числа отбросим, принимая в соображение, что многие из родившихся умирают в младенчестве... Значит, останемся только при двух *септаллионах*». *Септаллионом* Бенедиктов называет единицу с 42 нулями, т. е. $10^{42}$.

Далее, вес этого количества людей — «160 *септаллионов* фунтов» — он сопоставляет с «весом» земного шара, который принимает в 3,5 септиллиона фунтов (вместо 14 септиллионов)[1]. Результат получается поистине разительный: общий вес всех прежде живших людей превышает вес земного шара в 1600 миллиардов раз (приводим исправленную цифру). «Это показывает, — заключает автор, — что один и тот же вещественный материал, из которого формировались телесные составы живших на свете людей, был в обороте по крайней мере 1600 миллиардов раз, и за каждую вещественную частицу, перебывавшую в различных живых человеческих телах, могли бы спорить 1600 миллиардов индивидуумов».

Результат станет еще поразительнее, если принять во внимание соображение, что человечество произошло не от одной пары предков, а от многих, и что существует оно никак не 7000 лет, а несколько сот тысячелетий. Далее, надо иметь в виду, что «в формировании телесных составов» людей участвовала не вся масса земного шара, а только масса поверхностного слоя нашей планеты, составляющего незначительную часть всего объема Земли. Наконец, в споре за «каждую вещественную частицу, перебывавшую в живых телах», должно было предъявить свои права и бесчисленное множество животных, населявших нашу планету, начиная с древнейших геологических эпох.

---

[1] Здесь не следует путать «*септаллион*» Бенедиктова и «септиллион» — число $10^{24}$ по современной «короткой шкале» (см. с. 116). По современным данным, масса земного шара составляет $5{,}9726 \times 10^{24}$ кг, или $1{,}316\,68 \times 10^{25}$ фунтов, т. е. 14 септиллионов фунтов (*примеч. ред.*).

Явная несообразность, к которой мы пришли, показывает, что в ходе этого рассуждения кроется какая-то существенная ошибка.

Неправильность расчета обнаружилась бы и для его автора, если бы он догадался исчислить на основании своего рассуждения, сколько должно жить на земном шаре людей в тот момент, когда он писал свою книгу. Какова численность современного Бенедиктову 140-го поколения людей? Она равна $2^{140} \approx 10^{37}$, между тем как в действительности тогда жило на Земле всего около $10^9$ человек... Разница огромная, прямо указывающая на полную несостоятельность расчета[1].

В чем ошибка Бенедиктова?

Она заключается в том, что норма увеличения численности человечества, — два удвоения в столетие, — приблизительно верная для нашего времени, была незаконно распространена на все предшествовавшие времена вплоть до самой отдаленной эпохи. Между тем несомненно, что в древности смертность была гораздо выше, и следовательно, человечество размножалось значительно медленнее, чем в близкую нам эпоху. Даже в исторические времена бывали периоды, когда население целых стран не увеличивалось, а, напротив, уменьшалось; достаточно вспомнить эпоху тридцатилетней войны в Германии или чуму в Англии в XIV в., когда число обитателей страны уменьшилось более чем на 30%. Легко представить себе, какие опустошения производили войны, эпидемии и стихийные бедствия в ранний период существования человечества. Без сомнения, бывали периоды, — длившиеся, быть может, долгий ряд тысячелетий, — когда человечество временно вымирало, т. е. численность его шла на убыль. Допустимо ли при таких условиях говорить о непрерывном размножении человечества по правилу геометрической прогрессии[2]?

---

[1] Вероятная численность населения земного шара в отдаленные и в более близкие к нам эпохи такова:

| | | | |
|---|---|---|---|
| в начале | нашей эры | 80 | млн. |
| » 1000-м | году | 150 | » |
| » 1500-м | году . | 250 | » |
| » 1600-м | году | 300 | » |
| » 1700-м | году | 450 | » |
| » 1800-м | году | 800 | » |

Мы видим, что с удалением в глубь веков человечество размножалось все медленнее. Если в близкую к нам эпоху население Земли удваивалось в сто лет, то в отдаленные времена для его удвоения требовалось целое тысячелетие. Еще в более ранние эпохи человечество удваивало свою численность вероятно в течение десятков тысяч лет.

[2] Кроме того, если бы человечество размножалось по норме, указанной Бенедиктовым, то, приняв наличную численность человечества (1 300 000 000) за последний член прогрессии со знаменателем 2, легко было определить сумму всех ее членов 2 600 000 000. Странно, что столь простая мысль не пришла в голову Бенедиктову.

Мы можем, конечно, с весьма грубым приближением принять, что в среднем человечество размножалось все же по правилу возрастающей прогрессии, а именно считать, что по истечении, например, каждого тысячелетия численность его увеличилась в некоторое одинаковое число раз. Но тогда задачу, поставленную Бенедиктовым, надо решать совсем с другого конца. В прогрессии размножения человечества мы должны считать известным: *последний член*, т. е. нынешнюю численность населения земного шара, 2 000 000 000; *число членов*, т. е. число протекших тысячелетий — предположительно, конечно; остановимся, например, на 300 тысячелетиях; *первый член*, т. е. число первоначальных предков — еще более гадательно; примем, например, 100 предков. Знаменатель же этой прогрессии, который Бенедиктов считал исходным данным, нам придется вычислить, чтобы определить сумму ее членов. Пусть знаменатель прогрессии $x$, т. е. пусть численность человечества вырастает каждое тысячелетие в $x$ раз. К концу 300-го тысячелетия 100 предков должны были превратиться в

$$100\,x^{300}.$$

Так как число это должно равняться 2 000 000 000, или $2 \times 10^9$, то имеем уравнение

$$100\,x^{300} = 2 \times 10^9.$$

Логарифмируя, получаем

$$\lg 100 + 300 \lg x = \lg 2 + 9,$$

$$\lg x = \frac{7{,}30103}{300} = 0{,}02433,$$

$$x = 1{,}06.$$

Результат поучительный: численность человечества возрастала (в среднем) каждое тысячелетие на 6%, между тем как по Бенедиктову она удваивалась каждые 50 лет, т. е. за тысячелетие увеличилась в $2^{20} = 1\,048\,576$ — более чем в миллион раз!

Разница огромная, а отсюда и несообразный результат подсчета Бенедиктова.

Теперь попытаемся составить себе представление о том, каково в действительности могло быть число людей, живших на земном шаре за все время существования человечества. Будем считать, что в среднем наличное число людей успевает умереть и смениться новым в течение 50 лет. Если бы мы могли подсчитывать население земного шара каждые 50 лет, делая это в течение 300 000 лет, у нас получился бы ряд чисел, сумма которых составляла бы общую численность всех проживавших на Земле людей. Первые его 20 членов будут

100; 100; 100 и т. д.

Следующие 20 членов

$$106;\quad 106;\quad 106\quad \text{и т. д.}$$

Дальше пойдут 20 членов, каждый из которых равен

$$100(1{,}06)^2.$$

Затем 20 членов по $100(1{,}06)^3$ каждый и т. д.

Последними 20 членами будет нынешняя численность человечества — $2 \times 10^9$.

Нетрудно определить сумму членов такого ряда: она составляет

$$20 \times \frac{2 \times 10^9 \times 1{,}06 - 100}{1{,}06 - 1} \approx 20 \times 2 \times 10^9 \times 17 = 68 \times 10^{10}.$$

Вот сколько — по весьма, конечно, приблизительной оценке — жило на свете людей за время существования нашей планеты. Число это всего в 340 раз превышает современное население земного шара и ничтожно мало по сравнению с абсурдно огромным числом Бенедиктова.

Если представить себе, что объем всех этих человеческих тел равномерно распределен по поверхности земных материков, то высота слоя оказалась бы меньше ⅓ миллиметра (у Бенедиктова же — сумма всех человеских тел в 1 600 миллиардов раз превышает объем нашей планеты!).

Ошибку Бенедиктова делают и те богословы, которые пытались математическими расчетами подтвердить справедливость свидетельств Библии. Вот образчик такого рассуждения из статьи французского математика аббата Муанье «Древность человеческого рода» (1863 г.).

«Примем для годового возрастания народонаселения число $\frac{1}{227}$ [следовало сказать: $1\frac{1}{227}$. *Я. П.*], мало отличающееся от того, которое представляет действительное возрастание населения во Франции, и вспомним, что в 1600 г. от сотворения мира Ной вышел из ковчега с тремя сыновьями и тремя их женами, — тогда после 4207 лет [библейский счет!] число жителей на Земле должно равняться

$$7\left(1 + \frac{1}{227}\right)^{4207} = 1\,300\,000\,000,$$

т. е. истинному числу обитателей земного шара (в 1863 г.)».

Муанье видит в таком полном согласии подтверждение правильности свидетельств Библии. Излишне добавлять после сказанного ранее, что весь этот благочестивый расчет основан на грубом заблуждении.

## ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ КОМЕДИЯ

**Задача**

В добавление к тем математическим комедиям, с которыми читатель познакомился в главе V, приведем еще образчик того же рода, а именно «доказательство» неравенства 2 > 3. На этот раз в доказательстве участвует логарифмирование. «Комедия» начинается с неравенства

$$\tfrac{1}{4} > \tfrac{1}{8},$$

бесспорно правильного. Затем следует преобразование:

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 > \left(\tfrac{1}{2}\right)^3,$$

также не внушающее сомнения. Большему числу соответствует больший логарифм; значит,

$$2\lg_{10}\left(\tfrac{1}{2}\right) > 3\lg_{10}\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

После сокращения на $\lg_{10}\left(\tfrac{1}{2}\right)$ имеем

$$2 > 3.$$

В чем ошибка этого доказательства?

**Решение**

Ошибка в том, что при сокращении на $\lg_{10}\left(\tfrac{1}{2}\right)$ не был изменен знак неравенства (> на < ); между тем необходимо было это сделать, так как $\lg_{10}\left(\tfrac{1}{2}\right)$ есть число отрицательное. [Если бы мы логарифмировали при основании не 10, а другом, меньшем, чем ½, то $\lg\left(\tfrac{1}{2}\right)$ был бы положителен, но мы не вправе были бы тогда утверждать, что большему числу соответствует больший логарифм.]

## ЛЮБОЕ ЧИСЛО — ТРЕМЯ ДВОЙКАМИ

**Задача**

Закончим книгу остроумной алгебраической головоломкой, которой развлекались несколько лет назад участники съезда физиков в Одессе.

Предлагается задача: любое данное число, целое и положительное, изобразить помощью трех двоек и математических символов.

**Решение**

Покажем, как задача решается сначала на частном примере. Пусть данное число 3. Тогда задача решается так:

$$3 = -\lg_2 \lg_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}.$$

Легко удостовериться в правильности этого равенства. Действительно,

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \left[ \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^3}} = 2^{2^{-3}}$$

$$\lg\ 2^{2^{-3}} = 2^{-3}$$

$$-\lg_2 2^{-3} = 3.$$

Если бы дано было число 5, мы разрешили бы задачу тем же приемом:

$$5 = -\lg_2 \lg_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}.$$

Как видим, мы используем здесь то, что при квадратном радикале показатель корня не пишется.

Общее решение задачи таково. Если данное число $N$, то

$$N = -\lg_2 \lg_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\ \sqrt{\sqrt{2}}}}}_{N\ \text{раз}},$$

причем число радикалов равно числу единиц в заданном числе.

## ТРЕХЗНАЧНЫЕ ЛОГАРИФМЫ

$$\lg\pi = 0{,}497$$
$$\lg 2\pi = 0{,}798$$
$$\lg\sqrt{2} = 0{,}150$$
$$\lg\sqrt{3} = 0{,}239$$

| № | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,0 | 000 | 004 | 009 | 013 | 017 | 021 | 025 | 029 | 033 | 037 | | | | | | | | | |
| 1,1 | 041 | 045 | 049 | 053 | 057 | 061 | 064 | 068 | 072 | 076 | | | | | | | | | |
| 1,2 | 079 | 083 | 086 | 090 | 093 | 097 | 100 | 104 | 107 | 111 | | | | | | | | | |
| 1,3 | 114 | 117 | 121 | 124 | 127 | 130 | 134 | 137 | 140 | 143 | | | | | | | | | |
| 1,4 | 146 | 149 | 152 | 155 | 158 | 161 | 164 | 167 | 170 | 173 | | | | | | | | | |
| 1,5 | 176 | 179 | 182 | 185 | 188 | 190 | 193 | 196 | 199 | 201 | | | | | | | | | |
| 1,6 | 204 | 207 | 210 | 212 | 215 | 217 | 220 | 223 | 225 | 228 | | | | | | | | | |
| 1,7 | 230 | 233 | 236 | 238 | 241 | 243 | 246 | 248 | 250 | 253 | | | | | | | | | |
| 1,8 | 255 | 258 | 260 | 262 | 265 | 267 | 270 | 272 | 274 | 276 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 1,9 | 279 | 281 | 283 | 286 | 288 | 290 | 292 | 294 | 297 | 299 | | | | | | | | | |
| 2 | 301 | 322 | 342 | | | | | | | | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 2 | | | | 362 | 380 | 398 | | | | | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| 2 | | | | | | | 415 | 431 | 447 | 462 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 11 | 13 | 14 |
| 3 | 477 | 491 | 505 | 519 | | | | | | | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| 3 | | | | | 531 | 544 | 556 | 568 | 580 | 591 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| 4 | 602 | 613 | 623 | 633 | 643 | 653 | | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | | | | | | | 663 | 672 | 681 | 690 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 5 | 699 | 708 | 716 | 724 | 732 | 740 | 748 | 756 | 763 | 771 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| 6 | 778 | 785 | 792 | 799 | 806 | 813 | 820 | 826 | 833 | 839 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| 7 | 845 | 851 | 857 | 863 | 869 | 875 | 881 | 886 | 892 | 898 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| 8 | 903 | 908 | 914 | 919 | 924 | 929 | 935 | 940 | 944 | 949 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| 9 | 954 | 959 | 964 | 968 | 973 | 978 | 982 | 987 | 991 | 996 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

## УПОТРЕБЛЕНИЕ ТАБЛИЦЫ ЛОГАРИФМОВ

### Нахождение логарифма

1) Найти lg 138.

На пересечении строки «1,3» и графы «8» находим мантиссу 140. Характеристику (2) определяем по соображению. Имеем: lg 138 = 2,140.

2) Найти lg 5,27.

На пересечении строки «5» и графы «2» находим мантиссу 716 для числа 52. Поправку для третьей цифры отыскиваем в той же строке в графе поправок под цифрою 7. Здесь же находим 6. Следовательно, мантисса для 527 равна 716 + 6 = 722 и lg 5,27 = 0,722.

3) Найти lg 0,608.

На пересечении строки «6» и графы «0» находим мантиссу 778. Поправку для третьей цифры отыскиваем в той же строке, в графе поправок под цифрою 8. Здесь же находим 5. Следовательно, мантисса для 608 равна 778 + 5 = 783 и на lg 0,608 = 1,783.

### Нахождение числа

4) Найти число, логарифм которого 1,193.

Отыскав мантиссу 193, мы видим, что она отвечает числу 156. Следовательно, 1,193 = lg 15,6.

5) Найти число, логарифм которого 1,927.

В таблице нет мантиссы 927. Ближайшая меньшая мантисса, 924, отвечает числу 84. Поправку числа для недостающих 3-х единиц мантиссы отыскиваем в графе поправок над цифрой 3 той же строки, где взята была мантисса; над тройками стоят вверху графы цифры 5 и 6. Следовательно, мантисса 927 отвечает 845 или 846, а искомое число 0,845 или 0,846. Определить число точнее в этом случае нельзя.


Я. И. ПЕРЕЛЬМАН
ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ
ГЕОМЕТРИЯ
НА ВОЛЬНОМ
ВОЗДУХЕ
И ДОМА
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВРЕМЯ»

Текст и иллюстрации воспроизводятся по изданиям:

*Перельман Я. И. Занимательная геометрия на вольном воздухе и дома. — Л. : Время, 1925.*

*Перельман Я. И. Занимательная геометрия на вольном воздухе и дома. — 4-е изд. — Л.: Время, 1933*

*Перельман Я. И. Занимательная геометрия. — 6-е изд. — Л.; М.: ОНТИ. Гл. ред. науч.-попул. и юношеской лит., 1936*

Обложка издания 1925 г.

Природа говорит языком математики; буквы этого языка — круги, треугольники и иные математические фигуры.

*Галилей*

## Предисловие

Эта книга написана не столько для друзей математики, сколько для ее недругов. Она имеет в виду главным образом не тех, у кого есть уже склонность к математике, и не тех также, кто вовсе еще не приступал к ее изучению. Автор предназначает книгу всего более для той обширной категории читателей, которые знакомились в школе (или сейчас еще знакомятся) с этой наукой без особого интереса и одушевления, питая к ней в лучшем случае лишь холодную почтительность. Сделать геометрию для них привлекательной, внушить охоту и воспитать вкус к ее изучению — прямая задача настоящей книги.

Лучшее средство для этого — показать предмет, до некоторой степени известный читателю, с новой, незнакомой, порою неожиданной стороны, способной возбудить интерес и привлечь внимание. С этой целью автор прежде всего отделяет геометрию от классной доски, с которой наука эта прочно срослась в представлении такого читателя, выводит ее из стен школьной комнаты на вольный воздух, в лес, в поле, к реке, на дорогу, чтобы под открытым небом отдаться непринужденным геометрическим занятиям, без учебника и таблиц, без циркуля и линейки. Таково содержание первой части книги. Вторая предлагает читателю пестрый подбор упражнений и задач, любопытных по сюжету и мало похожих на те, какими занимается школа. Здесь также учебник откладывается в сторону, и единственный книжный материал, к которому привлекается внимание читателя, — страницы Жюля Верна, Майн Рида, Марка Твена, Свифта, Л. Н. Толстого...

Удалось ли подобными средствами достигнуть цели, — пусть судят те недруги геометрии, которых автор желает превратить в ее друзей.

Область, отвечающая назначению книги, весьма обширна и в значительной части общеизвестна. Стремясь дать свежий материал, составитель старался по возможности меньше писать о том, что излагалось другими. Ему не удалось, однако, избежать повторения в том или ином виде некоторых сюжетов, уже использованных им самим в его учебных книгах.

Художнику Ю. Д. Скалдину, снабдившему книгу большим числом вдумчиво исполненных иллюстраций, автор приносит свою признательность.

К сведущим читателям — просьба сообщить о замеченных в книге промахах и желательных изменениях. За прежде сделанные замечания выражаю моим корреспондентам глубокую благодарность.

*Я. П.*

# ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

# ГЕОМЕТРИЯ НА ВОЛЬНОМ ВОЗДУХЕ

Первые основы геометрии должны быть заложены не в школьной комнате, а на вольном воздухе. Покажите мальчику, как измеряется площадь луга, обратите его внимание на высоту колокольни, на длину тени, отбрасываемой ею, на соответствующее положение Солнца, — и он гораздо быстрее, правильнее и притом с бóльшим интересом усвоит математические соотношения, чем когда понятия измерения угла, а то и какой-либо тригонометрической функции внедряются в его голову с помощью слов и чертежа на доске.

*Альберт Эйнштейн*

## Глава первая

## ГЕОМЕТРИЯ В ЛЕСУ

### ПО ДЛИНЕ ТЕНИ

Еще сейчас памятно мне то изумление, с каким смотрел я в первый раз на седого лесничего, который, стоя возле огромной сосны, измерял ее высоту маленьким карманным прибором. Когда он нацелился своей квадратной дощечкой в вершину дерева, я ожидал, что старик сейчас начнет взбираться туда с мерной цепью. Вместо этого он положил прибор обратно в карман и объявил, что измерение окончено. А я думал, еще не начиналось...

Я был тогда очень молод, и такой способ измерения, когда человек определяет высоту дерева, не срубая его и не взбираясь на верхушку, являлся в моих глазах чем-то вроде маленького чуда. Лишь позднее, когда меня посвятили в начатки геометрии, понял я, до чего просто выполняются такого рода чудеса. Существует множество различных способов производить подобные измерения при помощи весьма незамысловатых приборов и даже без всяких приспособлений.

Самый легкий и самый древний способ — без сомнения, тот, которым греческий мудрец Фалес за шесть веков до нашей эры определил в Египте высоту пирамиды. Он воспользовался ее тенью. Жрецы и фараон, собравшиеся у подножия высочайшей пирамиды, озадаченно смотрели на северного пришельца, отгадывавшего по тени высоту огромного сооружения. Фалес — говорит предание, — избрал день и час, когда длина собственной его тени равнялась его росту; в этот момент высота пирамиды должна также равняться длине отбрасываемой ею тени[1]. Вот, пожалуй, единственный случай, когда человек извлекает пользу из своей тени...

Задача греческого мудреца представляется нам теперь детски простой, но не будем забывать, что смотрим мы на нее с высоты геометрического здания, воздвигнутого уже после Фалеса. Он жил задолго до Евклида, автора замечательной книги, по которой обучались геометрии в течение двух тысячелетий после его смерти. Заключенные в ней истины, известные теперь каждому школьнику, не были еще открыты в эпоху Фалеса. А чтобы воспользоваться тенью для решения задачи о высоте пирамиды, надо было знать уже некоторые геометрические свойства треугольника, — именно следующие два (из которых первое Фалес сам открыл):

1) что углы при основании равнобедренного треугольника равны, и обратно — что стороны, лежащие против равных углов треугольника, равны между собою;

2) что сумма углов всякого треугольника (или по крайней мере прямоугольного) равна двум прямым углам.

Только вооруженный этим знанием Фалес вправе был заключить, что, когда его собственная тень равна его росту, солнечные лучи встречают ровную почву под углом в половину прямого, и, следовательно, вершина пирамиды, середина ее основания и конец ее тени должны обозначить равнобедренный треугольник. Этим простым способом очень удобно, казалось бы, пользоваться в ясный солнечный день для измерения одиноко стоящих деревьев, тень которых не сливается с тенью соседних. Но в наших широтах не так легко, как в Египте, подстеречь нужный для этого момент: солнце у нас низко стоит над горизонтом, и тени бывают равны высоте отбрасывающих их предметов лишь в околополуденные часы летних месяцев. Поэтому способ Фалеса в указанном виде применим не всегда.

Нетрудно, однако, изменить этот способ так, чтобы в солнечный день можно было пользоваться любой тенью, какой бы длины она ни была. Измерив,

[1] Конечно, длину тени надо было считать от средней точки квадратного основания пирамиды; ширину этого основания Фалес мог измерить непосредственно.

кроме того, и свою тень или тень какого-нибудь шеста, вычисляют искомую высоту из пропорции (рис. 1):

$$AB : ab = BC : bc,$$

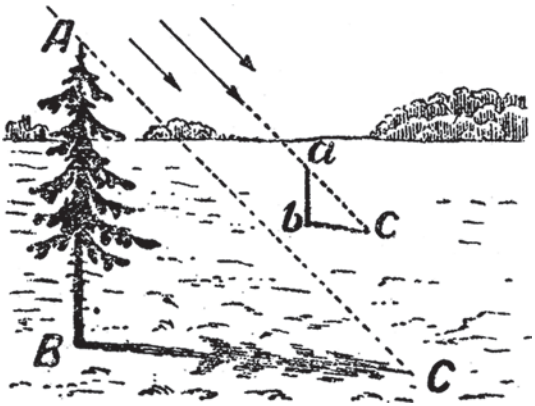



*Рис. 1*

т. е. высота дерева во столько же раз больше вашей собственной высоты (или высоты шеста), во сколько раз тень дерева длиннее вашей тени (или тени шеста). Это вытекает, конечно, из геометрического подобия треугольников $ABC$ и $abc$ (по двум углам).

Иные читатели возразят, пожалуй, что столь элементарный прием не нуждается вовсе в геометрическом обосновании: неужели и без геометрии не ясно, что во сколько раз дерево выше, во столько раз и тень его длиннее? Дело, однако, не так просто, как кажется. Попробуйте применить это правило к теням, отбрасываемым при свете уличного фонаря или лампы, — оно не оправдается. На рис. 2 вы видите, что столбик $AB$ выше тумбы $ab$ примерно втрое, а тень столбика больше тени тумбы ($BC$ : $bc$) раз в восемь. Объяснить, почему в данном случае способ применим, в другом нет, — невозможно без геометрии.

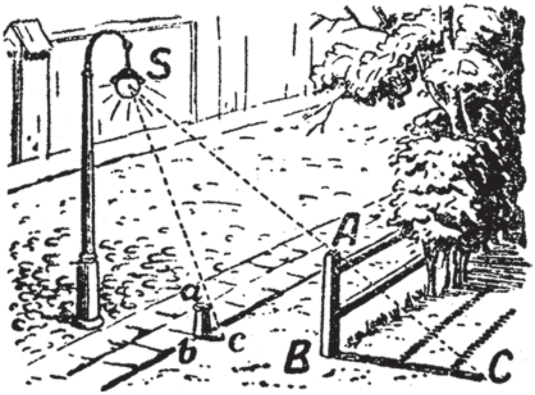



*Рис. 2*

**Задача №1**

Рассмотрим поближе, в чем тут разница. Суть дела сводится к тому, что солнечные лучи между собою параллельны, лучи же фонаря — не параллельны. Последнее очевидно; но почему вправе мы считать лучи Солнца параллельными, хотя они безусловно пересекаются в том месте, откуда исходят?

**Решение**

Лучи Солнца, падающие на Землю, мы можем считать параллельными потому, что угол между ними чрезвычайно мал, практически неуловим.

Несложный геометрический расчет убедит вас в этом. Вообразите два луча, исходящие из какой-нибудь точки Солнца и падающие на Землю в расстоянии, скажем, одного километра друг от друга. Значит, если бы мы поставили одну ножку циркуля в эту точку Солнца, а другою описали окружность на расстоянии Земли, то между нашими двумя лучами-радиусами оказалась бы дуга в один километр длиною. Полная длина этой исполинской окружности была бы равна $2\pi \times 150\,000\,000$ км = 940 000 000 км. [1] Один градус ее, конечно, в 360 раз меньше, т. е. около 2 600 000 км; одна дуговая минута в 60 раз меньше градуса, т. е. равна 43 000 км, а одна дуговая секунда еще в 60 раз меньше, т. е. 720 км. Но наша дуга имеет в длину всего только 1 км; значит, она соответствует углу в $\frac{1}{720}$ секунды. Такой ничтожный угол неуловим даже для точнейших астрономических инструментов; следовательно, на практике мы можем считать лучи Солнца, падающие на Землю, за параллельные прямые.

Если бы эти геометрические соображения не были нам известны, мы не могли бы обосновать рассматриваемый способ определения высоты по тени. Пробуя применить способ теней на практике, вы сразу же убедитесь, однако, в его ненадежности. Тени не ограничены так отчетливо, чтобы измерение их длины можно было выполнить вполне точно. Каждая тень, отбрасываемая при свете Солнца, имеет неясно очерченную серую кайму полутени, которая и придает границе тени неопределенность. Происходит это оттого, что Солнце — не точка, а большое светящееся тело, испускающее лучи из многих точек. На рис. 3 показано, почему вследствие этого тень *BC* дерева имеет еще придаток в виде полутени CD, постепенно сходящей на нет. Угол CAD между крайними границами полутени равен тому углу, под которым мы всегда видим солнечный диск, т. е. половине градуса. Ошибка, происходящая от того, что обе тени измеряются не вполне точно, может при не слишком низком стоянии Солнца достигать 5% и более. Эта ошибка прибавляется к другим неизбежным ошибкам — от неровности почвы и т. д. — и делает окончательный результат мало надежным. В местности гористой, например, способ этот совершенно неприменим.

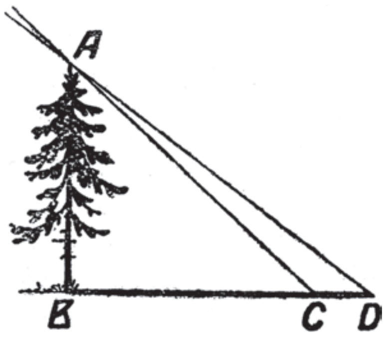


*Рис. 3*

[1] Расстояние от Земли до Солнца — 150 000 000 км.

## ЕЩЕ ДВА СПОСОБА

Вполне возможно обойтись при измерении высоты и без помощи теней. Таких способов много; начнем с двух простейших. Прежде всего мы можем воспользоваться свойством равнобедренного прямоугольного треугольника, обратившись к услугам весьма простого прибора, который легко изготовить из дощечки и трех булавок. На дощечке любой формы, даже на куске коры, если у него есть плоская сторона, намечают три точки — вершины равнобедренного прямоугольного треугольника — и в них втыкают торчком по булавке (рис. 4).

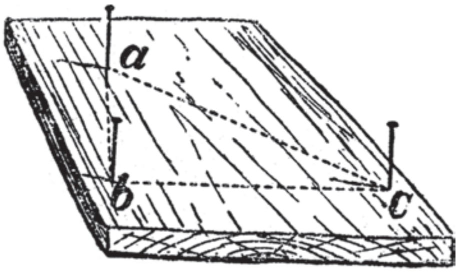



*Рис. 4*

У вас нет под рукой чертежного треугольника для построения прямого угла, нет и циркуля для отложения равных сторон. Перегните тогда любой лоскут бумаги один раз, а затем поперек первого сгиба еще раз так, чтобы обе части первого сгиба совпали, — и получите прямой угол. Та же бумажка пригодится и вместо циркуля, чтобы отмерить равные расстояния. Как видите, прибор может быть целиком изготовлен в бивуачной обстановке.

Обращение с ним не сложнее изготовления. Отойдя от измеряемого дерева, держите прибор так, чтобы один из катетов треугольника был направлен отвесно, для чего можете пользоваться ниточкой с грузиком, привязанной к верхней булавке. Приближаясь к дереву или удаляясь от него, вы всегда найдете такое место $A$ (рис. 5), из которого, глядя на булавки $a$ и $c$, увидите, что они покрывают верхушку $C$ дерева: это значит, что продолжение гипотенузы $ac$ проходит через точку $C$. Тогда, очевидно, расстояние $aB$ равно $CB$, так как угол $a = 45°$.Следовательно, измерив расстояние $aB$ (или, на ровном месте, одинаковое с ним расстояние $AD$) и прибавив $BD$, т. е. возвышение $aA$ глаза над землей, получите искомую высоту дерева. По другому способу

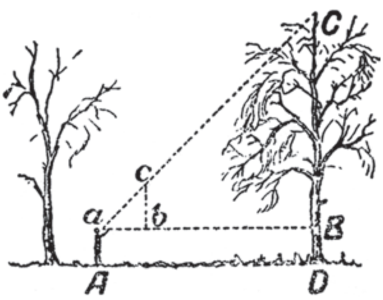



*Рис. 5*

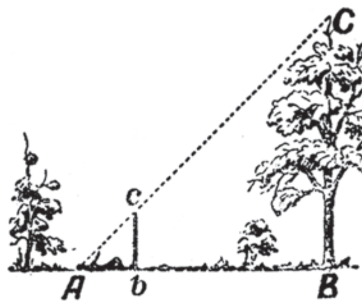



*Рис. 6*

вы обходитесь даже и без булавочного прибора. Здесь нужен шест, который вам придется воткнуть отвесно в землю так, чтобы выступающая часть как раз равнялась вашему росту[1]. Место для шеста надо выбрать так, чтобы лежа, как показано на рис. 6, вы видели верхушку дерева на одной прямой линии с верхней точкой шеста. Так как треугольник *Abc* — равнобедренный и прямоугольный, то угол $A = 45°$ и, следовательно, *AB* равно *BC*, т. е. искомой высоте дерева.

## ПО СПОСОБУ ЖЮЛЯ ВЕРНА

Следующий — тоже весьма несложный — способ измерения высоких предметов картинно описан у Жюля Верна в известном романе «Таинственный остров».

«— Сегодня нам надо измерить высоту площадки Далекого Вида, — сказал инженер.

— Вам понадобится для этого инструмент? — спросил Герберт.

— Нет, не понадобится. Мы будем действовать несколько иначе, обратившись к не менее простому и точному способу.

Юноша, стараясь научиться возможно большему, последовал за инженером, который спустился с гранитной стены до окраины берега.

Взяв прямой шест, футов 12 длиною, инженер измерил его возможно точнее, сравнивая со своим ростом, который был ему хорошо известен. Герберт же нес за ним отвес, врученный ему инженером: просто камень, привязанный к концу веревки.

Не доходя футов 500 до гранитной стены, поднимавшейся отвесно, инженер воткнул шест фута на два в песок и, прочно укрепив его, поставил вертикально с помощью отвеса.

Затем он отошел от шеста на такое расстояние, чтобы, лежа на песке, можно было на одной прямой линии видеть и конец шеста, и край гребня (рис. 7). Эту точку он тщательно пометил колышком.

— Тебе знакомы начатки геометрии? — спросил он Герберта, поднимаясь с земли.

— Да.

— Помнишь свойства подобных треугольников?

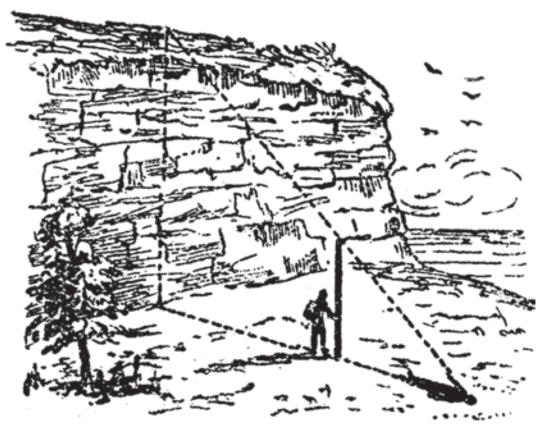


*Рис. 7*

[1] Точнее — расстоянию от подошв до глаз.

— Их сходственные стороны пропорциональны.

— Правильно. Так вот: сейчас я построю два подобных прямоугольных треугольника. У меньшего одним катетом будет отвесный шест, другим — расстояние от колышка до основания шеста; гипотенуза же — мой луч зрения. У другого треугольника катетами будут: отвесная стена, высоту которой мы хотим определить, и расстояние от колышка до основания этой стены; гипотенуза же — мой луч зрения, совпадающий с направлением гипотенузы первого треугольника.

— Понял! — воскликнул юноша. — Расстояние от колышка до шеста так относится к расстоянию от колышка до основания стены, как высота шеста к высоте стены.

— Да. И, следовательно, если мы измерим два первых расстояния, то, зная высоту шеста, сможем вычислить четвертый, неизвестный член пропорции, т. е. высоту стены. Мы обойдемся, таким образом, без непосредственного измерения этой высоты.

Оба горизонтальных расстояния были измерены: меньшее равнялось 15-ти футам, большее — 500-м футам.

По окончании измерений инженер составил следующую пропорцию:

$$15 : 500 = 10 : x,$$
$$500 \times 10 = 5000,$$
$$5000 : 15 = 333{,}3.$$

Значит, высота гранитной стены равнялась 333 футам».

Этот способ, как и предыдущий, неудобен тем, что при пользовании им приходится ложиться на землю. Но вот видоизменение, свободное от такого неудобства. Запасшись шестом выше человеческого роста, втыкают его отвесно на некотором расстоянии от измеряемого дерева (рис. 8). Отойдя от шеста назад, по продолжению прямой *Dd*, находят такую точку *A*, из которой, глядя на вершину дерева, видят на одной линии с ней и верхнюю точку *b* шеста. При этом замечают (здесь нужны услуги помощника) точки *c* и *C*, в которых горизонтальная прямая, проходящая через *a*, встречает шест и ствол; помощник делает в этих местах пометки, — и измерение окончено. Теперь остается только, на основании подобия треугольников *abc* и *aBC*, вычислить *BC* из пропорции:

$$BC : bc = aC : ac,$$

откуда:

$$BC = bc \times \frac{aC}{ac}$$

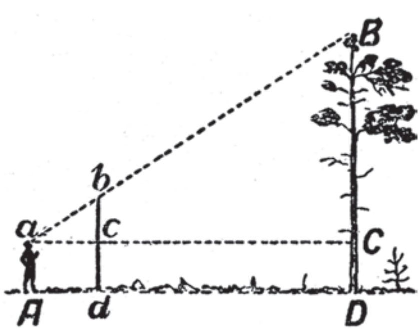



*Рис. 8*

Расстояния *bc*, *aC* и *ac* легко измерить непосредственно. К полученной величине *BC* нужно прибавить расстояние *CD* (которое также измеряется непосредственно), чтобы узнать искомую высоту дерева.

## С ПОМОЩЬЮ ЗАПИСНОЙ КНИЖКИ

В качестве прибора для приблизительной оценки недоступной высоты вы можете использовать и свою карманную записную книжку, если она снабжена карандашом, всунутым в чехлик или петельку при книжке. Она поможет вам построить в пространстве те два подобных треугольника, из которых получается искомая высота. Книжку надо держать возле глаза так, как показано на упрощенном рис. 9. Она должна находиться в отвесной плоскости, а карандаш выдвигается над верхним обрезом книжки настолько, чтобы, глядя из точки *a*, видеть вершину *B* дерева покрытой кончиком *b* карандаша. Тогда вследствие подобия треугольников *abc* и *aBC* высота *BC* определится из пропорции:

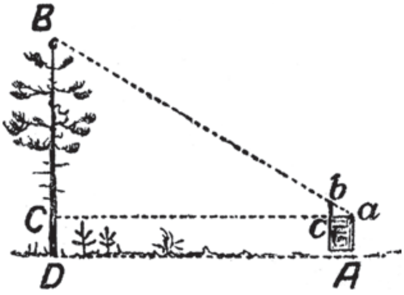


*Рис. 9*

$$BC : bc = aC : ac.$$

Расстояния *bc*, *ac* и *aC* измеряются непосредственно. К полученной величине *BC* надо прибавить еще длину *CD*, т. е. — на ровном месте — высоту глаза над почвой.

Так как ширина *ac* книжки неизменна, то если вы будете всегда становиться на одном и том же расстоянии от измеряемого дерева (например, в 10 м), высота дерева будет зависеть только от выдвинутой части *bc* карандаша. Поэтому вы можете заранее вычислить, какая высота соответствует тому или иному выдвижению, и нанести эти числа на карандаш. Ваша записная книжка превратится тогда в упрощенный высотомер, так как вы сможете при ее помощи определять высоты сразу, без вычислений.

## НЕ ПРИБЛИЖАЯСЬ К ДЕРЕВУ

Случается, что почему-либо неудобно подойти вплотную к основанию измеряемого дерева. Можно ли в таком случае определить его высоту?

Вполне возможно. Для этого придуман остроумный прибор, который, как и предыдущие, легко изготовить самому. Две планки *ab* и *cd* (рис. 10) скрепляются под прямым углом так, чтобы *ab* равнялось *bc*, а *bd* составляло половину *ab*. Вот и весь прибор. Чтобы измерить им высоту, держат его

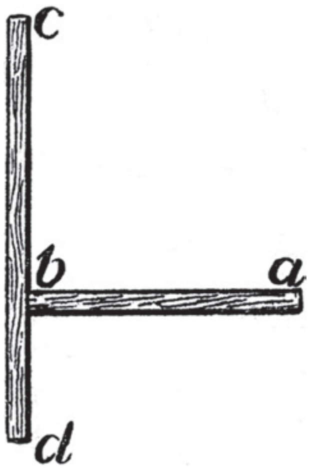


*Рис. 10*

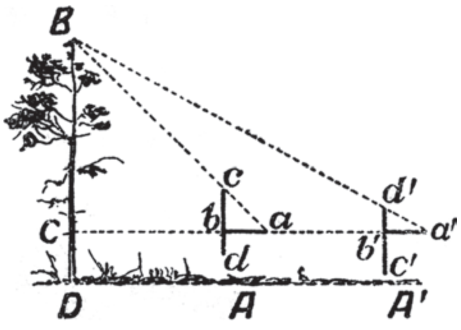



*Рис. 11*

в руках, направив планку *cd* вертикально (для чего при ней имеется отвес — шнурок с грузиком), и становятся последовательно в двух местах: сначала (рис. 11) в точке *A*, где располагают прибор концом *c* вверх, а затем в точке *A'*, подальше, где прибор держат вверх концом *d*. Точка *A* избирается так, чтобы, глядя из *a* на конец *c*, видеть его на одной прямой с верхушкой дерева. Точку же *A'* отыскивают так, чтобы, глядя из *a'* на точку *d'*, видеть ее совпадающей с *B*. В отыскании этих двух точек *A* и *A'* [1] заключается все измерение, потому что искомая высота дерева *BC* равна расстоянию *AA'*. Равенство вытекает, как легко сообразить, из того, что $aC = BC$, а $a'C = 2BC$; значит,

$$a'C - aC = BC.$$

Вы видите, что, пользуясь этим простым прибором, мы измеряем дерево, не подходя к его основанию ближе его высоты. Само собою разумеется, что если подойти к стволу возможно, то достаточно найти только одну из точек — *A* или *A'*, чтобы узнать его высоту.

Вместо двух планок можно воспользоваться четырьмя булавками, разместив их на дощечке надлежащим образом; в таком виде «прибор» еще проще и портативнее.

## ВЫСОТОМЕР ЛЕСОВОДОВ

Пора объяснить теперь, как устроены «настоящие» высотомеры, которыми пользуются на практике работники леса. Опишу один из подобных высотомеров, несколько изменив его так, чтобы легко было изготовить его самому. Сущность устройства видна из рис. 12. Картонный или деревянный прямоугольник *abcd* держат в руках так, чтобы, глядя вдоль края *ab*, видеть на одной линии с ним вершину *B* дерева. В точке *b* привешен на нити грузик *q*. Замечают точку *n*, в которой нить пересекает линию *dc*. Треугольники *bBC* и *bnc* подобны, так как оба прямоугольные и имеют равные острые углы *bBC* и *bnc* (с соответственно перпендикулярными сторонами). Значит, мы вправе написать пропорцию:

$$BC : nc = bC : bc,$$

[1] Точки эти непременно должны лежать на одной прямой с основанием дерева.

отсюда

$$BC = bC \times \frac{nc}{bc}.$$

Так как $bC$, $nc$ и $bc$ можно измерить непосредственно, то легко получить искомую высоту дерева, прибавив длину нижней части $CD$ ствола (высоту прибора над почвой).

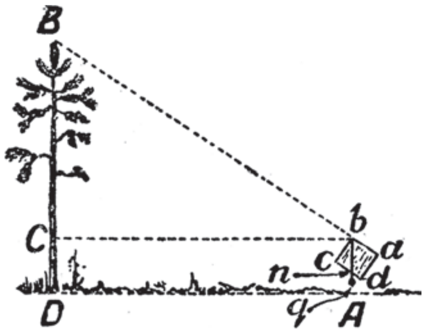



*Рис. 12*

Остается добавить несколько подробностей. Если край $bc$ дощечки сделать, например, ровно в 10 см, а на краю $dc$ нанести сантиметровые деления, то отношение $\frac{nc}{bc}$ будет всегда выражаться десятичной дробью, прямо указывающей, какую долю расстояния $bC$ составляет высота $BC$ дерева. Пусть, например, нить остановилась против 7-го деления (т. е. $nc$ = 7 см); это значит, что высота дерева над уровнем глаза составляет 0,7 расстояния наблюдателя от ствола.

Второе улучшение относится к способу наблюдения: чтобы удобно было смотреть вдоль линии $ab$, можно отогнуть у верхних углов картонного прямоугольника два квадратика с просверленными в них дырочками: одной поменьше — у глаза, другой побольше — для наведения на верхушку дерева (рис. 13).

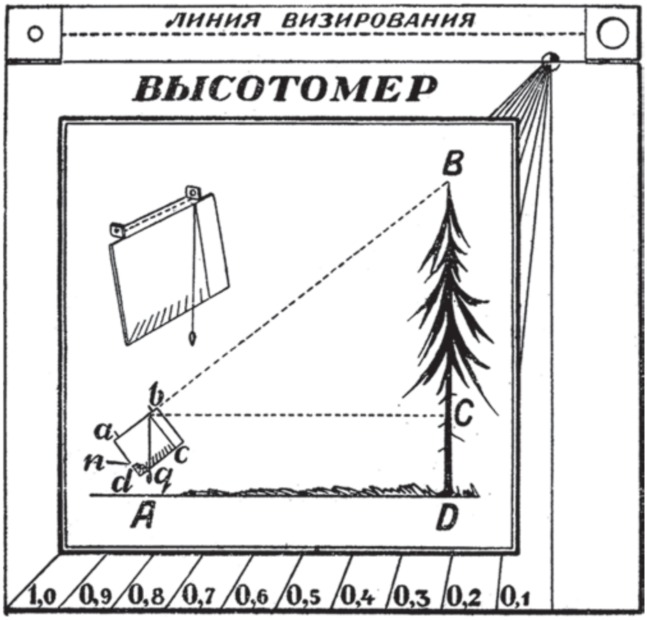



*Рис. 13. Прибор для определения высоты деревьев (в рамке пояснен способ употребления).*

В результате у нас получится прибор, изображенный почти в натуральную величину на рис. 13. Изготовить его в таком виде легко и недолго; для этого не требуется особенного уменья мастерить. Занимая в кармане немного места, он доставит вам возможность во время экскурсии быстро определять высоты встречных предметов — деревьев, столбов, зданий и т. п.

### Задача №2

Можно ли описанным сейчас высотомером измерять деревья, к которым нельзя подойти вплотную? Если можно, то как следует в таких случаях поступать?

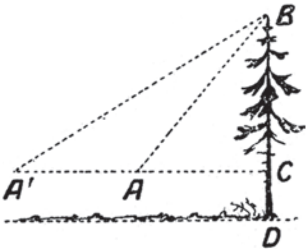



*Рис. 14*

### Решение

Надо направить прибор на вершину $B$ дерева (рис. 14) с двух точек $A$ и $A'$. Пусть в $A$ мы определили, что $BC = 0{,}9AC$, а в точке $A'$ — что $BC = 0{,}4\,A'C$. Тогда мы знаем, что

$$AC = \frac{BC}{0{,}9}; \qquad A'C = \frac{BC}{0{,}4},$$

откуда

$$AA' = A'C - AC = \frac{BC}{0{,}4} - \frac{BC}{0{,}9} = \frac{25}{18}\,BC.$$

Итак,

$$AA' = \frac{25}{18}\,BC, \quad \text{или } BC = \frac{18}{25}\,AA' = 0{,}72\,AA'.$$

Вы видите, что, измерив расстояние $A'A$ между обоими местами наблюдения и взяв определенную долю этой величины, мы узнаем искомую недоступную и неприступную высоту.

## С ПОМОЩЬЮ ЗЕРКАЛА

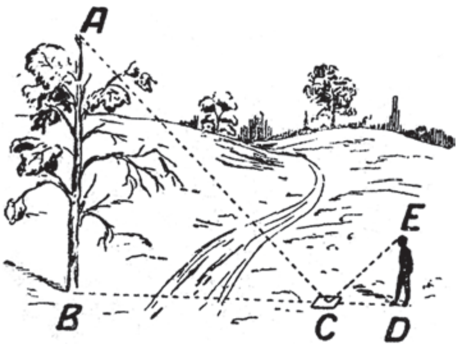



*Рис. 15*

### Задача №3

Вот еще один своеобразный способ определения высоты дерева — с помощью зеркала. На некотором расстоянии (рис. 15) от измеряемого дерева, на ровной земле, в точке $C$ кладут горизонтально зеркальце и отходят от него назад в такую точку $D$, стоя в которой наблюдатель видит в зеркале верхушку $A$ дерева. Тогда дерево ($AB$) во столько раз выше роста наблюдателя во сколько раз расстояние $BC$ от зеркала до дерева больше расстояния $CD$ от зеркала до наблюдателя. Почему?

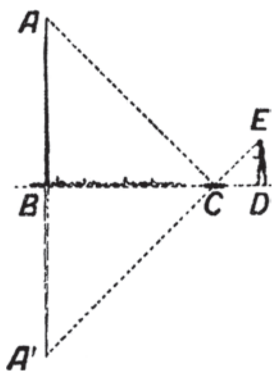


*Рис. 16*

**Решение**

Способ основан на законе отражения света. Вершина (рис. 16) $A$ отражается в точке $A'$ так, что $AB = A'B$. Из подобия же треугольников $BCA'$ и $CED$ следует, что

$$A'B : ED = BC : CD.$$

В этой пропорции остается лишь заменить $A'B$ равным ему АВ, чтобы обосновать указанное в задаче соотношение.

Этот удобный и нехлопотливый способ можно применять во всякую погоду, однако не в густом насаждении, а к одиноко стоящему дереву. Читатель сам догадается, как пользоваться им в тех случаях, когда нельзя приблизиться к дереву вплотную.

Прежде чем покончить беседу об измерении высоты деревьев, предложу читателю еще одну «лесную» задачу.

## ДВЕ СОСНЫ

**Задача №4**

В 40 м одна от другой растут две сосны. Вы измерили их высоту: одна оказалась в 31 м высотой, другая, молодая, — всего 6 м.

Можете ли вы вычислить, как велико расстояние между их верхушками?

**Решение**

Искомое расстояние $AB$ (рис. 17), по теореме Пифагора, равно

$$\sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{40^2 + 25^2} = 47.$$

Между верхушками сосен 47 м.

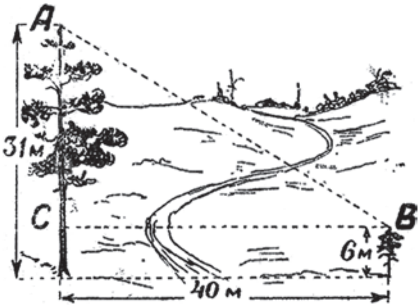


*Рис. 17*

## ФОРМА ДРЕВЕСНОГО СТВОЛА

Теперь вы можете уже, прогуливаясь по лесу, определить — чуть не полудюжиной различных способов — высоту любого дерева. Вам интересно будет, вероятно, определить также и его объем, вычислить, сколько в нем кубических метров древесины, а заодно и взвесить его, — узнать, можно ли было бы, например, увезти такой ствол на крестьянской телеге. Однако эта задача уже не столь проста, как определение высоты; специалисты еще не нашли способов точного ее разрешения и довольствуются лишь более или менее приближенной оценкой. Даже и для срубленного ствола, который лежит перед вами очищенный от сучьев, задача разрешается далеко не просто. Дело в том, что древесный ствол, самый ровный и тонкий, не представляет собою ни цилиндра, ни полного конуса, ни усеченного конуса, ни какого-либо другого геометрического тела, объем которого мы умеем вычислять по формуле. Ствол, конечно, не цилиндр, — он суживается к вершине (имеет «сбег», как говорят лесоводы), — но и не конус, потому что его «образующая» не прямая линия, а кривая, и притом не дуга окружности, а некоторая другая кривая, обращенная выпуклостью к оси дерева[1].

Поэтому более или менее точное вычисление объема древесного ствола выполнимо лишь средствами так называемой высшей математики. Иным читателям покажется, быть может, странным, что для измерения простого бревна приходится обращаться к услугам высшей математики. Многие думают, что высшая математика имеет отношение только к каким-то особенным предметам, в обиходной же жизни всегда применима лишь математика элементарная. Это совершенно неверно: можно довольно точно вычислить объем планеты, пользуясь элементами геометрии, между тем как точный расчет объема длинного бревна или пивной бочки невозможен без аналитической геометрии и интегрального исчисления.

Но наша книга не предполагает у читателя знакомства с высшей математикой; придется поэтому удовлетвориться здесь лишь приблизительным вычислением объема ствола. Будем исходить из того, что объем ствола более или менее близок либо к объему усеченного конуса, либо — для ствола с вершинным концом — к объему полного конуса, либо, наконец, — для коротких бревен — к объему цилиндра. Объем каждого из этих трех тел легко вычислить. Но нельзя ли для однообразия расчета найти такую формулу объема, которая годилась бы сразу для всех трех названных тел? Тогда мы приближенно вычисляли бы объем ствола, не интересуясь тем, на что он больше похож — на цилиндр или на конус, полный или усеченный.

---

[1] Всего ближе кривая эта подходит к так называемой «полукубической параболе» ($y^3 = ax^2$); тело, полученное вращением этой параболы, называется «нейлоидом» (по имени старинного английского математика Нейля, нашедшего способ определять длину дуги такой кривой). Ствол выросшего в лесу дерева по форме приближается к нейлоиду. Расчет объема нейлоида выполняется приемами высшей математики.

## УНИВЕРСАЛЬНАЯ ФОРМУЛА

Такая формула существует; более того, она пригодна не только для цилиндра, полного конуса и усеченного конуса, но также и для всякого рода призм, пирамид полных и усеченных, и даже для шара. Вот эта замечательная формула, известная в математике под названием формулы Симпсона:

в которой:

$$v = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_2 + b_3) \quad \begin{cases} h \text{ — высота тела} \\ b_1 \text{ — площ. нижнего основания} \\ b_2 \text{ — » среднего}^{1} \text{ »} \\ b_3 \text{ — » верхнего »} \end{cases}$$

### Задача № 5

Как доказать, что по приведенной сейчас формуле можно вычислять объем следующих семи геометрических тел:

призмы, цилиндра,
пирамиды полной, конуса полного,
пирамиды усеченной, конуса усеченного,
шара?

### Решение

Убедиться в правильности этой формулы очень легко простым применением ее к перечисленным телам. Тогда получим:

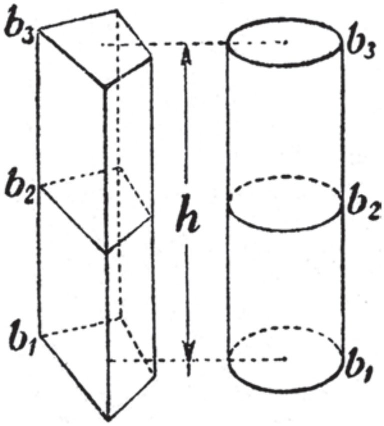



*Рис. 18*

для призмы и цилиндра (рис. 18) —

$$v = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_1 + b_1) = b_1h;$$

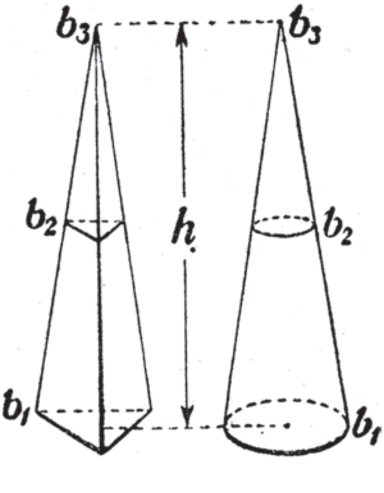



*Рис. 19*

для пирамиды и конуса (рис. 19) —

$$v = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1}{4} + 0\right) = \frac{b_1h}{3};$$

[1] Т. е. площадь сечения тела посредине его высоты.

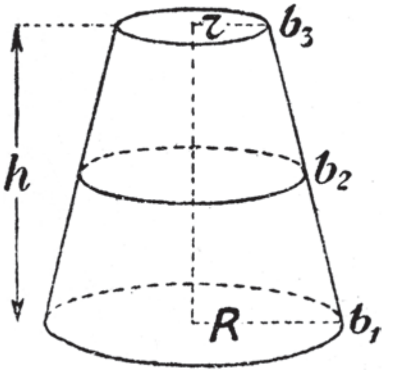



*Рис. 20*

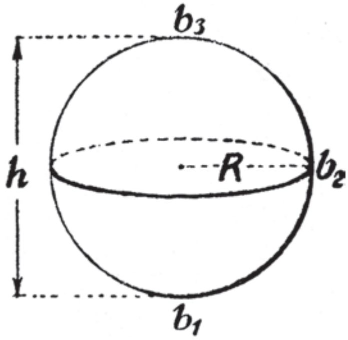



*Рис. 21*

для усеченного конуса (рис. 20) —

$$v = \frac{h}{6}\left[\pi R^2 + 4\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \pi r^2\right] =$$

$$= \frac{h}{6}(\pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi Rr + \pi r^2 +$$

$$+ \pi r^2) = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2);$$

для усеченной пирамиды доказательство ведется сходным образом; наконец, для шара (рис. 21) —

$$v = \frac{2R}{6}(0 + 4\pi R^2 + 0) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

## Задача №6

Отметим еще одну любопытную особенность нашей универсальной формулы: она годится также и для вычисления площади плоских фигур — параллелограмма, трапеции и треугольника, если под $h$ разуметь, как прежде, высоту фигуры, под $b_1$ — длину нижнего основания, под $b_2$ — среднего, под $b_3$ — верхнего.

Как это доказать?

## Решение

Применяя формулу, имеем:

для параллелограмма (квадрата, прямоугольника) (рис. 22) —

$$S = \frac{h}{6}(b_1 + 4b_1 + b_1) = bh;$$

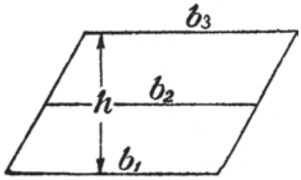



*Рис. 22*

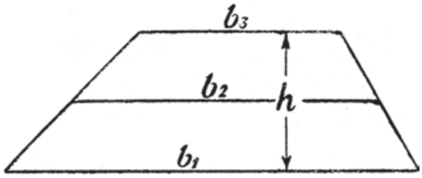



*Рис. 23*

для трапеции (рис. 23) —

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\ \frac{b_1+b_3}{2}\ + b_3\right) = \frac{h}{2}(b_1 + b_3);$$

для треугольника (рис. 24) —

$$S = \frac{h}{6}\ (b_1 + 4\ \frac{b_1}{2} + 0) = \frac{b_1 h}{2}.$$

Вы видите, что формула наша имеет достаточно прав называться *универсальной*.

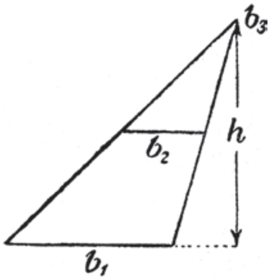



*Рис. 24*

## ОБЪЕМ И ВЕС ДЕРЕВА НА КОРНЮ

Итак, вы располагаете формулой, по которой можете приближенно вычислить объем ствола *срубленного* дерева, не задаваясь вопросом о том, на какое геометрическое тело он похож: на цилиндр, на полный конус или на усеченный конус. Для это понадобятся четыре измерения — длины ствола и трех поперечников: нижнего сруба, верхнего и по середине длины. Измерение нижнего и верхнего поперечника очень просто; непосредственное же определение среднего поперечника без специального приспособления («мерной вилки» лесоводов, рис. 25[1]) довольно неудобно. Но трудность можно обойти, если измерить бечевкой окружность ствола и разделить ее длину на $3\frac{1}{7}$, чтобы и получить диаметр.

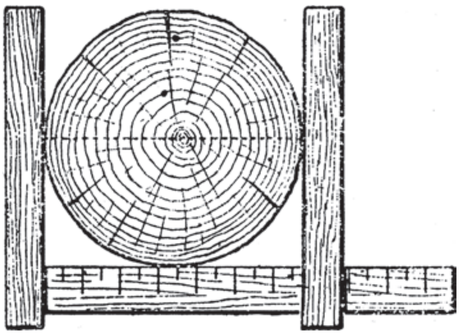


*Рис. 25. Мерная вилка*

Объем срубленного дерева получается при этом с точностью, достаточной для многих практических целей.

[1] Сходным образом устроен общеизвестный прибор для измерения диаметра круглых изделий — штангенциркуль (рис. 26).

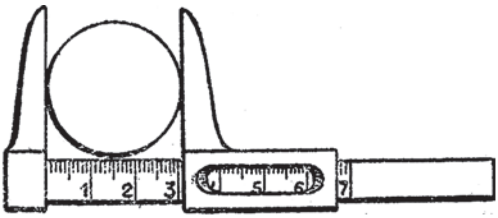



*Рис. 26. Штангенциркуль*

Короче, но менее точно, решается эта задача, если вычислить объем ствола, как объем цилиндра, диаметр основания которого *равен диаметру* ствола по середине длины: при этом результат получается, однако, преуменьшенный, иногда на 12%. Но если разделить ствол мысленно на отрубки в два метра длины и определить объем каждой из этих почти цилиндрических частей, чтобы, сложив их, получить объем всего ствола, то результат получится гораздо лучший: он погрешает в сторону преуменьшения не более чем на 2–3%.


*Рис. 27*

Все это, однако, совершенно неприменимо к дереву на корню: если вы не собираетесь взбираться на него, то вашему измерению доступен только диаметр его нижней части. В этом случае придется для определения объема довольствоваться лишь весьма приближенной оценкой, утешаясь тем, что и профессиональные лесоводы поступают обычно сходным же образом. Они пользуются для этого таблицей так называемых «видовых чисел», т. е. чисел, которые показывают, какую долю объем измеряемого дерева составляет от объема цилиндра той же высоты и диаметра, измеренного на высоте груди взрослого человека, т. е. 130 см (на этой высоте его удобнее всего измерять). Рис. 27 наглядно поясняет, в чем здесь дело. Конечно, «видовые числа» различны для деревьев разной породы и высоты, так как форма ствола изменчива. Но колебания не особенно велики: для стволов сосны и для ели (выросших в густом насаждении) «видовые числа» заключаются между 0,45 и 0,51, т. е. равны примерно половине.

Значит, без большой ошибки можно принимать за объем хвойного дерева на корню половину объема цилиндра той же высоты с диаметром, равным поперечнику дерева на высоте груди. Это, разумеется, лишь приближенная оценка, но не слишком отклоняющаяся

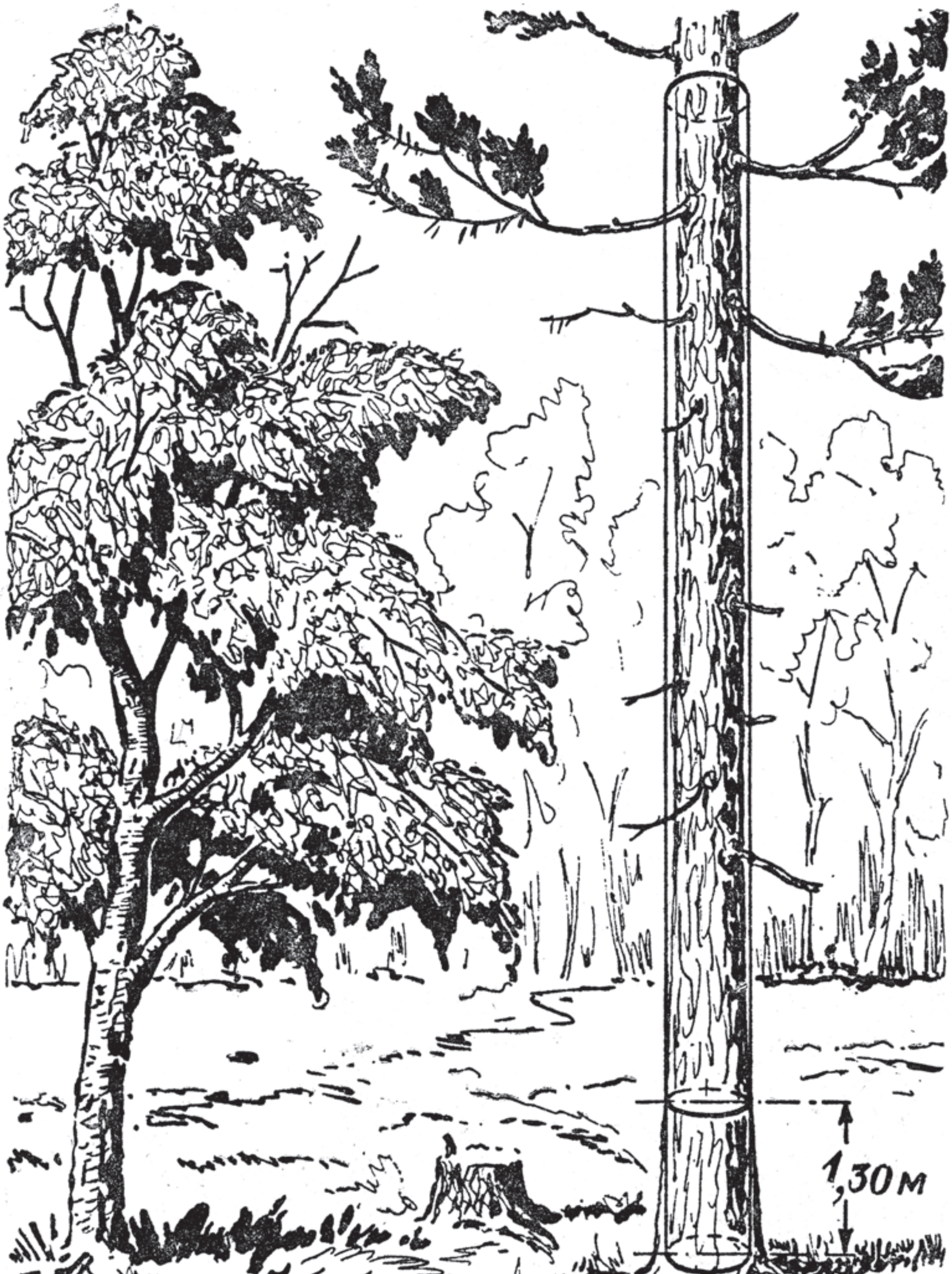



*Рис. 27. Что такое «видовое число»*

от истинного результата: до 2% в сторону преувеличения и до 10% в сторону преуменьшения[1].

Отсюда уже один шаг к тому, чтобы оценить и вес дерева на корню. Для этого достаточно лишь знать, что 1 м$^3$ свежей сосновой или еловой древесины весит около 600–700 кг. Пусть, например, вы стоите возле ели, высоту которой вы определили в 28 м, а окружность ствола на высоте груди оказалась равной 120 см. Тогда площадь соответствующего круга равна 1100 см$^2$, или 0,11 м$^2$, а объем ствола

$$\tfrac{1}{2} \times 0{,}11 \times 28 = 1{,}5 \text{ м}^3.$$

Принимая, что 1 м$^3$ свежей еловой древесины весит в среднем 650 кг, находим, что 1,5 м$^3$ должны весить около тонны (1000 кг).

## ГЕОМЕТРИЯ ЛИСТЬЕВ

### Задача № 7

В тени серебристого тополя от его корней разрослась поросль. Сорвите лист и заметьте, как он велик по сравнению с листьями родительского дерева, — особенно с теми, что выросли на ярком солнце. Теневые листья, очевидно, возмещают недостаток света размерами своей площади, улавливающей солнечные лучи. Разобраться в этом — задача ботаника. Но и геометр может сказать здесь свое слово: он может определить, во сколько именно раз площадь листа поросли больше площади листа родительского дерева.

Как решили бы вы эту задачу?

### Решение

Можно идти двояким путем. Во-первых, определить площадь каждого листа в отдельности и найти их отношение. Измерить же площадь листа можно, покрывая его прозрачной клетчатой бумагой, каждый квадратик которой соответствует, например, 4 мм$^2$ (клетчатая бумага, употребляемая для подобных целей, называется палеткой). Это хотя и вполне правильный, но чересчур кропотливый способ[2].

Более короткий способ основан на том, что оба листа, различные по величине, имеют все же одинаковую или почти одинаковую форму: другими словами — это фигуры, геометрически подобные. Площади таких фигур, мы знаем, относятся как квадраты их линейных размеров. Значит, определив,

---

[1] Необходимо помнить, что «видовые числа» относятся лишь к деревьям, выросшим в лесу, т. е. к высоким и тонким; для отдельно стоящих, ветвистых деревьев нельзя указать подобных общих правил вычисления объема.

[2] У этого способа есть, однако, и преимущество: пользуясь им, можно сравнивать площади листьев, имеющих неодинаковую форму, — чего нельзя сделать по далее описанному способу.

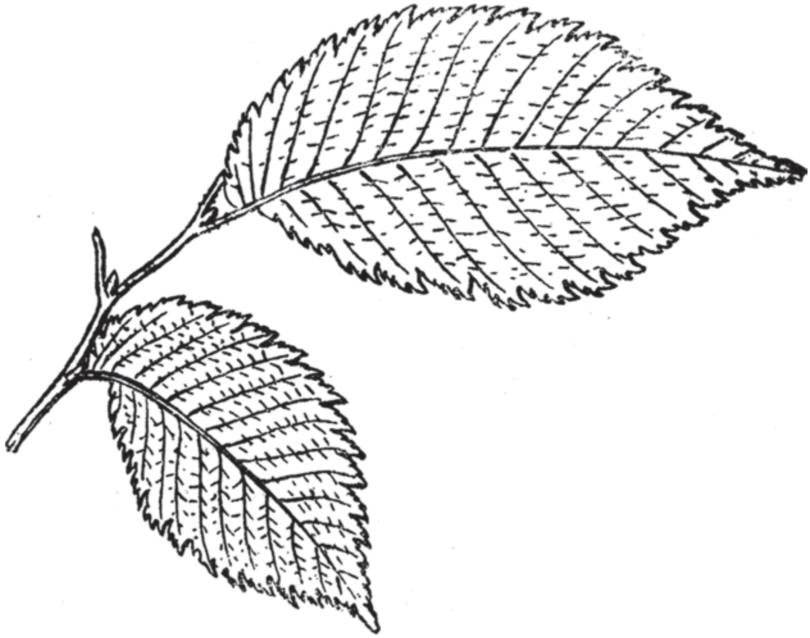


*Рис. 28. Задача № 9: во сколько раз площадь одного листа больше площади другого?*

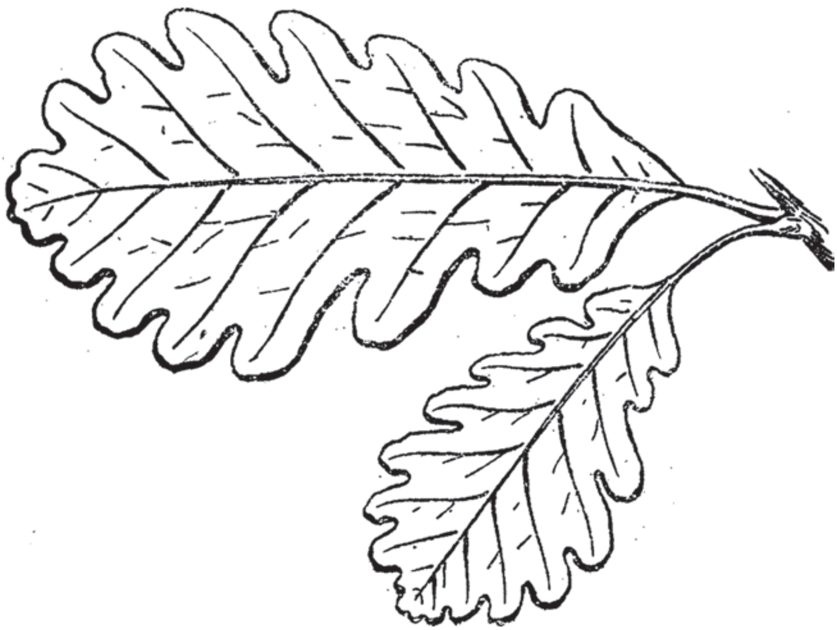


*Рис. 29. Задача №10: во сколько раз площадь одного листа больше площади другого?*

во сколько раз один лист длиннее или шире другого, мы простым возведением этого числа в квадрат узнаем отношение их площадей. Пусть лист поросли имеет в длину 15 см, а лист с ветви дерева — только 4 см; отношение линейных размеров $^{15}/_{4}$, и, значит, один больше другого по площади в $^{225}/_{16}$, т. е. в 14 раз. Округляя (так как полной точности здесь быть не может), мы вправе утверждать, что порослевый лист больше древесного по площади примерно в 15 раз.

Еще пример.

### Задача № 8

У одуванчика, выросшего в тени, лист имеет в длину 31 см. У другого экземпляра, выросшего на солнцепеке, длина листовой пластинки всего 3,3 см. Во сколько примерно раз площадь первого листа больше площади второго?

### Решение

Поступаем по предыдущему. Отношение площадей равно

$$\frac{31^2}{3{,}3^2} = \frac{960}{10{,}9} = 87\ ;$$

значит, один лист больше другого по площади раз в 90.

Нетрудно подобрать в лесу множество пар листьев одинаковой формы, но различной величины, и таким образом получить любопытный материал для геометрических задач на отношение площадей подобных фигур. Непривычному глазу всегда кажется странным при этом, что сравнительно небольшая разница в длине и ширине листьев порождает заметную разницу в их площадях. Если, например, из двух листьев, геометрически подобных по форме, один длиннее другого на 20%, то отношение их площадей равно

$$1{,}2^2 = 1{,}4,$$

т. е. разница составляет 40%. А при различии ширины в 40% один лист превышает другой по площади в

$$1{,}4^2 = 2,$$

т. е. с лишком вдвое.

### Задачи № 9 и № 10

Предлагаем читателю определить отношение площадей двух пар листьев, изображенных здесь в натуральную величину (рис. 28 и 29).

## ШЕСТИНОГИЕ БОГАТЫРИ

Удивительные создания муравьи! Проворно взбегая по стебельку вверх с тяжелой для своего крошечного роста ношей в челюстях, муравей задает наблюдающему за ним человеку головоломную задачу: откуда у этого насекомого берется сила, чтобы без видимого напряжения втаскивать груз в десять раз тяжелее его самого? Ведь человек не мог бы взбегать по стремянке, держа на плечах, например, пианино (рис. 30), — а отношение груза к весу тела у муравья примерно такое же. Выходит, что муравей относительно сильнее человека.

*Рис. 30*

Так ли?

Без геометрии здесь не разобраться. Послушаем, что говорит специалист (проф. А. Ф. Брандт) прежде всего о силе мускулов, а затем и о поставленном сейчас вопросе соотношения сил насекомого и человека.

«Живой мускул уподобляется упругому шнурку; только сокращение его основано не на упругости, а на других причинах, и проявляется нормально под влиянием нервного возбуждения, а в физиологическом опыте от прикладывания электрического тока к соответствующему нерву или непосредственно к самому мускулу.

Опыты весьма легко проделываются на мускулах, вырезанных из только что убитой лягушки, так как мускулы холоднокровных животных весьма долго и вне организма, даже при обыкновенной температуре, сохраняют свои жизненные свойства. Форма опыта очень простая. Вырезывают главный мускул, разгибающий заднюю лапу, — мускул икр — вместе с куском бедренной кости, от которой он берет начало, и вместе с концевым сухожилием. Этот мускул оказывается наиболее удобным и по своей величине, и по форме, и по легкости препаровки. За обрезок кости мускул подвешивают на станке (рис. 31*a*), а сквозь сухожилие продевают крючок, на который нацепляют гирю. Если до такого мускула дотрагиваться проволоками, идущими от гальванического элемента, то он моментально сокращается, укорачивается и приподнимает груз. Постепенным накладыванием дополнительных разновесок легко определить максимальную подъемную способность мускула. Свяжем теперь по длине (рис. 31*b*) два, три, четыре одинаковые мускула и станем раздражать их сразу. Этим мы не достигнем большей подъемной силы, а груз будет подниматься лишь на бóльшую высоту, соответственно суммировке укорочений отдельных мускулов. Зато если свяжем два, три, четыре мускула в пучок (рис. 31*c*), то вся система будет при раздражении поднимать и в соответственное число раз больший груз.

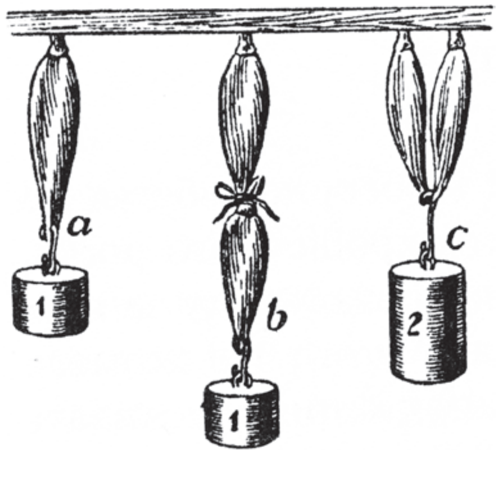



*Рис. 31*

Точно такой же результат, очевидно, получился бы и тогда, если бы мускулы между собою срослись. Итак, мы убеждаемся в том, что подъемная сила мускулов зависит не от длины или общей массы, а лишь от толщины, т. е. поперечного разреза.

После этого отступления обратимся к сличению одинаково устроенных, геометрически подобных, но различных по величине животных. Мы представим себе двух животных, первоначальное и вдвое увеличенное во всех линейных измерениях. У второго объем и вес всего тела, а также каждого из его органов, будет в 8 раз больше, все же соответственные плоскостные измерения, в том числе и поперечное сечение мускулов, лишь в 4 раза больше. Оказывается, что мускульная сила, по мере того как животное разрастается до двойной длины и восьмерного веса, увеличивается лишь в четыре раза, т. е. животное сделалось относительно вдвое слабее. На этом основании животное, которое втрое длиннее (с поперечными сечениями в 9 раз обширнейшими и с весом в 27 раз бóльшим), оказывалось бы относительно втрое слабее, а то, которое вчетверо длиннее — вчетверо слабее и т. д.

Законом неодинакового нарастания объема и веса животного, а вместе с тем и мускульной силы, объясняется, почему насекомое — как мы это наблюдаем на муравьях, хищных осах и т. д. — может тащить тяжести, в 30, в 40 раз превосходящие вес собственного их тела, тогда как человек в состоянии тащить нормально — мы исключаем гимнастов и носильщиков тяжестей — лишь около 9/10, а лошадь, на которую мы взираем как на прекрасную живую рабочую машину, и того меньше, а именно лишь около 7/10 своего веса»[1].

[1] Подробнее об этом — см. «Занимательную механику» Я. И. Перельмана, гл. X: «Механика в живой природе».

## Глава вторая

# ГЕОМЕТРИЯ У РЕКИ

## ИЗМЕРИТЬ ШИРИНУ РЕКИ

Не переплывая реки, измерить ее ширину — так же просто для знающего геометрию, как определить высоту дерева, не взбираясь на его вершину. Неприступное расстояние измеряют теми же приемами, какими мы измеряли недоступную высоту. В обоих случаях определение искомого расстояния заменяется промером другого расстояния, легко поддающегося непосредственному измерению.

Из многих способов решения этой задачи рассмотрим несколько наиболее простых.

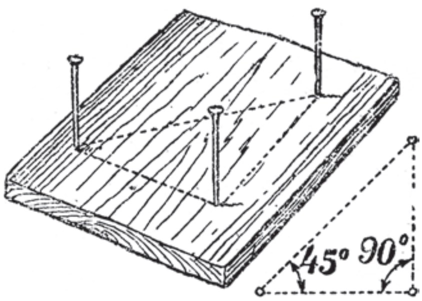



*Рис. 32*

1) Для первого способа понадобится уже знакомый нам «прибор» с тремя булавками на вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 32). Пусть требуется определить ширину *AB* реки (рис. 33), стоя на том берегу, где точка *B*, и не перебираясь на противоположный. Став где-нибудь у точки *B*, держите булавочный прибор близ глаз так, чтобы, смотря одним глазом вдоль двух булавок, вы видели, как обе они покрывают точки *B* и *A*. Легко понять, что, когда вам удастся, вы будете находиться как раз на продолжении прямой *AB*. Теперь, не двигая дощечки прибора, смотрите вдоль других двух булавок (перпендикулярно прежнему направлению) и заметьте какую-нибудь точку *D*, покрываемую этими булавками, т. е. лежащую на прямой,

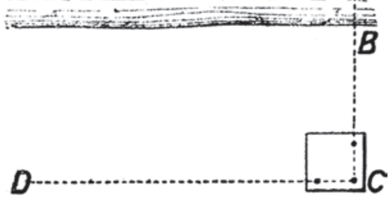



*Рис. 33*

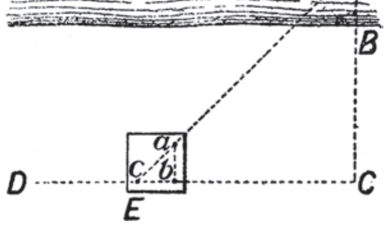



*Рис. 34*

перпендикулярной к *AC*. После этого воткните в точку *C* веху, покиньте это место и идите с вашим инструментом вдоль прямой *CD*, пока не найдете на ней такую точку *E* (рис. 34), откуда можно одновременно покрыть для глаза булавкой *b* шест точки *C*, а булавкой *a* — точку *A*. Это будет значить, что вы отыскали на берегу третью вершину треугольника *ACE*, в котором угол *C* — прямой, а угол *E* — равен острому углу булавочного прибора, т. е. ½ прямого. Очевидно, и угол *A* равен ½ прямого, т. е. *AC* = *CE*. Если вы измерите расстояние *CE* хотя бы шагами, вы узнаете расстояние *AC*, а отняв *BC*, которое легко измерить, вы определите искомую ширину реки.

Довольно неудобно и трудно держать в руке булавочный прибор неподвижно; лучше поэтому прикрепить эту дощечку к палке с заостренным концом, которую и втыкать отвесно в землю.

2) Второй способ сходен с первым. Здесь также находят точку *C* на продолжении *AB* и намечают с помощью булавочного прибора прямую *CD* под прямым углом к *AC*. Но дальше поступают иначе (рис. 35). На прямой *CD* отмеряют равные расстояния *CE* и *EF* произвольной длины и втыкают в точки *E* и *F* вехи. Став затем в точке *F* с булавочным прибором, намечают направление *FG*, перпендикулярное к *EC*. Теперь, идя вдоль *FG*, отыскивают на этой линии такую точку *H*, из которой веха *E* кажется покрывающей точку *A*. Это будет значить, что точки *H*, *E* и *A* лежат на одной прямой.

Задача решена: расстояние *FH* равно расстоянию *AC*, от которого достаточно лишь отнять *BC*, чтобы узнать искомую ширину реки (читатель, конечно, сам догадается, почему *FH* равно *AC*).

Этот способ требует больше места, чем первый; если местность позволяет осуществить оба приема, полезно проверить один результат другим.

3) Описанный сейчас способ можно видоизменить: отмерить на прямой *CF* не равные расстояния, а одно в несколько раз меньше другого. Например (рис. 36), отмеряют *FE* в четыре раза меньше *EC*, а далее поступают по-прежнему: по направлению *FG*, перпендикулярному к *FC*, отыскивают точку *H*,

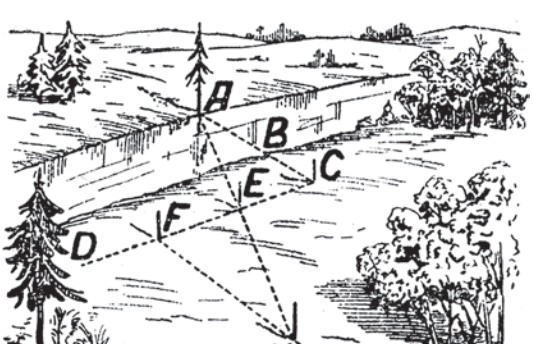



*Рис. 35*

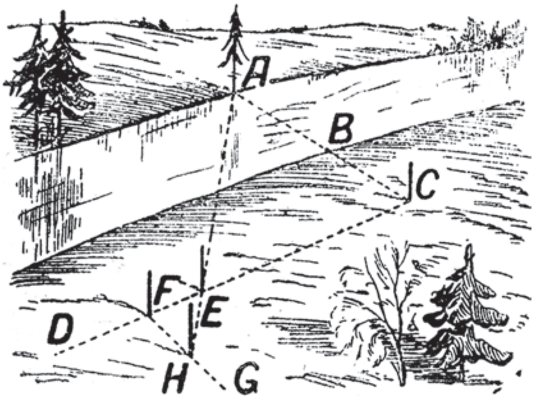



*Рис. 36*

из которой веха $E$ кажется покрывающей точку $A$. Но теперь уже $FH$ не равно $AC$, а меньше этого расстояния в 4 раза: треугольники $ACE$ и $EFH$ здесь не равны, а подобны (имеют равные углы при неравных сторонах). Из подобия треугольников следует пропорция

$$AC : FH = CE : EF = 4 : 1.$$

Значит, измерив $FH$ и умножив результат на 4, получим расстояние $AC$, а отняв $BC$, узнаем и искомую ширину реки.

Способ этот требует, как видим, меньше места, и потому удобнее для выполнения, чем предыдущий.

4) Четвертый способ основан на том свойстве прямоугольного треугольника, что если один из его острых углов равен 30°, то противолежащий катет составляет половину гипотенузы. Убедиться в правильности этого положения очень легко. Пусть угол $B$ прямоугольного треугольника $ABC$ (рис. 37) равен 30°; докажем, что в таком случае $AC = ½\ AB$. Повернем треугольник $ABC$ вокруг $BA$ так, чтобы он расположился симметрично своему первоначальному положению (рис. 37), образовав фигуру $ABD$; линия $ACD$, конечно, прямая, потому что оба угла у точки $C$ прямые. В треугольнике $ABD$ угол A = 60°, угол $ABD$, как составленный из двух углов по 30°, тоже равен 60°. Значит, $AD = BD$, как стороны, лежащие против равных углов. Но $AC =$ $= ½\ AD$; следовательно, $AC = ½\ AB$.

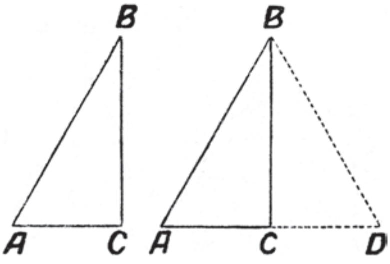



*Рис. 37*

Желая воспользоваться этим свойством треугольника, мы должны расположить булавки на дощечке так, чтобы основания их составляли прямоугольный треугольник, в котором катет вдвое меньше гипотенузы. С этим прибором мы помещаемся в точке $C$ (рис. 38) так, чтобы направление $AC$

совпадало с гипотенузой булавочного треугольника. Смотря вдоль короткого катета этого треугольника, намечают направление *CD* и отыскивают на нем такую точку *E*, чтобы направление *EA* было перпендикулярно к *CD* (это выполняется с помощью того же булавочного прибора). Легко сообразить, что расстояние *CE* — катет, лежащий против 30°, — равно половине *AC*. Значит, измерив *CE*, удвоив это расстояние и отняв *BC*, получим искомую ширину *AB* реки.

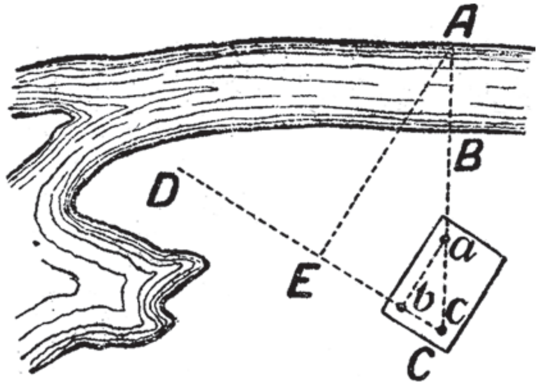



*Рис. 38*

Вот четыре легко выполнимых приема, с помощью которых всегда возможно, не переправляясь на другой берег, измерить ширину реки с вполне удовлетворительной точностью. Других способов, требующих употребления более сложных приборов (хотя бы и самодельных), мы здесь рассматривать не будем.

## ДЛИНА ОСТРОВА

### Задача № 11

Теперь нам предстоит задача более сложная. Стоя у реки или у озера, вы видите остров (рис. 39), длину которого желаете измерить, не покидая берег. Можно ли выполнить такое измерение?


*Рис. 39*

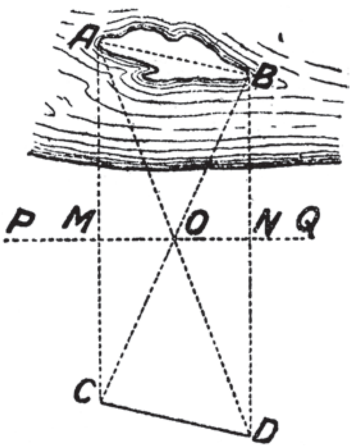



*Рис. 40*

Хотя в этом случае для нас неприступны оба конца измеряемой линии, задача все же вполне разрешима, притом без сложных приборов.

**Решение**

Пусть требуется узнать длину *AB* (рис. 40) острова, оставаясь во время измерения на берегу. Избрав на берегу две произвольные точки *P* и *Q*, втыкают в них вехи и отыскивают на прямой *PQ* точки *M* и *N* так, чтобы направления *AM* и *BN* составляли с направлением *BQ* прямые углы (для этого пользуются булавочным прибором). В середине *O* расстояния *MN* втыкают веху и отыскивают на продолжении линии *AM* такую точку *C*, откуда веха *O* кажется покрывающей точку *C*. Точно также на продолжении *BN* отыскивают точку *D*, откуда веха *O* кажется покрывающей конец *B* острова. Расстояние *CD* и будет искомой длиной острова.

Доказать это нетрудно. Рассмотрите прямоугольные треугольники *AMO* и *OND*; в них катеты *MO* и *ND* равны, а кроме того равны углы *AOM* и *NOD*, — следовательно, треугольники равны, и *AO* = *OD*. Сходным образом можно доказать, что *BC* = *AD*. Сравнивая затем треугольники *ABO* и *COD*, убеждаемся в их равенстве, а значит, и в равенстве расстояний *AB* и *CD*.

## ПЕШЕХОД НА ДРУГОМ БЕРЕГУ

**Задача № 12**

По другому берегу реки идет человек. Вы отчетливо различаете его шаги. Можете ли вы, не сходя с места, определить, хотя бы приблизительно, расстояние от него до вас? Никаких приборов вы под рукою не имеете.

**Решение**

У вас нет приборов, но есть глаза и руки, — этого достаточно. Вытяните руку вперед по направлению к пешеходу и смотрите на конец пальца одним глазом, ожидая, когда отдаленный пешеход покроется им. В этот момент вы закрываете тот глаз, которым сейчас смотрели, и открываете другой: пешеход покажется вам словно отодвинутым назад. Сосчитайте, сколько шагов сделает он, прежде чем снова поравняется с вашим пальцем. Вы получите все данные, необходимые для приблизительного определения расстояния.

Объясним, как ими воспользоваться. Пусть на рис. 41 *a* и *b* — ваши глаза, точка *M* — конец пальца вытянутой руки. Точка *A* — первое положение пешехода, *B* — второе. Треугольники *abM* и *ABM* подобны (вы должны

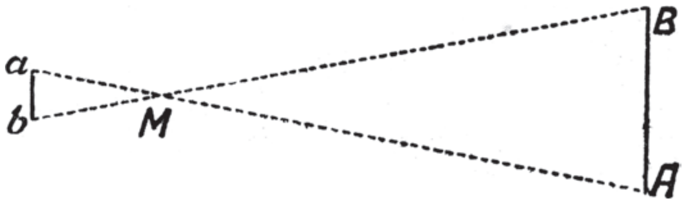



*Рис. 41*

повернуться к пешеходу так, чтобы *ab* было приблизительно параллельно направлению его движения). Значит, $BM : bM = AB : ab$, — пропорция, в которой неизвестен только один член *AM*, все же остальные можно определить непосредственно. Действительно: *bM* — длина вашей вытянутой руки: *ab* — расстояние между зрачками ваших глаз; *AB* — измерено шагами пешехода, которые можно принять в среднем равными ¾ м. Следовательно, неизвестное расстояние от вас до пешехода на противоположном берегу реки:

$$BM = AB \times \frac{aM}{ab}.$$

Если, например, расстояние между зрачками глаз (*ab*) у вас 6 см, длина *aM* от конца вытянутой руки до глаза 60 см, а пешеход сделал от *A* до *B*, скажем, 14 шагов, то расстояние его от вас $MB = 14 \times {}^{60}/_{6} = 140$ шагов, или 105 м.

Достаточно вам заранее измерить у себя расстояние между зрачками и *aM* — расстояние от глаза до конца вытянутой руки, чтобы, запомнив их отношение $\frac{aM}{ab}$, быстро определять отдаление недоступных предметов. Тогда останется лишь умножить *AB* на это отношение. В среднем у большинства людей $\frac{aM}{ab}$ равно 10 с небольшими колебаниями. Затруднение будет лишь в том, чтобы каким-нибудь образом определить расстояние AB. В нашем случае мы воспользовались шагами идущего вдали человека. Но можно привлечь к делу и иные указания. Если, например, вы измеряете расстояние от отдаленного товарного поезда, то длину *AB* можно оценить по сравнению с длиною товарного вагона, которая обычно известна (7,6 м между буферами). Если определяется расстояние от дома, то *AB* оценивают по сравнению с шириною окна, с длиною кирпича (27 см) и т. п. Тот же прием можно приложить и другим способом — для определения размера отдаленного предмета, если известно его расстояние от наблюдателя. Для этой цели можно пользоваться и другими «дальномерами», которые мы сейчас опишем.

## ПРОСТЕЙШИЕ ДАЛЬНОМЕРЫ

В первой главе был описан самый простой прибор для определения недоступных высот — высотомер. Теперь опишем простейшее приспособление для измерения недоступных расстояний — «дальномер». Простейший дальномер можно изготовить из обыкновенной спички. Для этого нужно лишь нанести на одной из ее граней миллиметровые деления, — для ясности попеременно светлые и черные (рис. 42).

*Рис. 42. Спичка-дальномер*

Пользоваться этим примитивным «дальномером» для оценки расстояния до отдаленного предмета можно только в тех случаях, когда размеры этого предмета вам известны; впрочем, и всякого рода иными дальномерами, более совершенного устройства, можно пользоваться при том же условии. Предположим, вы видите вдали человека и ставите себе задачу — определить расстояние до него. Здесь спичка-дальномер может вас выручить. Держа ее в вытянутой руке (рис. 43) и глядя одним глазом, вы приводите свободный ее конец в совпадение с верхней частью отдаленной фигуры. Затем, медленно подвигая по спичке ноготь большого пальца, вы останавливаете его у той ее точки, которая проектируется на основании человеческой фигуры. Вам остается теперь только узнать, приблизив спичку к глазу, у которого деления остановился ноготь, и тогда все данные для решения задачи у вас налицо.

Легко убедиться в правильности пропорции:

$$\frac{\text{искомое расстояние}}{\text{расст. от глаза до спички}} = \frac{\text{средн. рост человека}}{\text{измер. часть спички}}.$$

*Рис. 43*

Отсюда нетрудно вычислить искомое расстояние. Если, например, расстояние до спички — 60 см, рост человека — 1,7 м, а измеренная часть спички — 12 мм, то определяемое расстояние равно

$$60 \times \frac{1700}{12} = 8500 \text{ см} = 85 \text{ м}.$$

Чтобы приобрести некоторый навык в обращении с этим дальномером, измерьте рост кого-либо из ваших товарищей и, попросив его отойти на некоторое расстояние, попытайтесь определить, на сколько шагов от вас он отошел.

Тем же приемом можете вы определить расстояние от всадника (средняя высота 2,2 м), велосипедиста (диаметр колеса — 75 см), телеграфного столба вдоль рельсового пути (высота 8 м, отвесное расстояние между соседними изоляторами — 90 см), до железнодорожного поезда, кирпичного дома и т. п. предметов, размеры которых нетрудно оценить с достаточною точностью. Таких случаев может представиться во время экскурсий довольно много.

Для умеющих мастерить не составит большого труда изготовление более удобного прибора того же типа, предназначенного для оценки расстояний по величине отдаленной человеческой фигуры. Устройство его ясно из рис. 44. Наблюдаемый предмет помещают как раз в промежуток *A*, образующийся при поднятии выдвижной части приборчика. Величина промежутка удобно определяется по делениям на частях *C* и *D* дощечки. Чтобы избавить себя от необходимости делать какие-либо расчеты, можно на полоске *C* прямо нанести против делений соответствующие им расстояния, если наблюдаемый предмет — человеческая фигура (прибор держат от глаза на расстоянии вытянутой руки). На правой полоске *D* можно нанести обозначения расстояний, заранее вычисленных для случая, когда наблюдается фигура всадника (2,2 м). Для телеграфного столба (высота 8 м), аэроплана с размахом крыльев 15 м и т. п. более крупных предметов можно использовать верхние, свободные части полосок *C* и *D*. Тогда прибор получит вид, представленный в натуральную величину на рис. 45.

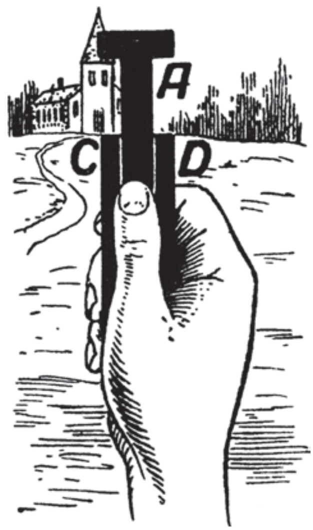


*Рис. 44*

Германские солдаты во время последней войны снабжались дальномерами именно такой конструкции[1].

Конечно, точность такой оценки расстояния невелика. Это именно лишь *оценка*, а не измерение. В примере, рассмотренном ранее, когда

[1] Я. П. имеет в виду Первую мировую войну 1914–1918 гг. (*примеч. ред.*).

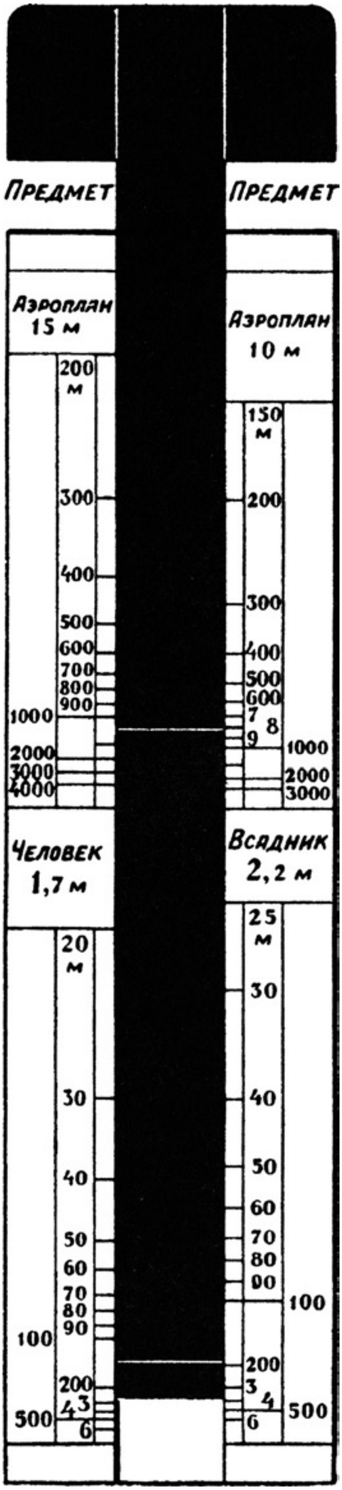



Рис. 45. Дальномер

расстояние до человеческой фигуры оценено было в 85 м, ошибка в 1 мм при измерении части спички дала бы погрешность результата в 7 м (1⁄12 от 85). Но если бы человек отстоял вчетверо дальше, мы отмерили бы на спичке не 12, а 3 мм — и тогда ошибка даже в ½ мм вызвала бы изменение результата на 57 м. Поэтому наш прием в случае человеческой фигуры надежен только для сравнительно близких расстояний в 100–200 м. При оценке бо́льших расстояний надо избирать и более крупные предметы.

## СКОРОСТЬ ТЕЧЕНИЯ

«Много воды утекло с тех пор», — часто говорим мы, но мало кто умеет ответить на вопрос: сколько именно воды протекает, например, в сутки даже в небольшой речке? Между тем это вполне поддается измерению и представляет сравнительно нетрудную геометрическую задачу.

Чтобы решить ее, нужно прежде всего измерить скорость течения воды в реке. Измерение выполняют несколько человек. Избирают прямой участок реки и ставят вдоль берега две вехи *A* и *B*, в расстоянии, например, 100 м одну от другой (рис. 46). На линиях, перпендикулярных к *AB*, ставят еще две вехи *C* и *D*. Один из участников измерения становится позади вехи *C*, другой — позади вехи *D* и смотрят вдоль направлений *CA* и *DB* на поверхность воды. Третий участник бросает в воду выше точки *A* какой-нибудь хорошо заметный поплавок, например, закупоренную полупустую бутылку с флажком. Наблюдатели, стоящие у вех с хорошо сверенными часами в руках, отмечают моменты, когда поплавок пересечет продолжение линий *AC* и *DB*. Если разница времени, например, 40 секунд, то скорость течения воды в реке

$$\frac{100}{40} = 2\tfrac{1}{2} \text{ м в секунду.}$$

Полученный результат относится лишь к поверхностным струям реки. Более глубокие слои текут медленнее, и средняя скорость течения всех струй в реке составляет приблизительно ⅚ этой поверхностной скорости, — в нашем случае около 2 м в секунду.

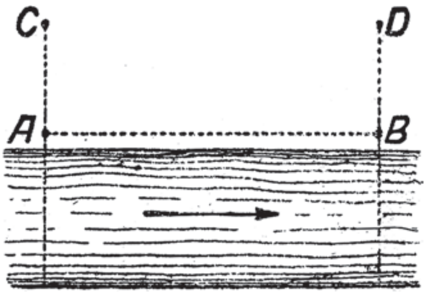


*Рис. 46*

Можно определить поверхностную скорость и иным — правда, менее надежным — способом. Сядьте в лодку и проплывите 1 км (отмеренный по берегу) вверх по течению и затем обратно по течению, стараясь все время грести с одинаковою силою. Пусть вы проплыли эти 1000 м против течения в 18 минут, а по течению — в 6 минут. Обозначив искомую скорость течения реки через $x$, а скорость вашего движения в стоячей воде через $y$, вы составляете уравнения:

$$\frac{1000}{y-x} = 18; \qquad \frac{1000}{y+x} = 6,$$

откуда

$$\begin{aligned} y + x &= \frac{1000}{6} \\ y - x &= \frac{1000}{18} \\ \hline 2x &= 110 \\ x &= 55 \end{aligned}$$

Скорость течения воды на поверхности равна 55 м в минуту, а следовательно, средняя скорость — около ⅚ м в секунду.

## СКОЛЬКО ВОДЫ ПРОТЕКАЕТ В РЕКЕ?

Так или иначе, вы всегда можете определить скорость, с какой текут водяные струи реки. Труднее вторая часть подготовительной работы, необходимой для вычисления количества протекающей воды, — определение площади поперечного разреза воды. Чтобы найти величину этой площади, — того, что принято называть «живым сечением» реки, — надо изготовить чертеж этого сечения. Выполняется подобная работа следующим образом.

В том месте, где вы измерили ширину реки, вы ставите на обоих берегах по вехе. Затем садитесь с товарищем в лодку и плывете от одной вехи к другой, стараясь все время держаться прямой линии, соединяющей вехи. Неопытный гребец с такой задачей не справится, особенно в реке с быстрым течением.

Ваш товарищ должен быть искусным гребцом; кроме того, ему должен помогать и третий участник работы, который, стоя на берегу, следит, чтобы лодка не сбивалась с надлежащего направления, и в нужных случаях дает гребцу сигналами указания, в какую сторону ему нужно повернуть. В первую переправу через речку вы должны сосчитать лишь, сколько ударов веслами она потребовала, и отсюда узнать, какое число гребков перемещает лодку на 5 или 10 м. Тогда вы совершаете второй переезд, вооружившись на этот раз достаточно длинным шестом с нанесенными на нем делениями, и каждые 5–10 м (отмеряемые по числу гребков) погружаете шест до дна, записывая глубину речки в этом месте.

Таким способом можно промерить живое сечение только небольшой речки; для широкой, многоводной реки необходимы другие, более сложные приемы; работа эта выполняется специалистами. Любителю приходится избирать себе задачу, отвечающую его скромным *измерительным* средствам.

Когда все измерения закончены, вы прежде всего набрасываете на бумаге чертеж поперечного профиля реки. У вас получится фигура вроде той, какая изображена *сплошными линиями* на рис. 47. Площадь этой фигуры определить весьма несложно, так как она расчленяется на ряд трапеций, в которых вам известны оба основания и высота, и на два краевых треугольника также с известными основанием и высотой.

Теперь вы располагаете уже всеми данными для расчета количества протекающей воды. Очевидно, через живое сечение реки протекает каждую секунду объем воды, равный объему призмы, основанием которой служит это сечение, а высотой — средняя секундная скорость течения. Если, например, средняя скорость течения воды в речке 1,5 м в секунду, а площадь живого сечения, скажем, равна 126 $м^2$, то ежесекундно через это сечение проносится

$$126 \times 1{,}5 = 190 \text{ м}^3 \text{ воды,}$$

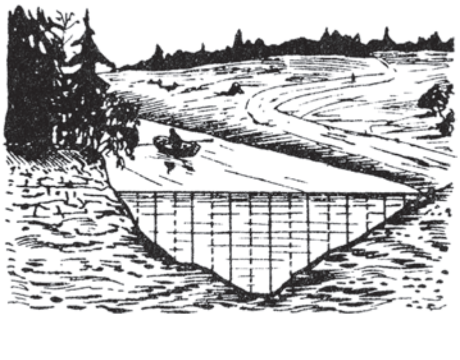


*Рис. 47. «Живое сечение» реки*

или столько же тонн[1]. Это составляет в час $190 \times 3600 = 680\,000$ $м^3$, а в сутки $680\,000 \times 24 = 16\,000\,000$ $м^3$, около 16 миллионов $м^3$, почти в сто раз больше, чем подает за то же время ленинградский водопровод, питающий два миллиона жителей[2]. В год мимо вас проносится в такой речке около 6 $км^3$ воды — содержимое исполинского бака в километр ширины, километр глубины и шесть километров длины.

[1] 1 $м^3$ пресной воды весит 1 т (1000 кг).

[2] На момент написания книги город Санкт-Петербург назывался Ленинград, а численность его жителей составляла около 2 млн. человек (*примеч. ред.*).

А ведь речка с живым сечением 126 м$^2$ — не так уж велика: она может иметь, скажем, 6 м глубины и 21 м ширины. Сколько же воды протекает за год в такой реке, как Нева, через живое сечение которой ежесекундно проносится 3300 м$^3$ воды!

Заметим, что количество воды, ежесекундно протекающей через поперечное сечение реки, называется «расходом» воды в этой реке. Средний «расход» воды в Днепре у Киева — 700 м$^3$; в Неве у Ленинграда, как сейчас было указано, 3300 м$^3$; в реке Москве, в пределах города, вследствие необычайно медленного течения (только 1½ мм в секунду) — менее 9 м$^3$.

## РАДУЖНАЯ ПЛЕНКА

На реке, в которую спускается вода от завода, можно заметить нередко близ стока красивые цветные переливы. Это играет оттенками радуги тончайшая масляная пленка. Масло (например, машинное) стекающее в реку вместе с водою завода, остается на поверхности, как более легкое, и растекается чрезвычайно тонким слоем. Можно ли измерить или хотя бы приблизительно оценить толщину такой пленки?

Задача кажемся замысловатой; однако решить ее не особенно трудно. Вы уже догадываетесь, что мы не станем заниматься таким безнадежным делом, как непосредственное измерение толщины пленки. Мы измерим ее косвенным путем, короче сказать — вычислим.

Возьмите определенное количество машинного масла, например 20 г, и вылейте на воду подальше от берега (с лодки). Когда масло растечется по воде в форме более или менее ясно очерченного круглого пятна, измерьте хотя бы приблизительно диаметр этого круга. Зная диаметр, вычислите площадь. А так как вам известен и объем взятого масла (его легко вычислить по весу), то уже сама собою определится отсюда искомая толщина пленки. Рассмотрим пример.

**Задача № 13**

Один грамм керосина, растекаясь по воде, покрывает круг поперечником в 30 см. Какова толщина керосиновой пленки на воде? Кубический сантиметр керосина весит 0,8 г.

**Решение**

Найдем объем пленки, который, конечно, равен объему взятого керосина. Если один кубический сантиметр керосина весит 0,8 г, то на 1 г идет $\frac{1}{0,8}$ = 1,25 см, 1 250 куб. мм. Площадь круга с диаметром 30 см, или 300 мм, равна 70000 кв. мм. Искомая толщина пленки равна объему, деленному на площадь основания:

$$\frac{1250}{70\,000} = 0{,}018 \text{ мм},$$

т. е. менее 50-й доли миллиметра. Прямое измерение подобной толщины обычными средствами, конечно, невозможно.

Масляные и мыльные пленки растекаются еще более тонкими слоями, достигающими 0,0001 мм и менее. «Однажды, — рассказывает английский физик Бойз в известной книге „Мыльные пузыри“ — я проделал такой опыт на пруду. На поверхность воды была вылита ложка оливкового масла. Сейчас же образовалось большое пятно, метров 20–30 в поперечнике. Так как пятно было в тысячу раз больше в длину и в тысячу раз больше в ширину, чем ложка, то толщина слоя масла на поверхности воды должна была приблизительно составлять миллионную часть толщины слоя масла в ложке, или около 0,000002 миллиметра».

## КРУГИ НА ВОДЕ

### Задача № 14

Вы не раз, конечно, с любопытством рассматривали те круги, которые порождает брошенный в спокойную воду камень. И вас, без сомнения, никогда не затрудняло объяснение этого поучительного явления природы: волнение распространяется от начальной точки во все стороны с одинаковой скоростью; поэтому в каждый момент все волнующиеся точки должны быть расположены на одинаковом расстоянии от места возникновения волнения, т. е. на окружности.

*Рис. 48. Круги на воде*

Но как обстоит дело в воде текучей? Должны ли волны от камня, брошенного в воду быстрой реки, тоже иметь форму круга, или же форма их будет вытянутая?

На первый взгляд может показаться, что в текучей воде круговые волны должны вытянуться в ту сторону, куда увлекает их течение: волнение передается по течению быстрее, чем против течения и в боковых направлениях. Поэтому волнующиеся части водной поверхности должны, казалось бы, расположиться по некоторой вытянутой замкнутой кривой, — во всяком случае, не по окружности.

В действительности, однако, это не так. Бросая камни в самую быструю речку, вы можете убедиться, что волны получаются строго круговые — совершенно такие же, как и в стоячей воде. Почему?

### Решение

Будем рассуждать так. Если бы вода не текла, волны были бы круговые (рис. 49). Какое же изменение вносит течение? Оно увлекает каждую точку этой круговой волны в направлении, указанном стрелками, причем все точки переносятся по параллельным прямым с одинаковой скоростью, т. е. на одинаковые расстояния. А такое «параллельное перенесение» не изменяет формы фигуры. Действительно, в результате перенесения точка 1 (рис. 50) окажется в точке 1', точка 2 — в точке 2' и т. д.; четырехугольник 1234 заменится четырехугольником 1'2'3'4', который равен ему, как легко усмотреть из образовавшихся параллелограммов 122'1', 233'2', 344'3', и т. д. Взяв на окружности не четыре, а больше точек, мы также получили бы равные многоугольники; наконец, взяв бесконечно много точек, т. е. окружность, мы получили бы после параллельного перенесения равную окружность.

Вот почему переносное движение воды не изменяет формы волн, — они и в текучей воде остаются кругами. Разница лишь в том, что на поверхности озера круги не перемещаются (если не считать того, что они расходятся от своего неподвижного центра); на поверхности же реки круги движутся вместе со своим центром со скоростью течения воды.

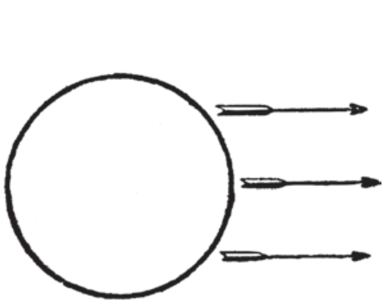


*Рис. 49*

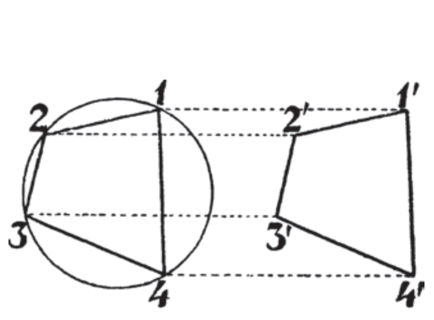



*Рис. 50*

## ФАНТАСТИЧЕСКАЯ ШРАПНЕЛЬ

**Задача № 15**

Оставим ненадолго реку и займемся задачей, которая как будто не имеет сюда никакого отношения, на самом же деле, как увидим, тесно примыкает к рассматриваемой теме.

Вообразите шрапнельный снаряд, летящий высоко в воздухе. Вот он начал опускаться и вдруг разорвался; осколки разлетаются в разные стороны. Пусть все они одинаковы, брошены взрывом с одинаковой силою и несутся, не встречая помехи со стороны воздуха. Спрашивается: как расположатся эти осколки спустя секунду после взрыва, если за это время еще не успеют достичь земли?

Решение

Задача похожа на ту, которую мы сейчас рассмотрели. И здесь кажется, будто осколки должны расположиться некоторой фигурой, вытянутой вниз, в направлении падения: ведь осколки, брошенные вверх, летят медленнее, чем брошенные вниз. Нетрудно, однако, доказать, что осколки нашей воображаемой шрапнели должны расположиться на поверхности шара. Представьте на мгновение, что тяжести нет; тогда, разумеется, все осколки в течение секунды отлетят от места взрыва на строго одинаковое расстояние, т. е. расположатся на шаровой поверхности. Введем теперь в действие силу тяжести. Под ее влиянием осколки должны опускаться; но так как все тела, мы знаем, падают с одинаковой скоростью[1], то и осколки должны в течение секунды опуститься на одинаковое расстояние, притом по параллельным прямым. Но такое параллельное перемещение не меняет формы фигуры, — шар остается шаром.

Итак, осколки фантастической шрапнели должны образовать шар, который, словно раздуваясь, опускается вниз со скоростью свободно падающего тела.

## КИЛЕВАЯ ВОЛНА

Вернемся к реке. Стоя на мосту, обратите внимание на след, оставляемый быстро идущим судном. Вы увидите, как от носовой части расходятся под углом два водяных гребня.

Откуда они берутся? И почему угол между ними тем острее, чем быстрее идет судно?

Причина возникновения этих гребней хорошо объяснена немецким физиком Махом в его «Популярных очерках».

[1] Различия обусловливаются сопротивлением воздуха, которое мы в нашей задаче исключили.

«Представьте себе, что вы бросаете в воду камешки через одинаковые промежутки времени и притом так, что места, куда вы попадаете, расположены на прямой линии в равных расстояниях одно от другого. Образуются круги, все менее и менее широкие, и все круги в совокупности порождают подобие волны у носа корабля. Чем камешки мельче и чем чаще их бросают, тем сходство заметнее. Погрузив в воду палку и ведя ею по поверхности воды, вы как бы заменяете прерывистое падение камешков непрерывным, — и тогда вы видите как раз такую волну, какая возникает у носа корабля».

К этой наглядной картине остается прибавить немного, чтобы довести ее до полной отчетливости. Врезаясь в воду, нос корабля каждое мгновение порождает такую же круговую волну, как и брошенный камень. Круг расширяется во все стороны, но тем временем судно успевает продвинуться вперед и породить новую круговую волну, за которой тотчас же следует третья и т. д. Получается картина, представленная на рис. 51. Встречаясь между собою, гребни соседних волн разбивают друг друга; остаются нетронутыми от полной окружности только те два небольших участка, которые находятся на их наружных частях. Эти наружные участки, сливаясь, образуют два сплошных гребня, имеющих положение внешних касательных ко всем круговым волнам (рис. 52).

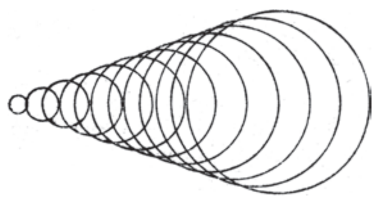


*Рис. 51*

Таково происхождение тех водяных гребней, которые видны позади судна, позади всякого вообще тела, движущегося с достаточной быстротой по поверхности воды.

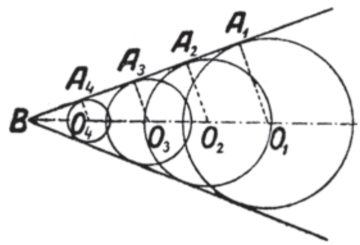



*Рис. 52*

Отсюда прямо следует, что явление это возможно только тогда, когда тело движется *быстрее*, чем бегут водяные волны. Если вы проведете палкой по воде медленно, то гребней не увидите: круговые волны расположатся одна *внутри* другой, и общей касательной провести к ним нельзя будет.

Расходящиеся гребни можно наблюдать и в том случае, когда тело стоит на месте, а вода протекает мимо него. Если течение реки достаточно быстро, то подобные гребни образуются в воде, обтекающей мостовые устои. Форма волн получается здесь даже более отчетливая, чем, например, от парохода, так как правильность их не нарушается работою винта.

Выяснив геометрическую сторону дела, попробуем разрешить такую задачу:

### Задача № 16

От чего зависит величина угла между обеими ветвями килевой волны парохода?

### Решение

Проведем из центров круговых волн (рис. 52) радиусы к соответствующим участкам прямолинейного гребня, т. е. к точкам общей касательной. Легко сообразить, что $O_1B$ есть путь, пройденный за некоторое время носовой частью корабля, а $O_1A_1$ — расстояние, на которое за то же время распространяется волнение. Отношение $\frac{O_1A_1}{O_1B}$ есть синус угла $O_1BA_1$, в то же время это есть отношение скоростей волнения и корабля. Значит, угол $B$ между гребнями килевой волны не что иное, как удвоенный угол, синус которого равен отношению скорости бега круговых волн к скорости судна.

Скорость распространения круговых волн в воде приблизительно одинакова для всех судов; поэтому угол расхождения ветвей килевой волны зависит главным образом от скорости корабля: синус половины угла обычно пропорционален этой скорости. И наоборот, по величине угла можно судить о том, во сколько раз скорость парохода больше скорости волн. Если, например, угол между ветвями килевой волны 30°, — как у большинства морских грузопассажирских судов, — то синус его половины (sin 15°) равен 0,26; это значит, что скорость парохода больше скорости бега круговых волн в $\frac{1}{0,26}$, т. е. примерно в 4 раза.

## СКОРОСТЬ ПУШЕЧНЫХ ЯДЕР

### Задача № 17

Волны, наподобие сейчас рассмотренных, порождаются в воздухе летящею пулею или артиллерийским снарядом. Существуют способы фотографировать снаряд на лету; здесь (рис. 53 и 54) воспроизводятся два таких изображения снарядов, движущихся не одинаково быстро. На обоих рисунках отчетливо

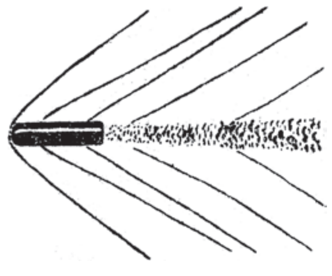


*Рис. 53*

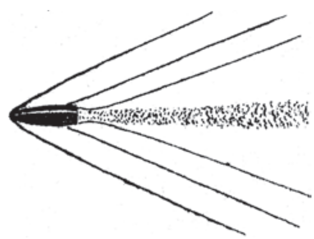


*Рис. 54*

видна интересующая нас «головная волна» (как ее в этом случае называют). Происхождение ее такое же, как и волны парохода. И здесь применимы те же геометрические отношения, а именно синус половины угла расхождения головных волн равен отношению скорости распространения волнения в воздухе к скорости полета самого снаряда. Но волнение в воздушной среде передается со скоростью, близкой к скорости звука, т. е. 330 м в секунду. Легко поэтому, располагая снимком летящего снаряда, определить приблизительно его скорость. Как сделать это для приложенных здесь двух изображений?

**Решение**

Измерим угол расхождения ветвей головной волны на рис. 53 и 54. В первом случае он заключает около 80°, во втором — примерно 55°. Половины их — 40° и 27½°. Sin 40° = 0,64; sin 27½° = 0,46. Следовательно, скорость распространения воздушной волны, т. е. 330 м/с, составляет в первом случае 0,64 скорости полета снаряда, во втором — 0,46. Отсюда скорость первого снаряда $= \dfrac{330}{0{,}64} = 520$ м/с, второго $= \dfrac{330}{0{,}46} = 720$ м в секунду.

Вы видите, что довольно простые геометрические соображения при некоторой поддержке со стороны физики помогли нам разрешить задачу на первый взгляд очень замысловатую: по фотографии летящего снаряда определить его скорость в момент фотографирования. (Расчет этот, однако, лишь приблизительно верен, так как здесь не принимаются в соображение некоторые второстепенные обстоятельства.)

**Задача № 18**

Для желающих самостоятельно выполнить подобное вычисление скорости полета ядер здесь прилагается три воспроизведения снимков снарядов, летящих с различною скоростью (рис. 55).

*Рис. 55*

## ВЫСОТА ВОДЯНЫХ РАСТЕНИЙ

Круги на воде отвлекли нас на время в область артиллерии. Вернемся же снова к реке и рассмотрим древнюю индусскую задачу о лотосе.

**Задача № 19**

Цветок лотоса, возвышающийся над водой на ½ фута, был ветром отнесен в сторону. Тогда он очутился на поверхности воды в 2 футах от прежнего положения. Определить по этим данным глубину пруда.

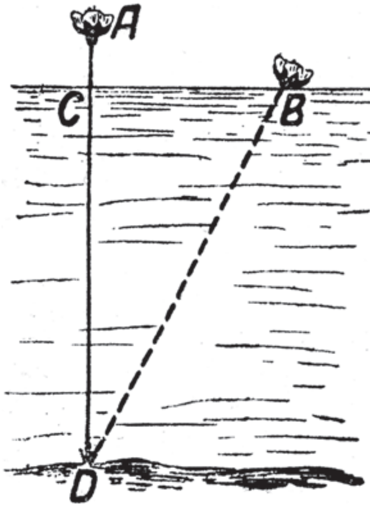



*Рис. 56*

**Решение**

Обозначим (рис. 56) искомую глубину $CD$ пруда через $x$. Тогда, по теореме Пифагора, имеем: $\overline{BD}^2 = x^2 + \overline{BC}^2$, то есть:

$$x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2^2 \ ,$$

откуда

$$x^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} - 4, \qquad x = 3\tfrac{3}{4}.$$

Искомая глубина — 3¾ фута.

Близ берега реки или неглубокого пруда вы можете отыскать водяное растение, которое доставит вам реальный материал для подобной задачи: без всяких приспособлений, не замочив даже рук, определить глубину водоема в этом месте.

## ЗВЕЗДНОЕ НЕБО В РЕКЕ

Река и в ночное время предлагает геометру задачи. Помните у Гоголя в описании Днепра: «Звезды горят и светят над миром и все разом отдаются в Днепре. Всех их держит Днепр в темном лоне своем: ни одна не убежит от него, разве погаснет в небе». В самом деле, когда стоишь на берегу широкой реки, кажется, что в водном зеркале отражается целиком весь звездный купол. Но так ли в действительности? Все ли звезды отдаются в реке?

Сделаем чертеж (рис. 57): $A$ — глаз наблюдателя, стоящего на берегу реки, у края обрыва, $MN$ — поверхность воды. Какие звезды может видеть в воде наблюдатель из точки $A$? Чтобы ответить на этот вопрос, опустим из $A$ перпендикуляр $AD$ на прямую $MN$ и продолжим его на равное расстояние, до точки $A'$. Если бы глаз наблюдателя находился в $A'$, он мог бы видеть только ту часть звездного неба, которая помещается внутри угла $BA'C$. Таково же и поле зрения действительного наблюдателя, смотрящего из точки $A$. Все звезды, находящиеся вне этого угла, наблюдателю не видны; их отраженные лучи проходят мимо его глаз.

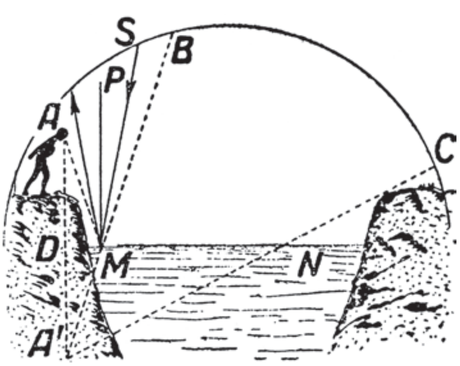



*Рис. 57*

Как убедиться в этом? Как доказать, что, например, звезда *S*, лежащая вне угла *BA′C*, не видна нашему наблюдателю в водном зеркале реки? Проследим за ее лучом, падающим близко к берегу, в точку *M*; он отразится, по законам физики, под таким углом к перпендикуляру *MP*, который равен углу падения *SMP* и, следовательно, меньше угла *PMA* (это легко доказать из равенства треугольников *ADM* и *A′DM*); значит, отраженный луч должен пройти мимо *A*. Тем более пройдут мимо глаз наблюдателя лучи звезды *S*, отразившиеся в точках, расположенных дальше точки *M*.

Значит, гоголевское описание содержит преувеличение: в Днепре отражаются далеко не все звезды, а, во всяком случае, меньше половины звездного неба.

Всего любопытнее, что обширность отраженной части неба вовсе не доказывает, что перед вами широкая река. В узенькой речке с низкими берегами вы можете видеть почти полнеба (т. е. больше, чем в широкой реке), если наклонитесь близко к воде. Легко удостовериться в этом, сделав для такого случая построение поля зрения (рис. 58).

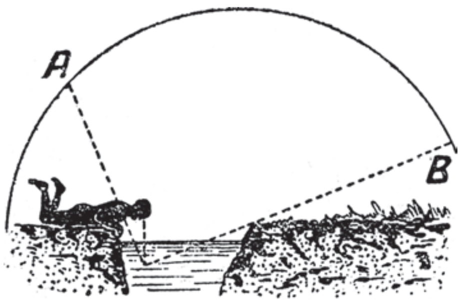



*Рис. 58*

## ПУТЬ ЧЕРЕЗ РЕКУ

### Задача № 20

Между точками *A* и *B* течет река (или канал) с прямыми параллельными берегами (рис. 59). Нужно построить через реку мост под прямым углом к его берегам. Где следует выбрать место для моста, чтобы путь от *A* до *B* был кратчайший?

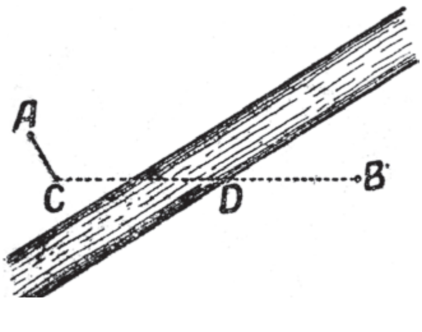



*Рис. 59*

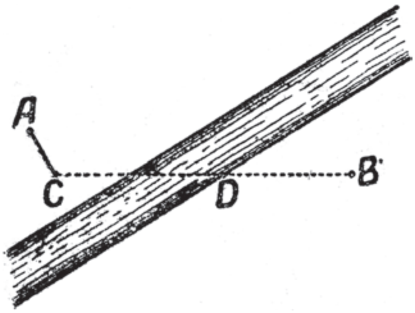



*Рис. 60*

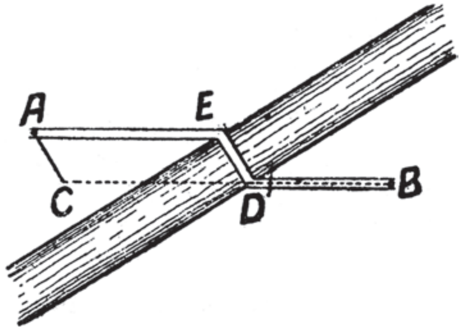



*Рис. 61*

**Решение**

Проведя через точку $A$ (рис. 60) прямую, перпендикулярную к направлению реки, и отложив от $A$ отрезок $AC$, равный ширине реки, соединяем $C$ с $B$. В точке $D$ и надо построить мост, чтобы путь из $A$ в $B$ был кратчайшим.

Действительно: построив мост $DE$ (рис. 61) и соединив $E$ с $A$, получим путь $AEDB$, в котором часть $AE$ параллельна $CD$ ($AEBC$ — параллелограмм, потому что его противоположные стороны $AC$ и $EB$ равны и параллельны). Поэтому путь $AEDB$ по длине равен пути $ACB$. Легко показать, что всякий иной путь длиннее этого. Пусть мы заподозрили, что некоторый путь $AMNB$ (рис. 62) короче $AEDB$, т. е. короче $ACB$. Соединив $C$ с $N$, видим, что $CN$ равно $AM$. Значит, путь $AMNB = ACNB$. Но $CNB$, очевидно, больше $CB$; значит, и $ACNB$ больше $ACB$, а следовательно, больше и $AEDB$.

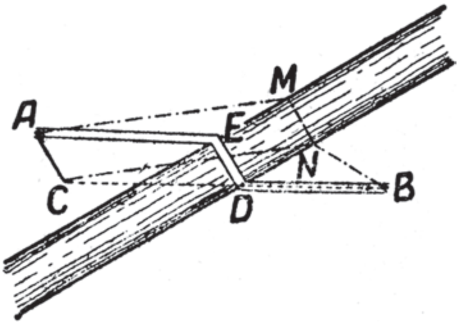



*Рис. 62*

Это рассуждение применимо ко всякому положению моста, не совпадающему с $ED$; другими словами, путь $AEDB$ действительно кратчайший.

## ЧЕРЕЗ ДВЕ РЕКИ

**Задача № 21**

Может представиться более сложный случай — именно, когда надо найти кратчайший путь через две реки, которые необходимо пересечь тоже под прямым углом к их берегам (рис. 63). В каких местах рек надо тогда построить мосты?

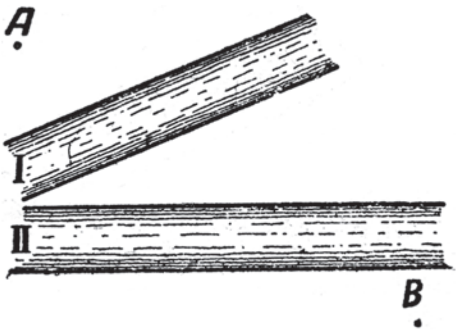



Рис. 63

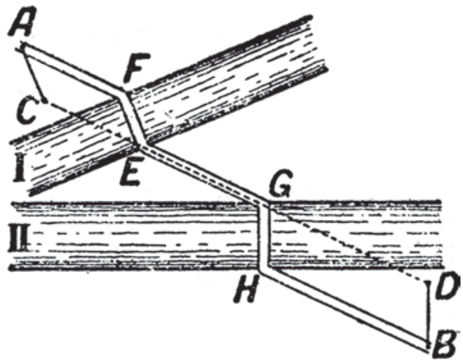



Рис. 64

**Решение**

Нужно из точки *A* (рис. 64) провести отрезок *AC*, равный ширине реки *I* и перпендикулярный к ее берегам. Из точки *B* провести отрезок *BD*, равный ширине реки *II* и также перпендикулярный к ее берегам. Точки *C* и *D* соединить прямой. В точке *E* строят мост *EF* через реку *I*, а в точке *G* мост *GH* через реку *II*. Путь *AFEGHB* есть искомый кратчайший путь от *A* до *B*.

Как доказать это, читатель, конечно, сообразит сам, если будет в этом случае рассуждать так же, как рассуждали мы в предыдущей задаче.

**Глава третья**

# ПОХОДНАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ БЕЗ ФОРМУЛ И ТАБЛИЦ

## ВЫЧИСЛЕНИЕ СИНУСА

В этой главе будет показано, как можно вычислять стороны треугольника с точностью до 2% и углы с точностью до 1°, пользуясь одним лишь понятием синуса и не прибегая ни к таблицам, ни к формулам. Такая упрощенная тригонометрия может нередко пригодиться во время загородной прогулки, когда таблиц под рукой нет, а формулы полузабыты. Робинзон на своем острове мог бы успешно пользоваться такой тригонометрией.

Итак, вообразите, что вы еще не проходили тригонометрии или же забыли ее без остатка, — состояние, которое многим из читателей, вероятно, нетрудно себе представить. Начнем знакомиться с ней сызнова. Что такое синус острого угла? Это отношение противолежащего катета к гипотенузе в том треугольнике, который отсекается от угла перпендикуляром к одной из его сторон. Например, синус угла $a$ (рис. 65) есть $\frac{BC}{AC}$, или $\frac{DE}{AD}$, или $\frac{B'C'}{AC'}$, или $\frac{D'E'}{AD'}$.

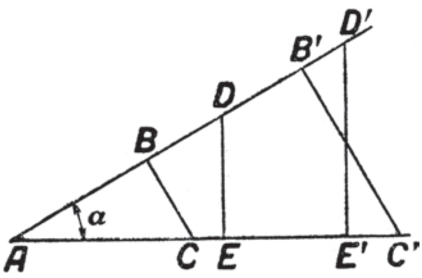


*Рис. 65*

Легко видеть, что вследствие подобия образовавшихся здесь треугольников все эти отношения равны одно другому.

Чему же равны синусы различных углов от 1° до 90°? Как узнать это, не имея под рукой таблиц? Весьма просто: надо составить таблицу синусов самому. Этим мы сейчас и займемся.

Начнем с тех углов, синусы которых нам известны из геометрии. Это, прежде всего, угол в 90°, синус которого, очевидно, равен 1. Затем угол в 45°, синус которого легко вычислить по Пифагоровой теореме; он равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$, т. е. 0,707. Далее, нам известен синус 30°: так как катет, лежащий против такого угла, равен половине гипотенузы, то синус 30° = ½.

Итак, мы знаем синусы (или, как принято обозначать, sin) трех углов:

$$\sin 30° = 0{,}5$$
$$\sin 45° = 0{,}707,$$
$$\sin 90° = 1.$$

Этого, конечно, мало; необходимо знать синусы и всех промежуточных углов, по крайней мере, через каждый градус. Для очень малых углов можно при вычислении синуса, вместо отношения катета к гипотенузе без большой погрешности брать отношение дуги к радиусу; на рис. 66 видно, что отношение $\frac{BC}{AB}$ мало отличается от отношения $\frac{BD}{AB}$. Последнее же отношение легко вычислить. Например, для угла в 1° дуга $BD = \frac{2\pi R}{360}$ и, следовательно, sin 1° можно принять равным

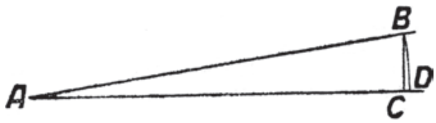


*Рис. 66*

$$\frac{2\pi R}{360R} = \frac{\pi}{180} = 0{,}0175.$$

Таким же образом находим:

$$\sin 2° = 0{,}0349,$$
$$\sin 3° = 0{,}0524,$$
$$\sin 4° = 0{,}0698,$$
$$\sin 5° = 0{,}0873.$$

Но надо убедиться, как далеко можно продолжать эту табличку, не делая большой погрешности. Если бы мы вычислили по такому способу sin 30°, то получили бы 0,524 вместо 0,500: разница была бы уже во второй значащей цифре, и погрешность составляла бы $\frac{24}{500}$, т. е. около 5%. Это чересчур грубо даже для нетребовательной походной тригонометрии. Чтобы найти границу, до которой позволительно вести вычисление синусов по указанному приближенному способу, постараемся найти точным приемом sin 15°. Для этого воспользуемся таким, несколько сложным, но не особенно замысловатым построением (рис. 67). Sin 15°= $\frac{BC}{AB}$. Продолжим $BC$ на равное расстояние до точки $D$; соединим $A$ с $D$; опустим перпендикуляр $BE$ и, продолжив его на равное расстояние до $F$, соединим $F$ с $A$. Так как угол $BAF$ равен 4 × 15°, то есть 60°, то в равнобедренном треугольнике $BAF$ все углы равны 60°, и, следовательно, $BF = AB$, а $BE = \frac{AB}{2}$. Далее вычисляем $AE$ из треугольника $ABE$ по теореме Пифагора:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}\overline{AB}^2$$

$$AE = \frac{AB}{2}\sqrt{3} = 0{,}866\,\overline{AB}$$

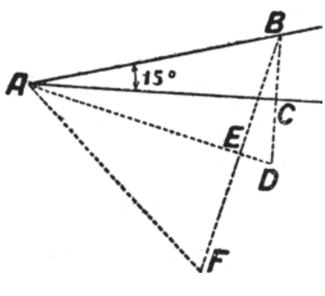


*Рис. 67*

Значит, $ED = AD - AE = \overline{AB} - 0{,}866\,\overline{AB} = 0{,}134\,AB$. Теперь из треугольника $BED$ вычисляем $BD$:

$$BD^2 = \overline{BE}^2 + \overline{ED}^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + (0{,}134\,\overline{AB})^2 =$$

$$= 0{,}268\,\overline{AB}^2;\quad BD = \sqrt{0{,}268\,\overline{AB}^2} = 0{,}518\,\overline{\mathrm{AB}}\,.$$

Половина $BD$, т. е. $BC$, равна 0,259 $AB$, следовательно, искомый синус

$$\sin 15° = \frac{BC}{AB} = \frac{0{,}259\,AB}{AB} = 0{,}259\,.$$

Это точное значение sin 15°, если ограничиться тремя знаками. Приближенное же значение его, которое мы нашли бы по прежнему способу, равно 0,262. Сопоставляя оба значения:

0,259 и 0,262,

видим, что, ограничиваясь двумя значащими цифрами, мы получаем

0,26 и 0,26,

т. е. тождественные результаты. Ошибка при замене более точного значения (0,259) приближенным (0,26) составляет $^1/_{259}$, т. е. около 0,4%. Это погрешность, позволительная для походных расчетов, и, следовательно, синусы углов от 1° до 15° мы вправе вычислять по нашему приближенному способу.

Для промежутка от 15° до 30° мы можем вычислять синусы с помощью пропорций. Будем рассуждать так. Разница между sin 30° и sin 15° равна 0,50 – 0,26 = 0,24. Значит, — можем мы допустить, — при увеличении угла на каждый градус синус его возрастает примерно на $^1/_{15}$ долю этой разницы, т. е. на $\frac{0{,}24}{15} = 0{,}016$. Строго говоря, это, конечно, не так, но отступление от указанного правила обнаруживается только в третьей значащей цифре, которую мы все равно отбрасываем. Итак, прибавляя последовательно по 0,016 к sin 15°, получим синусы 16°, 17°, 18° и т. д.

sin 16° = 0,26 + 0,016 = 0,28,
sin 17° = 0,26 + 0,032 = 0,29,
sin 18° = 0,26 + 0,048 = 0,31,
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
sin 25° = 0,26 + 0,16 = 0,42 и т. п.

Все эти синусы верны в первых двух десятичных знаках, т. е. с достаточною для наших целей точностью: они отличаются от истинных синусов менее чем на половину единицы последней цифры.

Таким же способом поступают при вычислении углов в промежутках между 30° и 45°. Разность sin 45° – sin 30° = 0,707 – 0,5 = 0,207. Разделив ее на 25, имеем 0,014. Эту величину будем прибавлять последовательно к синусу 30°; тогда получим

$$\sin 31° = 0,5 + 0,014 = 0,51,$$
$$\sin 32° = 0,5 + 0,028 = 0,53,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin 40° = 0,5 + 0,14 = 0,64 \text{ и т. п.}$$

Остается найти синусы острых углов больше 45°. В этом поможет нам Пифагорова теорема. Пусть, например, мы желаем найти sin 53°, т. е. (рис. 68) отношение мы можем вычислить по предыдущему; он равен $0,5 + 7 \times 0,014 = 0,6$. С другой стороны, мы знаем, что

$$\sin B = \frac{AC}{AB}.$$

Итак, $\frac{AC}{AB} = 0,6$, откуда $AC = 0,6\,AB$.

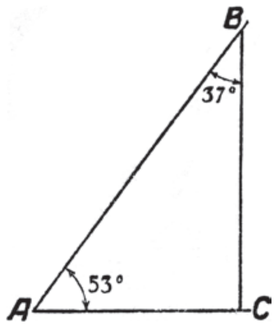



*Рис. 68*

Зная $AC$, легко вычислить $BC$. Этот отрезок равен

$$\sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{\overline{AB}^2 - (0,6\overline{AB})^2} = AB \quad \sqrt{1 - 0,36} = 0,8\,\overline{AB}.$$

Расчет, в общем, нетруден; надо только уметь вычислять квадратные корни.

## УПРОЩЕННОЕ ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ

Указываемый в курсах алгебры способ извлечения квадратных корней легко забывается. Но можно обойтись и без него. В учебных книгах моих по геометрии приведен древний упрощенный способ вычисления квадратных корней по способу деления. Здесь сообщу другой старинный способ, также более простой, нежели рассматриваемый в курсах алгебры.

Пусть надо вычислить $\sqrt{13}$. Он заключается между 3 и 4 и, следовательно, равен 3 с дробью, которую обозначим через $x$.

Итак,

$$\sqrt{13} = 3 + x, \text{ откуда } 13 = 9 + 6x + x^2.$$

Квадрат дроби $x$ есть малая дробь, которою в первом приближении можно пренебречь; тогда имеем:

$$13 = 9 + 6x, \text{ откуда } 6x = 4 \text{ и } x = \tfrac{2}{3} = 0,67.$$

Значит, приближенно $\sqrt{13} = 3,67$. Если мы хотим определить значение корня еще точнее, напишем уравнение $\sqrt{13} = 3\tfrac{2}{3} + y$, где $y$ — небольшая дробь, положительная или отрицательная. Отсюда $13 = \tfrac{121}{9} + \tfrac{22}{3}y + y^2$. Отбросив $y^2$, находим, что $y$ приближенно равен $-\tfrac{2}{33} = -0,06$. Следовательно, во втором приближении $\sqrt{13} = 3{,}67 - 0{,}06 = 3{,}61$. Третье приближение находим тем же приемом, и т. д.

(Обычным, указываемым в курсах алгебры способом мы нашли бы $\sqrt{13}$ с точностью до 0,01 — также 3,61.)

## НАЙТИ УГОЛ ПО СИНУСУ

Итак, мы имеем возможность вычислить синус любого угла от 0° до 90° с двумя десятичными знаками. Надобность в готовой таблице отпадает; для приближенных вычислений мы всегда можем сами составить ее, если пожелаем.

Но для решения тригонометрических задач нужно уметь и обратное — вычислять углы по данному синусу. Это тоже несложно. Пусть требуется найти угол, синус которого = 0,38. Так как данный синус меньше 0,5, то искомый угол меньше 30°. Но он больше 15°, так как sin 15°, мы знаем, равен 0,26. Чтобы найти этот угол, заключающийся в промежутке между 15° и 30°, поступаем, как объяснено выше:

$$0{,}38 - 0{,}26 = \frac{0{,}12}{0{,}016} = 7{,}5^\circ$$

$$15^\circ + 7{,}5^\circ = 22{,}5^\circ.$$

Итак, искомый угол = около 22,5°.

Другой пример: найти угол, синус которого 0,62.

$$0{,}62 - 0{,}50 = 0{,}12$$
$$\frac{0{,}12}{0{,}014} = 8{,}6^\circ$$
$$30^\circ + 8{,}6^\circ = 38{,}6^\circ.$$

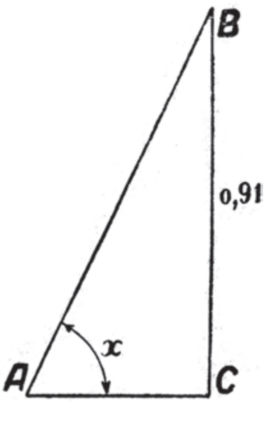


*Рис. 69*

Искомый угол приближенно равен 38,6°.

Наконец, третий пример: найти угол, синус которого 0,91.

Так как данный синус заключается между 0,71 и 1, то искомый угол лежит в промежутке между 45° и 90°. На рис. 69 $BC$ есть синус угла $A$, если $AB = 1$. Зная $BC$, легко найти синус угла $B$.

$$AC^2 = 1 - \overline{BC}^2 = 1 - 091^2 = 1 - 0{,}83 = 0{,}17,$$

$$AC = \sqrt{0{,}17} = 0{,}42.$$

Теперь найдем величину угла $B$, синус которого = 0,42; после этого легко будет найти угол $A$, равный 90° – $B$. Так как 0,42 заключается между 0,26 и 0,5, то угол $B$ лежит в промежутке между 15° и 30°. Он определяется так:

$$0{,}42 - 0{,}26 = 0{,}16$$

$$\frac{0{,}16}{0{,}016} = 10^\circ$$

$$\mathrm{B} = 15^\circ + 10^\circ = 25^\circ.$$

И, значит, угол

$$A = 90^\circ - B = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ.$$

Мы вполне вооружены теперь для того, чтобы приближенно решать тригонометрические задачи, так как умеем находить синусы по углам и углы по синусам с точностью, достаточной для походных целей.

Но достаточно ли для этого одного только синуса? Разве не понадобятся нам остальные тригонометрические функции — косинус, тангенс и т. д.? Сейчас покажем на ряде примеров, что для нашей упрощенной тригонометрии можно вполне обойтись одним только синусом.

## ВЫСОТА СОЛНЦА

### Задача № 22

Тень $BC$ (рис. 70) от отвесного шеста $AB$ высотою 4,2 м имеет 6,5 м длины. Какова в этот момент высота солнца над горизонтом, т. е. как велик угол $C$?

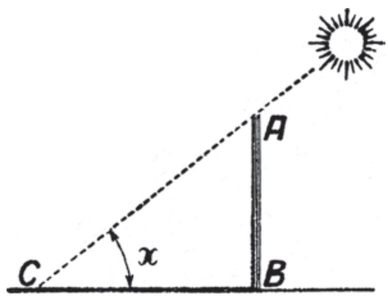



*Рис. 70*

### Решение

Легко сообразить, что синус угла $C$ равен $\frac{AB}{AC}$.

Но $AC = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{4{,}2^2 + 6{,}5^2} = 7{,}74$.

Поэтому искомый синус равен $\frac{4{,}2}{7{,}74} = 0{,}55$. По указанному ранее способу находим соответствующий угол: 33°. Высота солнца — 33° (с точностью до ½°).

## РАССТОЯНИЕ ДО ОСТРОВА

### Задача № 23

Бродя с компасом (буссолью) возле озера, вы заметили на нем (рис. 71) островок $A$ и желаете определить его расстояние от точки $B$ на берегу.

Для этого вы определяете по компасу, какой угол составляет с направлением север — юг (*NS*) прямая *BA*. Затем измеряете прямую линию *BC* и определяете угол между нею и *NS*. Наконец, то же самое делаете в точке *C* для прямой *AC*. Допустим, что вы получили следующие данные:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| направление | *BA* | отклоняется | от | *NS* | к | востоку | на | 52° |
| » | *BC* | » | » | » | » | » | » | 110° |
| » | *CA* | » | » | » | » | западу | » | 27° |

Длина *BC* = 187 м.

Как по этим данным вычислить расстояние *BA*?

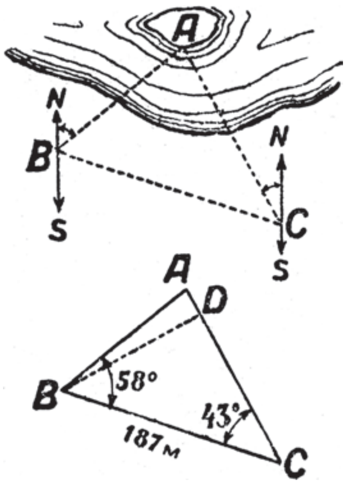



*Рис. 71 и 72*

**Решение**

В треугольнике *ABC* нам известна сторона *BC*. Угол *ABC* = 110° − 52° = 58°; угол *ACB* = = 180° − 110° − 27° = 43°. Опустим в этом треугольнике (рис. 72) высоту *BD*.

$$\text{Sin}\,C = \sin 43° = \frac{BD}{187}.$$

Найдя sin 43°, получаем 0,68. Значит, *BD* = 187 × × 0,68 = 127.

Теперь в треугольнике *ABD* нам известен катет *BD*; угол *A* = 180° − (58° + 43°) = 79° и угол *ABD* = 90° − 79° = 11°. Синус 11° мы можем вычислить: он равен 0,19. Следовательно, $\frac{AD}{AB} = 0{,}19$. С другой стороны, по теореме Пифагора:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2.$$

Подставляя вместо *AD* — 0,19*AB*, а вместо *BD* — 127, имеем:

$$\overline{AB}^2 = 127^2 + (0{,}19\overline{AB}^2)^2,$$

откуда *AB* = 128.

Итак, искомое расстояние до острова около 128 м.

Читатель не затруднится, думаю, вычислить и сторону *AC*, если бы это понадобилось.

## ШИРИНА ОЗЕРА

### Задача № 24

Чтобы определить ширину *AB* озера (рис. 73), вы нашли по компасу, что прямая *AC* уклоняется к западу на 21°, а *BC* — к востоку на 22°. Длина *BC* = = 68 м, *AC* = 35 м. Вычислить по этим данным ширину озера.

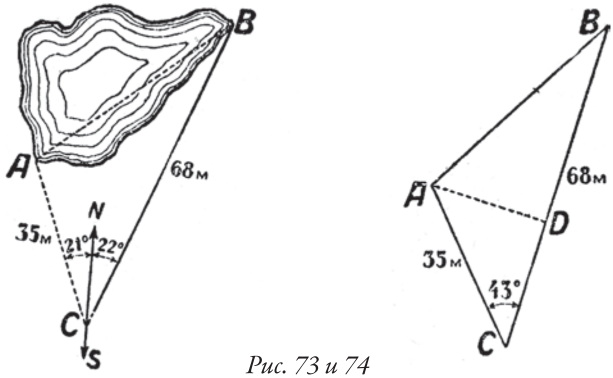



*Рис. 73 и 74*

**Решение**

В треугольнике $ABC$ нам известны угол 43° и длины заключающих его сторон — 68 м и 35 м. Опускаем (рис. 74) высоту $AD$; имеем: $\sin 43° = \frac{AD}{AC}$. Вычислим независимо от этого sin 43° и получаем 0,68. Значит, $\frac{AD}{AC} = 0{,}68$, $AD = 0{,}68 \times 35 = 24$. Затем вычисляем $CD$:

$$\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2 = 35^2 - 24^2 = 649;$$

$$CD = 25{,}5;$$

$$BD = BC - CD = 68 - 25{,}5 = 42{,}5.$$

Теперь из треугольника $ABD$ имеем:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = 24^2 + 42{,}5^2 = 2382;$$

$$AB = 48{,}8.$$

Итак, искомая ширина озера около 49 м.

Если бы в треугольнике $ABC$ нужно было вычислить и другие два угла, то, найдя $AB = 50$, поступаем далее так:

$$\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{24}{49}; \text{ отсюда } B = 29°.$$

Третий угол $C$ найдем, вычитая из 180° сумму углов 29° и 43°; он равен 108°.

Может случиться, что в рассматриваемом случае решения треугольника (по двум сторонам и углу между ними) данный угол не острый, а тупой. Если, например, в треугольнике $ABC$ (рис. 75) известны тупой угол $A$ и две стороны $AB$ и $AC$, то ход вычисления остальных его элементов таков. Опустив высоту $BD$, определяют $BD$ и $AB$ из треугольника $BDA$; затем, зная $DA + AC$, находят $BC$ и sin C, вычислив отношение $\frac{BD}{BC}$.

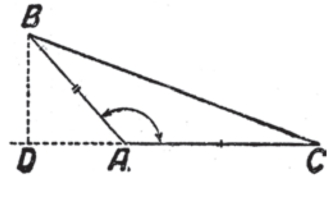



*Рис. 75*

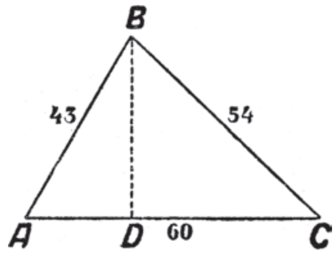



*Рис. 76*

## ТРЕУГОЛЬНЫЙ УЧАСТОК

### Задача № 25

Во время экскурсии вы измерили шагами стороны треугольного участка и нашли, что они равны 43, 60 и 54 шагам. Каковы углы этого треугольника?

### Решение

Это — наиболее сложный случай решения треугольника: по трем сторонам. Однако и с ним можно справиться, не обращаясь к другим функциям, кроме синуса.

Опустив (рис. 76) высоту $BD$ на длиннейшую сторону $AC$, имеем:

$$BD^2 = 43^2 - \overline{AD}^2$$
$$BD^2 = 54^2 - \overline{DC}^2,$$

откуда:

$$43^2 - \overline{AD}^2 = 54^2 - \overline{DC}^2$$
$$\overline{DC}^2 - AD^2 = 54^2 - 43^2 = 1070$$
$$\text{Но } \overline{DC}^2 - AD^2 = (DC + AD)(DC - AD) = 60\,(DC - AD).$$

Следовательно:

$$60\,(DC - AD) = 1070 \text{ и } DC + AD = 17{,}8.$$

Из двух уравнений

$$DC - AD = 17{,}8 \text{ и } DC + AD = 60$$

получаем

$$2DC = 77{,}8, \text{ т. е. } DC = 38{,}9.$$

Теперь легко вычислить высоту:

$$BD = \sqrt{54^2 - 38{,}9^2} = 37{,}4,$$

откуда находим

$$\sin A = \frac{BD}{AB} = \frac{37{,}4}{43} = 0{,}87;\ A = \text{около } 60°.$$

$$\sin C = \frac{BD}{BC} = \frac{37{,}4}{54} = 0{,}69;\ C = \text{около } 44°.$$

Третий угол $B = 180 - (A + C) = 76°$.

Если бы мы в данном случае вычисляли с помощью таблиц, по всем правилам «настоящей» тригонометрии, то получили бы углы, выраженные в градусах и минутах. Но эти минуты были бы заведомо ошибочны, так как стороны, измеренные шагами, заключают погрешность не менее 2–3%. Значит, чтобы не обманывать самого себя, следовало бы полученные точные величины углов округлить по крайней мере до целых градусов. И тогда у нас получился бы тот же самый результат, к которому мы пришли, прибегнув к упрощенным приемам. Польза нашей «походной» тригонометрии выступает здесь очень наглядно.

**Глава четвертая**

# ГЕОМЕТРИЯ В ОТКРЫТОМ ПОЛЕ

## ВИДИМЫЕ РАЗМЕРЫ ЛУНЫ

Какой величины кажется вам полный месяц на небе? От разных людей приходится слышать весьма различные ответы на этот вопрос. Самый неожиданный услышал я от одного крестьянина:

— Не знаю. Не здешний ведь я, издалеча.

Хотя в подлунном мире все мы здешние, однако то, что сообщает о кажущихся размерах Луны большинство людей, немногим лучше этого наивного ответа крестьянина. Луна величиною «с тарелку», «яблоко», «с человеческое лицо» и т. п. — это крайне смутные, неопределенные оценки, свидетельствующие лишь о том, что отвечающие не отдают себе отчета в существе вопроса.

Правильный ответ на столь, казалось бы, обыденный вопрос может дать лишь тот, кто ясно понимает, что, собственно, надо разуметь под «кажущейся», или «видимой» величиной предмета. Мало кто подозревает, что речь идет здесь о величине некоторого *угла*, — именно того угла, который составляется двумя прямыми линиями, проведенными к нашему глазу от крайних точек рассматриваемого предмета; угол этот называется «углом зрения», или «угловой величиной предмета». И когда кажущуюся величину Луны на небе оценивают, сравнивая ее с размерами тарелки, яблока и т. п., то такие ответы либо вовсе лишены смысла, либо же должны означать, что Луна видна на небе под тем же углом зрения, как тарелка или яблоко. Но такое указание само по себе еще недостаточно: тарелку или яблоко мы

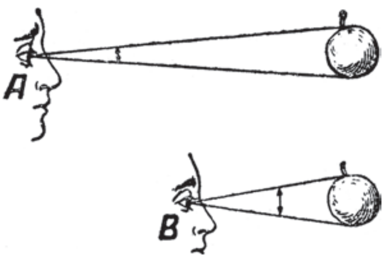



*Рис. 77*

видим ведь под самыми различными углами, в зависимости от их отдаления: вблизи — под бо́льшими углами, вдали — под меньшими. Чтобы внести определенность, необходимо еще указать, с какого расстояния тарелка или яблоко рассматриваются.

Расстояние это оказывается гораздо бо́льшим, чем обычно думают. Держа яблоко в вытянутой руке, вы заслоняете им не только Луну, но и обширную часть неба. Подвесьте яблоко на нитке и отходите от него постепенно все дальше, пока оно не покроет как раз полный лунный диск: в этом положении яблоко и Луна будут иметь для вас одинаковую видимую величину. Измерив расстояние от вашего глаза до яблока, вы убедитесь, что оно равно примерно 10 м. Вот как далеко надо отодвинуть от себя яблоко, чтобы оно действительно казалось одинаковой величины с Луною на небе! А тарелку пришлось бы удалить метров на 30, т. е. на полсотни шагов.

Сказанное кажется невероятным каждому, кто слышит об этом впервые, — между тем это неоспоримо и вытекает из того, что Луна усматривается нами под углом зрения всего лишь в полградуса. Оценивать углы нам в обиходной жизни почти никогда не приходится, и потому большинство людей имеют очень смутное представление о величине угла в 1°, в 2°, в 5° и т. п. небольшом числе градусов (не говорю о землемерах, чертежниках и других специалистах, привыкших на практике измерять углы). Только большие углы оцениваем мы более или менее правдоподобно, особенно если догадываемся сравнить их со знакомыми нам углами между стрелками часов; всем, конечно, знакомы углы в 90°, в 60°, в 30°, в 120°, в 150°, которые мы настолько привыкли видеть на циферблате (в 3 часа, в 2 ч., в 1 ч., в 4 ч., в 5 ч.), что даже не различая цифр угадываем время по величине угла между стрелками. Но мелкие и отдаленные предметы мы видим обычно под гораздо меньшим углом и потому совершенно не умеем даже приблизительно оценивать углы зрения.

## УГОЛ ЗРЕНИЯ

Желая привести наглядный пример угла в один градус, рассчитаем, как далеко должен отойти от нас человек среднего роста (1,7 м), чтобы казаться под таким углом. Переводя задачу на язык геометрии, скажем, что нам нужно вычислить радиус круга, дуга которого в 1° имеет длину 1,7 м (строго говоря, не дуга, а хорда, но для малых центральных углов разница между длиною дуги и хорды ничтожна). Рассуждаем так: если дуга в 1° равна 1,7 м, то полная окружность, содержащая 360°, будет иметь длину 1,7 × × 360 = 610 м, радиус же в 6²⁄₇ раза меньше, т. е. равен:

$$610 : \frac{44}{7} = 98 \text{ м.}$$

*Рис. 78*

Итак, человек кажется под углом в 1°, если находится от нас примерно в расстоянии 100 м. Если он отойдет вдвое дальше — на 200 м — он будет виден под углом в ½°; если подойдет до расстояния в 50 м, то угол зрения возрастет до 2° и т. п.

Нетрудно вычислить также, что палка в 1 м длины должна представляться нам под углом в 1° на расстоянии 360 : 44/7 = 57 с небольшим метров. Под таким же углом усматриваем мы 1 см с расстояния 57 см, 1 км — с расстояния в 57 км и т. д. — вообще, всякий предмет с расстояния, в 57 раз большего, чем его поперечник. Если запомним это число — 57, — то сможем быстро и просто производить все расчеты, относящиеся к угловой величине предмета. Например, если желаем определить, как далеко надо отодвинуть яблоко в 9 см поперечником, чтобы видеть его под углом 1°, то достаточно умножить 9 × 57 — получим 510 см, или около 5 м; с двойного расстояния оно усматривается под вдвое меньшим углом — ½, т. е. кажется величиною с Луну.

Таким же образом для любого предмета можем мы вычислить то расстояние, на котором он кажется одинаковых размеров с лунным диском.

## ТАРЕЛКА И ЛУНА

**Задача № 26**

На какое расстояние надо удалить тарелку диаметром в 25 см, чтобы она казалась такой же величины, как Луна на небе?

**Решение**

25 см × 57 × 2 = 28 м.

## ЛУНА И МЕДНЫЕ МОНЕТЫ

**Задача № 27**

Сделайте тот же расчет для пятикопеечной (диаметр 32 мм) и для двухкопеечной монеты (24 мм).

*Решение*

0,032 × 57 × 2 = 3,6 м,
0,024 × 57 × 2 = 2,7 м.

Если вам кажется невероятным, что Луна представляется глазу не крупнее, чем двухкопеечная монета с расстояния 4 шагов или обыкновенный карандаш с расстояния 80 см, — держите карандаш в вытянутой руке против диска полной Луны: он с избытком закроет ее. И, как ни странно, наиболее подходящим предметом сравнения для Луны в смысле кажущихся размеров является не тарелка, не яблоко, даже не вишня, а горошина или, еще лучше, головка спички, которую мы рассматриваем в руках! Сравнение с тарелкой или яблоком предполагает удаление их на необычайно большое расстояние; яблоко в наших руках или тарелку на нашем обеденном столе мы видим в десять-двадцать раз крупнее, чем лунный диск. И только спичечную головку, которую мы разглядываем на расстоянии 25 см от глаза («расстояние ясного зрения»), видим мы действительно под углом в ½°, т. е. одинаковых с Луною размеров.

То, что лунный диск обманчиво вырастает в глазах большинства людей в 10–20 раз, есть один из любопытнейших обманов зрения. Он зависит, надо думать, всего больше от яркости Луны: полный месяц выделяется на темном фоне неба гораздо резче, чем выступают среди окружающей обстановки тарелки, яблоки, монеты и иные предметы сравнения. Иллюзия навязывается нам с такой неотразимой принудительностью, что даже художники, отличающиеся верным глазом, поддаются ей наряду с прочими людьми и изображают на своих картинах полный месяц гораздо крупнее, чем следовало бы. Достаточно сравнить ландшафт, написанный художником, с фотографическим, чтобы убедиться в этом.

Сказанное относится и к Солнцу, которое мы видим с Земли под тем же углом в ½°, хотя истинный поперечник солнечного шара в 400 раз больше лунного, но и удаление его от нас также больше в 400 раз.

## СЕНСАЦИОННЫЕ ФОТОГРАФИИ

Чтобы пояснить важное понятие угла зрения, отклонимся немного от нашей прямой темы — геометрия в открытом поле — и приведем несколько примеров из области кинематографии и фотографии.

На экране кинематографа вы, конечно, видели такие катастрофы, как столкновение поездов, или такие невероятные сцены, как автомобиль, едущий по морскому дну. Никто не думает, что подобные фотографии сняты непосредственно с натуры. Но каким же способом они получены?

Секрет раскрывается приложенными здесь иллюстрациями. На рис. 79 вы видите игрушечные поезда в игрушечной обстановке; на рис. 80 — игрушечный автомобиль, который везут на нитке позади аквариума. Это и есть та «натура», с которой снята была кинематографическая лента. Но почему же в таком случае, видя эти снимки на экране, мы поддаемся иллюзии, будто перед нами *подлинные* поезда и автомобиль? Ведь вот здесь, на иллюстрациях, мы сразу заметили бы их миниатюрные размеры, даже если бы и не могли сравнить их с величиной других предметов, Причина проста: игрушечные поезда и автомобиль сняты для экрана с очень близкого расстояния; поэтому они представляются зрителю примерно под *тем же углом зрения*, под каким мы видим обычно настоящие вагоны и автомобили. В этом и весь секрет иллюзии.

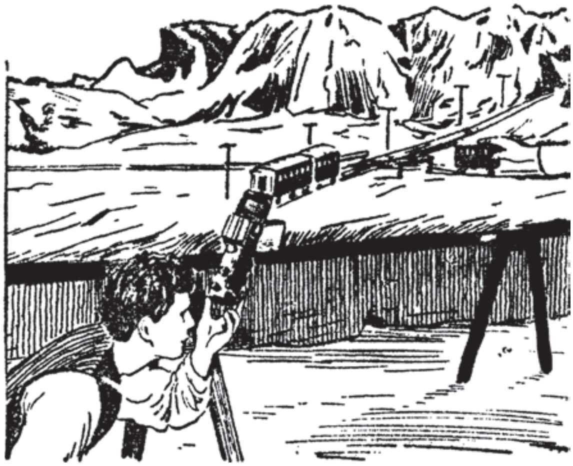


*Рис. 79*

Рис. 81 представляет собою другой образчик иллюзии, основанный на том же принципе. Вы видите на нем странный ландшафт, напоминающий природу древнейших геологических эпох: причудливые деревья, сходные с гигантскими мхами, на них — огромные водяные капли, а на переднем плане — исполинское чудовище, имеющее, однако, сходство с нашими безобидными мокрицами. Несмотря на столь необычный вид, рисунок исполнен с натуры: это не что иное, как небольшой уголок леса, только срисованный под необычным углом зрения. Мы никогда не видим стеблей мха, капель воды, мокриц и т. п. под столь большим углом зрения, — и оттого рисунок кажется нам таким чуждым, незнакомым. Это — ландшафт, какой мы видели бы, если бы уменьшились до размеров муравья.


*Рис. 80*

*Рис. 81. Загадочный ландшафт, воспроизведенный с натуры*

*Рис. 82*

*Рис. 83*

Так же поступают иногда для изготовления мнимых сенсационных фотографий. В нью-йоркской газете помещена была однажды заметка с упреками по адресу городского самоуправления, допускающего, чтобы на улицах мировой столицы скоплялись огромные горы снега. В подтверждение прилагался снимок одной из таких гор, производящий внушительное впечатление (рис. 82). На поверку оказалось, что натурой для фотографии послужил небольшой снежный бугорок, снятый шутником-фотографом с весьма близкого расстояния, т. е. под необычно большим углом зрения (рис. 83).

В другой раз та же газета воспроизвела снимок широкой расселины в скале близ города; она служила, по словам газеты, входом в обширное подземелье, где пропала без вести группа неосторожных туристов, отважившихся проникнуть в грот для исследования. Отряд добровольцев, снаряженный на розыски заблудившихся, обнаружил, что расселина сфотографирована с... едва заметной трещины в обледенелой стене, трещины в сантиметр шириною!

## ЖИВОЙ УГЛОМЕР

Изготовить самому угломерный прибор простого устройства не особенно трудно. Но и самодельный угломер не всегда бывает под рукою во время загородной прогулки. В таких случаях можно пользоваться услугами того «живого угломера», который всегда при нас. Это — наши собственные пальцы. Чтобы пользоваться ими для приблизительной оценки углов зрения, нужно лишь произвести предварительно несколько измерений и расчетов.

Прежде всего надо установить, под каким углом зрения видим мы ноготь указательного пальца своей вытянутой вперед руки. Обычная ширина ногтя — 1 см, а расстояние его от глаза в таком положении — около 60 см; поэтому мы видим его примерно под углом в 1° (немного менее, потому что угол в 1° получился бы при расстоянии в 57 см).

У подростков ноготь меньше, но и рука короче, так что угол зрения для них примерно тот же — 1°. Читатель хорошо сделает, если, не полагаясь на книжные данные, выполнит для себя это измерение и расчет, чтобы убедиться, не слишком ли отступает результат от 1°; если уклонение велико, надо испытать другой палец.

Зная это, вы располагаете способом оценивать малые углы зрения буквально голыми руками. Каждый отдаленный предмет, который как раз покрывается ногтем указательного пальца вытянутой руки, виден вами под углом в 1° и, следовательно, отодвинут в 57 раз дальше своего поперечника. Если ноготь покрывает половину предмета, значит — угловая величина его 2°, а расстояние равно 28 поперечникам.

Полная Луна покрывает только половину ногтя, т. е. видна под углом в 1° и, значит, отстоит от нас на 114 своих поперечников; вот ценное астрономическое измерение, выполненное буквально голыми руками!

Для углов побольше воспользуйтесь ногтевым суставом вашего большого пальца, держа его *согнутым* на вытянутой руке. У взрослого человека длина (заметьте: длина, а не ширина) этого сустава — около 3½ см, а расстояние от глаза, при вытянутой руке, — около 55 см.

Легко рассчитать, что угловая величина его в таком положении должна равняться 4°. Это дает средство оценивать углы зрения в 4°, а значит — и в 8°.

Сюда надо присоединить еще два угла, которые могут быть измерены пальцами, — именно те, под которыми нам представляются на вытянутой руке промежутки: 1) между средним к указательным пальцами, расставленными возможно шире; 2) между большим и указательным, также раздвинутыми в наибольшей степени. Нетрудно вычислить, что первый угол равен примерно 7–8°, второй 15–16°.

Заодно укажем также способ проводить на местности прямые углы, пользуясь лишь своим собственным телом.

Если вам нужно провести через некоторую точку перпендикуляр к данному направлению, то, став на эту точку, лицом в направлении данной линии, вы, *не поворачивая пока головы*, свободно протягиваете руку в ту сторону, куда желаете провести перпендикуляр. Сделав это, приподнимите большой палец своей вытянутой руки, поверните к нему голову и заметьте, какой предмет — камешек, кустик и т. п. — покрывается большим пальцем, если на него смотреть соответствующим глазом (т. е. правым, когда вытянута правая рука, и левым — когда левая).

Вам остается лишь отметить на земле прямую линию от места, где вы стояли, к замеченному предмету, — это и будет искомый перпендикуляр. Способ как будто не обещающий хороших результатов, но после недолгих упражнений вы научитесь ценить услуги этого «живого эккера»[1] не ниже настоящего, крестообразного.

Случаев применить ваш живой угломер во время прогулок по открытой местности может представиться множество. Пусть вдалеке виден товарный вагон, который покрывается примерно половиною сустава большого пальца вашей вытянутой руки, т. е. виден под углом около 2°. Так как длина товарного вагона вам известна (около 6 м), то вы легко находите, какое расстояние вас от него отделяет: 6 × 28 = 170 м или около того. Измерение, конечно, грубо приближенное, но все же более надежное, чем необоснованная оценка просто на глаз.

Далее, с помощью «живого угломера» вы можете при отсутствии всяких приспособлений измерять угловую высоту светил над горизонтом, взаимное удаление звезд в градусной мере, видимые размеры огненного пути метеора и т. п. Наконец, умея без приборов проводить прямые углы на местности, вы можете снять план небольшого участка — по способу, сущность которого ясна из рис. 84: например, при съемке озера измеряют прямоугольник *ABCD*, а также длины перпендикуляров, спущенных из выдающихся точек берега, и расстояния их оснований от вершин прямоугольника. Словом, в положении Робинзона уменье пользоваться собственными руками для измерения углов (и ногами для измерения расстояний) могло бы пригодиться для самых разнообразных надобностей.

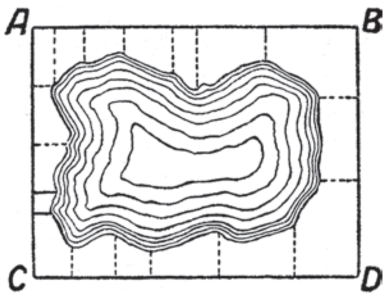



*Рис. 84*

## ПОСОХ ЯКОВА

При желании располагать более точным измерителем углов, нежели сейчас описанный нами природный «живой угломер», вы можете изготовить себе простой и удобный прибор, некогда служивший нашим предкам. Это так называемый «посох Якова» — прибор, бывший в широком употреблении у мореплавателей до XVIII в. (рис. 85), — до того как его постепенно вытеснили еще более удобные и точные угломеры (секстанты).

[1] *Эккером* называется землемерный прибор для проведения на местности линий под прямым углом.

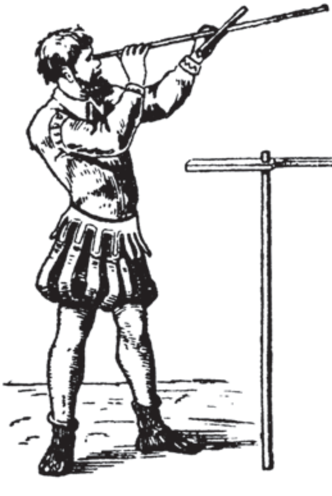


*Рис. 85. Посох Якова*

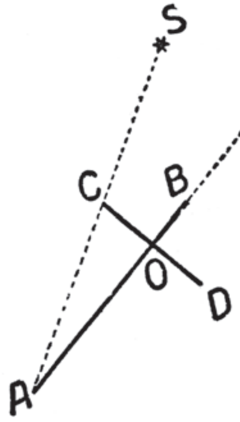



*Рис. 86*

Он состоит из длинной линейки, в 70–100 см (рис. 86, *AB*), по которой может скользить перпендикулярный к ней брусок *CD*; обе части *CO* и *OD* скользящего бруска равны между собою. Если вы желаете с помощью этого прибора определить угловое расстояние между звездами *S* и *S′*, то приставляете к глазу конец *A* линейки (где для удобства наблюдения может быть приделана просверленная пластинка) и направляете линейку так, чтобы звезда *S′* была видна у конца ее *B*: затем двигаете поперечину *CD* вдоль линейки до тех пор, пока звезда *S* не будет видна как раз у конца *C*. Теперь остается лишь измерить расстояние *AO*, чтобы, зная длину *CO*, вычислить величину угла *SAS′*. Знакомые с тригонометрией сообразят, что тангенс искомого угла равен отношению $\frac{CO}{AO}$; наша «походная тригонометрия», изложенная в главе III, также достаточна для выполнения этого расчета; вы вычисляете по теореме Пифагора длину *AC*, затем находите угол, синус которого равен $\frac{CO}{AC}$.

Наконец, вы можете узнать искомый угол и графическим путем: построив треугольник *ACO* на бумаге в произвольном масштабе, измеряете угол *A* транспортиром.

Для чего же нужна другая половина поперечины? На тот случай, когда измеряемый угол слишком велик, так что его не удается измерить сейчас указанным путем. Тогда на звезду *S′* направляют не линейку *AB*, а прямую *AD*, подвигая поперечину так, чтобы ее конец *C* пришелся в то же время у звезды *S* (рис. 87).

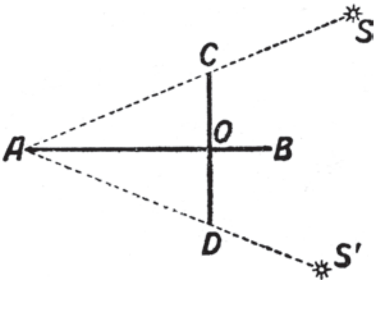



*Рис. 87*

Найти величину угла $SAS'$ вычислением или построением, конечно, не составит труда.

Чтобы при каждом измерении не приходилось делать расчета или построения, можно выполнить их заранее, еще при изготовлении прибора, и обозначить результаты на линейке $AB$; тогда, направив прибор на звезды, вы прочитываете лишь показание, записанное у точки $O$, — это и есть величина измеряемого угла.

## ГРАБЕЛЬНЫЙ УГЛОМЕР

Еще легче изготовить другой прибор для измерения угловой величины — так называемый «грабельный угломер», действительно напоминающий по виду грабли. Главная часть его — дощечка любой формы, у одного края которой укреплена просверленная пластинка; ее отверстие наблюдатель приставляет к глазу. У противоположного края дощечки втыкают ряд тонких булавок (употребляемых для коллекций насекомых), промежутки между которыми составляют 57-ю долю их расстояния от отверстия просверленной пластинки. Мы уже знаем, что при этом каждый промежуток усматривается под углом в один градус. Можно разместить булавки также следующим приемом, дающим более точный результат: на стене чертят две параллельные линии в расстоянии одного метра одну от другой и, отойдя от стены по перпендикуляру к ней на 57 м, рассматривают эти линии в отверстие просверленной пластинки: булавки втыкают в дощечку так, чтобы каждая пара смежных булавок покрывала начерченные на стене линии.

Когда булавки поставлены, можно некоторые из них снять, чтобы получить углы в 2°, в 3° в 5°. Способ употребления этого угломера, конечно, понятен читателю и без объяснений. С помощью его можно измерять углы зрения с довольно большою точностью, не меньшей чем ¼°.

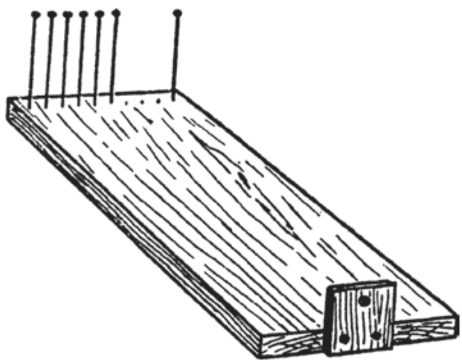


*Рис. 88. Грабельный угломер*

## ОСТРОТА ВАШЕГО ЗРЕНИЯ

Освоившись с понятием угловой величины предмета, вы можете теперь понять, как измеряется острота зрения, и даже сами выполнить такого рода измерение.

Начертите на листе бумаги 20 равных черных линий длиною в спичку (5 см) и в миллиметр толщины, так, чтобы они заполняли квадрат (рис. 89).

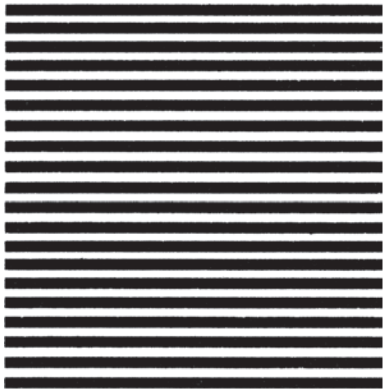


*Рис. 89*

Прикрепив этот чертеж на хорошо освещенной стене, отходите от него до тех пор, пока не заметите, что линии уже не различаются раздельно, а сливаются в сплошной серый фон. Измерьте это расстояние и вычислите — вы уже знаете как — угол зрения, под которым вы перестаете различать полоски в 1 мм толщины. Если этот угол равен 1' (одной минуте), то острота вашего зрения нормальная; если трем минутам — острота составляет ⅓ нормального, и т. д.

**Задача № 28**

Линии рис. 89 сливаются для вашего глаза на расстоянии 2 м. Нормальна ли у вас острота зрения?

**Решение**

Мы знаем, что с расстояния 57 мм полоска в 1 мм ширины видна под углом 1°, т. е. 60'. Следовательно, с расстояния 2000 мм она видна под углом $x$, который определяется из пропорции

$$x : 60 = 57 : 2\,000,$$
$$x = 1{,}7'.$$

Острота зрения ниже нормальной и составляет

$$1 : 1{,}7 = \text{около } 0{,}6.$$

## ПРЕДЕЛЬНАЯ МИНУТА

Сейчас мы сказали, что полоски, рассматриваемые под углом зрения менее одной минуты, перестают различаться раздельно нормальным глазом. Это справедливо для всякого предмета: каковы бы ни были очертания наблюдаемого объекта, они перестают различаться нормальным глазом, если видны под углом меньше 1'. Каждый предмет превращается при этом в едва различимую точку, в пылинку без размеров и формы. Таково свойство нормального человеческого глаза: одна угловая минута — предел его остроты. Чем это обусловлено — вопрос особый, касающийся физики и физиологии зрения. Мы же говорим здесь лишь о геометрической стороне явления.

Это в равной степени относится и к предметам крупным, но чересчур далеким, и к близким, но слишком мелким. Мы не различаем простым глазом формы пылинок, реющих в воздухе: озаряемые лучами солнца, они представляются нам одинаковыми крошечными точками, хотя в действительности имеют весьма разнообразную форму. Мы не различаем мелких подробностей тела насекомого опять потому, что видим их под углом меньше 1'.

По той же причине не видим мы без телескопа деталей на поверхности Луны, планет и других небесных светил; они лежат ниже предела остроты нашего зрения, усматриваются под углом меньше 1'.

Мир представлялся бы нам совершенно иным, если бы этой границы естественного зрения не существовало, или если бы она была отодвинута далее. Человек, предел остроты зрения которого был бы не 1', а, например, ¼', видел бы окружающий мир глубже и дальше, чем мы. Очень картинно описано это преимущество *зоркого* глаза у Чехова в повести «Степь».

«Зрение у него (Васи) было поразительно острое. Он видел так хорошо, что бурая пустынная степь была для него всегда полна жизни и содержания. Стоило ему только вглядеться в даль, чтобы увидеть лисицу, зайца, дрохву или другое какое-нибудь животное, держащее себя подальше от людей. Немудрено увидеть убегающего зайца или летящую дрохву, — это видел всякий, проезжавший степью, — но не всякому доступно видеть диких животных в их домашней жизни, когда они не бегут, не прячутся и не глядят встревоженно по сторонам. А Вася видел играющих лисиц, зайцев, умывающихся лапками, дрохв, расправляющих крылья, стрепетов, выбивающих свои «точки». Благодаря такой остроте зрения, кроме мира, который видели все, у Васи был еще другой мир, свой собственный, никому не доступный и, вероятно, очень хороший, потому что, когда он глядел и восхищался, трудно было не завидовать ему».

Странно подумать, что для такой поразительной перемены достаточно лишь понизить предел различимости с 1' до ½' или около того...

Волшебное действие микроскопов и телескопов обусловлено тою же самой причиной. Назначение этих приборов — так изменять ход лучей рассматриваемого предмета, чтобы они вступали в глаз более круто расходящимся пучком; благодаря этому объект представляется под бо́льшим углом зрения. Когда говорят, что микроскоп или телескоп увеличивает в 100 раз, то это значит, что с помощью их мы видим предметы под углом в 100 раз бо́льшим, чем невооруженным глазом. И тогда подробности, скрывающиеся от простого глаза за пределом остроты зрения, становятся доступны нашему зрению. Полный месяц мы видим под углом в 30′; а так как поперечник Луны = 3500 км, то каждый участок Луны, имеющий в поперечнике $^{3500}/_{30}$, т. е. около 120 км, сливается для невооруженного глаза в едва различимую точку. В трубу же, увеличивающую в 100 раз, неразличимыми будут уже гораздо более мелкие участки с поперечником в $^{120}/_{100}$ = 1,2 км, а в телескоп с 1000-кратным увеличением — участок в 120 м шириною. Отсюда следует, между прочим, что будь на Луне такие, например, сооружения, как наши крупные океанские пароходы, мы могли бы их видеть в современные телескопы[1].

Правило предельной минуты имеет большое значение и для обычных наших повседневных наблюдений. В силу этой особенности нашего зрения каждый предмет, удаленный на 3400 (т. е. 57 × 60) своих поперечников, перестает различаться нами в своих очертаниях и сливается в точку. Поэтому, если кто-нибудь станет уверять вас, что простым глазом узнал лицо человека с расстояния четверти километра, не верьте ему, — разве только он обладает феноменальным зрением. Ведь расстояние между глазами человека — всего 3 см; значит, оба глаза сливаются в точку уже на расстоянии 3 × 3400 см, т. е. 100 м. Артиллеристы (см. следующую главу, с. 403–404) пользуются этим для глазомерной оценки расстояния. По их правилам, если глаза человека кажутся издали двумя раздельными точками, то расстояние до него не превышает 100 шагов (т. е. 60–70 м). У нас получилось большее расстояние — в 100 м: это показывает, что примета военных имеет в виду несколько пониженную (на 30%) остроту зрения.

### Задача № 29

Может ли человек с нормальным зрением различить всадника на расстоянии 10 км, пользуясь биноклем, увеличивающим в 3 раза?

### Решение

Высота всадника 2,2 м. Фигура его превращается в точку для простого глаза на расстоянии 2,2 × 3400 = 7 км; в бинокль же, увеличивающий втрое, — на расстоянии 21 км. Следовательно, в 10 км его различить в такой бинокль возможно (если воздух достаточно прозрачен).

---

[1] При условии полной прозрачности и однородности нашей атмосферы. В действительности воздух не однороден и не вполне прозрачен; поэтому при больших увеличениях видимая картина туманится и искажается. Это ставит предел пользованию весьма сильными увеличениями и побуждает астрономов воздвигать телескопы в ясном воздухе высоких горных вершин.

## ЛУНА И ЗВЕЗДЫ У ГОРИЗОНТА

Самый невнимательный наблюдатель знает, что полный месяц, стоящий низко у горизонта, имеет заметно бóльшую величину, чем когда он висит высоко в небе, Разница так велика, что трудно ее не заметить. То же верно и для солнца; известно, как велик солнечный диск при заходе или восходе по сравнению с его размерами высоко в небе, — например, когда он просвечивает сквозь облака (смотреть прямо на незатуманенное солнце вредно для глаз).

Для звезд эта особенность проявляется в том, что расстояние между ними увеличивается, когда они приближаются к горизонту. Кто видел зимою красивое созвездие Ориона (или летом — Лебедя) высоко на небе и низко близ горизонта, тот не мог не поразиться огромной разницей размеров созвездия в обоих положениях.

Все это тем загадочнее, что, когда мы смотрим на светила при восходе или заходе, они не только не ближе к нам, но, напротив, дальше от нас (на величину земного радиуса), как легко понять из рис. 90: в зените мы рассматриваем светило из точки *A*, а у горизонта — из точек *B* или *C*. Почему же луна, солнце и созвездия увеличиваются у горизонта?

*Рис. 90*

«Потому что это неверно», — можно бы ответить. Это обман зрения. С помощью грабельного или иного угломера нетрудно убедиться, что лунный диск виден в обоих случаях под одним и тем же углом зрения в ½°. Пользуясь тем же прибором или посохом Якова, можно удостовериться, что и угловые расстояния между звездами не меняются, где бы созвездие ни стояло: у зенита или у горизонта. Значит, увеличение — оптический обман, которому поддаются все люди без исключения.

Чем объясняется столь сильный и всеобщий обман зрения? Бесспорного ответа на этот вопрос наука еще не дала, хотя и стремится разрешить его 2000 лет, со времени Птолемея. Иллюзия находится в связи с тем, что весь небесный свод представляется нам не полушаром в геометрическом смысле слова, а шаровым сегментом, высота которого в 2–3 раза меньше радиуса основания. Это потому, что все расстояния в горизонтальном направлении и близком к нему оцениваются нами как более значительные по сравнению с вертикальными: по первому направлению мы видим земные предметы, по второму — перед нами пустой, ничем не заполненный промежуток; а известно, что заполненные пространства всегда кажутся нам больше пустых (рис. 91).

*Рис. 91. Правая, заштрихованная половина кажется длиннее левой*

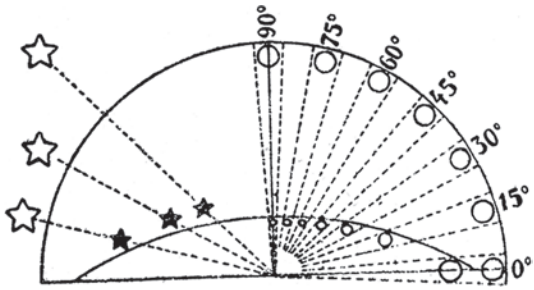



*Рис. 92. Почему светила близ горизонта кажутся крупнее, чем близ зенита*

На рис. 92 наглядно показано, как должна влиять приплюснутая форма небесного свода на величину светил в разных его частях. На своде неба лунный диск всегда виден под углом в ½°, — будет ли Луна у горизонта (на высоте 0°) или у зенита (на высоте 90°). Но глаз наш относит этот диск не всегда на одно и то же расстояние: Луна в зените отодвигается нами на более близкое расстояние, нежели у горизонта, и потому величина его представляется неодинаковой — внутри одного и того же угла ближе к вершине помещается меньший кружок, чем подальше от нее. На левой стороне того же рисунка 92 показано, как благодаря этой причине расстояния между звездами словно растягиваются с приближением их к горизонту: одинаковые угловые расстояния между ними кажутся тогда неодинаковыми.

Здесь есть и другая поучительная сторона. Любуясь огромным лунным диском близ горизонта, заметили ли вы на нем хоть одну новую черточку, которой не удалось вам различить на диске высоко стоящей Луны? Нет. Но ведь перед вами увеличенный диск, — отчего же не видно новых подробностей? Оттого, что здесь нет того увеличения, какое дает, например, бинокль: здесь *не увеличивается угол зрения*, под которым представляется нам предмет. Только увеличение этого угла помогает нам различать новые подробности; всякое иное «увеличение» есть просто обман зрения, для нас совершенно бесполезный[1].

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ БЕССМЫСЛИЦА

О видимой величине предметов приходится слышать нередко совершенно бессмысленные утверждения, причем люди, их высказывающие, твердо уверены, что говорят о чем-то вполне ясном, бесспорном. У одного известного советского беллетриста находим, например, такую фразу:

«Была невероятная луна диаметром в аршин».

[1] Подробнее см. в книге того же автора «Занимательная физика», кн. 2-я, гл. IX.

Коротко и просто.

Видный сельскохозяйственный писатель рассказывает: «Дело было к вечеру; солнце стояло на горизонте (над горизонтом?) каких-нибудь 3–4 аршина».

Печальнее всего то, что эти образчики аршинной астрономии попали в школьные учебники.

Еще удивительнее по полному отсутствию смысла то, что помещено в одной общепонятной брошюре, носящей заглавие, весьма сходное с «Занимательной геометрией». Там приведена следующая таблица «степени уменьшения предметов по высоте с различных расстояний»:

| Расстояние в метрах | Степень уменьшения |
|---|---|
| 100 | 2/3 |
| 200 | 1/2 |
| 300 | 1/3 |
| 400 | 1/4 |
| 500 | 1/5 |

и т. д.

Пояснительное примечание завершает бессмыслицу:

«Таким образом, человек 170 см роста с расстояния 500 м покажется ростом в 170/5 = 34 см».

Таблица, расчет — все это имеет внушительный, солидный вид. А между тем в том и другом не больше смысла, чем в знаменитой дате гоголевского героя: «Мартобря 86 числа, между днем и ночью».

**Глава пятая**

# ГЕОМЕТРИЯ У ДОРОГИ

## ИСКУССТВО МЕРИТЬ ШАГАМИ

Очутившись во время загородной прогулки у железнодорожного полотна или на шоссе, вы можете выполнить ряд интересных геометрических упражнений.

Прежде всего, воспользуйтесь шоссе, чтобы измерить длину своего шага и скорость ходьбы. Это даст вам возможность измерять расстояние шагами, — искусство, которое приобретается довольно легко после недолгого упражнения. Главное здесь — приучить себя делать шаги всегда одинаковой длины, т. е. усвоить определенную «мерную» походку.

Затем необходимо научиться *вести счет* шагов. Остановимся на этом подробнее.

Считать шаги, просто как считают орехи и т. п., очень неудобно: добравшись до длинных наименований, вы не будете успевать мысленно произносить числа и начнете либо сбиваться в счете, либо невольно замедлять шаги. Лучше поэтому считать шаги парами, так что мысленно произносимые числа будут совпадать всегда с выставлением одной и той же ноги, — например правой. Кроме того, если руки свободны, можно помочь себе применением счета на пальцах. Счет пар ведут при этом только до 10. Досчитав до этого числа, загибают на левой руке первый палец; досчитав вторично до 10, загибают второй палец, и т. д. Когда все пальцы этой руки будут загнуты, т. е. после 50 пар шагов, разгибают все пальцы левой руки и загибают первый палец правой. После следующего десятка загибают снова первый палец левой руки, продолжая держать загнутым палец правой, как отметку об отсчитанных 50 парах. Загнув последовательно при дальнейшем счете все пальцы левой руки, загибают второй палец правой и, освободив пальцы левой, начинают пользоваться ими сызнова. Таким образом можно, использовав все пальцы обеих рук, досчитать до $50 \times 5 = 250$ пар, т. е. до 500 шагов.

Тогда начинают счет опять, как прежде, запомнив, что 500 шагов уже пройдено. Напрактиковавшись в таком счете, можно научиться считать шаги автоматически, не отвлекаясь от наблюдения окружающего. Результат словно сам собою записывается на пальцах: если при последнем шаге мы произносим «семь» и обнаруживаем у себя загнутыми два пальца правой руки и три левой, то нами сделано:

$$2 \times 50 + 3 \times 10 + 7 = 137 \text{ пар шагов,}$$

т. е. 274 отдельных шага (если только нами не пройдено было раньше один или несколько раз по 500 шагов, — что запомнить нетрудно).

Сосчитать число шагов — еще не значит определить пройденное расстояние. Необходимо знать длину одного шага. На шоссе через каждые 100 метров установлен белый камень; пройдя такой 100-метровый промежуток своим обычным «мерным» шагом и сосчитав число шагов, вы легко найдете среднюю длину своего шага. Подобное измерение следует повторять ежегодно, — например, каждую весну, потому что длина шага, особенно у молодых людей, не остается неизменной.

Отметим любопытное соотношение, обнаруженное многократными измерениями: средняя длина шага взрослого человека равна примерно половине его роста, считая до уровня глаз. Если, например, рост человека до глаз 1 м 40 см, то длина его шага — около 70 см. Интересно при случае проверить это правило.

Кроме длины своего шага, полезно знать также скорость своей ходьбы — число километров, проходимых в час. Иногда пользуются для этого следующим правилом: мы проходим в час столько километров, сколько делаем шагов в три секунды; например, если мы в три секунды делаем 4 шага, то в час проходим 4 км. Однако правило это применимо лишь при известной длине шага. Нетрудно определить, при какой именно: обозначив длину шага в метрах через $x$, а число шагов в 3 сек. через $n$, имеем уравнение

$$\frac{3600}{3} \times nx = n \times 1000,$$

откуда $1200\,x = 1000$ и $x = \frac{5}{6}$ м, т. е. около 80–85 см. Это сравнительно большой шаг; такие шаги делают люди высокого роста. Если ваш шаг отличается от 80–85 см, то вам придется произвести измерение скорости своей ходьбы иным способом, определив по часам, во сколько времени проходите вы расстояние между двумя дорожными столбами.

## ГЛАЗОМЕР

Приятно уметь не только измерять расстояния без мерной цепи, шагами, но и оценивать их прямо на глаз без измерения. Это искусство достигается только путем упражнения. В мои школьные годы, когда с группой товарищей я участвовал в летних экскурсиях за город, подобные упражнения были у нас очень обычны. Они осуществлялись в форме особого спорта, нами самими придуманного, — в форме состязания на точность глазомера. Выйдя на дорогу, мы намечали глазами какое-нибудь придорожное дерево или другой отдаленный предмет, — и состязание начиналось.

— Сколько шагов до дерева? — спрашивал кто-либо из участников игры.

Остальные называли предполагаемое число шагов, и затем совместно считали шаги, чтобы определить, чья оценка ближе к истинной, — это и был выигравший. Тогда наступала его очередь намечать предмет для глазомерной оценки расстояния.

Кто определял расстояние удачнее других, тот получал одно очко. После 10 раз подсчитывали очки: получавший наибольшее число очков считался победителем в состязании.

Помню, на первых порах наши оценки расстояний давались с грубыми ошибками. Но очень скоро, — гораздо скорее, чем можно было ожидать, — мы так изощрились в искусстве определять на глаз расстояния, что ошибались очень мало. Лишь при резкой перемене обстановки, например, при переходе с пустынного поля в редкий лес или на заросшую кустарником поляну, при возвращении в пыльные, тесные городские улицы, а также ночью, при обманчивом освещении луны, мы ловили друг друга на крупных ошибках. Потом, однако, научились применяться ко всяким обстоятельствам, мысленно учитывать их при глазомерных оценках. Наконец группа наша достигла такого совершенства в глазомерной оценке расстояний, что пришлось отказаться совсем от этого спорта: все угадывали одинаково хорошо, и состязания утратили интерес. Зато мы приобрели недурной глазомер, сослуживший нам хорошую службу во время наших загородных странствований.

Любопытно, что глазомер как будто не зависит от остроты зрения. Среди нашей группы был близорукий мальчик, который не только не уступал остальным в точности глазомерной оценки, но иной раз даже выходил победителем из состязаний. Наоборот, одному мальчику с вполне нормальным зрением искусство определять расстояния на глаз никак не давалось. Впоследствии мне пришлось наблюдать то же самое и при глазомерном определении высоты деревьев: упражняясь в этом с другими студентами — уже не для игры, а для нужд будущей профессии, — я заметил, что близорукие овладевали этим искусством нисколько не хуже других. Это может служить утешением для близоруких: не обладая зоркостью, они все же способны развить в себе вполне удовлетворительный глазомер.

Упражняться в глазомерной оценке расстояний можно во всякое время года, в любой обстановке. Идя по улице города, вы можете ставить себе глазомерные задачи, пытаясь отгадывать, сколько шагов до ближайшего фонаря, до того или иного попутного предмета. В дурную погоду вы незаметно заполните таким образом время переходов по безлюдным улицам.

Глазомерному определению расстояний много внимания уделяют военные: хороший глазомер необходим разведчику, стрелку, артиллеристу. Интересно познакомиться с теми признаками, которыми пользуются военные на практике глазомерных оценок. Вот несколько замечаний из учебника артиллерии:

«На глаз расстояния определяют или по навыку различать по известной степени отчетливости видимых предметов их разные удаления от наблюдателя, или оценивая расстояния некоторым привычным глазу протяжением в 100–200 шагов, кажущимся тем меньшим, чем далее от наблюдателя оно откладывается.

При определении расстояний по степени отчетливости видимых предметов следует иметь в виду, что кажутся ближе предметы освещенные или ярче отличающиеся по цвету от местности или на воде; предметы, расположенные выше других; группы — сравнительно с отдельными предметами и вообще предметы более крупные.

Можно руководствоваться следующими признаками: до 50 шагов можно ясно различать глаза и рот людей; до 100 шагов глаза кажутся точками; на 200 шагов пуговицы и подробности обмундирования все еще можно различать; на 300 — видно лицо; на 400 — различается движение ног; на 500 — виден цвет мундира».

При этом наиболее изощренный глаз делает ошибку до 10% определяемого расстояния в ту или другую сторону.

Бывают, впрочем, случаи, когда ошибки глазомера гораздо значительнее. Во-первых, при определении расстояния на ровной, совершенно одноцветной поверхности — на водной глади рек или озера, на чистой песчаной равнине, на густо заросшем поле. Тут расстояние всегда кажется меньшим истинного, и, оценивая его на глаз, мы непременно ошибемся вдвое, если не больше. Во-вторых, ошибки легко возможны, когда определяется расстояние до такого предмета, основание которого заслонено железнодорожною насыпью, холмиком, зданием, вообще каким-нибудь возвышением. В таких случаях мы невольно считаем предмет находящимся не позади возвышения, а на нем самом, и, следовательно, делаем ошибку опять-таки в сторону уменьшения определяемого расстояния (рис.93).

*Рис. 93*

В подобных случаях полагаться на глазомер опасно, и приходится прибегать к другим приемам оценки расстояния, о которых мы уже говорили и еще будем говорить.

## УКЛОНЫ

Вдоль железнодорожного полотна, кроме верстовых (или теперь — километровых) столбов, вы видите еще и другие невысокие столбы с непонятными для многих надписями на косо прибитых дощечках вроде таких:

$$\boxed{\frac{0{,}002}{140}} \qquad \boxed{\frac{0{,}006}{55}}$$

Это — «уклонные знаки». В первой, например, надписи верхнее число 0,002 означает, что уклон пути здесь (в какую сторону — показывает положение дощечки) равен 0,002: путь поднимается или опускается на 2 мм при каждой тысяче миллиметров. А нижнее число 140 показывает, что такой уклон идет на протяжении 140 м, где поставлен следующий знак с обозначением нового уклона. (Когда дороги не были еще переустроены по метрической системе мер, такая дощечка означала, что на протяжении 140 сажен путь поднимается или опускается каждую сажень на 0,002 сажени.) Вторая дощечка с надписью 0,006/55 — показывает, что на протяжении ближайших 55 метров путь поднимается или опускается на 6 мм при каждом метре. Зная смысл знаков уклона, вы легко можете вычислить разность высот двух соседних точек пути, отмеченных этими знаками. В первом случае, например, разность высот составляет 0,002 × 140 = 0,28 м; во втором — 0,006 × 55 = 0,33 м.

В железнодорожной практике, как видите, величина наклона пути определяется не в градусной мере. Однако легко перевести эти путевые обозначения уклона в градусные. Если $AB$ (рис. 94) есть линия пути, а $BC$ — разность высот точек $A$ и $B$, то наклон линии пути $AB$ к горизонтальной линии $AC$ будет на столбике обозначен отношением $\frac{BC}{BA}$. Так как угол $A$ очень мал, то можно принять $AB$ и $AC$ за радиусы окружности, дуга которой есть $BC$. [1] Тогда вычисление угла $A$, если известно отношение $BC : AB$, не составит труда. При наклоне, например, обозначенном 0,002, рассуждаем так; при длине дуги, равной $\frac{1}{57}$ радиуса, угол составляет 1° (см. с. 386); какой же угол соответствует дуге в 0,002 радиуса? Находим его величину $x$ из пропорции:

*Рис. 94*

$$x : 1^\circ = 0{,}002 : \frac{1}{57}, \text{ откуда } x = 0{,}002 \times 57 = 0{,}11 \text{ градуса, т. е. около 7 минут.}$$

На железнодорожных путях допускаются лишь весьма малые уклоны. У нас установлен предельный уклон в 0,008, т. е. в градусной мере 0,008 × 57 — менее ½°: это наибольший уклон. Только для Закавказской железной дороги допускаются в виде исключения уклоны до 0,025, соответствующие в градусной мере почти 1½°.

Столь незначительные уклоны совершенно не замечаются нами. Пешеход начинает ощущать наклон почвы под своими ногами лишь тогда, когда он превышает $\frac{1}{24}$: это отвечает в градусной мере $\frac{57}{24}$°, т. е. около 2½°.

---

[1] Иному читателю покажется, быть может, недопустимым считать наклонную $AB$ равною перпендикуляру $AC$. Поучительно поэтому убедиться, как мала разница в длине $AC$ и $AB$, когда $BC$ составляет, например, 0,01 от $AB$. По теореме Пифагора имеем

$$\overline{AC}^2 = \sqrt{\overline{AB}^2 - \left(\frac{AB}{100}\right)^2} = \sqrt{0{,}99\,\overline{AB}^2} = 0{,}995\,AB.$$

Разница в длине составляет всего 0,005, т. е. полпроцента. Для приближенных вычислений подобной ошибкой можно, конечно, пренебречь.

Пройдя по железнодорожному пути несколько километров и записав замеченные при этом знаки уклона, вы сможете вычислить, насколько в общей сложности вы поднялись или опустились, т. е. какова разность высот между начальными и конечными пунктами.

**Задача № 30**

Вы начали прогулку вдоль полотна железной дороги у столбика со знаком подъема $\frac{0{,}004}{153}$ и встретили далее следующие знаки:

$$\frac{0{,}000}{60},\ \overset{\text{подъем}}{\frac{0{,}0017}{84}},\ \overset{\text{подъем}}{\frac{0{,}0032}{121}},\ \frac{0{,}0000}{45},\ \overset{\text{падение}}{\frac{0{,}004}{210}}.$$

Прогулку вы кончили у очередного знака уклона. Какой путь вы прошли и какова разность высот между первым и последним знаками? [1]

**Решение**

Всего пройдено

$$153 + 60 + 84 + 121 + 45 + 210 = 673 \text{ м}.$$

Вы поднялись на

$$0{,}004 \times 153 + 0{,}0017 \times 84 + 0{,}0032 \times 121 = 1{,}15 \text{ м},$$

а опустились на

$$0{,}004 \times 210 = 0{,}84 \text{ м},$$

значит, в общей сложности, оказались выше исходной точки на

$$1{,}15 - 0{,}84 = 0{,}31 \text{ м} = 31 \text{ см}.$$

## КУЧИ ЩЕБНЯ

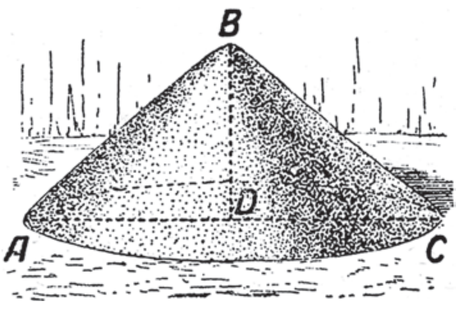


*Рис. 95*

Кучи щебня по краям шоссейной дороги также представляют предмет, заслуживающий внимания «геометра на вольном воздухе». Задайте вопрос, какой объем заключает лежащая перед вами куча, и вы поставите себе геометрическую задачу, довольно замысловатую для человека, привыкшего преодолевать математические трудности

[1] Знак 0,000 означает горизонтальный участок пути («площадку»).

только на классной доске. Придется вычислить объем конуса, высота и радиус которого недоступны для непосредственного измерения. Ничто не мешает, однако, определить их величину косвенным образом. Радиус вы находите, измерив рулеткой или шнуром окружность основания и разделив ее длину[1] на 6,28.

Сложнее обстоит с высотой: приходится (рис.95) измерять длину образующей *AB* — или, как делают дорожные десятники, обеих образующих *ABC* сразу (перекидывая мерную ленту через вершину кучи), а затем, зная радиус основания, вычисляют высоту *BD* по теореме Пифагора. Рассмотрим пример.

**Задача № 31**

Окружность основания конической кучи щебня 12,1 м; длина двух образующих 4,6 м. Каков объем кучи?

**Решение**

Радиус основания кучи равен:

$$12{,}1 \times 0{,}159 \text{ (вместо } 12{,}1 : 6{,}28) = 1{,}9 \text{ м.}$$

Высота равна:

$$\sqrt{2{,}32 - 1{,}92} = 1{,}2,$$

откуда объем кучи:

$$⅓ \times 3{,}14 \times 1{,}92 \times 1{,}2 = 4{,}5 \text{ м}^3$$

(или около ½ кубической сажени).

Обычные объемные размеры куч щебня на наших дорогах, согласно прежним дорожным правилам, были равны ½, ¼ и ⅛ куб. сажени, т. е. в метрических мерах 4,8, 2,4 и 1,2 м$^3$.

## «ГОРДЫЙ ХОЛМ»

При взгляде на конические кучи щебня или песка мне вспоминается старинная легенда восточных народов, рассказанная у Пушкина в «Скупом рыцаре»:

Читал я где-то,
Что царь однажды воинам своим
Велел снести земли по горсти в кучу, —
И гордый холм возвысился, и царь
Мог с высоты с весельем озирать
И дол, покрытый белыми шатрами,
И море, где бежали корабли.

[1] На практике это действие заменяют умножением на обратное число 0,318, если ищут диаметр, и 0,159 — если желают вычислить радиус.

Это одна из тех немногих легенд, в которых при кажущемся правдоподобии нет зерна реальной правды. Можно доказать геометрическим расчетом, что если бы какой-нибудь древний деспот вздумал осуществить такого рода затею, он был бы обескуражен мизерностью результата: перед ним высилась бы настолько жалкая кучка земли, что никакая фантазия не в силах была бы раздуть ее в легендарный «гордый холм».

Сделаем примерный расчет. Сколько воинов могло быть у древнего царя? Старинные армии были не так многочисленны, как в наше время. Войско в 100 000 человек было уже очень внушительно по численности. Остановимся на этом числе, т. е. примем, что холм составился из 100 000 горстей. Захватите самую большую горсть земли и насыпьте в стакан: вы не наполните его одною горстью. Мы примем, что горсть древнего воина была больше вашей и равнялась объему стакана, т. е. ⅕ л (дм$^3$). Отсюда определяется объем холма:

$$\tfrac{1}{5} \times 100\,000 = 20\,000 \text{ дм}^3 = 20 \text{ м}^3.$$

Значит, холм представлял собою конус объемом не более 20 м$^3$ (или 2 куб. сажен). Такой скромный объем уже разочаровывает. Но будем продолжать вычисления, чтобы определить высоту холма. Для этого нужно знать, какой угол составляют образующие конуса с его основанием. В нашем случае можем принять его равным углу естественного откоса, т. е. 45°: более крутых склонов нельзя допустить, так как земля будет осыпаться (правдоподобнее было бы взять даже более пологий уклон, например полуторный). Остановившись на угле в 45°, заключаем, что высота такого конуса равна радиусу его основания; следовательно,

$$20 = \frac{\pi x^3}{3},$$

откуда

$$x = \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}} = 2{,}4 \text{ м}.$$

Надо обладать богатым воображением, чтобы земляную кучу в 2,4 м (1½ человеческих роста) назвать «гордым холмом». Сделав расчет для случая полуторного откоса, мы получили бы еще более скромный результат.

У Аттилы было самое многочисленное войско, какое знал Древний мир. Историки оценивают его в 700 тысяч человек. Если бы все эти воины участвовали в насыпании холма, образовалась бы куча повыше вычисленной нами, но не очень: так как объем ее был бы в 7 раз больше, чем у нашей, то высота превышала бы высоту нашей кучи всего в $\sqrt[3]{7}$, т. е. в 1,9 раза: она сравнялась бы 2,4 × 1,9 = 4,6 м. Сомнительно, чтобы курган подобных размеров мог удовлетворить честолюбие Аттилы.

С таких небольших возвышений легко было, конечно, видеть «дол, покрытый белыми шатрами», но обозревать море было возможно, разве только если дело происходило невдалеке от берега.

О том, как далеко можно видеть с той или иной высоты, мы побеседуем подробнее в следующей главе.

## У ДОРОЖНОГО ЗАКРУГЛЕНИЯ

Ни шоссейная, ни железная дороги никогда не заворачивают круто, а переходят всегда с одного направления на другое плавной, без переломов, дугой. Дуга эта обычно есть дуга окружности, расположенная так, что прямолинейные части дороги служат касательными к ней. Например, на рис. 96 прямые участки *AB* и *CD* дороги соединены дугою *BC* так, что *AB* и *CD* касаются (геометрически) этой дуги в точках *B* и *C*, т. е. *AB* составляет прямой угол с радиусом *OB*, а CD — такой же угол с радиусом *OC*. Делается это, конечно, для того, чтобы путь плавно переходил из прямого направления в кривую часть и обратно.

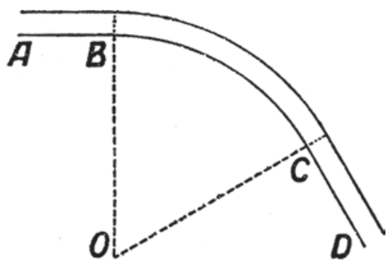


*Рис. 96*

Радиус дорожного закругления обыкновенно берется весьма большой — на железных дорогах не менее 600 м; наиболее же обычный радиус закругления на главном железнодорожном пути — 1000 и даже 2000 м.

## РАДИУС ЗАКРУГЛЕНИЯ

Стоя близ одного из таких закруглений, могли ли бы вы определить величину его радиуса? Это не так легко, как найти радиус дуги, начерченной на бумаге. На чертеже дело просто: вы проводите две произвольные хорды и из середин их восставляете перпендикуляры: в точке их пересечения лежит, как известно, центр дуги; расстояние его от какой-либо точки кривой и есть искомая длина радиуса.

Но сделать подобное же построение на местности было бы, конечно, очень неудобно: ведь центр закругления лежит в расстоянии 1–2 км от дороги, зачастую в недоступном месте.

Можно было бы выполнить построение на плане, но снять закругление на план тоже нелегкая работа.

Все эти затруднения устраняются, если прибегнуть не к построению, а к вычислению радиуса.

Для этого можно воспользоваться следующим приемом. Дополним (рис. 97) мысленно дугу *AB* закругления до полной окружности. Соединив произвольные точки *C* и *D* дуги закругления, измеряем хорду *CD*, а также «стрелку» $EF$ (т. е. высоту сегмента $CED$). По этим двум данным уже нетрудно вычислить искомую длину радиуса. Рассматривая прямые $CD$ и $EG$ (диаметр) как пересекающиеся хорды, имеем

$$AF \times FB = EF \times FG.$$

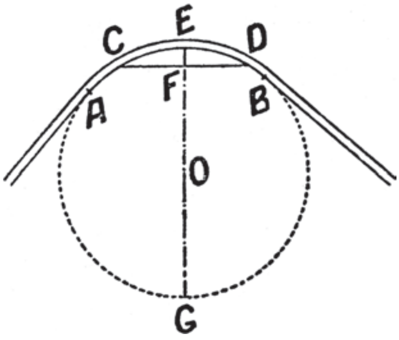


*Рис. 97*

Обозначим длину хорды через $a$, длину стрелки — через $h$ и радиус — через $R$; тогда имеем:

$$\frac{a^2}{4} = h\,(2\,R - h),$$

откуда

$$\frac{a^2}{4} = 2Rh - h^2.$$

И искомый радиус[1]:

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}\,.$$

Например, при стрелке в 0,5 м и хорде 48 м искомый радиус

$$R = \frac{48^2 + 4 \times 0{,}5^2}{8 \times 0{,}5} = 580.$$

Это вычисление можно упростить, если считать $2R - h$ равным $2R$, — вольность позволительная, так как $h$ весьма мало по сравнению с $R$ (ведь $R$ — сотни метров, а $h$ — единицы их). Тогда получается весьма удобная для вычислений приближенная формула:

$$R = \frac{a^2}{8h}\,.$$

Применив ее в сейчас рассмотренном случае, мы получили бы ту же величину:

$$R = 580.$$

[1] То же могло быть получено и иным путем — из прямоугольного треугольника $COF$, где $OC = R$, $CF = \frac{a}{2}$; $OF = R - h$.

По теореме Пифагора,

$$R^2 = (R - h)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

откуда

$$R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + \frac{a^2}{4},$$

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}.$$

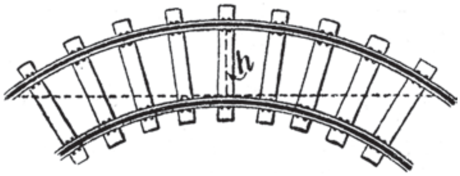



Рис. 98

Вычислив длину радиуса закругления и зная, кроме того, что центр закругления находится на перпендикуляре к середине хорды, вы можете приблизительно наметить и то место, где должен лежать центр кривой части дороги.

Если на дороге уложены рельсы, то нахождение радиуса закругления еще более упрощается. В самом деле, проводя касательную к внутреннему рельсу, мы получаем хорду дуги наружного рельса, стрелка которой *h* (рис. 98) равна ширине колеи — величине, хорошо известной: 1,52 м. Радиус закругления в таком случае (если *a* — длина хорды) равен приближенно:

$$R = \frac{a^2}{8 \times 1{,}52} = \frac{a^2}{12{,}2}.$$

## ДНО ОКЕАНА

От дорожного закругления к дну океана — скачок как будто слишком неожиданный, во всяком случае не сразу понятный. Но геометрия связывает обе темы вполне естественным образом.

Речь идет о кривизне дна океана, о том, какую форму оно имеет: вогнутую, плоскую или выпуклую. Многим, без сомнения, покажется невероятным, что океаны при своей огромной глубине вовсе не представляют на земном шаре впадин; как сейчас увидим, их дно не только не вогнуто, но даже выпукло. Считая океан «бездонным и безбрежным», мы забываем, что его «безбрежность» во много сотен раз больше его «бездонности», т. е. что водная толща океана представляет собою широко простирающийся слой, который, конечно, повторяет кривизну нашей планеты.

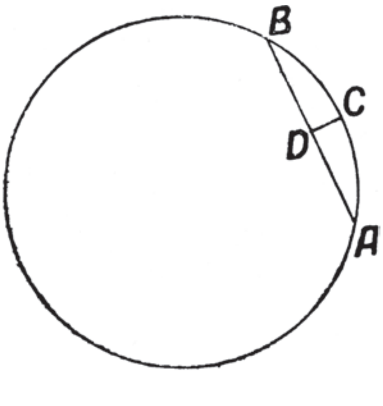



Рис. 99

Возьмем для примера Атлантический океан. Ширина его близ экватора составляет примерно шестую часть полной окружности. Если круг рис. 99 — экватор, то дуга *ACB* изображает водную скатерть Атлантического океана. Если бы дно его было плоско, то глубина равнялась бы *CD* = стрелке дуги *ACB*. Зная, что дуга *AB* = ⅙ окружности и, следовательно, хорда *AB* есть сторона правильного вписанного шестиугольника (которая, как известно, равна радиусу *R* круга), мы можем вычислить *CD* из выведенной раньше формулы для дорожных закруглений:

$$R = \frac{a^2}{8h}, \quad \text{откуда } h = \frac{a^2}{8R}.$$

Зная, что $a = R$, получаем для данного случая

$$h = \frac{R}{8}.$$

При $R = 6400$ км имеем:

$$h = 800 \text{ км.}$$

Итак, чтобы дно Атлантического океана было плоско, наибольшая глубина его должна была бы достигать 800 км. В действительности же она нигде не достигает даже и 10 км. [1] Отсюда прямой вывод: дно этого океана представляет по общей своей форме выпуклость, лишь немного менее искривленную, чем выпуклость его водной глади.

Это справедливо и для других океанов: все они представляют собою на земной поверхности места уменьшенной кривизны, почти не нарушая ее общей шарообразной формы.

Наша формула для вычисления радиуса кривизны дороги показывает, что чем водный бассейн обширнее, тем дно его выпуклее. Рассматривая формулу $h = \frac{a^2}{8R}$, мы прямо видим, что с возрастанием ширины $a$ океана или моря его глубина $h$ должна, — чтобы дно было плоское, — возрастать очень быстро, пропорционально квадрату ширины $a$. Между тем, при переходе от небольших водных бассейнов к более обширным, глубина вовсе не возрастает в такой стремительной прогрессии. Океан шире иного моря, скажем, в 100 раз, но глубже его вовсе не в 100 × 100, т. е. в 10 000 раз. Поэтому сравнительно мелкие бассейны имеют дно более вдавленное, нежели океаны. Дно Черного моря между Крымом и Малой Азией не выпукло, как у океанов, даже и не плоско, а несколько вогнуто. Водная поверхность этого моря представляет дугу приблизительно в 2° (точнее, в 1/170 долю окружности Земли). Глубина Черного моря довольно равномерна и равна 2,2 км.

Приравняв в данном случае дугу хорде, получаем, что для обладания плоским дном море это должно было бы иметь наибольшую глубину

$$h = \frac{40\,000^2}{170^2 \times 8R} = 1{,}1.$$

Значит, действительное дно Черного моря лежит более чем на километр (2,2–1,1) ниже воображаемой плоскости, проведенной через крайние точки его противоположных берегов, т. е. представляет собою впадину, а не выпуклость.

---

[1] См. примечание [2] на с. 136 (*примеч. ред.*).

## СУЩЕСТВУЮТ ЛИ ВОДЯНЫЕ ГОРЫ?

Выведенная ранее формула для вычисления радиуса кривизны дорожного закругления поможет нам ответить на этот вопрос.

Предыдущая задача уже подготовила нас к ответу. Водяные горы существуют, но не в физическом, а в геометрическом значении этих слов. Не только каждое море, но даже каждое озеро представляет собою в некотором роде водяную гору. Когда вы стоите у берега озера, вас отделяет от противоположной точки берега водная выпуклость, высота которой тем больше, чем озеро шире. Высоту эту мы можем вычислить: из формулы $R = \frac{a^2}{8h}$ имеем величину стрелки $h = \frac{a^2}{8R}$; здесь $a$ — расстояние между берегами по прямой линии, которое можем приравнять ширине озера (хорду-дуге). Если эта ширина, скажем, 100 км, то высота водной «горы»

$$h = \frac{10\,000}{8 \times 6400} = \text{около } 200 \text{ м.}$$

Водяная гора внушительной высоты!

Даже небольшое озеро в 10 км ширины возвышает вершину своей выпуклости над прямой линией, соединяющей ее берега, на 2 м, т. е. выше человеческого роста.

Но вправе ли мы называть эти водные выпуклости «горами»? В физическом смысле нет: они не поднимаются над горизонтальной поверхностью, — значит, это равнины. Ошибочно думать, что прямая $AB$ (рис. 100) есть горизонтальная линия, над которой поднимается дуга $ACB$. Горизонтальная линия здесь не $AB$, а $ACB$, совпадающая с свободной поверхностью спокойной воды. Прямая же $ADB$ — наклонная к горизонту: $AD$ уходит наклонно вниз под земную поверхность до точки $D$, ее глубочайшего пункта, и затем вновь поднимается вверх, выходя из-под земли (или воды) в точке $B$. Если бы вдоль прямой $AB$ были проложены трубы, то шарик, помещенный в точке $A$, не удержался бы здесь, а (если стенки трубы гладки) скатился бы до точки $D$ и отсюда, разогнавшись, вкатился бы к точке $B$; затем, не удержавшись здесь, скатился бы к $D$, добежал бы до $A$, снова скатился бы и т. д. Идеально гладкий шарик по идеально гладкой трубе (притом при отсутствии воздуха, мешающего движению) катался бы так туда и назад вечно...

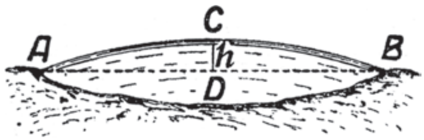



*Рис. 100*

Итак, хотя глазу кажется на рис. 100, что $ACB$ — гора, но в физическом значении слова здесь ровное место. Гора — если хотите — существует тут только в геометрическом смысле.

**Глава шестая**

# ГДЕ НЕБО С ЗЕМЛЕЙ СХОДИТСЯ

## ГОРИЗОНТ

В степи или на ровном поле вы видите себя в центре окружности, которая ограничивает доступную вашему глазу земную поверхность. Это — горизонт. Линия горизонта неуловима: когда вы идете к ней, она от вас отодвигается. Но, неуловимая, она все же реально существует; это не обман зрения, не мираж. Для каждой точки наблюдения имеется определенная граница видимой из нее земной поверхности, и дальность этой границы нетрудно вычислить. Чтобы уяснить себе геометрические отношения, связанные с горизонтом, обратимся к рис. 101. Дуга *AB* — часть окружности земного шара. В точке *C* помещается глаз наблюдателя на высоте *CD* над земной поверхностью. Как далеко видит кругом себя, на ровном месте, этот наблюдатель? Очевидно, только до точек *M*, *N*, где луч зрения касается земной поверхности: дальше земля лежит ниже луча зрения. Эти точки *M*, *N* (и другие, лежащие на окружности *MEN*) представляют собою границу видимой части земной поверхности, т. е. образуют линию горизонта. Наблюдателю должно казаться, что здесь небо опирается на землю, потому что в этих точках он видит одновременно и небо, и земные предметы.

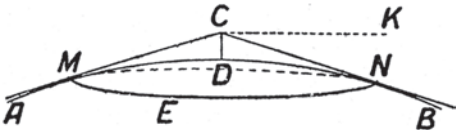



*Рис. 101*

Быть может, вам покажется, что рис. 101 не дает верной картины действительности: ведь на самом деле горизонт всегда находится на уровне глаз, между тем как на чертеже круг явно лежит ниже наблюдателя. Действительно, нам всегда кажется, что линия горизонта расположена на одном уровне с глазами и даже повышается вместе с нами, когда мы поднимаемся. Но это — обман зрения: на самом деле линия горизонта всегда ниже наших глаз, как и показано на рис. 101. Но угол, составляемый прямыми линиями *CN* и *CM* с прямой *CK*, перпендикулярной к радиусу в точке *C* (этот угол называется «понижением горизонта»), весьма мал, и уловить его без инструмента невозможно.

Отметим попутно и другое любопытное обстоятельство. Мы сейчас сказали, что при поднятии наблюдателя над земной поверхностью, например, на аэроплане, линия горизонта кажется остающейся на уровне глаз, т. е. как бы поднимается вместе с наблюдателем. Если он достаточно высоко поднимается, ему будет казаться, что почва под аэропланом лежит *ниже линии горизонта*, — другими словами, земля представится словно вдавленной в форме чаши, краями которой служит линия горизонта. Это очень хорошо описано и объяснено у Эдгарда По в фантастическом «Приключении Ганса Пфаля».

«Больше всего, — рассказывает его герой-аэронавт, — удивило меня то обстоятельство, что поверхность земного шара казалась *вогнутой*. Я ожидал, что увижу ее непременно выпуклой во время подъема кверху: только путем размышления нашел я объяснение этому явлению. Отвесная линия, проведенная от моего шара к земле, образовала бы катет прямоугольного треугольника, основанием которого была бы линия от основания отвеса до горизонта, а гипотенузой — линия от горизонта до моего шара. Но моя высота была ничтожна по сравнению с полем зрения: другими словами, основание и гипотенуза воображаемого прямоугольного треугольника были так велики по сравнению с отвесным катетом, что их можно было считать почти параллельными. Поэтому каждая точка, находящаяся как раз под аэронавтом, всегда кажется лежащей ниже уровня горизонта. Отсюда впечатление вогнутости. И это должно продолжаться до тех пор, пока высота подъема не станет настолько значительной, что основание треугольника и гипотенуза перестанут казаться параллельными».

*Рис. 102*

В дополнение к этому объяснению добавим следующий пример. Вообразите прямой ряд телеграфных столбов (рис. 103, вверху). Для глаза, помещенного в точке *B*, на уровне оснований столбов, ряд принимает вид, обозначенный цифрой 2. Но для глаза в точке *A*, на уровне вершин столбов, ряд принимает вид 3, т. е. почва кажется ему словно приподнимающейся у горизонта.

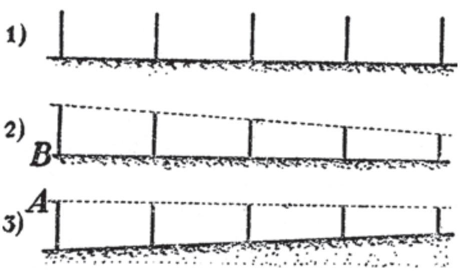



*Рис. 103. Ряд телеграфных столбов.*
*A и B — положение глаза наблюдателя*

## КОРАБЛЬ НА ГОРИЗОНТЕ

Когда с берега моря или большого озера мы наблюдаем за кораблем, появляющимся из-под горизонта, нам кажется, что мы видим судно не в той точке (рис. 104), где оно действительно находится, а гораздо ближе, в точке *B*, где линия нашего зрения скользит по выпуклости моря. При наблюдении невооруженным глазом трудно отделаться от впечатления, что судно находится в точке *B*, а не дальше за горизонтом.


*Рис. 104*

Однако в зрительную трубу это различное отдаление судна воспринимается гораздо отчетливее. Труба не одинаково ясно показывает нам предметы близкие и отдаленные: в трубу, наставленную в даль, близкие предметы видны расплывчато, и, обратно, наставленная на близкие предметы труба показывает нам даль в тумане. Если поэтому направить трубу (с достаточным увеличением) на водный горизонт и наставить так, чтобы ясно видна была водная поверхность, то корабль представится в расплывчатых очертаниях, обнаруживая этим свою большую отдаленность от наблюдателя (рис. 105). Наоборот, установив трубу так, чтобы резко видны были очертания корабля, полускрытого под горизонтом, мы заметим, что водная поверхность у горизонта утратила свою прежнюю ясность и рисуется словно в тумане (рис. 106). Английский астроном Проктор, подметивший это поучительное явление, говорит по этому поводу:

«Все, кому случалось произвести такое наблюдение, единогласно утверждали, что, как ни крепка была их уверенность в шарообразности Земли, они нашли в этом наблюдении убедительнейшее подтверждение этой истины».

*Рис. 105*

*Рис. 106*

## ДАЛЬНОСТЬ ГОРИЗОНТА

Как же далеко лежит от наблюдателя линия горизонта? Другими словами: как велик радиус того круга, в центре которого мы видим себя на ровной местности? Как вычислить дальность горизонта, зная величину возвышения наблюдателя над земной поверхностью?

Задача сводится к вычислению длины отрезка *CN* (рис. 107) касательной, проведенной из глаза наблюдателя к земной поверхности. Квадрат касательной, — мы знаем из геометрии, — равен произведению внешнего отрезка ($h$) секущей на всю длину этой секущей, т. е. на $h + 2R$, где $R$ — радиус земного шара. Так как возвышение глаза наблюдателя над землею обычно крайне мало по сравнению с диаметром ($2R$) земного шара, составляя, например, для высочайшего поднятия аэроплана только 0,001 его долю, то $2R + h$ можно принять равным $2R$, и тогда формула упростится:

$$\overline{CN}^2 = h \times 2R\,.$$

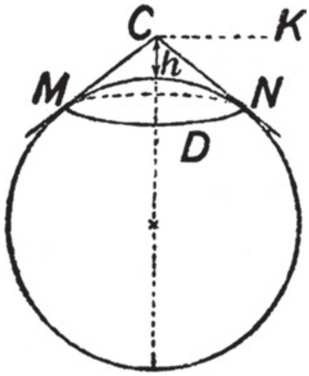


*Рис. 107*

Значит, дальность горизонта можно вычислять по очень простой формуле:

$$\text{дальность горизонта} = \sqrt{2Rh},$$

где $R$ — радиус земного шара (около 6400 км), а $h$ — возвышение глаза наблюдателя над земной поверхностью. Так как $\sqrt{6400} = 80$, то формуле можно придать вид:

$$\text{дальность горизонта} = 80\sqrt{2h} = 113\sqrt{h}\,,$$

где $h$ непременно должно быть выражено в частях километра.

Это — расчет чисто геометрический, упрощенный. Если пожелаем уточнить его учетом физических факторов, влияющих на дальность горизонта, то должны принять в соображение так называемую «атмосферную рефракцию». Рефракция, т. е. преломление (искривление) световых лучей в атмосфере, увеличивает дальность горизонта примерно на $^1\!/_{15}$ долю (на 6%). Число это — 6% — только среднее. Дальность горизонта несколько увеличивается или уменьшается в зависимости от многих условий, а именно, она

| увеличивается: | уменьшается: |
|---|---|
| при высоком давлении близ поверхности земли | при низком давлении на высоте |
| в холодную погоду утром и вечером | в теплую погоду днем |
| в сырую погоду | в сухую погоду |
| над морем. | над сушей. |

В ряде приведенных далее задач влияние атмосферной рефракции в расчет (в большинстве случаев) не принимается. Нетрудно, впрочем, — как будет показано, — ввести и требуемую поправку.

### Задача № 32

Как далеко может видеть человек, стоящий на равнине?

#### Решение

Считая, что глаз взрослого человека возвышается над почвой на 1,6 м, или на 0,0016 км, имеем:

$$\text{дальность горизонта} = 113\sqrt{0{,}0016} = 4{,}52 \text{ км}.$$

Человек среднего роста видит на ровном месте не далее 4½ км. Рефракция увеличивает эту дальность до 4,8 км. Поперечник обозреваемого им круга — всего 9,6 км, а площадь — 72 км$^2$. Это гораздо меньше, чем обычно думают люди, описывающие далекий простор степей, окидываемый глазом.

### Задача № 33

Как далеко видит на море человек, сидящий в лодке?

#### Решение

Если возвышение глаза сидящего в лодке человека над уровнем воды примем за 1 м, или 0,001 км, то дальность горизонта равна

$$113\sqrt{0{,}001} = 3{,}58 \text{ км, т. е. немного более } 3½ \text{ км}.$$

При более низком положении глаза горизонт суживается: для полуметра, например, до 2½ км. Напротив, при наблюдении с возвышенных пунктов (с мачты) дальность горизонта возрастает: для 4 м, например, до 7 км.

### Задача № 34

Как далеко может видеть летчик, поднявшийся на высоту 5 км?

#### Решение

Дальность горизонта = $113\sqrt{5}$ = около 250 км (конечно, на ровном месте, например, над морской поверхностью).

### Задача № 35

Как высоко должен подняться летчик, чтобы видеть кругом себя на 50 км?

**Решение**

Из формулы дальности горизонта имеем в данном случае уравнение:

$$50 = \sqrt{2Rh},$$

откуда

$$h = \frac{50^2}{2R} = \frac{2500}{12800} = 0{,}2 \text{ км}.$$

Значит, достаточно подняться всего на 200 м.

Все получаемые по указанной формуле результаты были бы вполне верны лишь в том случае, если бы земная атмосфера не влияла на прямолинейное распространение лучей света. В действительности, как было сказано выше, воздушная оболочка Земли искривляет путь лучей, вследствие чего горизонт отодвигается на 6% дальше того расстояния, которое получается из формулы. Эту поправку нетрудно внести. Например, в задаче № 34 правильный ответ будет 250 × 1,06 = 265 км, а задачу № 35 нужно бы решить так; скинув 6% от 50 км, имеем 47 км; далее

$$h = \frac{47^2}{2R} = \frac{2200}{12800} = 0{,}17 \text{ км},$$

т. е. 170 м (вместо 200).

## БАШНЯ ГОГОЛЯ

**Задача № 36**

Интересно узнать, что увеличивается быстрее: высота поднятия или дальность горизонта? Многие думают, что с возвышением наблюдателя горизонт возрастает необычайно быстро. Так думал, между прочим, и Гоголь, писавший в статье «Об архитектуре нашего времени» следующее:

«Башни огромные, колоссальные, необходимы в городе... У нас обыкновенно ограничиваются высотой, дающей возможность оглядеть один только город, между тем как для столицы необходимо видеть по крайней мере на полтораста верст во все стороны, и для этого, может быть, один только или два этажа лишних, — и все изменяется. Объем кругозора по мере возвышения распространяется необыкновенною прогрессией».

Так ли в действительности?

**Решение**

Достаточно взглянуть на формулу

$$\text{дальность горизонта} = \sqrt{2Rh},$$

чтобы сразу стала ясна неправильность утверждения, будто «объем горизонта» с возвышением наблюдателя возрастает очень быстро. Напротив, дальность горизонта растет медленнее, чем высота поднятия: она пропорциональна квадратному корню из высоты. Когда возвышение наблюдателя увеличивается в 100 раз, горизонт отодвигается всего только в 10 раз дальше; когда высота становится в 1000 раз больше, горизонт отодвигается всего в 31 раз дальше. Поэтому ошибочно утверждать, что «один только или два этажа лишних, — и все изменяется». Если к 8-этажному дому пристроить еще два этажа, дальность горизонта возрастет в $\sqrt{10/8}$ т. е. в 1,1 раза — всего на 10%, Такая прибавка почти не чувствуется.

Что же касается проекта сооружения башни, с которой можно было бы видеть, «по крайней мере на полтораста верст», то он совершенно несбыточен. Гоголь, конечно, не подозревал, что такая башня должна иметь огромную высоту.

Действительно, из уравнения

$$150 = \sqrt{2Rh}$$

получаем:

$$h = \frac{150^2}{2R} = \frac{22\,500}{12\,800} = 1{,}9 \text{ км}.$$

Самая высокая из всех сооруженных до недавнего времени башен — Эйфелева — в 6 раз ниже этих проектируемых Гоголем вышек. А во времена Гоголя даже и Эйфелевой башни еще не существовало!

## ХОЛМ ПУШКИНА

### Задача № 37

Сходную ошибку делает и Пушкин, говоря в «Скупом рыцаре» о далеком горизонте, открывающемся с вершины «гордого холма»:

> И царь мог с высоты с весельем озирать
> И дол, покрытый белыми шатрами,
> И море, где бежали корабли...

Мы уже видели (с. 408), как скромна была высота этого «гордого» холма: даже полчища Аттилы не могли бы по этому способу воздвигнуть холма выше 4,4 м. Теперь мы можем завершить расчеты, определив, насколько холм этот расширял горизонт наблюдателя, поместившегося на его вершине. Глаз такого зрителя возвышался бы над почвой на 4½ + 1½, т. е. на 6 м, и, следовательно, дальность горизонта равна была бы

$$\sqrt{2 \times 6400 \times 0{,}006} = 8{,}8 \text{ км}.$$

Это всего на 4 км больше того, что можно видеть, стоя на ровной земле.

## ГДЕ РЕЛЬСЫ СХОДЯТСЯ

**Задача № 38**

Конечно, вы не раз замечали, как суживается уходящая вдаль рельсовая колея. Но случалось ли вам видеть ту точку, где оба рельса наконец встречаются друг с другом? Да и возможно ли видеть такую точку? У вас теперь достаточно знаний, чтобы решить эту задачу.

**Решение**

Вспомним, что каждый предмет превращается для нормального глаза в точку тогда, когда виден под углом в 1', т. е. когда он удален на 3400 своих поперечников (см. с. 397). Ширина рельсовой колеи — 1,52 м. Значит, промежуток между рельсами должен слиться в точку на расстоянии $1{,}52 \times 3400 = 5{,}2$ км. Итак, если бы мы могли проследить за рельсами на протяжении 5,2 км, мы увидели бы, как оба они сходятся в одной точке. Но на ровной местности горизонт лежит ближе 5,2 км, — именно на расстоянии всего 4,4 км. Следовательно, человек с нормальным зрением, стоя на ровном месте, не может видеть точку встречи рельсов. Он мог бы наблюдать ее лишь при одном из следующих условий:

1) если острота зрения его понижена, так что предметы сливаются для него в точку при угле зрения, большем 1';

2) если железнодорожный путь не горизонтален;

3) если глаз наблюдателя возвышается над землей более чем на

$$\frac{5{,}2^2}{2R} = \frac{27}{12\,800} = 0{,}0021 \text{ км},$$

т. е. 210 см.

## ЗАДАЧА О МАЯКЕ

**Задача № 39**

На берегу находится маяк, верхушка которого возвышается на 40 м над поверхностью воды. С какого расстояния откроется этот маяк для корабля, если матрос-наблюдатель («марсовой») находится на «марсе» корабля на высоте 10 м над водной поверхностью?

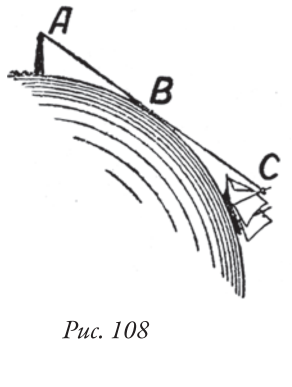


*Рис. 108*

**Решение**

Из рис. 108 видно, что задача сводится к вычислению длины прямой $AC$, составленной из двух частей $AB$ и $BC$.

Часть $AB$ есть дальность горизонта маяка при высоте над землей 40 м, а $BC$ — дальность горизонта «марсового» при высоте 10 м. Следовательно, искомое расстояние равно (см. с. 417):

$$113\sqrt{0{,}04} - 113\sqrt{0{,}01} = 113\,(0{,}2 + 0{,}1) = 34 \text{ км.}$$

**Задача № 40**

Какую часть этого маяка увидит тот же «марсовой» с расстояния 30 км?

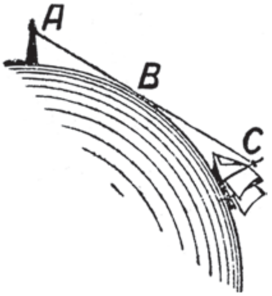


*Рис. 109*

**Решение**

Из рис. 109 ясен ход решения задачи: нужно прежде всего вычислить длину $BC$, затем отнять полученный результат от общей длины $AC$, т. е. от 30 км, чтобы узнать расстояние $AB$. Зная $AB$, мы вычислим высоту, с которой дальность горизонта равна $AB$. Выполним же все эти расчеты:

$$\text{BC} = 113\sqrt{0{,}01} = 11{,}3;$$

$$30 - 11{,}3 = 18{,}7;$$

$$\text{высота} = \frac{18{,}7^2}{2R} = \frac{350}{12\,800} = 0{,}027.$$

Значит, с расстояния 30 км не видно 27 м высоты маяка; остается видимым только 13 м.

## МОЛНИЯ

**Задача № 41**

Над вашей головой на высоте 1½ км [1] сверкнула молния. На каком расстоянии от вашего места еще можно было видеть молнию?

**Решение**

Надо вычислить дальность горизонта для высоты 1,5 км. Она равна

$$113\sqrt{1{,}5} = 138 \text{ км.}$$

[1] Определить расстояние молнии от наблюдателя очень легко, если сосчитать число секунд, прошедших от появления молнии до первого удара грома. Так как оба явления в действительности происходят одновременно, а звук пробегает около ⅓ км в секунду (свет достигает наблюдателя практически мгновенно), то расстояние грозового удара в километрах равно одной трети числа протекших секунд.

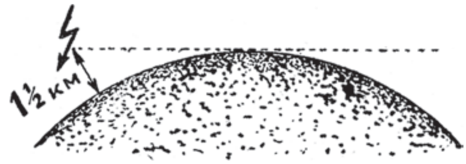



*Рис. 110*

Значит, если местность ровная, то молния была видна человеку, — глаз которого находится на уровне земли, — на расстоянии 138 км (а с 6%-й поправкой — на 146 км). В точках, удаленных на 146 км, она была видна на самом горизонте; а так как на такое расстояние звук не доносится, то наблюдалась она здесь как зарница, — молния без грома.

## ПАРУСНИК

**Задача № 42**

Вы стоите на берегу озера или моря, у самой воды, и наблюдаете за удаляющимся от вас парусником. Вам известно, что верхушка мачты возвышается на 6 м над уровнем воды. На каком расстоянии от вас парусник начнет кажущимся образом опускаться в воду (т. е. за горизонт) и на каком расстоянии он скроется окончательно?

**Решение**

Парусник начнет скрываться под горизонт (см. рис. 104) в точке *B* — на расстоянии дальности горизонта для человека среднего роста, т. е. 4,4 км. Совсем скроется он под горизонт в точке, расстояние которой от *B* равно

$$113\sqrt{0{,}006} = 8{,}7.$$

Значит, парусник скроется под горизонт на расстоянии от берега

$$4{,}4 + 8{,}7 = 13{,}1 \text{ км}.$$

## ГОРИЗОНТ НА ЛУНЕ

**Задача № 43**

До сих пор все расчеты наши относились к земному шару. Но как бы изменилась дальность горизонта, если бы наблюдатель очутился на другой планете, например, на одной из равнин Луны?

**Решение**

Задача решается по той же формуле: дальность горизонта = $\sqrt{2Rh}$, но в данном случае вместо $2R$ надо подставить длину не диаметра земного шара, а диаметра Луны, равного 3500 км. При возвышении глаза над почвой на 1,5 м, имеем:

$$\text{дальность горизонта} = \sqrt{3500 \times 0{,}0015} = 2{,}28.$$

На лунной равнине мы видели бы вдаль всего на 2¼ км.

## В ЛУННОМ КРАТЕРЕ

**Задача № 44**

Наблюдая Луну в зрительную трубу даже скромных размеров, мы видим на ней множество так называемых кольцевых гор — образований, подобных которым на Земле нет. Одна из величайших кольцевых гор — «кратер Коперника» — имеет в диаметре снаружи 124 км, внутри 90 км. Высочайшие точки кольцевого вала возвышаются над почвой внутренней котловины на 1500 м. Но если бы вы очутились в средней части внутренней котловины, увидели бы вы оттуда этот кольцевой вал?

**Решение**

Чтобы ответить на вопрос, нужно вычислить дальность горизонта для гребня вала, т. е. для высоты 1,5 км. Она равна на Луне $\sqrt{3500 \times 1{,}5} = 23$ км. Прибавив дальность горизонта для человека среднего роста, получим расстояние, на котором кольцевой вал скрывается под горизонтом наблюдателя, 23 + 2,3 = около 25 км. А так как центр вала удален от его краев на 45 км, то видеть этот вал из центра невозможно, — разве только взобравшись на склоны центральных гор, возвышающихся на дне этого кратера до высоты 600 м. [1]

## НА ЮПИТЕРЕ

**Задача № 45**

Как велика дальность горизонта на Юпитере, диаметр которого в 11 раз больше земного?

**Решение**

Если Юпитер покрыт твердой корой и имеет ровную поверхность, то человек, перенесенный на его равнину, мог бы видеть вдаль на

$$\sqrt{11 \times 12800 \times 0{,}0015} = 14{,}4, \text{ т. е. на } 14½ \text{ км.}$$

[1] См. книгу того же автора: «Занимательная астрономия», гл. II, статью «Лунные пейзажи».

**Глава седьмая**

## ГЕОМЕТРИЯ РОБИНЗОНОВ

(Несколько страниц из Жюля Верна)

### ГЕОМЕТРИЯ ЗВЕЗДНОГО НЕБА

Было время, когда автор этой книги готовил себя к не совсем обычной будущности: к карьере человека, потерпевшего кораблекрушение. Короче сказать, я мечтал сделаться Робинзоном. Если бы это осуществилось, настоящая книга была бы составлена гораздо интереснее, чем теперь, но может быть — и вовсе осталась бы ненаписанной. Мечта моя до сих пор не сбылась, и теперь я не жалею об этом. Однако в юности я горячо верил в свое призвание Робинзона и готовился к нему вполне серьезно. Ведь даже самый посредственный Робинзон должен обладать знаниями и навыками, необязательными для людей других профессий.

Что прежде всего придется сделать человеку, закинутому крушением на необитаемый остров? Конечно, определить географическое положение своего невольного обиталища — широту и долготу. Об этом, к сожалению, слишком кратко говорится в большинстве историй старых и новых Робинзонов. В полном издании подлинного «Робинзона Крузо» вы найдете об этом всего одну строку, да и ту в скобках:

«В тех широтах, где лежит мой остров (т. е., по моим вычислениям, на 9° 22' севернее экватора)...»

Эта досадная краткость приводила меня в отчаяние, когда я запасался сведениями, необходимыми для моей воображаемой будущности. Я готов был уже отказаться от завидной карьеры единственного обитателя пустынного острова, когда секрет раскрылся передо мною в «Таинственном острове» Жюля Верна.

Я не готовлю моих читателей поголовно в Робинзоны, но все же считаю нелишним остановиться здесь на простейших способах определения географической широты. Умение это может иметь практическое значение не для одних только обитателей неведомых островов. У нас еще столько населенных мест, не обозначенных на картах (да и всегда ли под руками подробная карта?), что задача определения географической широты может встать перед многими из моих читателей. Правда, мы не можем утверждать, как некогда

Лермонтов, что даже губернский «Тамбов на карте генеральной кружком означен не всегда»; но множество местечек, сел и колхозов, в которых живет добрая половина обитателей Союза, не обозначены на общих картах еще и в наши дни. Не надо пускаться в морские приключения, чтобы оказаться в роли Робинзона, впервые определяющего географическое положение места своего обитания.

Дело это в основе сравнительно несложное. Наблюдая в ясную звездную ночь за небом, вы заметите, что звезды медленно описывают на небесном своде наклонные круги, словно весь купол неба плавно вращается на косо утвержденной невидимой оси. В действительности же, конечно, вы сами, вращаясь вместе с Землею, описываете круги около ее оси в обратную сторону. Единственная точка звездного купола в нашем северном полушарии, которая сохраняет неподвижность, — та, куда упирается мысленное продолжение земной оси. Этот северный «полюс мира» находится невдалеке от яркой звезды на конце хвоста Малой Медведицы — Полярной звезды. Найдя ее на нашем северном небе, мы тем самым найдем и положение северного полюса мира. Отыскать же ее нетрудно, если найти сначала положение всем известного созвездия Большой Медведицы: проведите прямую линию через ее крайние звезды, как показано на рис. 111, и, продолжив ее на расстояние, примерно равное длине всего созвездия, вы наткнетесь на Полярную.

Это одна из тех точек на небесной сфере, которые понадобятся нам для определения географической широты. Вторая — так называемый «зенит» — есть точка, приходящаяся на небе отвесно над вашей головой. Другими словами: зенит есть точка на небе, куда упирается мысленное продолжение того радиуса Земли, который проведен к занимаемому вами месту. Градусное расстояние по небесной дуге между вашим зенитом и Полярной звездой есть в то же время градусное расстояние вашего места от земного полюса. Если ваш зенит отстоит от Полярной на 30°, то вы отдалены от земного полюса на 30°, а значит, от экватора на 60°; иначе говоря, вы находитесь на 60-й параллели.

Следовательно, чтобы найти широту какого-либо места, надо лишь измерить в градусах (и его долях) «зенитное расстояние» Полярной звезды: после этого останется только вычесть эту величину из 90° — и широта определена. Практически обычно поступают иначе. Так как дуга между зенитом и горизонтом содержит 90°, то, вычитая зенитное расстояние Полярной звезды из 90°, мы получаем в остатке не что иное, как длину небесной дуги от Полярной до горизонта; иначе говоря, мы получаем «высоту» Полярной звезды над горизонтом. Поэтому географическая широта какого-либо места равна высоте Полярной звезды над горизонтом этого места.

*Рис. 111. Как найти Полярную звезду*

Теперь вам понятно, что нужно сделать для определения широты. Дождавшись ясной ночи, вы отыскиваете на небе Полярную звезду и измеряете ее угловую высоту над горизонтом; результат сразу даст вам искомую широту вашего места. Если хотите быть точным, вы должны принять в расчет, что Полярная звезда не строго совпадает с полюсом мира, а отстоит от него на 1¼°. Поэтому Полярная звезда не остается совершенно неподвижной: она описывает около неподвижного небесного полюса маленький кружок, располагаясь то выше его, то ниже, то справа, то слева — на 1¼°. Определив высоту Полярной звезды в самом высоком и в самом низком ее положении (астроном сказал бы: в моменты ее верхней и нижней «кульминаций»), вы берете среднее из обоих измерений. Это и есть истинная высота полюса, а следовательно, и искомая широта места.

Но если так, то незачем избирать непременно Полярную звезду: можно остановиться на любой незаходящей звезде и, измерив ее высоту в обоих крайних положениях над горизонтом, взять среднюю из этих измерений. В результате получится высота полюса над горизонтом, т. е. широта места. На практике так и делают. Но при этом необходимо уметь улавливать моменты наивысшего и наинизшего положения избранной звезды, что усложняет дело. Вот почему для первых приближенных измерений лучше работать с Полярной звездой, пренебрегая небольшим удалением ее от полюса.

До сих пор мы воображали себя находящимися в северном полушарии. Как поступили бы вы, очутившись в южном полушарии? Точно так же, с той лишь разницей, что здесь надо определять высоту не северного, а южного полюса мира. Близ этого полюса, к сожалению, нет яркой звезды вроде Полярной в нашем полушарии. Знаменитый Южный Крест сияет довольно далеко от южного полюса; и если желаем воспользоваться звездами этого созвездия для определения широты места, то придется брать среднее из двух измерений — при наивысшем и наинизшем положении звезды.

Герои романа Жюля Верна при определении широты своего «таинственного острова» пользовались именно этим красивым созвездием южного неба. Поучительно перечесть то место романа, где описывается вся процедура. Заодно мы познакомимся и с тем, как эти новые Робинзоны справились со своей задачей, не имея угломерного инструмента.

## ШИРОТА «ТАИНСТВЕННОГО ОСТРОВА»

«Было 8 часов вечера. Луна еще не взошла, но горизонт серебрился уже нежными бледными оттенками, которые можно было назвать лунной зарей. В зените блистали созвездия южного полюса и между ними созвездие Южного Креста. Инженер Смит некоторое время наблюдал это созвездие.

— Герберт, — сказал он после некоторого раздумья, — у нас сегодня 15 апреля?

— Да, — ответил юноша.

— Если не ошибаюсь, завтра один из тех четырех дней в году, когда истинное время равно среднему времени: завтра солнце вступит на меридиан ровно в полдень по нашим часам[1]. Если погода будет ясная, мне удастся приблизительно определить долготу острова.

— Без инструментов?

— Да. Вечер ясный, и потому я сегодня же попытаюсь определить широту нашего острова, измерив высоту звезд Южного Креста, т. е. высоту южного полюса над горизонтом. А завтра в полдень определю и долготу острова.

Если бы у инженера был секстант — прибор, позволяющий точно измерять угловые расстояния предметов с помощью отражения световых лучей, — задача не представляла бы никаких затруднений. Определив в этот вечер высоту полюса, а завтра днем — момент прохождения солнца через меридиан, он получил бы географические координаты острова: широту и долготу. Но секстанта не имелось, и надо было его заменить.

Инженер вошел в пещеру. При свете костра он вырезал две прямоугольные планки, которые соединил в одном конце в форме циркуля так, что ножки его можно было сдвигать и раздвигать. Для шарнира он воспользовался крепкой колючкой акации, найденной среди валежника у костра.

Когда инструмент был готов, инженер возвратился на берег. Ему необходимо было измерить высоту полюса над горизонтом, ясно очерченным, т. е. над уровнем моря. Для своих наблюдений он отправился на площадку Далекого Вида, — причем нужно принять во внимание также высоту самой площадки над уровнем моря. Это последнее измерение можно будет выполнить на другой день приемами элементарной геометрии.

Горизонт, озаренный снизу первыми лучами луны, резко обрисовывался, представляя все удобства для наблюдения. Созвездие Южного Креста сияло на небе в опрокинутом виде: звезда *альфа*, обозначающая его основание, всего ближе лежит к южному полюсу (мира).

Это созвездие расположено не так близко к южному полюсу, как Полярная звезда — к северному. Звезда *альфа* отстоит от полюса на 27 градусов; инженер знал это и предполагал ввести это расстояние в свои вычисления. Он поджидал момента прохождения звезды через меридиан, — это облегчает выполнение операции.

Смит направил одну ножку своего деревянного циркуля вдоль горизонта, другую — к звезде *альфа* Креста, и отверстие образовавшегося угла дало угловую высоту звезды над горизонтом. Чтобы закрепить этот угол надежным образом, он прибил с помощью шипов акации к обеим планкам третью, пересекающую их поперек, так что фигура сохраняла неизменную форму.

Оставалось лишь определить величину полученного угла, относя наблюдение к уровню моря, т. е. учитывая понижение горизонта, для чего необходимо было

[1] Наши часы идут не строго согласованно с солнечными часами: между «истинным солнечным временем» и тем «средним временем», которое показывается точными часами, есть расхождение, равняющееся нулю только четыре дня в году: около 16 апреля, 14 июня, 1 сентября и 24 декабря.

измерить высоту скалы[1]. Величина угла даст высоту звезды *альфа* Креста, а следовательно, и высоту полюса над горизонтом, т. е. географическую широту острова, так как широта всякого места земного шара равна высоте полюса над горизонтом этого места. Эти вычисления предполагалось произвести завтра».

Как выполнено было измерение высоты скалы, наши читатели знают уже из отрывка, приведенного в первой главе нашей книги (с. 333). Пропустив здесь это место, проследим за дальнейшей работой инженера:

«Инженер ваял циркуль, который был устроен им накануне и с помощью которого он определил угловое расстояние между звездой *альфа* Южного Креста и горизонтом. Он тщательно измерил величину этого угла с помощью круга, разделенного на 360 частей, и нашел, что он равен 10°. Отсюда высота полюса над горизонтом — после присоединения к 10° тех 27°, которые отделяют названную звезду от полюса, и приведения к уровню моря высоты скалы, с вершины которой было выполнено измерение, — получилась равной 37°. Смит заключил, что остров Линкольн расположен на 37° южной широты, или — принимая во внимание несовершенство измерения — между 35-й и 40-й параллелями.

Оставалось еще узнать его долготу. Инженер рассчитывал определить ее в тот же день, в полдень, когда солнце будет проходить через меридиан острова».

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОГРАФИЧЕСКОЙ ДОЛГОТЫ

«Но как инженер определит момент прохождения солнца через меридиан острова, не имея для этого никакого инструмента? Вопрос этот очень занимал Герберта.

Инженер распорядился всем, что нужно было для его астрономического наблюдения. Он выбрал на песчаном берегу совершенно чистое место, выровненное морским отливом. Шестифутовый шест, воткнутый на этом месте, был перпендикулярен к этой площадке.

Герберт понял тогда, как намерен был действовать инженер для определения момента прохождения солнца через меридиан острова, или, иначе говоря, для определения местного полудня. Он хотел определить его по наблюдению тени, отбрасываемой шестом на песок. Способ этот, конечно, недостаточно точен, но за отсутствием инструментов он давал все же довольно удовлетворительный результат.

Момент, когда тень шеста сделается наиболее короткой, будет полдень. Достаточно внимательно проследить за движением конца тени, чтобы заметить момент,

[1] Так как измерение производилось инженером не на уровне моря, а с высокой скалы, то прямая линия, проведенная от глаза наблюдателя к краю горизонта, не строго совпадала с перпендикуляром к земному радиусу, а составляла с ним некоторый угол. Однако угол этот так мал, что для данного случая можно было им смело пренебречь (при высоте в 100 м он едва составляет третью долю градуса): поэтому Смиту, вернее, Жюлю Верну не было надобности усложнять расчета введением этой поправки. — *Я. П.*

когда тень, перестав сокращаться, вновь начнет удлиняться. Тень как бы играла в этом случае роль часовой стрелки на циферблате.

Когда по расчету инженера наступило время наблюдения, он стал на колени и, втыкая в песок маленькие колышки, начал отмечать постепенное укорочение тени отбрасываемой шестом.

Журналист (один из спутников инженера) держал в руке свой хронометр, готовясь заметить момент, когда тень станет наиболее короткой. Так как инженер производил наблюдение 16 апреля, т. е. в один из тех дней, когда истинный полдень совпадает со средним, то момент, замеченный журналистом по его хронометру, будет установлен по времени меридиана Вашингтона (места отправления путешественников).

Солнце медленно подвигалось. Тень постепенно укорачивалась. Заметив наконец, что она начала удлиняться, инженер спросил:

— Который час?

— Пять часов и одна минута, — ответил журналист.

Наблюдение было окончено. Оставалось только проделать несложный расчет.

Наблюдение установило, что между меридианом Вашингтона и меридианом острова Линкольна разница во времени почти ровно 5 часов. Это значит, что когда на острове полдень, в Вашингтоне уже 5 часов вечера. Солнце в своем кажущемся суточном движении вокруг земного шара пробегает один градус в 4 минуты, а в час — 15 градусов. 15 градусов, умноженные на 5 (число часов), составляют 75 градусов.

Вашингтон лежит на меридиане 77° 3' 11" от Гринвичского меридиана, принимаемого американцами, как и англичанами, за начало счета долгот. Значит, остров лежал приблизительно на 152 градусах западной долготы.

Принимая во внимание недостаточную точность наблюдений, можно было утверждать, что остров лежит между 35-й и 40-й параллелями южной широты и между 150-м и 155-м меридианами к западу от Гринвича».

Отметим в заключение, что способов определений географической долготы имеется несколько, и довольно разнообразных; способ, примененный героями Жюля Верна, лишь один из них (известный под названием «способа перевозки хронометров»). Точно так же существуют и другие приемы определения широты, нежели здесь описанный (для мореплавания, например, непригодный).

# ЧАСТЬ ВТОРАЯ

# МЕЖДУ ДЕЛОМ И ШУТКОЙ В ГЕОМЕТРИИ

Есть бесчисленное множество умных вещей, которым люди дают неразумное применение. Но немало есть и пустяков, которыми можно пользоваться разумно.

*Монтескье*

## Глава восьмая

## ГЕОМЕТРИЯ ВПОТЬМАХ

### НА ДНЕ ТРЮМА

От вольного воздуха полей и моря перенесемся в тесный и темный трюм старинного корабля, где юный герой одного из романов Майн Рида успешно разрешил геометрическую задачу при такой обстановке, при которой, наверное, ни одному из моих читателей заниматься математикой не приходилось. В романе «Мальчик-моряк» (или «На дне трюма») Майн Рид повествует о юном любителе морских приключений, который, не имея средств заплатить за проезд, пробрался в трюм незнакомого корабля — и здесь неожиданно оказался закупоренным на все время морского перехода. Роясь среди багажа, заполнявшего его темницу, он наткнулся на ящик сухарей и бочку воды. Рассудительный мальчик понимал, что с этим ограниченным запасом еды и питья надо быть возможно бережливее, и потому решил разделить его на ежедневные порции. Пересчитать сухари было нетрудным делом, но как установить порции воды, не зная ее общего запаса? Вот задача, которая стояла перед юным героем Майн Рида. Послушаем, как он справился с нею.

## ИЗМЕРЕНИЕ БОЧКИ
(Задача Майн Рида)

«Мне необходимо было установить для себя дневную порцию воды. Для этого нужно было узнать, сколько ее содержится в бочке, и затем разделить по порциям. К счастью, в деревенской школе учитель сообщил нам на уроках арифметики некоторые начальные сведения из геометрии: я имел понятие о кубе, пирамиде, цилиндре, шаре; знал я также, что бочку можно рассматривать как два усеченных конуса, сложенных своими большими основаниями.

Чтобы определить вместимость моей бочки, нужно было знать ее высоту (или, в сущности, половину этой высоты), затем окружность одного из доньев и окружность срединного сечения, т. е. самой широкой части бочки. Зная эти три величины, я мог точно определить, сколько кубических единиц содержится в бочке.

Мне оставалось только измерить эти величины, — но в этом-то и заключалась вся трудность. Как выполнить это измерение? Узнать высоту нетрудно: она была передо мною; что же касается окружностей, то я не мог к ним подступиться. Я был слишком мал ростом, чтобы достать до верху; кроме того, мешали ящики, стоявшие по сторонам.

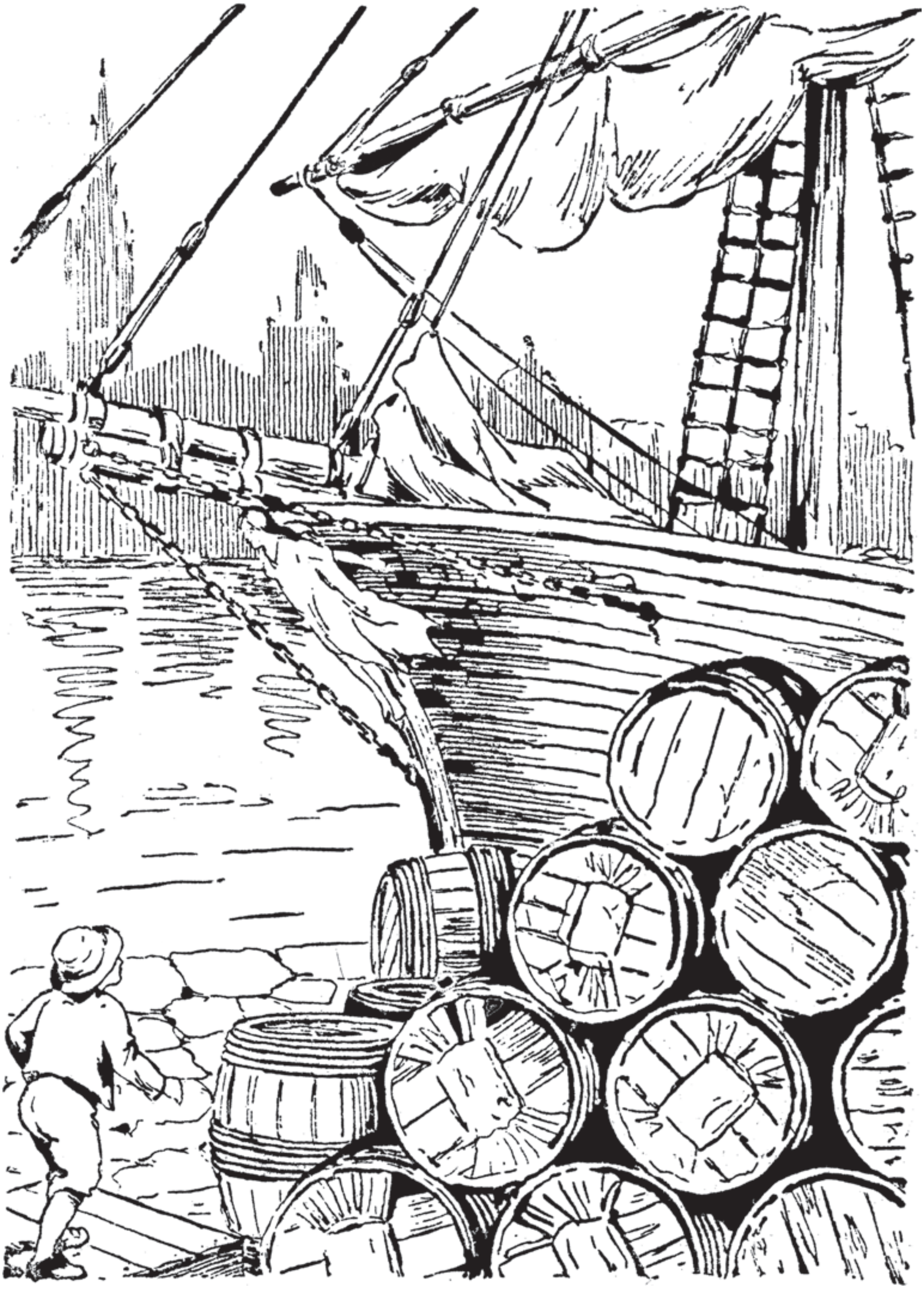
Было еще одно затруднение: у меня не было ни масштаба, ни шнурка, которыми можно было бы воспользоваться для измерения; как мог я определять величины, если у меня не было никакой меры? Однако я решил не отказываться от своего плана, пока не обдумаю его со всех сторон».

## МОЯ МЕРНАЯ ЛИНЕЙКА

«Размышляя о бочке с твердым решением ее измерить, я внезапно открыл то, чего мне не хватало. Мне поможет прут такой длины, чтобы он мог пройти насквозь через бочку в самом широком ее месте. Если я введу прут в бочку и уткнусь им в противоположную стенку, я буду знать длину диаметра. Останется лишь утроить длину прута, чтобы получить длину окружности. Это не вполне точно, но вполне достаточно для обиходных намерений. А так как отверстие, которое я раньше проделал в бочке, приходилось в самой широкой ее части, то, введя в него прут, я буду иметь тот диаметр, который мне нужен.

Но где найти прут? Это было нетрудно. Я решил воспользоваться доской от ящика с сухарями и тотчас же принялся за работу. Правда, доска была длиною всего в 60 см, бочка же — более чем вдвое шире. Но это не могло составить затруднения, нужно было лишь приготовить три палочки и связать их вместе, чтобы получить прут достаточной длины.

Разрезав доску вдоль волокон, я приготовил три хорошо округленных и обглаженных палочки. Чем связать их? Я воспользовался шнурками от моих ботинок, имевшими в длину чуть не целый метр. Связав палочки, я получил планку достаточной длины — около полутора метров.



*Юный любитель приключений из романа Майн Рида*

Я приступил было к измерению, но наткнулся на новое препятствие. Оказалось невозможным ввести мой прут в бочку: помещение было слишком тесно. Нельзя было и согнуть прута, — он наверное бы сломался.

Вскоре я придумал, как ввести в бочку мой измерительный прут: я разобрал его на части, ввел первую часть и лишь тогда привязал к ее выступающему концу вторую часть; затем, протолкнув вторую часть, привязал третью.

Я направил прут так, чтобы он уперся в противоположную стенку как раз против отверстия, и сделал на нем знак вровень с поверхностью бочки. Отняв толщину стенок, я получил величину, которая необходима была мне для измерений.

Я вытащил прут тем же порядком, как и ввел его, стараясь тщательно замечать те места, где отдельные части были связаны, чтобы потом придать пруту ту же длину, какую он имел в бочке. Небольшая ошибка могла бы в конечном результате дать значительную погрешность,

Итак, у меня был диаметр нижнего основания усеченного конуса. Теперь нужно найти диаметр дна бочки, которое служило верхним основанием конуса. Я положил прут на бочку, уперся им в противоположную точку края и отметил на ней величину диаметра. На это потребовалось не больше минуты.

Оставалось только измерить высоту бочки. Надо было, скажете вы, поместить палку отвесно возле бочки и сделать на ней отметку высоты. Но мое помещение ведь было совершенно темным, и, поместив палку отвесно, я не мог видеть, до какого места доходит верхнее дно бочки. Я мог действовать только ощупью: пришлось бы нащупать руками дно бочки и соответствующее место на палке. Кроме того, палка, вращаясь возле бочки, могла наклониться, и я получил бы неверную величину для высоты.

Подумав хорошенько, я нашел, как преодолеть это затруднение. Я связал только две планки, а третью положил на верхнее дно бочки так, чтобы она выдавалась за край его на 30–40 см; затем я приставил к ней длинный прут так, чтобы он образовал с нею прямой угол и, следовательно, был параллелен высоте бочки. Сделав отметку в том месте бочки, которое больше всего выступало, т. е. посредине, и откинув толщину дна, я получил таким образом половину высоты бочки, или — что то же самое — высоту одного усеченного конуса.

Теперь у меня были все необходимые данные для решения задачи».

## ЧТО И ТРЕБОВАЛОСЬ ВЫПОЛНИТЬ

«Выразить содержимое бочки в кубических единицах и затем перечислить в галлоны[1] представляло простое арифметическое вычисление, с которым нетрудно было справиться. Правда, для вычислений у меня не было письменных принадлежностей, но они были бы и бесполезны, так как я находился в полной темноте. Мне часто

[1] *Галлон* — мера емкости. Английский галлон заключает 277 кубических дюймов (около 4½ л). В галлоне 4 кварты; в кварте — 2 пинты.

приходилось выполнять в уме все четыре арифметических действия без пера и бумаги. Теперь предстояло оперировать с не слишком большими числами, и задача меня нисколько не смущала.

Но я столкнулся с новым затруднением. У меня были три данных: высота и оба основания усеченного конуса; но какова численная величина этих данных? Необходимо, прежде чем вычислить, выразить эти величины числами.

Сначала это препятствие казалось мне непреодолимым. Раз у меня нет ни фута, ни метра, никакой измерительной линейки, приходится отказаться от решения задачи.

Однако я вспомнил, что в порту я измерил свой рост, который оказался равным четырем футам. Как же могло пригодиться мне теперь это сведение? Очень просто: я мог отложить четыре фута на моем пруте и взять это за основание при вычислениях.

Чтобы отметить свой рост, я вытянулся на полу, затем положил на себя прут так, чтобы один его конец касался моих ног, а другой лежал на лбу. Я придерживал прут одной рукой, а свободной отметил на нем место, против которого приходилось темя.

Дальше — новые затруднения. Прут, равный 4 футам, бесполезен для измерений, если на нем не отмечены мелкие деления — дюймы. Нетрудно как будто разделить 4 фута на 48 частей (дюймов) и нанести эти деления на линейки. В теории это действительно весьма просто; но на практике, да еще в той темноте, в какой я находился, это было далеко не так легко и просто.

Каким образом найти на пруте середину этих 4 футов? Как разделить каждую половину прута снова пополам, а затем каждый из футов на 12 дюймов, в точности равных друг другу?

Я начал с того, что приготовил палочку немного длиннее 2 футов. Сравнив ее с прутом, где отмечены были 4 фута, я убедился, что двойная длина палочки немного больше 4 футов. Укоротив палочку и повторив операцию несколько раз, я на пятый раз достиг того, что двойная длина палочки равнялась ровно 4 футам.

Это отняло много времени. Но времени у меня было достаточно: я даже был доволен, что имел чем заполнить его.

Впрочем, я догадался сократить дальнейшую работу, заменив палочку шнуром, который удобно было складывать пополам. Для этого хорошо пригодились шнурки от моих ботинок. Связав их прочным узлом, я принялся за работу — и вскоре мог уже отрезать кусок длиною ровно в 1 фут. До сих пор приходилось складывать вдвое, — это было легко. Дальше пришлось сложить втрое, что было труднее. Но я с этим справился, и вскоре у меня в руках было три куска по 4 дюйма каждый. Оставалось сложить их вдвое и еще раз вдвое, чтобы получить кусочек длиною в 1 дюйм.

У меня было теперь то, чего мне не хватало, чтобы нанести на пруте дюймовые деления; аккуратно прикладывая к нему куски моей мерки, я сделал 48 зарубок, означавших дюймы. Тогда в моих руках оказалась разделенная на дюймы линейка, с помощью которой можно было измерить полученные мною длины. Только теперь мог я довести до конца задачу, которая имела для меня столь важное значение.

Я немедленно занялся этим вычислением. Измерив оба диаметра, я взял среднее из их длин, затем нашел площадь, соответствующую этому среднему диаметру.

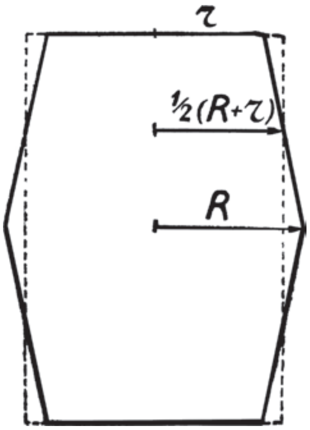



*Рис. 112*

Так я получил величину основания цилиндра, равновеликого двойному конусу равной высоты. Умножив результаты на высоту, я определил кубическое содержание искомого объема.

Разделив число полученных кубических дюймов на 69 (число кубических дюймов в одной кварте), я узнал, сколько кварт в моей бочке.

В ней вмещалось свыше ста галлонов, — точнее, 108».

## ПОВЕРКА РАСЧЕТА

Читатель, сведущий в геометрии, заметит, без сомнения, что способ вычисления объема двух усеченных конусов, примененный юным героем Майн Рида, не вполне точен. Если обозначим радиус меньших оснований через $r$, радиус большего — через $R$, а высоту бочки, т. е. двойную высоту каждого усеченного конуса, через $h$, то объем, полученный мальчиком, выразится формулой:

$$\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h}{4}\,(R^3 + r^3 + 2Rr).$$

Между тем, поступая по правилам геометрии, т. е. применяя формулу объема усеченного конуса, мы получили бы для искомого объема выражение:

$$\frac{\pi h}{3}\,(R^2 + r^2 + Rr).$$

Оба выражения не тождественны, и легко убедиться, что второе больше первого на

$$\frac{\pi h}{3}\,(R^2 + r^2 + Rr) - \frac{\pi h}{4}\,(R^3 + r^3 + 2Rr) = \frac{\pi h}{12}\,(R - r)^2.$$

Знакомые с алгеброй сообразят, что разность $\frac{\pi h}{12}(R - r)^2$. есть величина положительная, т. е. способ майн-ридовского мальчика дал ему результат преуменьшенный.

Интересно определить, как примерно велико это преуменьшение. Бочки обычно устраиваются так, что наибольшая ширина их превышает поперечник дна на ⅕ долю, т. е. $R - r = \frac{R}{5}$. Принимая, что бочка в романе Майн Рида была именно такой формы, можем найти разность между полученной и истинной величиной объема усеченных конусов:

$$\frac{\pi h}{12}(R-r)^2 = \frac{\pi h}{12}\left(\frac{R}{5}\right)^2 = \frac{\pi h R^2}{300},$$

т. е. около $\frac{hR^2}{100}$ (если считать $\pi = 3$). Ошибка равна, мы видим, объему цилиндра, радиус основания которого есть радиус наибольшего сечения бочки, а высота — трехсотая доля ее высоты.

Однако небольшое преувеличение результата в данном случае даже желательно, так как объем бочки заведомо больше объема двух вписанных в нее усеченных конусов. Это ясно из рис. 113, где видно, что при указанном способе обмера бочки отбрасывается часть ее объема, обозначенная буквами *a*, *a*, *a*, *a*.

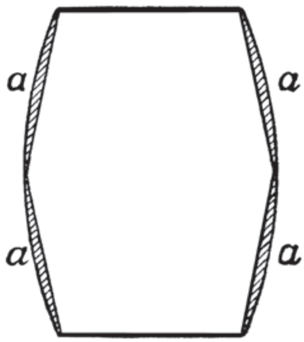


*Рис. 113*

Юный математик Майн Рида не сам придумал эту формулу для вычисления объема бочки; она приводится в некоторых начальных руководствах по геометрии как удобный прием для приближенного определения содержания бочек. Надо заметить, что измерить объем бочки совершенно точно — задача весьма нелегкая. Над нею размышлял еще гениальный Кеплер, оставивший в числе своих математических сочинений специальную работу: «Об искусстве измерять бочки». Простое и точное геометрическое решение этой задачи не найдено и по настоящее время: существуют лишь выработанные практикой приемы, дающие результат с бóльшим или меньшим приближением. Но рассмотрение их едва ли было бы здесь уместно и занимательно.

Интереснее рассмотреть другой вопрос: почему, собственно, бочкам придается такая неудобная для обмера форма — цилиндра с выпуклыми боками? Не проще ли было бы изготовлять бочки строго цилиндрические? Такие цилиндрические бочки, правда, делаются, но не деревянные, а металлические (для керосина и т. п.). Итак, перед нами

### Задача № 46

Почему деревянные бочки изготовляются с выпуклыми боками? Каково преимущество такой формы?

### Решение

Выгода та, что, набивая на бочки обручи, можно надеть их плотно и туго весьма простым приемом: надвиганием их поближе к широкой части. Тогда обруч достаточно сильно стягивает клепки, обеспечивая бочке необходимую прочность.

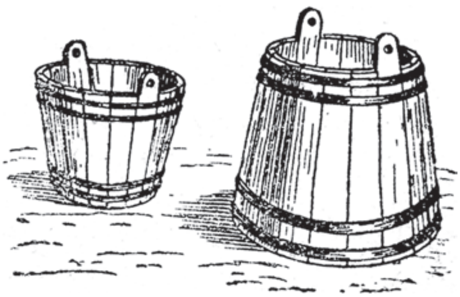


*Рис. 114*

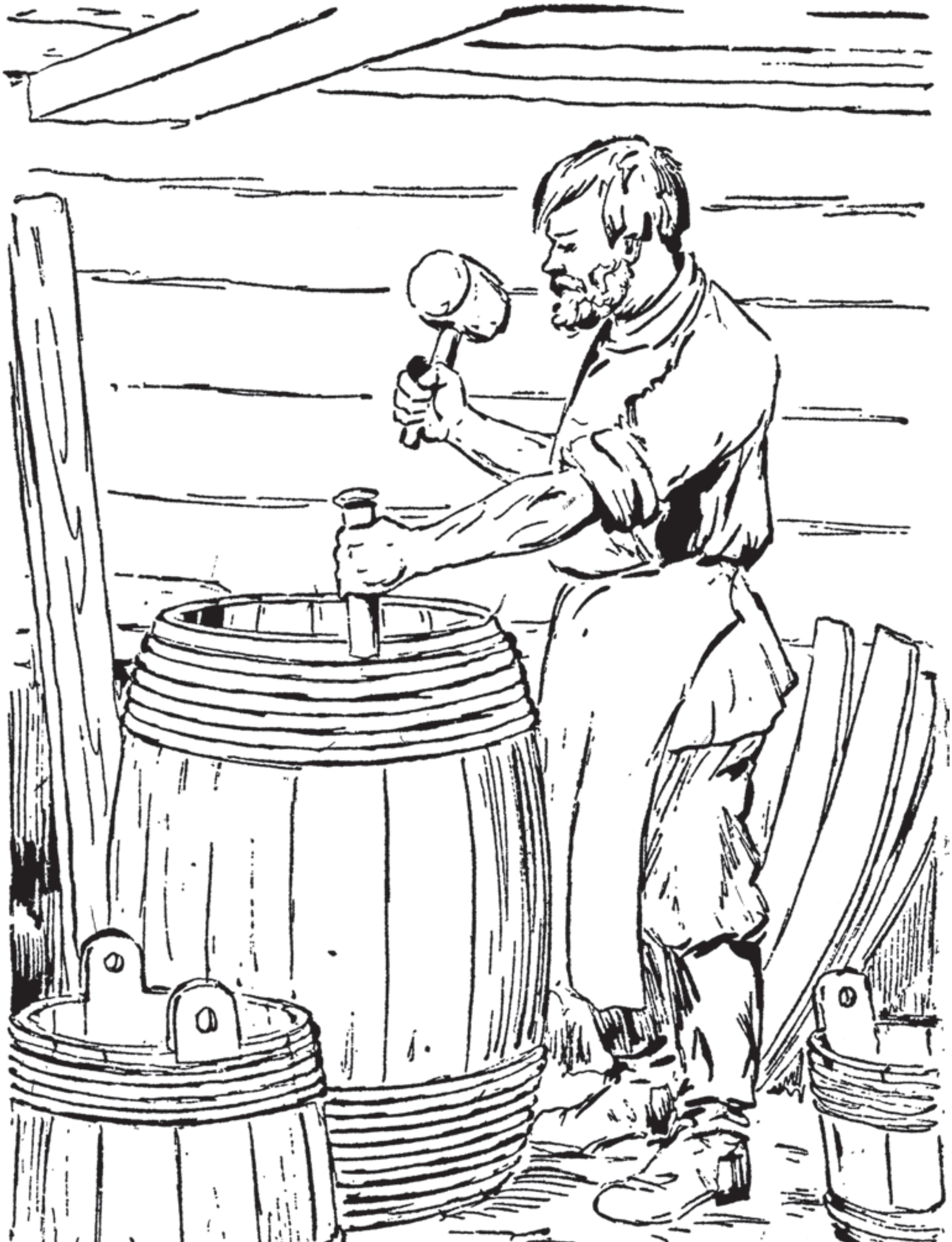
По той же причине деревянным ведрам, ушатам, чанам и т. д. придается обычно форма не цилиндра, а усеченного конуса: здесь также тугое обхватывание изделия обручами достигается простым надвиганием их на широкую часть (рис. 114).

Здесь уместно будет познакомить читателя с теми суждениями об этом предмете, которые высказал бессмертный законодатель планетной системы Иоганн Кеплер. В период времени между открытием 2-го и 3-го законов движений планет великий математик уделил внимание вопросу о форме бочек и даже составил на эту тему целое математическое сочинение. Вот как начинается его «Стереометрия бочек»:

«Винным бочкам по требованиям материала, постройки и употребления в удел досталась круглая фигура, родственная конической и цилиндрической. Жидкость, долго содержимая в металлических сосудах, портится от ржавчины; стеклянные и глиняные недостаточны по размерам и ненадежны; каменные не подходят для употребления из-за веса, — значит, остается наливать и хранить вина в деревянных. Из одного целого ствола опять-таки нельзя легко приготовить сосуды достаточно вместительные и в нужном количестве, да если и можно, то они трескаются. Поэтому бочки следует строить из многих соединенных друг с другом кусков дерева. Избегнуть же вытекания жидкости через щели между отдельными кусками нельзя ни при помощи какого-нибудь материала, ни каким-нибудь другим способом, кроме сжимания их связками...

Если бы из деревянных дощечек можно было сколотить шар, то шарообразные сосуды были бы самыми желательными. Но так как связками доски в шар сжать нельзя, то его место и заступает цилиндр. Но этот цилиндр не может быть вполне правильным, потому что ослабевшие связки тотчас же сделались бы бесполезными и не могли бы быть натянуты сильнее, если бы бочка не имела конической фигуры, несколько суживающейся в обе стороны от пуза ее. Эта фигура удобна и для качения и для перевозки в телегах и, состоя из двух подобных друг другу половинок на общем основании, является самой выгодной при покачивании и красивой на взгляд»[1].

[1] Не следует думать, что сочинение Кеплера об измерении бочек является математической безделкой, развлечением гения в часы отдыха. Нет, это серьезный труд, в котором впервые вводятся в геометрию бесконечно малые величины и начала интегрального исчисления. Винная бочка и хозяйственная задача измерения ее вместимости послужили для него поводом к глубоким и плодотворным математическим размышлениям. (Русский перевод «Стереометрии винных бочек» издан в 1935 г.)



*Задача о бочке*

## НОЧНОЕ СТРАНСТВОВАНИЕ МАРКА ТВЕНА

Находчивость, проявленная майн-ридовским мальчиком в его печальном положении, заслуживает удивления. В полной темноте, в какой он находился, большинство людей не сумели бы даже сколько-нибудь правильно ориентироваться, не говоря уже о том, чтобы выполнять при этом какие-либо измерения и вычисления. С рассказом Майн Рида поучительно сопоставить комическую историю о бестолковом странствовании в темной комнате гостиницы — приключении, будто бы случившемся со знаменитым соотечественником Майн Рида, юмористом Марком Твеном. В этом рассказе удачно подмечено, как трудно составить себе в темноте верное представление о расположении предметов даже в обыкновенной комнате, если обстановка мало знакома. Мы приводим далее, в сокращенной передаче, этот забавный эпизод из «Странствований за границей» Марка Твена.

«Я проснулся и почувствовал жажду. Мне пришла в голову прекрасная мысль — одеться, выйти в сад и освежиться, вымывшись у фонтана.

Я встал потихоньку и стал разыскивать свои вещи. Нашел один носок. Где второй, я не мог себе представить. Осторожно спустившись на пол, я стал обшаривать кругом, но безуспешно. Стал искать дальше, шаря и загребая. Подвигался все дальше и дальше, но носка не находил и только натыкался на мебель. Когда я ложился спать, кругом было гораздо меньше мебели; теперь же комната была полна ею, особенно стульями, которые оказались повсюду. Не вселились ли сюда еще два семейства за это время? Ни одного из этих стульев я в темноте не видел, зато беспрестанно стукался о них головой.

Наконец я решил, что могу прожить и без одного носка. Встав, я направился к двери, как я полагал, — но неожиданно увидел свое тусклое изображение в зеркале. Ясно, что я заблудился и не имею ни малейшего представления о том, где нахожусь. Если бы в комнате было одно зеркало, оно помогло бы мне ориентироваться, но их было два, а это так же скверно, как тысяча.

Я хотел пробраться к двери по стене. Я снова начал свои попытки — и уронил картину. Она была невелика, но натворила шуму как целая панорама. Гаррис (сосед по комнате, спавший на другой кровати) не шевелился, но я чувствовал, что если буду действовать дальше в том же духе, то непременно разбужу его. Попробую другой путь. Найду снова круглый стол — я был около него уже несколько раз — и от него постараюсь пробраться к моей кровати; если найду кровать, то найду и графин с водой, и тогда, по крайней мере, утолю свою нестерпимую жажду. Лучше всего — ползти на руках и на коленях; этот способ я уже испытал и потому больше доверял ему.

Наконец мне удалось набрести на стол — ощутить его головой — с небольшим сравнительно шумом. Тогда я снова встал и побрел, балансируя с протянутыми вперед руками и растопыренными пальцами. Нашел стул. Затем стенку. Другой стул. Затем диван. Свою палку. Еще один диван. Это меня удивило; я прекрасно знал, что в комнате был только один диван. Опять набрел на стол и получил новый удар. Затем наткнулся на новый ряд стульев.

Только тогда пришло мне в голову то, что давно должно было прийти: стол был круглый, а следовательно, не мог служить точкой отправления при моих странствованиях. Наудачу пошел я в пространство между стульями и диваном, — но очутился в области совсем неизвестной, уронив по пути подсвечник с камина. После подсвечника я уронил лампу, а после лампы со звоном полетел на пол графин.

„Ага, — подумал я, — наконец-то я нашел тебя, голубчика!“

— Воры! Грабят! — закричал Гаррис.

Шум и крики подняли весь дом. Явились со свечами и фонарями хозяин, гости, прислуга.

Я оглянулся вокруг. Оказалось, что я стою возле кровати Гарриса. Только один диван стоял у стены; только один стул стоял так, что на него можно было наткнуться, — я кружил вокруг него подобно планете и сталкивался с ним подобно комете в течение целой половины ночи.

Справившись со своим шагомером, я убедился, что сделал за ночь 47 миль».

Последнее утверждение преувеличено свыше всякой меры: нельзя в течение нескольких часов пройти пешком 47 миль, — но остальные подробности истории довольно правдоподобны и метко характеризуют те комические затруднения, с которыми обычно встречаешься, когда бессистемно, наудачу, странствуешь в темноте по незнакомой комнате. Тем более должны мы оценить удивительную методичность и присутствие духа юного героя Майн Рида, который не только сумел ориентироваться в полной темноте, но и разрешил при этих условиях нелегкую математическую задачу.

## С ЗАКРЫТЫМИ ГЛАЗАМИ

По поводу кружения Твена в темной комнате интересно отметить одно загадочное явление, которое наблюдается у людей, бродящих с закрытыми глазами: они не могут идти по прямому направлению, а непременно сбиваются в сторону, описывая дугу, воображая, однако, что движутся прямо вперед (рис. 115). Вот поучительный опыт, произведенный в Венеции на площади Марка. Людям завязывали глаза, ставили их на одном конце площади, как раз против собора, и предлагали до него дойти. Хотя пройти надо было всего только 175 м, все же ни один из испытуемых не дошел до фасада здания (82 м ширины), а все уклонялись в сторону, описывали дугу и упирались в одну из боковых колоннад (рис. 116).

Давно известно также, что люди, бродящие без компаса по степи в метель или в туманную погоду, — вообще во всех случаях, когда нет возможности ориентироваться, — обычно описывают круги, хотя воображают, что идут все время вперед. Рассказы о таких безнадежных кружениях по пустынной

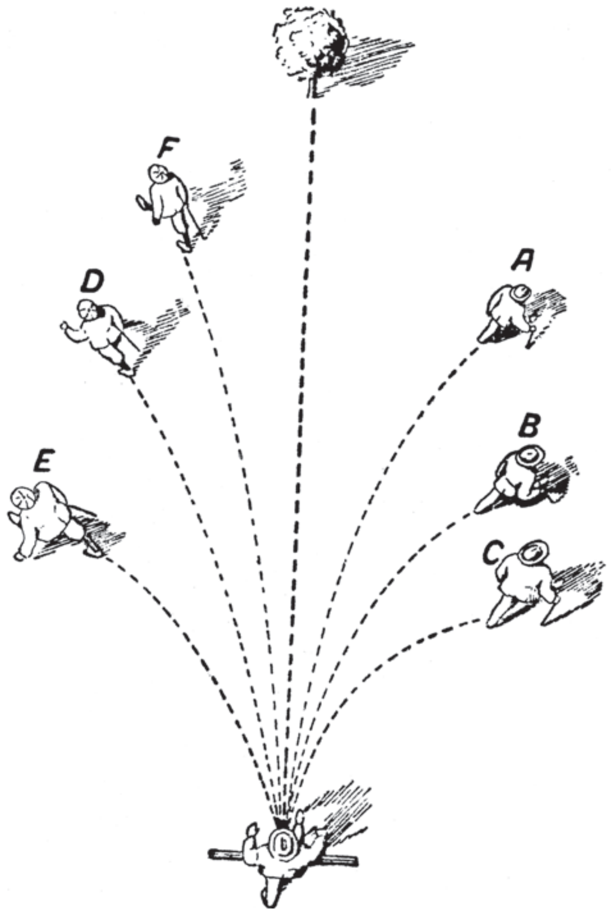



*Рис. 115 Рис. 115. Человек с закрытыми глазами не может идти по прямолинейному пути, но описывает дуги — к точкам A, B, C или D. E, F*

местности можно встретить в описании многих путешествий. Приведем в виде примера вполне достоверный рассказ. Трое путников намеревались в снежную ночь покинуть хижину и выбраться из долины шириною в 4 км, чтобы достичь своего дома, расположенного в направлении, которое на прилагаемом плане отмечено пунктиром (рис. 117). В пути они бессознательно уклонились вправо, по кривой, отмеченной стрелкой. Пройдя некоторое расстояние, они по расчету времени полагали, что достигли цели, — на самом же деле очутились у той же хижины, которую покинули. Отправившись в путь вторично, они уклонились еще сильнее и снова дошли до исходного пункта. То же повторилось в третий и в четвертый раз. В отчаянии предприняли они пятую попытку, — но с тем же результатом. После пятого круга они отказались от дальнейших попыток выбраться из долины и дождались утра в хижине.

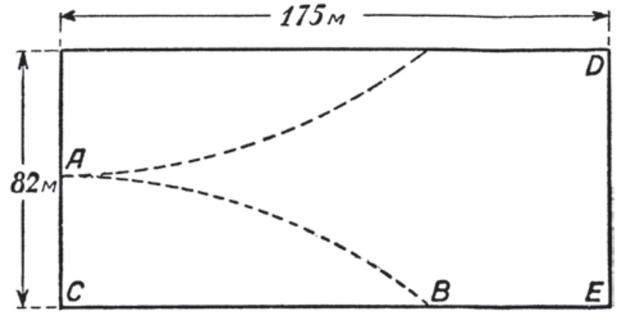



*Рис. 116. Люди с завязанными глазами на площади Марка, выйдя из А, не могли дойти до фасада DE собора*

Еще труднее грести на море по прямой линии в темную беззвездную ночь или в густой туман. Отмечен случай, — один из многих подобных, — когда гребцы, решив переплыть в туманную погоду пролив шириною в 4 км, дважды побывали у противоположного берега, но не достигли его, а бессознательно описали два круга и высадились наконец... в месте своего отправления (рис. 118).

То же случается и с животными. Полярные путешественники рассказывают о кругах, которые описывают в снежных пустынях животные, запряженные в сани. Собаки, которых пускают плавать с завязанными глазами, также описывают в воде круги. По кругу же летят и ослепленные птицы. Затравленный зверь, лишившийся от страха способности ориентироваться, спасается не по прямой линии, а по спирали.

Чем же объясняется эта загадочная приверженность человека и животных к кругу, невозможность держаться в темноте прямого направления? Здесь нет ничего таинственного: она находит себе естественное объяснение в неполной симметрии тела человека и животных.

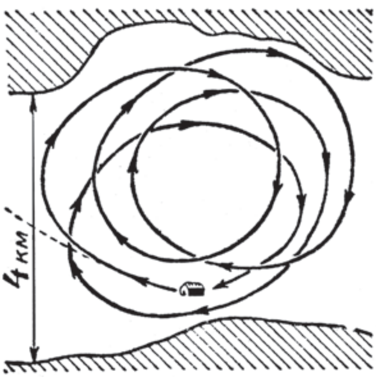



*Рис. 117*

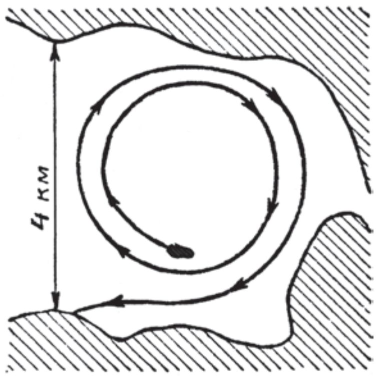



*Рис. 118*

Обе половины тела развиты неодинаково: правая нога не равна левой по силе мускулов. Поэтому человек, например, делает одной ногой (чаще всего левой) более длинные шаги, нежели правой. Легко понять, что, двигаясь таким образом, человек неизбежно должен описывать дугу: вспомните, как катится игрушечная заводная тележка, колеса которой на одной стороне больше, чем на другой. Это геометрическая необходимость. Представьте себе, например, что, занося левую ногу, человек делает шаг на миллиметр длиннее, чем правой ногой. Тогда, сделав попеременно каждой ногой тысячу шагов, человек опишет левой ногой путь на 1000 мм, т. е. на целый метр, длиннее, чем правой. На прямых параллельных путях это невозможно, зато вполне осуществимо на концентрических окружностях.

Мы можем даже, пользуясь планом описанного выше кружения в снежной долине, вычислить, насколько у тех путников левая нога делала более длинный шаг, чем правая (так как путь загибался вправо, то ясно, что более длинные шаги делала именно левая нога).

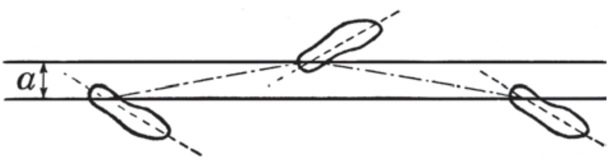



*Рис. 119*

Расстояние между линиями отпечатков правой и левой ног при ходьбе (*a* на рис. 119) равно примерно 10 см, т. е. 0,1 м. Когда человек описывает один полный круг, его правая нога проходит путь $2\pi R$, а левая — $2\pi(R + 0{,}1)$, где $R$ — радиус этого круга в метрах. Разность $2\pi(R + 0{,}1) - 2\pi R = 2\pi \times 0{,}1$, т. е. 0,62 м, или 620 мм, составилась из разницы между длиною левого и правого шага, повторенной столько раз, сколько сделано было шагов. Из плана (рис. 117) видно, что путники наши описывали круги диаметром примерно 3,5 км, т. е. длиною около 10 000 м. При средней длине шага 0,7, м на протяжении этого пути было сделано $\frac{10\,000}{0{,}7} = 14000$ шагов; из них 7 000 правой ногой и столько же — левой. Итак, мы узнали, что 7000 «левых» шагов больше 7000 «правых» шагов на 620 мм. Отсюда один «левый» шаг длиннее одного «правого» на $\frac{620}{7000}$ мм, или менее чем на 0,1 мм. Вот какая ничтожная разница достаточна, чтобы вызвать столь поражающий результат!

Радиус того круга, который блуждающий описывает, зависит от разности длины «правого» и «левого» шага. Эту зависимость нетрудно установить. Число шагов, сделанных на протяжении одного круга, при длине шага 0,7 м, равно $\frac{2\pi R}{0{,}7}$, где R — радиус круга; из них «левых» шагов $\frac{2\pi R}{2 \times 0{,}7}$ и столько же

*В снежную метель*

«правых». Умножив это число на величину $x$ разности длины шагов, получим разность длины тех концентрических кругов, которые описаны левой и правой ногами, т. е.

$$\frac{2\pi Rx}{2 \times 0{,}7} = 2\pi \times 0{,}1 \text{ или } Rx = 0{,}14 \text{ м.}$$

По этой простой формуле легко вычислить радиус круга, когда известна разность шагов, и обратно. Например, для участников опыта на площади Марка в Венеции мы можем установить наибольшую величину радиуса кругов, описанных ими при ходьбе. Действительно, так как ни один не дошел до фасада $DE$ здания (рис. 116), то по «стрелке» $AC$ = 41 м и хорде $BC$, не превышающей 175 м, можно вычислить максимальный радиус дуги $AB$. Он определяется из равенства

$$2R = \frac{\overline{BC^2}}{AC} = \frac{175^2}{41} = \frac{30\,625}{41} = 747 \text{ м,}$$

откуда $R$, максимальный радиус, будет около 370 м.

Зная это, мы из полученной раньше формулы $Rx$ = 0,14 определяем наименьшую величину разности длины шагов:

$$370x = 0{,}14, \text{ откуда } x = 0{,}4 \text{ мм.}$$

Итак, разница в длине правых и левых шагов у участников опыта была не менее 0,4 мм.

Иногда приходится читать и слышать, что факт кружения при ходьбе вслепую зависит от различия в длине правой и левой ног: так как левая нога у большинства людей длиннее правой, то люди при ходьбе должны неизбежно уклоняться вправо от прямого направления. Такое объяснение основано на геометрической ошибке. Важна разная длина *шагов*, а не *ног*. Из рис. 120 ясно, что и при наличии заметной разницы в длине ног можно все же делать строго одинаковые шаги, если выносить при ходьбе каждую ногу на одинаковый угол (треугольники $ABC$, налево, и $CBA$, направо, равны). Наоборот, при строго одинаковой длине ног шаги могут быть разной длины, если одна нога дальше выносится при ходьбе, нежели другая.

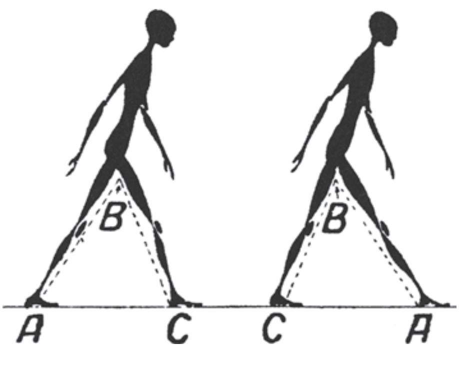


*Рис. 120*

По сходной причине лодочник, гребущий правой рукой сильнее, чем левой, должен неизбежно увлекать лодку по кругу, загибая в левую сторону. Животные, делающие неодинаковые шаги правыми или левыми ногами или неравной силы взмахи правым и левым крылом, также должны двигаться по кругам всякий раз, когда лишены возможности контролировать прямолинейное направление зрением. Здесь также достаточно весьма незначительной разницы в силе рук, ног или крыльев.

При таком взгляде на дело указанные раньше факты утрачивают свою таинственность и становятся вполне естественными. Удивительно было бы, если бы люди и животные, наоборот, могли выдерживать прямое направление, не контролируя его глазами. Ведь необходимым условием этого является безукоризненная, строго геометрическая симметрия тела, абсолютно невозможная для произведения живой природы. Малейшее же уклонение от математически совершенной симметрии должно повлечь за собою как необходимое следствие движение по дуге. Чудо не то, чему мы здесь удивляемся, а то, что мы готовы были считать естественным.

Невозможность держаться прямого пути не составляет для человека существенной помехи: компас, дороги, карты спасают его в большинстве случаев от последствий этого недостатка.

Не то у животных, особенно у обитателей пустынь, степей, безграничного морского простора: для них несимметричность тела, заставляющая их описывать круги вместо прямых линий, — важный жизненный фактор. Словно невидимой цепью приковывает он их к месту рождения, лишая возможности удалиться от него сколько-нибудь значительно. Лев, отважившийся уйти подальше в пустыню, неизбежно возвращается обратно. Чайки, покидающие родные скалы для полета в открытое море, не могут не возвращаться к гнезду (тем загадочнее, однако, далекие перелеты птиц, пересекающих по прямому направлению материки и океаны).

## ИЗМЕРЕНИЕ ГОЛЫМИ РУКАМИ

Майн-ридовский мальчик мог успешно разрешить свою геометрическую задачу только потому, что незадолго до плавания измерил свой рост и твердо помнил результаты измерения. Хорошо бы каждому из нас обзавестись таким «живым аршином», чтобы в случае нужды пользоваться им для измерения. Полезно также помнить, что у большинства людей расстояние между концами расставленных рук равно росту (рис. 121), — правило, подмеченное гениальным художником и ученым Леонардо да Винчи: оно позволяет пользоваться нашими живыми аршинами удобнее, чем делал это мальчик у Майн Рида. В среднем высота взрослого человека (славянской расы) около 1,7 метра, или 170 сантиметров; это легко запомнить. Но полагаться на среднюю величину не следует: каждый должен измерить свой рост и размах своих рук.

Для отмеривания — без масштаба — мелких расстояний следует помнить длину своей «четверти», т. е. расстояние между концами расставленных большого пальца и мизинца. У взрослого мужчины оно составляет около 18 см — примерно ¼ аршина (откуда и название: «четверть»); но у людей

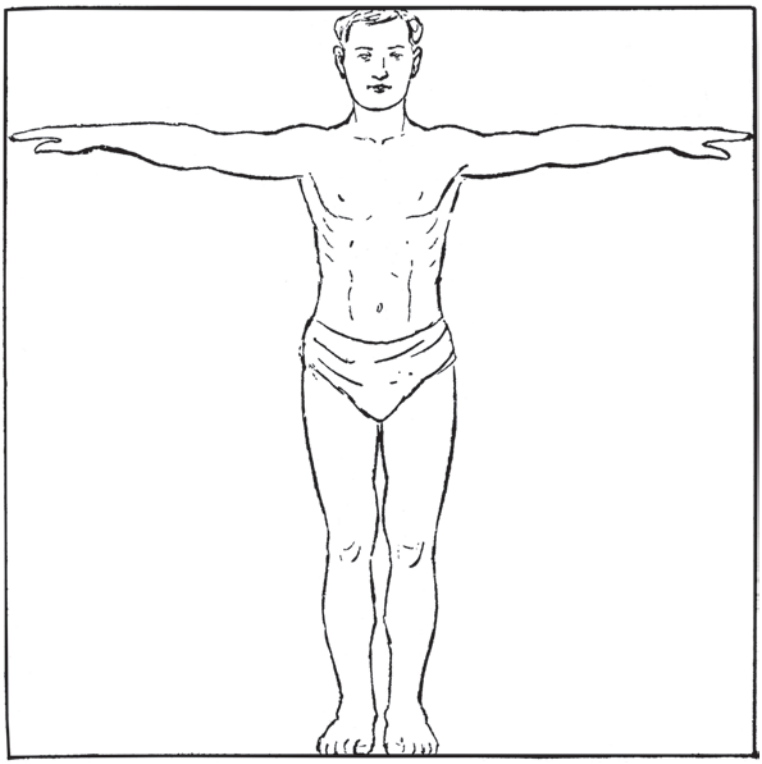


*Рис. 121. Правило Леонардо да Винчи*

молодых оно меньше и медленно увеличивается с возрастом (до 25 лет). Далее, для этой же цели полезно измерить и запомнить длину своего указательного пальца, считая ее двояко: от основания среднего пальца (рис. 123) и от основания большого. Точно так же должно быть известно вам наибольшее расстояние между концами указательного и среднего пальцев, — у взрослых около 10 см (рис. 124). Надо, наконец, знать и ширину своих пальцев.

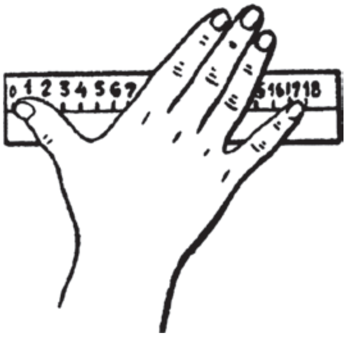


*Рис. 122. «Четверть»*

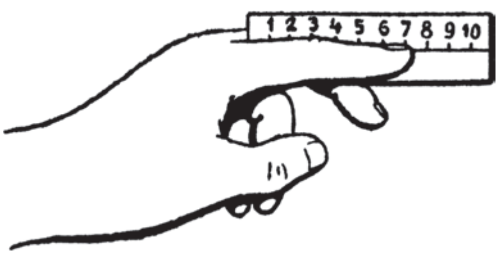



*Рис. 123*

Вооруженные всеми этими сведениями, вы сможете довольно удовлетворительно выполнять разнообразные измерения буквально голыми руками, даже и в темноте.

Пример такого измерения представлен на рис. 125: здесь измеряется пальцами окружность стакана. Исходя из средних величин, можно сказать, что окружность изображенного на рисунке стакана равна

18 + 5, т. е. 23 см.

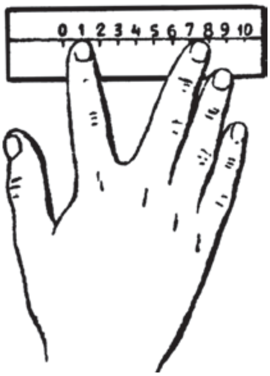



*Рис. 124*

## ПРЯМОЙ УГОЛ В ТЕМНОТЕ

**Задача № 47**

Возвращаясь еще раз к майн-ридовскому математику, поставим себе задачу: как следовало ему поступить, чтобы надежным образом получить прямой угол? «Я приставил к ней (к выступающей планке) длинный прут так, чтобы он образовал с ней прямой угол», — читаем мы в романе. Сделав это в темноте, полагаясь только на мускульные ощущения, мы можем ошибиться довольно крупно. Однако у мальчика в его положении было средство построить прямой угол гораздо более надежным приемом. Каким?

*Рис. 125*

**Решение**

Надо воспользоваться теоремой Пифагора и построить из планок треугольник, придав его сторонам такую длину, чтобы треугольник получился прямоугольный. Проще всего взять для этого планки длиною в 3, в 4 и в 5 каких-либо произвольно выбранных равных отрезков, — например, ширины ладони (рис. 126).

Это — старинный египетский способ, которым пользовались в стране пирамид несколько тысячелетий тому назад. Впрочем, еще и в наши дни при строительных работах зачастую прибегают к тому же приему.

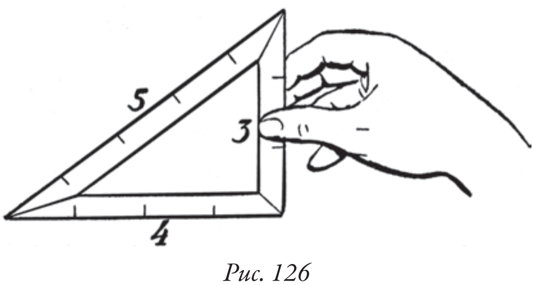



*Рис. 126*

## Глава девятая

# СТАРОЕ И НОВОЕ О КРУГЕ

## ПРАКТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ ЕГИПТЯН И РИМЛЯН

Любой школьник вычисляет теперь длину окружности по диаметру гораздо точнее, чем мудрейший жрец древней страны пирамид или самый искусный архитектор великого Рима. Древние египтяне считали, что окружность длиннее диаметра в 3,16 раза, а римляне — в 3,12, между тем правильное отношение — 3,14159... Египетские и римские математики установили отношение окружности к диаметру не строгим геометрическим расчетом, как позднейшие математики, а нашли его просто из опыта. Но почему получались у них такие ошибки? Разве не могли они обтянуть какую-нибудь круглую вещь ниткой и затем, выпрямив нитку, просто измерить ее?

Без сомнения, они так и поступали; но не следует думать, что подобный способ должен непременно дать хороший результат. Вообразите, например, вазу с круглым дном диаметром в 100 мм. Его окружность должна равняться 314 мм. Однако на практике, измеряя ниткой, вы едва ли получите эту длину: легко ошибиться на один миллиметр, и тогда $\pi$ окажется равным 3,13 или 3,15. А если примете во внимание, что и диаметр вазы нельзя измерить вполне точно, что и здесь ошибка в 1 мм весьма вероятна, то убедитесь, что для $\pi$ получаются довольно широкие пределы между

$$\frac{313}{101} \text{ и } \frac{315}{99},$$

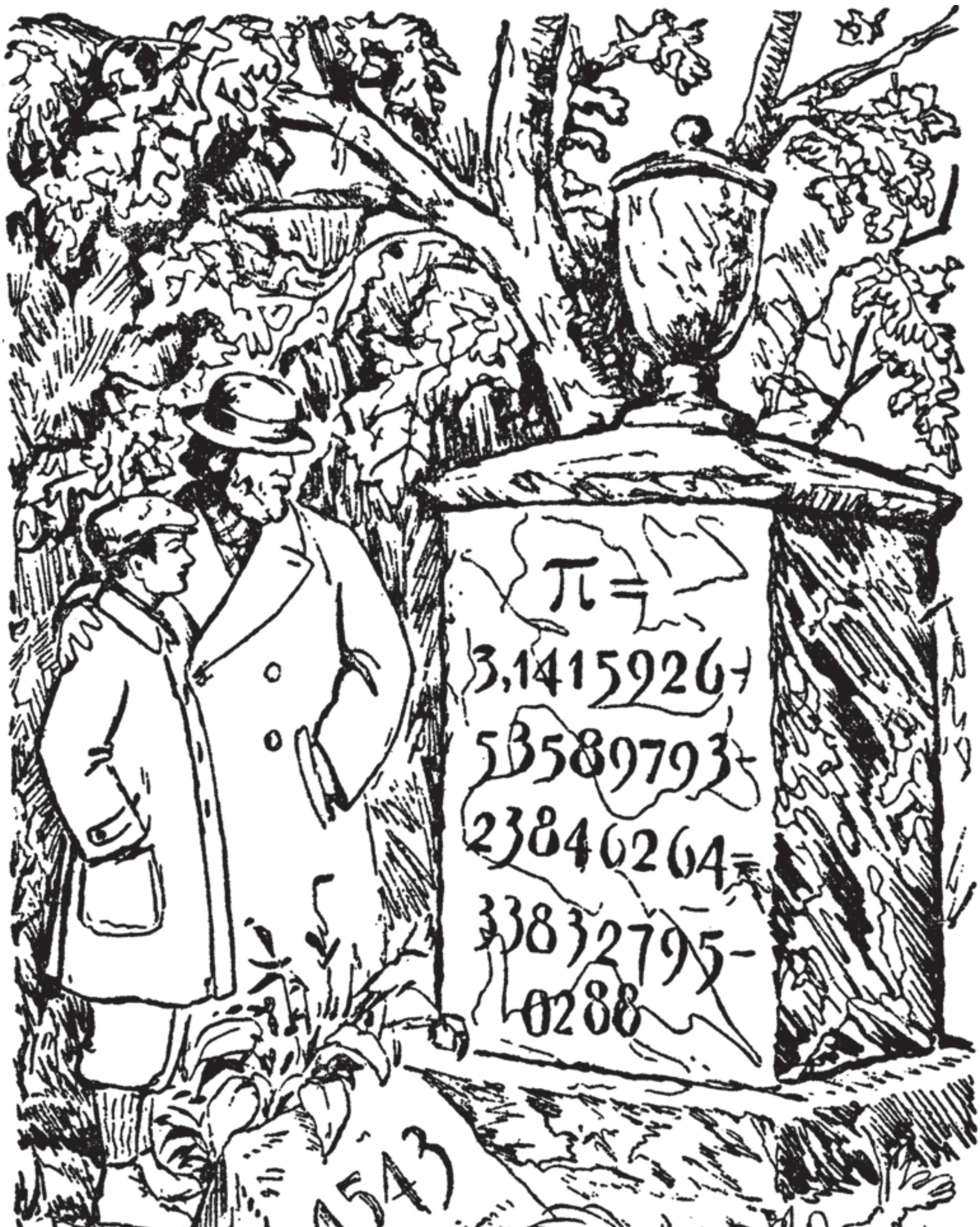
т. е., в десятичных дробях, между

$$3{,}09 \text{ и } 3{,}18.$$

Вы видите, что, определяя указанным способом, мы можем получить результат, не совпадающий с 3,14: один раз 3,1, в другой 3,12, в третий 3,17 и т. п. Случайно окажется среди них и 3,14, но в глазах вычислителя это число не будет иметь больше веса, чем другие[1].

---

[1] Получение $\pi$ опытным путем одно время рекомендовалось некоторыми методистами в нашем школьном обучении; метод этот был очень популярен и считался самым «естественным». Между тем он никак не может дать сколько-нибудь приемлемого значения для $\pi$. Тогда еще это обозначение «$\pi$» не было в употреблении: оно введено лишь с середины XVIII века знаменитым математиком Эйлером; наличие буквы $\pi$ на прилагаемом рисунке могильного памятника Лудольфа является поэтому вольностью художника.




*Математическая надгробная надпись*

Теперь становится более понятным, почему древний мир не знал правильного отношения длины окружности к диаметру, и понадобился гений Архимеда, чтобы найти для $\pi$ значение $3\frac{1}{7}$ — найти без всяких измерений, одним лишь рассуждением.

## «ЧТО Я ЗНАЮ О КРУГАХ»

В «Алгебре» древнего арабского математика Магомета-бен-Муза о вычислении длины окружности читаем такие строки:

«Лучший способ — это умножить диаметр на $3\frac{1}{7}$. Это самый скорый и самый легкий способ. Богу известно лучшее».

Теперь и мы знаем, что Архимедово число $3\frac{1}{7}$ не вполне точно выражает отношение окружности к диаметру. Теоретически доказано, что отношение это вообще не может быть выражено никаким дробным числом. Мы можем написать его лишь с тем или иным приближением, — впрочем, далеко превосходящим точность, необходимую для самых строгих требований практической жизни. Математик XVI века Лудольф, в Лейдене, имел терпение вычислить его с 35 десятичными знаками и завещал вырезать это значение для $\pi$ на своем могильном памятнике.

Вот оно:

$$3{,}14159265358979323846264338327950288.$$

Я знаю его наизусть до 31-й цифры и всегда могу повторить, хотя и не обладаю сверхъестественной памятью. Дело просто: немцы придумали стихотворение, слова которого подобраны так, что числа букв в них отвечают последовательно цифрам этого длинного ряда. Для знающих немецкий язык привожу здесь этот единственный в своем роде образчик геометрической поэзии (или поэтической геометрии):

Wie o dies $\pi$
Macht ernstlich so vielen viele Müh'!
Lernt immerhin, Jünglinge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein'...

На практике пользоваться таким громоздким $\pi$ никогда не приходится. Даже если бы мы пожелали вычислить длину земного экватора с точностью до 1 см, — предполагая, что знаем длину его диаметра вполне точно, — нам достаточно было бы взять $\pi$ всего с 9 цифрами после запятой. А взяв вдвое больше цифр (18), мы могли бы вычислить длину окружности, имеющей радиусом расстояние от Земли до Солнца, — с погрешностью не свыше 0,0003 мм (волос в сто раз толще этой возможной ошибки!). И правильно заметил по этому поводу французский астроном Араго, что «в смысле точности мы ничего не выиграли бы, если бы между длиною окружности и диаметром существовало отношение, выражающееся числом вполне точно»[1].

Для обычных вычислений с $\pi$ вполне достаточно запомнить два знака после запятой (3,14), а для более точных — четыре знака (3,1416: берем 6 вместо 5, потому что далее следует цифра больше 5). Первые шесть слов приведенного раньше немецкого четверостишия помогли бы нам запомнить число 3,14159. Хорошо бы, конечно, придумать подходящие русские стихи. Не отваживаясь на это, позволю себе предложить прозаическую фразу:

| 3 | 1 | 4 | 1 | 6 |
|---|---|---|---|---|
| что | я | знаю | о | кругах? — |

вопрос, скрыто заключающий в себе и ответ: 3,1416.

## БРОСАНИЕ ИГЛЫ

Самый оригинальный и неожиданный способ для приближенного вычисления числа $\pi$ состоит в следующем.

Запасаются короткой (сантиметра два) швейной иглой, — лучше с отломанным острием, чтобы игла была равномерной толщины, — и проводят на листе бумаги ряд тонких параллельных линий, отделенных одна от другой расстоянием вдвое больше длины иглы. Затем роняют с некоторой (произвольной) высоты иглу на бумагу и замечают, пересекает ли игла одну из линий или нет (рис. 127). Чтобы при падении игла не подпрыгивала, подкладывают под бумажный лист пропускную бумагу[2] или сукно. Бросание иглы повторяют много раз, например, сто или, еще лучше, тысячу, каждый раз отмечая, было ли пересечение[3]. Если потом разделить общее число падений иглы на число случаев, когда замечено было пересечение, то в результате должно получиться число $\pi$, — конечно, более или менее приближенно.

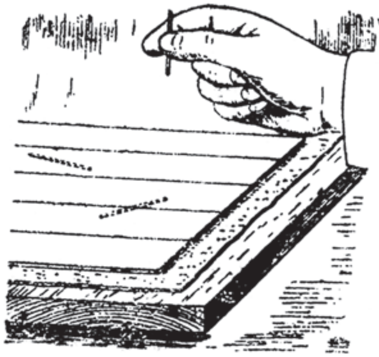


*Рис. 127*

Объясним, почему так получается. Пусть вероятнейшее число пересечений иглы равно $K$, а длина нашей иглы — 20 мм. В случае пересечения точка встречи должна, конечно,

[1] Тем не менее математики затратили много труда, чтобы получить для $\pi$ возможно больше знаков. Математик Шенкс в 1873 г. опубликовал $\pi$ с 707 десятичными знаками!

[2] Т. е. промокательную, «промокашку» (*примеч. ред.*).

[3] Пересечением надо считать и тот случай, когда игла только упирается концом в зачерченную линию.

лежать на каком-либо из этих миллиметров, и ни один из них, ни одна часть иглы не имеет в этом отношении никаких преимуществ перед другими. Поэтому вероятнейшее число пересечений каждого отдельного миллиметра равно $\frac{K}{20}$. Для участка иглы в 3 мм оно равно $\frac{3K}{20}$, для участка в 11 мм — $\frac{11K}{20}$ и т. д. Иначе говоря, вероятнейшее число пересечений прямо пропорционально длине иглы.

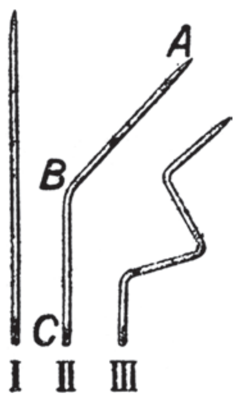


*Рис. 128*

Эта пропорциональность сохраняется и в том случае, если игла согнута. Пусть мы согнули нашу иглу в форме фиг. II, рис. 128, причем участок $AB$ = 11 мм, а $BC$= 9 мм. Для части $AB$ вероятнейшее число пересечений — $\frac{11K}{20}$, а для $BC = \frac{9K}{20}$, для всей же иглы $\frac{11K}{20} + \frac{9K}{20}$, т. е. по-прежнему равно $K$. Мы можем изогнуть иглу и более затейливым образом (фиг. III, рис. 128), — число пересечений от этого также не изменилось бы. (Заметьте, что при изогнутой игле возможны пересечения черты двумя и более частями иглы сразу; такое пересечение надо, конечно, считать за 2, за 3 и т. д., потому что одно зачислялось при подсчете пересечений для одной части иглы, второе — для другой и т. д.)

Вообразите же теперь, что мы бросаем иглу, изогнутую в форме окружности с диаметром, равным расстоянию между чертами (т. е. ровно вдвое бо́льшим, чем наша игла). Такое кольцо каждый раз должно дважды пересечь какую-нибудь черту (или по одному разу коснуться двух линий, — во всяком случае получаются 2 встречи). Если общее число бросаний $N$, то число встреч — $2N$. Наша прямая игла меньше этого кольца по длине во столько раз, во сколько полудиаметр меньше длины окружности, т. е. в $2\pi$ раз. Но мы уже установили, что вероятнейшее число пересечений пропорционально длине иглы. Поэтому вероятнейшее число пересечений нашей иглы ($K$) должно быть меньше $2N$ в $2\pi$ раза, т. е. равно $\frac{N}{\pi}$. Отсюда $\pi = \frac{\text{числу бросаний}}{\text{число пересечений}}$.

Чем большее число падений наблюдалось, тем точнее получается выражение для $\pi$. Один швейцарский астроном, Р. Вольф, в середине XIX века наблюдал 5000 падений иглы на разграфленную бумагу и получил для $\pi$ число 3,159..., — выражение, впрочем, менее точное, чем Архимедово число.

Как видите, отношение длины окружности к диаметру находят здесь опытным путем, причем — всего любопытнее — не чертят ни круга, ни диаметра, т. е. обходятся без циркуля. Человек, не имеющий никакого представления о геометрии и даже о круге, может тем не менее определить по этому способу число $\pi$, если терпеливо проделает весьма большое число бросаний иглы.

## ВЫПРЯМЛЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

### Задача № 48

Выпрямить данную окружность — значит начертить такую прямую линию, длина которой равна длине этой окружности. Если бы $\pi$ можно было выразить дробным числом, то такое построение легко было бы выполнить вполне точно: мы отложили бы диаметр на прямой линии $\pi$ раз. Но так как число $\pi$ выражается только приближенно, то и выпрямление окружности выполнимо лишь с тем или иным приближением. Для многих практических целей вполне достаточно взять для $\pi$ число $3\frac{1}{7}$ и выпрямить окружность, отложив ее диаметр $3\frac{1}{7}$ раза (деление отрезка на 7 равных частей можно выполнить, как известно, вполне точно). Существуют и другие приближенные способы выпрямления окружности, применяемые на практике при ремесленных работах — столярами, жестяниками и т. п. Мы не будем здесь рассматривать их, а укажем лишь один довольно простой способ выпрямления, дающий результат с чрезвычайно большой точностью.

Если нужно выпрямить (рис. 129) окружность $O$, то проводят диаметр $AB$, а в точке $B$ — перпендикулярную к ней прямую $CD$. Из центра $O$ под углом 30° к $AB$ проводят прямую $OC$. Затем от точки $C$ откладывают 3 радиуса данной окружности и соединяют полученную точку $D$ с $A$: прямая $AD$ равна длине полуокружности. Ошибка менее 0,0002.

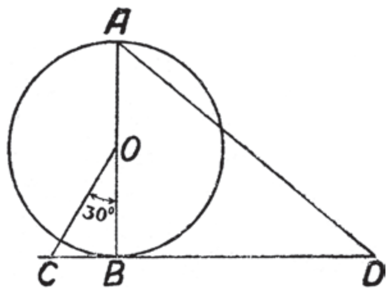


*Рис. 129*

На чем основано это построение?

### Решение

По теореме Пифагора,

$$\overline{CB}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{OC}^2.$$

Обозначив радиус $OB$ через $r$ и имея в виду, что $CB = \frac{OC}{2}$ как катет, лежащий против угла в 30°, получаем

$$\overline{CB}^2 + r^2 = 4\overline{CB}^2,$$

откуда

$$CB = \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

Далее, в треугольнике $ABD$

$$BD = CD — CB = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

$$AD = \sqrt{\overline{BD}^2 + 4r^2} = \sqrt{\left(3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4r^2} =$$
$$= \sqrt{9r^2 - 2r^2\sqrt{3} + \frac{r^2}{3} + 4r^2} = 3{,}14153.$$

Сравнив этот результат с тем, который получается, если взять $\pi$ с большой степенью точности ($\pi$ = 3,141593...), мы видим, что разница составляет всего 0,00006 м. Если бы мы по этому способу выпрямляли окружность радиусом в 1 м, то ошибка составляла бы для полуокружности всего 0,00006 м, а для полной окружности — 0,00012 м, или 0,12 мм (примерно толщина волоса).

## КВАДРАТУРА КРУГА

Как нельзя совершенно точно выпрямить окружность, так невозможно и построить квадрат, площадь которого в точности равнялась бы площади данного круга. Однако для практических целей вполне достаточно приближенное построение. Рассмотрим здесь одно из таких приближенных решений задачи о квадратуре круга, очень удобное для надобностей практической жизни.

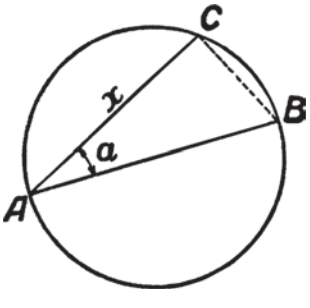


*Рис. 130*

Способ этот состоит в том, что вычисляют (рис. 130) угол $a$, под которым надо провести к диаметру $AB$ хорду $AC = x$, являющуюся стороною искомого квадрата. Чтобы узнать величину этого угла, придется обратиться к тригонометрии:

$$\cos a = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2r}, \text{ где } r \text{ — радиус круга.}$$

Значит, сторона искомого квадрата $x = 2r \cos a$, площадь же его $= 4r^2 \cos^2 a$. С другой стороны, площадь квадрата равна площади $\pi r^2$ данного круга. Следовательно,

$$4r^2 \cos^2 a = \pi r^2,$$

откуда

$$\cos^2 a = \frac{\pi}{4}, \quad \cos a = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0{,}886.$$

По таблицам находим:

$$a = 27^\circ\, 36'.$$

Итак, проведя в данном круге хорду под углом 27° 36' к диаметру, мы сразу получаем сторону квадрата, площадь которого равна площади данного круга.

Практически делают так, что заготовляют чертежный треугольник[1], один из острых углов которого 27° 36' (а другой — 62° 24'). Располагая таким треугольником, можно для каждого данного круга сразу находить сторону равновеликого ему квадрата.

Для желающих изготовить себе такой чертежный треугольник полезно следующее указание.

Так как тангенс угла 27° 36' равен 0,523 или $^{23}/_{44}$, то катеты такого треугольника относятся как 23 : 44. Поэтому, изготовив треугольник, один катет которого, например, 22 см, а другой 11,5 см, мы будем иметь то, что требуется. Само собою разумеется, что таким треугольником можно пользоваться и как обыкновенным чертежным.

## ПОСТРОЕНИЕ БЕЗ ЦИРКУЛЯ

При решении геометрических задач на построение обычно пользуются линейкой и циркулем. Мы сейчас увидим, однако, что иной раз удается обходиться без циркуля в таких случаях, где на первый взгляд он представляется совершенно необходимым.

### Задача № 49

Из точки *A* (рис. 131), лежащей вне полуокружности, опустить на ее диаметр перпендикуляр, обходясь при этом без циркуля. Положение центра полуокружности не указано.

### Решение

Нам пригодится здесь то свойство треугольника, что все высоты его пересекаются в одной точке. Соединим *A* с *B* и *C*; получим точки *D* и *E* (рис. 132). Прямые *BE* и *CD* очевидно, высóты треугольника *ABC*. Третья высота — искомый перпендикуляр на *BC* — должна проходить через точку пересечения

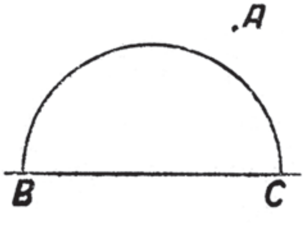



*Рис. 131*

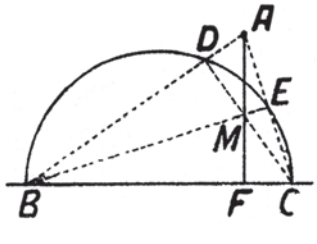



*Рис. 132*

[1] Этот удобный способ был предложен в 1836 г. русским инженером Бингом; упомянутый чертежный треугольник носит по имени изобретателя название «треугольник Бинга».

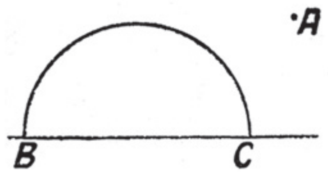



Рис. 133

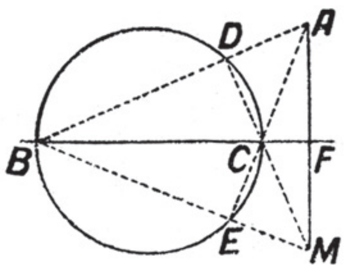



Рис. 134

двух других, т. е. через $M$. Проведя по линейке прямую через точки $A$ и $M$, мы выполним требование задачи, не прибегая к услугам циркуля. Если бы точка была расположена, как на рис. 133, где искомый перпендикуляр падает на *продолжение* диаметра, то задача была бы разрешима лишь при условии, что дан не полукруг, а полная окружностъ. Рисунок 134 показывает, что решение по существу не отличается от того, с которым мы уже знакомы; только высоты треугольника $ABC$ пересекаются здесь не внутри, а вне его.

## ЗАДАЧА НАПОЛЕОНА

Сейчас мы занимались построением, выполняемым с помощью одной лишь линейки, не обращаясь к циркулю. Рассмотрим теперь несколько задач, в которых вводится обратное ограничение: запрещается пользоваться линейкой, а все построения нужно выполнить только циркулем, Одна из таких задач заинтересовала Наполеона I (бывшего, как известно, способным математиком). Прочтя книгу о таких построениях итальянского ученого Маскерони, он предложил французским математикам следующую задачу.

### Задача № 50

Данную окружность разделить на 4 равные части, не прибегая к линейке. Положение центра окружности дано.

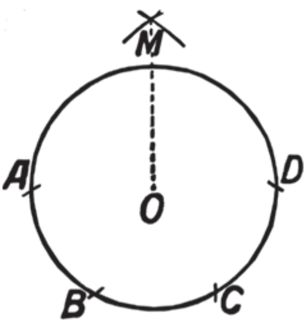
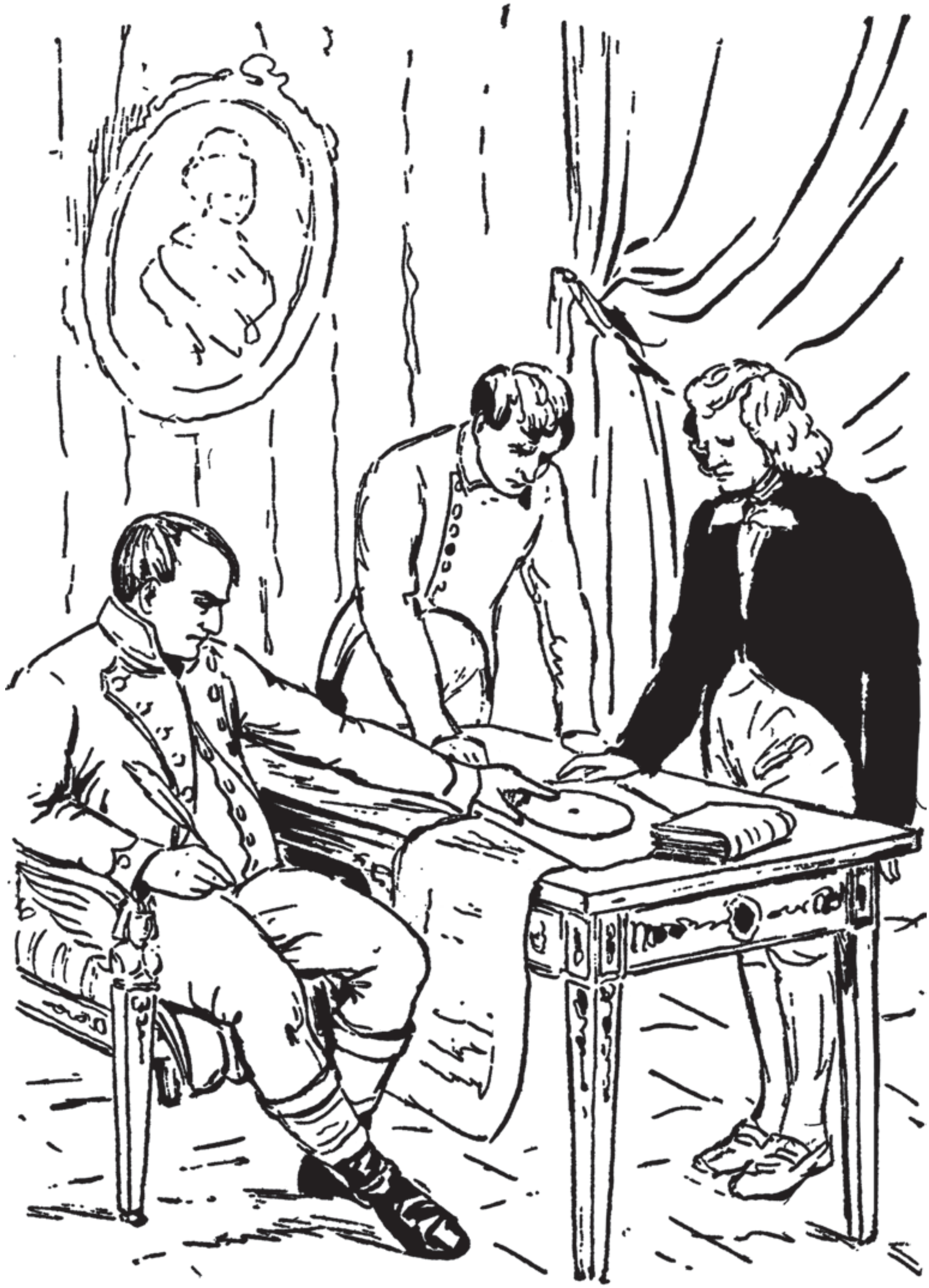



Рис. 135

### Решение

Пусть требуется разделить на 4 части окружность $O$ (рис. 135). От произвольной точки $A$ откладываем по окружности три раза радиус круга: получаем точки $B$, $C$ и $D$. Легко видеть, что расстояние $AC$ — хорда дуги, составляющей ⅓ окружности, — сторона вписанного равностороннего треугольника и, следовательно, равно $r\sqrt{3}$,



*Геометрическая задача Наполеона*

где $r$ — радиус окружности. $AD$ — очевидно, диаметр окружности. Из точек $A$ и $D$ радиусом, равным $AC$, засекаем дуги, пересекающиеся в точке $M$. Покажем, что расстояние $MO$ равно стороне квадрата, вписанного в нашу окружность. В треугольнике $AMO$ катет $MO = \sqrt{\overline{AM}^2 - \overline{AO}^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}$, т. е. стороне вписанного квадрата. Теперь остается только отложить по окружности расстояние $MO$, чтобы получить вершины вписанного квадрата, которые, очевидно, разделят окружность на 4 равные части.

### Задача № 51

Вот другая, более легкая задача в том же роде.

Без линейки увеличить расстояние между данными точками (рис. 136) в 5 раз, — вообще, в заданное число раз.


*Рис. 136*

### Решение

Из точки $B$ радиусом $AB$ описываем окружность (рис. 137). По этой окружности откладываем от точки $A$ расстояние $AB$ три раза: получаем точку $C$, очевидно, диаметрально противоположную $A$. Расстояние $AC$ представляет собой двойное расстояние $AB$. Проведя окружность из $C$ радиусом $BC$, мы можем таким же образом найти точку, диаметрально противоположную $B$ и, следовательно, удаленную от $A$ на тройное расстояние $AB$, — и т. д.

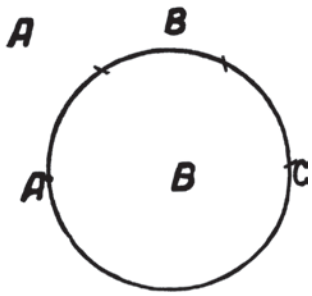



*Рис. 137*

## ГОЛОВА ИЛИ НОГИ?

Кажется, один из героев Жюля Верна подсчитывал, какая часть его тела прошла более длинный путь за время его кругосветных странствований — голова или ноги. Это очень поучительная геометрическая задача, если поставить вопрос более определенным образом. Мы предложим ее в таком виде.

### Задача № 52

Вообразите, что вы обошли земной шар по экватору. Насколько при этом верхушка вашей головы прошла более длинный путь, чем кончик вашей ноги?

### Решение

Ноги прошли путь $2\pi R$, где $R$ — радиус земного шара. Верхушка же головы прошла при этом $2\pi(R + 1{,}7)$, где 1,7 м —рост человека. Разность путей равна $2\pi(R + 1{,}7) - 2\pi R = 2\pi \times 1{,}7 = 10{,}7$ м.

Итак, голова прошла путь на 10,7 м больше, чем ноги.

Любопытно, что в окончательный ответ не входит радиус земного шара. Поэтому результат получится одинаковый и на Земле, и на Юпитере, и на самой мелкой планетке. Вообще, разность двух концентрических окружностей не зависит от их радиуса, а только от расстояния между ними. Прибавка одного сантиметра к радиусу земной орбиты увеличила бы ее длину ровно на столько же, на сколько удлинится от такой же прибавки радиуса окружность медного пятака.

На этом геометрическом парадоксе[1] основана следующая любопытная задача, фигурирующая во многих сборниках геометрических развлечений.

Если обтянуть земной шар по экватору проволокой и затем прибавить к ее длине 1 м, то сможет ли между проволокой и землей проскользнуть мышь?

Обычно отвечают, что промежуток будет тоньше волоса: что значит один метр по сравнению с 40 миллионами метров земного экватора! В действительности же величина промежутка равна

$$\frac{100}{2\pi} = 16 \text{ см}.$$

Не только мышь, но и самый крупный кот проскочит в такой промежуток.

[1] *Парадоксом* называется истина, кажущаяся неправдоподобной, — в отличие от *софизма* — ложного положения, имеющего видимость истинного.

**Глава десятая**

# БОЛЬШОЕ И МАЛОЕ В ГЕОМЕТРИИ

## УВЕЛИЧЕНИЕ В ТЫСЯЧУ РАЗ

Узнать, что больше и что меньше, очень просто в арифметике, когда вопрос поставлен о числах. Но не всегда легко разрешить подобный вопрос в геометрии, где приходится сравнивать не числа, а поверхности и объемы. Впрочем, в арифметике мы не всегда представляем себе отчетливо те числа, о которых говорим. Мало кто, например, имеет ясное представление о таких числовых исполинах, как миллион или миллиард.

Даже и более скромные числа рисуются в нашем воображении довольно смутно. Что представляете вы себе, когда вам говорят о микроскопе, увеличивающем в 1000 раз? Не такое уж большое число тысяча, а между тем тысячекратное увеличение понимается далеко не всеми так, как надо. Мы не умеем оценивать истинной малости тех предметов, которые видим в поле микроскопа при подобном увеличении. Бактерия тифа, увеличенная в 1000 раз, кажется нам величиной с мошку на расстоянии ясного зрения. Но как мала эта бактерия на самом деле? Едва ли вы представляете себе, что если бы вы сами были увеличены во столько же раз, рост ваш достигал бы 1700 м.! Голова была бы выше облаков, а Эйфелева башня (300 м) приходилось бы вам гораздо ниже колен. Во сколько раз вы меньше этого воображаемого исполина, во столько раз бацилла мельче крошечной мошки...

## ДВЕ БАНКИ

Еще хуже представляем мы себе большое и малое в геометрии. Каждый, не задумываясь, ответит, что 5 кг варенья больше, чем три килограмма его, но не всякий сразу скажет, которая больше из двух банок, стоящих на столе.

**Задача № 53**

Попробуйте в самом деле решить задачу: какая из двух банок (рис. 139) вместительнее — правая, широкая, или левая, втрое более высокая, но вдвое более узкая?

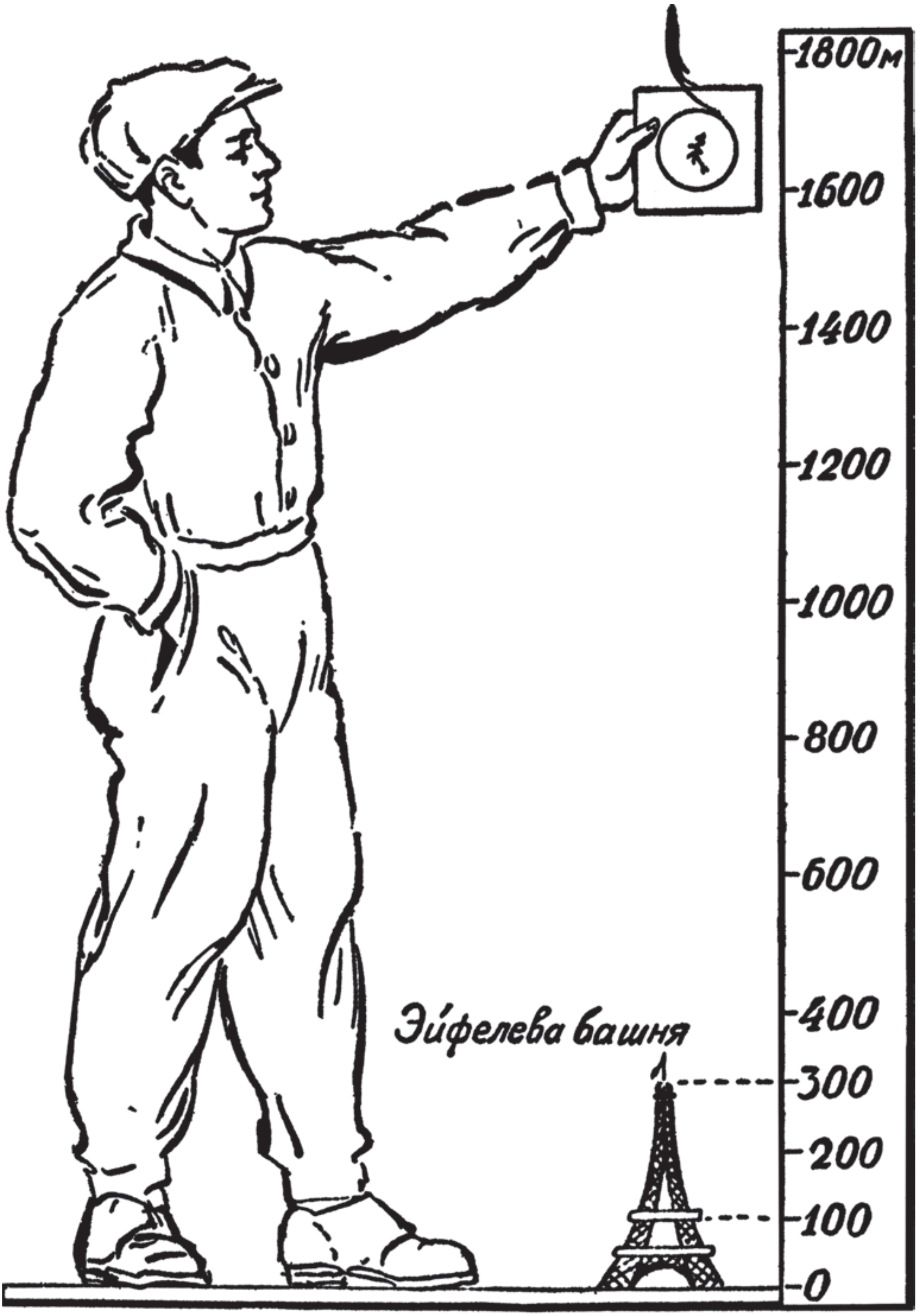



*Рис. 138. Человек и бацилла тифа (вверху направо), увеличенная в 1000 раз*

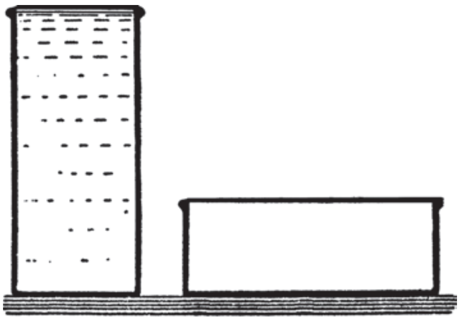


*Рис. 139*

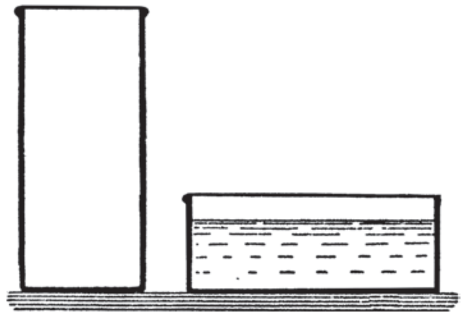


*Рис. 140*

**Решение**

Для многих, вероятно, будет неожиданностью, что в данном случае высокая банка менее вместительна, нежели широкая. Между тем легко удостовериться в этом расчетом. Площадь основания у широкой банки в 2 × 2, т. е. в 4 раза больше, чем у узкой; высота же ее всего в 3 раза меньше. Значит, объем широкой банки в $\frac{4}{3}$ раза больше, чем узкой. Если содержимое высокой перелить в широкую, оно заполнит лишь ¾ ее (рис. 140).

## ИСПОЛИНСКАЯ ПАПИРОСА

**Задача № 54**

В витрине табачного треста выставлена огромная папироса, в 15 раз длиннее и толще обыкновенной. Если на набивку одной папиросы нормальных размеров нужно полграмма табаку, то сколько понадобилось, чтобы набить исполинскую папиросу в витрине?

**Решение**

$$\frac{1}{2} \times 15 \times 15 \times 15 = 1700 \text{ г.},$$

т. е. свыше 1½ кг.

## ЯЙЦО СТРАУСА

**Задача № 55**

На рис. 141 изображены в одинаковом масштабе яйцо курицы (направо) и яйцо страуса (налево). Всмотритесь в рисунок и скажите, во сколько раз содержимое страусового яйца больше куриного. При беглом взгляде кажется, что разница не может быть весьма велика. Тем поразительнее результат, получаемый правильным геометрическим расчетом.

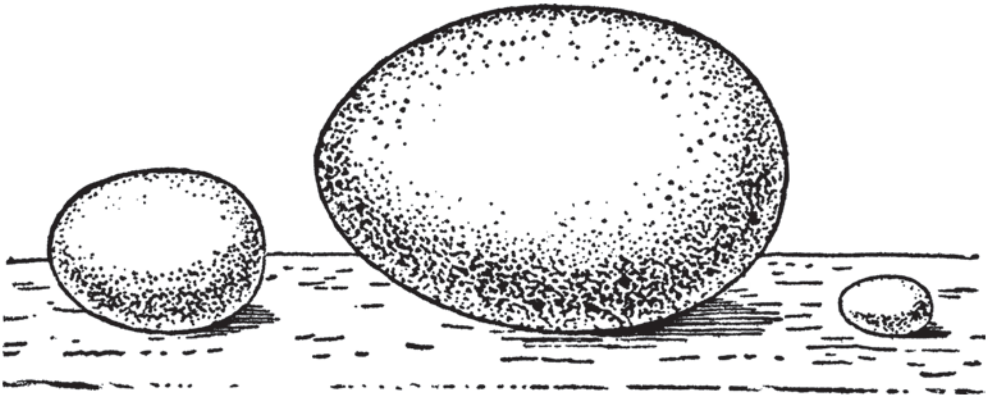


*Рис. 141. Яйца страуса, эпиорниса и курицы (в уменьшенном масштабе)*

**Решение**

Непосредственным измерением на чертеже убеждаемся, что яйцо страуса длиннее куриного в 2½ раза. Следовательно, объем страусового яйца больше объема куриного в

$$2\tfrac{1}{2} \times 2\tfrac{1}{2} \times 2\tfrac{1}{2} = \frac{125}{8},$$

т. е. около 15 раз.

Одним таким яйцом могла бы позавтракать семья из 5 человек, считая, что каждый удовлетворяется яичницей из трех яиц.

## ЯЙЦО ЭПИОРНИСА

**Задача № 56**

На Мадагаскаре водились некогда огромные страусы-эпиорнисы, клавшие яйца длиною в 28 см (средняя фигура рис. 141). Между тем куриное яйцо имеет в длину 5 см. Скольким же куриным яйцам соответствует по объему одно яйцо мадагаскарского страуса?

**Решение**

Перемножив $\frac{28}{5} \times \frac{28}{5} \times \frac{28}{5}$, получаем около 170. Одно яйцо эпиорниса равно чуть не двумстам куриных яиц! Более полусотни человек могло бы позавтракать одним таким яйцом, вес которого, как нетрудно рассчитать, равнялся 8–9 кг.

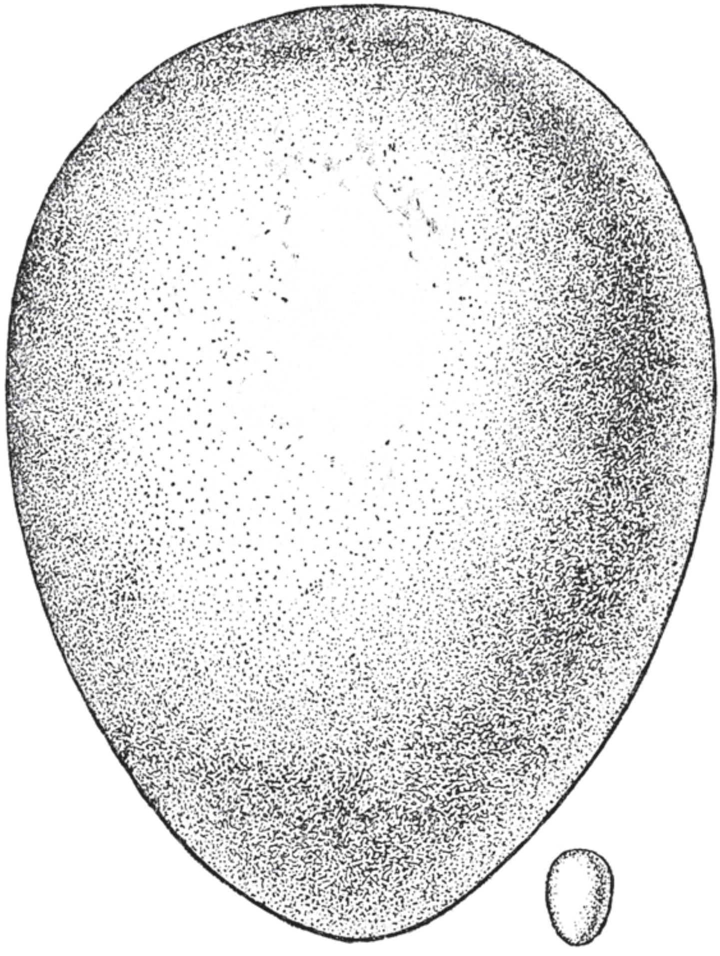


*Рис. 142. Яйцо лебедя и королька (в натуральную величину). Во сколько раз одно больше другого по объему?*

## ЯЙЦА РУССКИХ ПТИЦ

### Задача № 57

Самый резкий контраст в размерах получится, однако, тогда, когда обратимся к нашей родной природе и сравним яйца лебедя-шипуна и желтоголового королька, миниатюрнейшей из всех русских птичек. На прилагаемом рис. 142 контуры этих яиц изображены в натуральную величину.

Каково отношение их объемов?

**Решение**

Измерив длину обоих яиц, получаем 125 мм и 13 мм Измерив также и их ширину, имеем 95 мм и 9 мм. Легко видеть, что эти числа близки к пропорциональности: проверяя пропорцию

$$\frac{125}{95} = \frac{13}{9}$$

сравнением произведений крайних и средних ее членов, имеем

1125 и 1135, —

числа мало разнящиеся. Отсюда заключаем, что, приняв эти яйца за тела, геометрически подобные, мы не сделаем большой погрешности. Поэтому отношение их объемов равно

$$\frac{95^3}{9^3} = \frac{857375}{729} = 1175.$$

Яйцо лебедя почти в 1200 раз объемистее, чем яйцо королька!

## РАЗМЕРЫ НАШИХ МОНЕТ

Вес наших медных монет пропорционален их достоинству, т. е. медная двухкопеечная монета весит вдвое больше копеечной, трехкопеечная — втрое и т. д. То же справедливо и для разменного серебра: двугривенный, например, вдвое тяжелее гривенника. Наконец, и полноценные серебряные монеты (1 р. и 50 коп.) чеканились по тому же правилу. А так как монеты одного рода обычно имеют геометрически подобную форму, то, зная диаметр одной медной монеты, одной разменной серебряной и одной полноценной, можно вычислить диаметры всех прочих. Приведем примеры таких расчетов.

**Задача № 58**

Диаметр медного пятака (образца 1925 г.) равняется 25 мм. Каков диаметр трехкопеечной монеты?

**Решение**

Вес, а следовательно, и объем трехкопеечной монеты составляет $3/5$, т. е. 0,6 объема пятака. Значит, линейные ее размеры должны быть меньше в $\sqrt[3]{0{,}6}$, т. е. составлять 0,84 размеров пятака. Отсюда искомый диаметр 3-копеечной монеты должен равняться $0{,}84 \times 25$, т. е. 21 мм (в действительности — 20 мм).

Лучшее согласие получается для полноценного серебра: диаметр рубля относится к диаметру полтинника как 33,5 : 26,67 = 1,26, т. е. теоретическому отношению $1 : \sqrt[3]{2}$. Это показывает, что рублевая монета и полтинник представляют собою геометрически подобные цилиндры.

## МОНЕТА В МИЛЛИОН РУБЛЕЙ

### Задача № 59

Вообразите серебряную монету в миллион рублей, которая имеет ту же форму, что и рублевая монета. Какого примерно диаметра была бы такая монета? Если бы ее поставить на ребро рядом с вашим домом, то во сколько раз она была бы выше его?

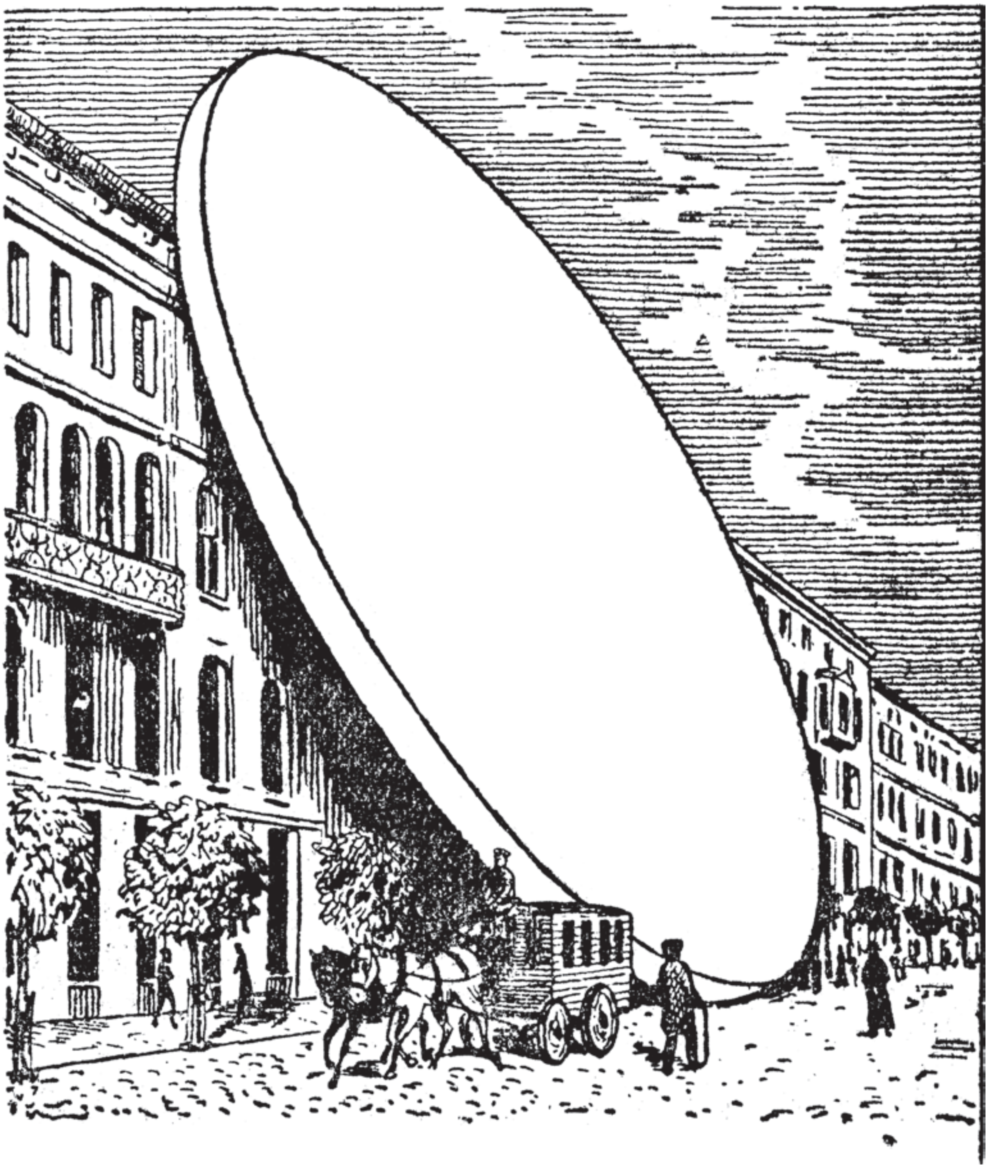


*Рис. 143. Какого достоинства подобная серебряная монета?*

**Решение**

Размеры монеты были бы не так огромны, как можно думать. Диаметр ее был бы всего 3,35 м — не выше одного этажа. В самом деле: раз объем ее больше объема рублевой монеты в 1 000 000 раз, то диаметр (а также толщина) больше в $\sqrt[3]{1\,000\,000}$, т. е. всего в 100 раз.

Умножив 33,5 мм на 100 получаем 3,35 м — размеры, неожиданно скромные для монеты такого достоинства[1]. Зато вес ее очень внушителен: 20 г × × 1 000 000 = 20 тонн — тяжелее груженого товарного вагона.

## НАГЛЯДНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Читатель, на предыдущих примерах приобретший навык в сравнении объемов геометрически подобных тел по их линейным размерам, не даст уже застигнуть себя врасплох вопросами такого рода. Он сможет поэтому легко обнаружить ошибочность некоторых мнимо наглядных изображений, зачастую появляющихся в иллюстрированных журналах.

**Задача № 60**

Вот одно из таких изображений. Если человек съедает в день круглым и средним счетом 400 г мяса, то за 60 лет жизни это составит около 9 т. А так как вес быка — около ½ т, то человек к концу жизни может утверждать, что съел 18 быков. На прилагаемом рисунке (рис. 144), воспроизводимом из английского журнала, изображен этот исполинский бык (и другие животные) рядом с человеком, который их поглощает в течение жизни. Верен ли рисунок? Каков был бы правильный масштаб?

**Решение**

Рисунок неверен. Бык, который изображен здесь, выше нормального в 18 раз и, конечно, во столько же раз длиннее и толще. Следовательно, по объему он больше нормального быка в 18 × 18 × 18 = 5832 раза. Такого быка человек мог бы съесть, если бы жил не менее двух тысячелетий. Правильно изображенный бык должен быть выше, длиннее и толще обыкновенного всего в $\sqrt[3]{18}$, т. е. в 2,6 раза; это вышло бы на рисунке вовсе не так внушительно, чтобы могло служить наглядной иллюстрацией количества съедаемого человеком мяса.

---

[1] До чего ошибаются иной раз в подобных оценках, видно из того, что при решении этой задачи мне случалось слышать утверждение, будто диаметр искомой монеты в миллион раз больше диаметра рублевой монеты, т. е. имеет ни много ни мало 33½ километра!..

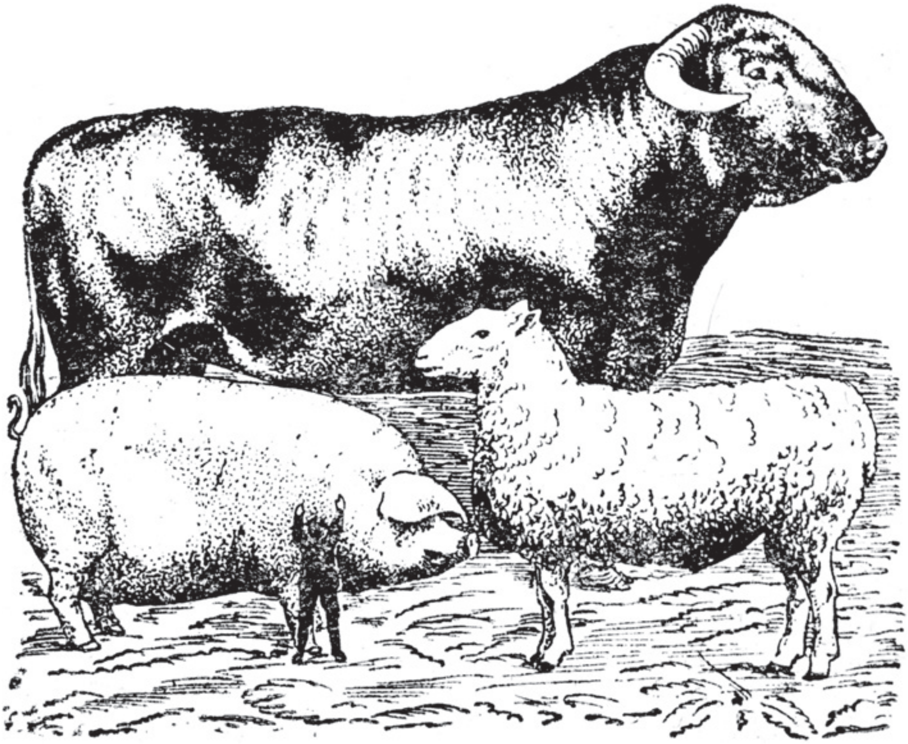


*Рис. 144. Сколько мяса мы съедаем в течение жизни.*
*(Обнаружить ошибку!)*

## Задача № 61

На рис. 145 воспроизведена другая иллюстрация из той же области: человек, расхаживающий у бассейна жидкости, которую он выпивает за всю жизнь. Художник руководился следующим подсчетом. Человек поглощает в день разных жидкостей 1½ л (7–8 стаканов). За 70 лет жизни это составляет около 40 000 л. Так как в ведре 12 л, то художнику нужно было изобразить бассейн, который больше ведра в 3300 раз. Он и полагал, что сделал это на своем рисунке. Прав ли он?

## Решение

На рисунке размеры бассейна сильно преувеличены. Ведро-бассейн должно быть выше и шире обыкновенного только в $\sqrt{3300} = 14{,}9$, или круглым счетом в 15 раз. Если высота и ширина нормального ведра 30 см, то для вмещения всей воды, выпиваемой нами за целую жизнь, достаточно было бы ведро высотою 4,5 м и такой же ширины. На рисунке 146 изображена эта посудина в правильном масштабе.

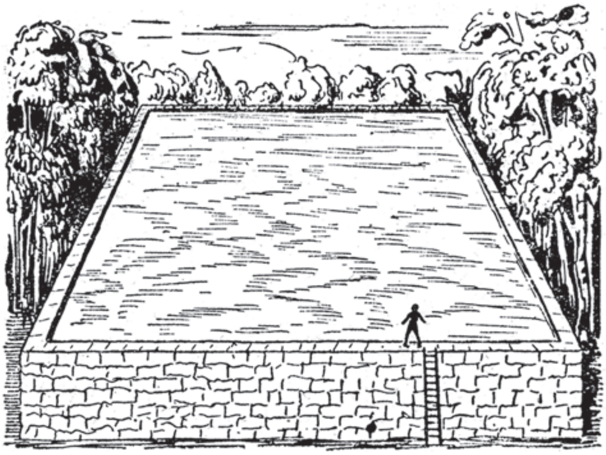


*Рис. 145. Сколько воды выпивает человек в течение жизни. (В чем ошибка?)*

## НАШ НОРМАЛЬНЫЙ ВЕС

Если принять, что все человеческие тела геометрически подобны (это верно лишь в среднем), то можно вычислять вес людей по их росту. Средний рост человека равен 1,75 м, а средний вес — 65 кг. Получающиеся при таких расчетах результаты могут многим показаться неожиданными.

Предположим, что вы ниже среднего роста на 10 см. Какой вес тела является для вас нормальным?

В обиходе часто решают эту задачу так: скидывают с нормального веса такой процент, какой 10 см составляют от нормального роста. В данном случае, например, уменьшают 65 кг в $^{10}/_{175}$ и полученный вес — 62 кг — считают нормальным.

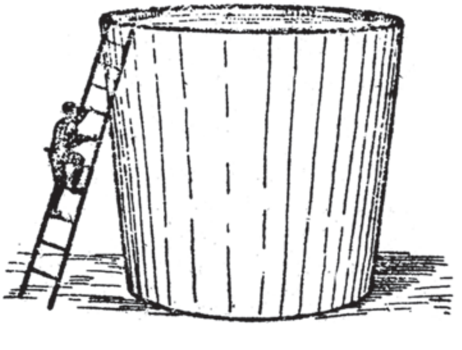


*Рис. 146. То же – правильное изображение*

Это — тот же самый неправильный расчет, который доводит иных вычислителей до монеты в 33 км диаметром (см. с. 469).

Правильный вес получится, если вычислять его из пропорции

$$65 : x = 1{,}75^3 : 1{,}65^3,$$

откуда

$$x = \frac{65}{1{,}2} = \text{около } 54 \text{ кг.}$$

Разница с обычно получаемым результатом весьма значительна — 8 кг.

Наоборот, для человека, рост которого на 10 см выше среднего, нормальный вес вычисляется из пропорции:

$$65 : x = 1{,}75^3 : 1{,}85^3.$$

Из нее $x$ = 78 кг — на 13 кг больше среднего. Эта прибавка гораздо значительнее, чем обычно думают.

## ВЕЛИКАНЫ И КАРЛИКИ

Каково же в таком случае должно быть отношение между весом великана и карлика? Многим, я уверен, покажется неправдоподобным, что великан может быть в 50 раз тяжелее карлика. Между тем к этому приводит правильный геометрический расчет.

Один из высочайших великанов, существование которого хорошо удостоверено, был австриец Винкельмейер, в 278 см высоты; другой, эльзасец Крау, был ростом в 275 см; третий, англичанин О'Брик, — о котором рассказывали, что он закуривал трубку от уличных фонарей, — достигал 268 см. Все они были на целый метр выше человека нормального роста. Напротив, карлики достигают в взрослом состоянии около 75 см — на метр ниже нормального роста. Каково же отношение объема и веса великана к объему и весу карлика? Оно равно

$$275^3 : 75^3, \text{ или } 11^3 : 3^3$$

$$11^3 = 1331;\ 3^3 = 27;\ 1331 : 27 = 49 \text{ (с дробью).}$$

Значит, великан равен по весу почти полусотне карликов!

А если верить сообщению об арабской карлице Агибе, ростом в 38 см, то это отношение станет еще разительнее: высочайший великан в 7 раз выше этой карлицы и, следовательно, тяжелее в 343 раза. Более достоверно сообщение Бюффона, измерившего карлика в 43 см ростом; этот карлик был в 260 раз легче великана.

## ГЕОМЕТРИЯ ГУЛЛИВЕРА

Автор «Путешествия Гулливера» с большой осмотрительностью избежал опасности запутаться в геометрических отношениях. Читатель помнит, без сомнения, что в стране лилипутов нашему футу соответствовал дюйм, а в стране великанов, наоборот, дюйму — фут. Другими словами, у лилипутов все люди, все вещи, все произведения природы были в 12 раз меньше нормальных, у великанов — во столько же раз больше. Эти на первый взгляд простые отношения, однако, сильно усложнялись, когда приходилось решать вопросы вроде следующих:

1) во сколько раз Гулливер съедал за обедом больше, чем лилипут?

2) во сколько раз Гулливеру требовалось больше сукна на костюм, нежели лилипутам?

3) сколько весило яблоко страны великанов?

Автор «Путешествия» справлялся с этими задачами в большинстве случаев вполне успешно. Он правильно рассчитал, что раз лилипут ростом меньше Гулливера в 12 раз, то объем его тела меньше в 12 × 12 × 12, т. е. в 1728 раз, следовательно, для насыщения тела Гулливера нужно в 1728 раз больше пищи, чем для лилипута. И мы читаем в «Путешествии» такое описание обеда Гулливера:

> «Триста поваров готовили для меня кушанье. Вокруг моего дома были поставлены шалаши, где происходила стряпня и жили повара со своими семьями. Когда наступал час обеда, я брал в руки 20 человек прислуги и ставил их на стол, а человек 100 прислуживало с пола: одни подавали кушанье, остальные приносили бочонки с вином и другими напитками на шестах, перекинутых с плеча на плечо. Стоявшие наверху по мере надобности поднимали все это на стол при помощи веревок и блоков...»

Правильно рассчитал Свифт и количество материала на костюм Гулливеру. Поверхность его тела больше, чем у лилипутов, в 12 × 12 = 144 раза; во столько же раз нужно ему больше материала, портных и т. п. Все это учтено Свифтом, рассказывающим от имени Гулливера, что к нему «было прикомандировано 300 портных-лилипутов с наказом сшить полную пару платья по местным образцам». (Спешность работы потребовала двойного количества портных.)

Надобность производить подобные расчеты возникала у Свифта чуть не на каждой странице. И, вообще говоря, он выполнял их правильно. Лишь изредка надлежащий масштаб у него не выдерживался, особенно при описании страны великанов. Здесь иногда встречаются крупные ошибки.

> «Один раз, — рассказывает Гулливер, — с нами отправился в сад придворный карлик. Улучив удобный момент, когда я, прохаживаясь, очутился под одним из деревьев, он ухватился за ветку и встряхнул ее над моей головой. Град яблок, величиной каждое с хороший бочонок, шумно посыпался на землю; одно ударило меня в спину и сбило с ног...»

Гулливер благополучно поднялся на ноги после этого удара. Однако легко рассчитать, что удар от падения подобного яблока должен был быть поистине сокрушающий: ведь яблоко, в 1728 раз тяжелее нашего, т. е. весом в 80 кило, обрушилось с 12-кратной высоты! Энергия удара должна была превосходить в 20 000 раз энергию падения обыкновенного яблока и могла бы сравниться разве лишь с энергией артиллерийского снаряда...

Наибольшую ошибку допустил Свифт в расчете мускульной силы великанов. Мы уже видели в главе I (с. 351), что мощь крупных животных не пропорциональна их размерам. Если применить приведенные там соображения к великанам Свифта, то окажется, что, хотя мускульная сила их была в 144 раза больше силы Гулливера, вес их тела был больше в 1728 раз. И если Гулливер в силах был поднять не только вес своего собственного тела, но и еще примерно такой же груз, то великаны не в состоянии были бы преодолеть даже груза своего огромного тела. Они должны были бы неподвижно лежать на одном месте, бессильные сделать сколько-нибудь значительное движение. Их могущество, так картинно описанное у Свифта, могло явиться лишь в результате неправильного подсчета.

## ПОЧЕМУ ПЫЛЬ И ОБЛАКА ПЛАВАЮТ В ВОЗДУХЕ?

«Потому что они легче воздуха», — вот обычный ответ, который представляется многим до того бесспорным, что не оставляет никаких поводов к сомнению. Но такое объяснение, при всей его подкупающей простоте, совершенно ошибочно. Пылинки не только не легче воздуха, они тяжелее его в сотни, даже тысячи раз. Что такое «пылинка»? Мельчайшие частицы различных тяжелых тел: осколки камня или стекла, крупинки угля, дерева, металлов, волокна тканей и т. п. Разве все эти материалы легче воздуха? Простая справка в таблице удельных весов убедит вас, что каждый из них либо в несколько раз тяжелее воды, либо легче ее всего в 2–3 раза. А вода тяжелее воздуха раз в 800; следовательно, пылинки тяжелее его в несколько сот, если не тысяч раз. Теперь очевидна вся несообразность ходячего взгляда на причину плавания пылинок в воздухе.

Какова же истинная причина? Прежде всего надо заметить, что обычно мы неправильно представляем себе самое явление, рассматривая его как *плавание*. Плавают — в воздухе или жидкости — только такие тела, вес которых не превышает веса равного объема воздуха (или жидкости). Пылинки же превышают этот вес во много раз; поэтому *плавать* в воздухе они не могут. Они и не плавают, а *парят*, т. е. медленно опускаются, задерживаемые в своем падении сопротивлением воздуха. Падающая пылинка должна проложить себе путь между частицами воздуха, расталкивая их или увлекая с собой. На то и на другое расходуется энергия падения. Расход тем значительнее, чем больше поверхность тела (точнее — площадь поперечного сечения) по сравнению

*Портные-лилипуты снимают мерку с Гулливера* с весом. При падении крупных массивных тел мы не замечаем замедляющего действия сопротивления воздуха, так как их вес значительно преобладает над противодействующей силой.

Но посмотрим, что происходит с уменьшением тела. Геометрия поможет нам разобраться в этом. Нетрудно сообразить, что с уменьшением объема тела вес уменьшается гораздо больше, чем площадь поперечного сечения: уменьшение веса пропорционально *третьей* степени линейного сокращения, а ослабление сопротивления пропорционально поверхности, т. е. второй степени линейного уменьшения. Вообразите, что шар заменен другим, поперечник которого в 10 раз меньше: объем его меньше, чем у крупного шара, в $10 \times 10 \times 10 = 1000$ раз, а поверхность — только в $10 \times 10 = 100$ раз. Теперь понятно, почему для весьма мелких крупинок сопротивление воздуха так значительно по сравнению с их весом и почему скорость их падения уменьшается до едва заметной величины. Водяная капелька радиусом 0,001 мм падает в воздухе равномерно со скоростью 0,1 мм в секунду; достаточно ничтожного, неуловимого для нас волнения воздуха, чтобы помешать такому медленному падению. Вот почему в комнатах, где много ходят, пыли осаждается меньше, чем в нежилых помещениях, а днем меньше, чем ночью, — хотя, казалось бы, должно происходить обратное: осаждению мешают возникающие в воздухе вихревые течения, которых обычно почти не бывает в спокойном воздухе мало посещаемых помещений.

Если каменный кубик в 1 см высотою раздробить на кубические пылинки высотою в 0,0001 мм, то общая поверхность той же массы камня увеличится в 10 000 раз, и во столько же раз возрастет сопротивление воздуха ее движению. Пылинки нередко достигают именно таких размеров, и понятно, что сильно возросшее сопротивление воздуха совершенно меняет картину падения.

По той же причине «плавают» в воздухе облака. Давно отвергнут устарелый взгляд, будто облака состоят из водяных пузырьков, наполненных водяным паром. Облака — скопление огромного множества чрезвычайно мелких, но сплошных водяных капелек. Капельки эти хотя тяжелее воздуха раз в 800, все же почти не падают; они опускаются с едва заметною скоростью. Сильно замедленное падение объясняется, как и для пылинок, огромной их поверхностью по сравнению с весом.

Главная причина, обусловливающая все эти явления, — присутствие воздуха: в пустоте и пылинки и облака (если бы могли существовать) падали бы столь же стремительно, как и тяжелые камни.

## Глава одиннадцатая

# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИЯ

## КАК ПАХОМ ПОКУПАЛ ЗЕМЛЮ

Эту главу — необычное название которой станет понятно читателю из дальнейшего — начнем отрывком из общеизвестного рассказа Л. Н. Толстого «Много ли человеку земли нужно».

«— А цена какая будет? — говорит Пахом.

— Цена у нас одна: 1000 руб. за день.

Не понял Пахом.

— Какая же это мера — день? Сколько в ней десятин будет?

— Мы этого, — говорит, — не умеем считать. А мы за день продаем; сколько обойдешь в день, то и твое, а цена 1000 руб.

Удивился Пахом.

— Да ведь это, — говорит, — в день обойти земли много будет.

Засмеялся старшина.

— Вся твоя, — говорит. — Только один уговор: если назад не придешь в день к тому месту, с какого возьмешься, пропали твои деньги.

— А как же, — говорит Пахом, — отметить, где я пройду?

— А мы станем на место, где ты облюбуешь; мы стоять будем, а ты иди, делай круг, а с собой скребку возьми и, где надобно, замечай, на углах ямки рой, дернички клади; потом с ямки на ямку плугом пройдем. Какой хочешь круг забирай, только до захода солнца приходи к тому месту, с какого взялся. Что обойдешь, все твое.

Разошлись башкирцы. Обещались завтра на зорьке собраться, до солнца на место выехать.

—

Приехали в степь, заря занимается. Подошел старшина к Пахому, показал рукой.

— Вот, — говорит, — все наше, что глазом окинешь. Выбирай любую.

Снял старшина шапку лисью, поставил на землю.

— Вот, — говорит, — метка будет. Отсюда поди, сюда приходи. Что обойдешь, все твое будет.

Только брызнуло из-за края солнце, вскинул Пахом скребку на плечо и пошел в степь.

Отошел с версту, остановился, вырыл ямку. Пошел дальше. Отошел еще, вырыл еще другую ямку.

Верст 5 прошел. Взглянул на солнышко, — уже время об завтраке. „Одна упряжка прошла, — думает Пахом. — А их четыре во дню, рано еще заворачивать. Дай пройду еще верст пяток, тогда влево загибать начну“. Пошел еще напрямик. „Ну, — думает, — в эту сторону довольно забрал; надо загибать“. Остановился, вырыл ямку побольше и загнул круто влево.

Прошел еще и по этой стороне много; загнул второй угол. Оглянулся Пахом на шихан (бугорок): от тепла затуманился, а сквозь мару чуть виднеются люди на шихане. „Ну, — думает, — длинны стороны взял, надо эту покороче взять“. Пошел третью сторону. Посмотрел на солнце, — уж оно к полднику подходит, а по третьей стороне всего версты две прошел. И до места все те же верст 15. „Нет, — думает, — хоть кривая дача будет, а надо прямиком поспевать“.

Вырыл Пахом поскорее ямку и повернул прямиком к шихану.

Идет Пахом прямо на шихан, и тяжело уж ему стало. Отдохнуть хочется, а нельзя, — не поспеешь дойти до заката. А солнце уж недалеко от края.

Идет так Пахом; трудно ему, а все прибавляет да прибавляет шагу. Шел, шел — все еще далеко; побежал рысью... Бежит Пахом, рубаха и портки от пота к телу липнут, во рту пересохло. В груди как меха кузнечные раздуваются, а сердце молотком бьет.

Бежит Пахом из последних сил, а солнце уж к краю подходит. Вот-вот закатываться станет.

Солнце близко, да и место уж вовсе недалеко. Видит шапку лисью на земле и старшину, как он на земле сидит.

Взглянул Пахом на солнце, а оно до земли дошло, уже краешком заходить стало. Наддал из последних сил Пахом, надулся, взбежал на шихан. Видит — шапка. Подкосились ноги, и упал он наперед руками, до шапки достал.

— Ай, молодец! — закричал старшина: — много земли завладел.

Подбежал работник, хотел поднять его, а у него изо рта кровь течет, и он мертвый лежит...»

### Задача Льва Толстого (№ 62)

Отвлечемся от мрачной развязки этой истории и остановимся на ее геометрической стороне. Можно ли установить по данным, рассеянным в этом рассказе, сколько примерно десятин земли обошел Пахом? Задача — на первый взгляд как будто неразрешимая — решается, однако, довольно просто.

### Решение

Внимательно перечитывая рассказ и извлекая из него все геометрические указания, нетрудно убедиться, что полученных данных вполне достаточно для исчерпывающего ответа на поставленный вопрос. Можно даже начертить план обойденного Пахомом земельного участка. Прежде всего из рассказа ясно, что Пахом бежал по сторонам четырехугольника. О первой стороне его читаем:

*«Верст пять прошел... Пройду еще верст пяток; тогда влево загибать...»*

*К рассказу Л. Н. Толстого «Много ли человеку земли нужно»*

Значит, первая сторона четырехугольника имела в длину около 10 верст.

О второй стороне, составляющей прямой угол с первой, численных указаний в рассказе не сообщается.

Длина третьей стороны — очевидно, перпендикулярной ко второй, — указана в рассказе прямо: *«По третьей стороне всего версты две прошел»*.

Непосредственно дана и длина четвертой стороны: *«До места все те же верст 15»*[1].

По этим данным мы и можем начертить план обойденного Пахомом участка (рис. 147). В полученном четырехугольнике $ABCD$ сторона $AB = 10$ верстам; $CD = 2$ верстам; $AD = 15$ верстам; углы $B$ и $C$ — прямые. Длину $x$ неизвестной стороны $BC$ нетрудно вычислить, если провести из $D$ перпендикуляр $DE$ к $AB$ (рис. 148). Тогда в прямоугольном треугольнике $AED$ нам известны катет $AE = 8$ верст и гипотенуза AD = 15 верст. Неизвестный катет $ED = \sqrt{15^2 - 8^2} \approx 12{,}7$ версты.

Итак, вторая сторона имела в длину около 13 верст. Очевидно, Пахом (или Л. Н. Толстой) ошибся, считая вторую сторону короче первой.

Как видите, можно довольно точно начертить план того участка, который обежал Пахом. Несомненно Л. Н. Толстой имел перед глазами чертеж наподобие рис. 147, когда писал свой рассказ.

Теперь легко вычислить и площадь трапеции $ABCD$, состоящей из прямоугольника $EBCD$ и прямоугольного треугольника $AED$. Она равна

$$2 \times 13 \times ½ \times 8 \times 13 = 78 \text{ квадратным верстам.}$$

Вычисление по формуле трапеции дало бы, конечно, тот же результат:

$$\frac{AB + CD}{2} \times BC = \frac{10 + 2}{2} \times 13 = 78 \text{ квадратных верст.}$$

Мы узнали, что Пахом обежал обширный участок площадью в 78 квадратных верст, или около 8000 десятин. Десятина обошлась ему в 12,5 копеек.

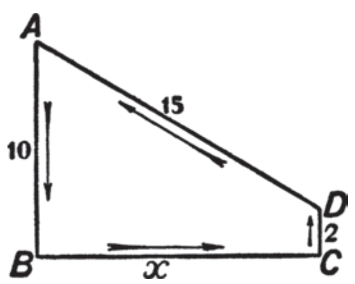



*Рис. 147*

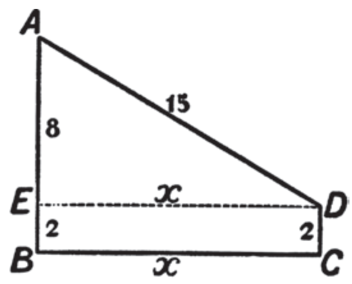



*Рис. 148*

[1] Здесь непонятно, однако, как мог Пахом с такого расстояния различать людей на шихане.

## ТРАПЕЦИЯ ИЛИ ПРЯМОУГОЛЬНИК?

**Задача № 63**

В роковой для своей жизни день Пахом прошел 10 + 13 + 2 + 15 = 40 верст, идя по сторонам трапеции. Его первоначальным намерением было идти по сторонам прямоугольника; трапеция же получилась случайно, в результате плохого расчета. Интересно определить: выгадал ли он или прогадал оттого, что участок его оказался не прямоугольником, а трапецией? В каком случае должен он был получить бо́льшую площадь земли?

**Решение**

Прямоугольников с обводом в 40 верст может быть очень много, и каждый имеет другую площадь. Вот ряд примеров:

14 × 6 = 84 кв. верст
13 × 7 = 91 » »
12 × 8 = 96 » »
11 × 9 = 99 » »

Мы видим, что у всех этих фигур, при одном и том же периметре в 40 верст, площадь больше, чем у нашей трапеции. Однако, возможны и такие прямоугольники с периметром в 40 верст, площадь которых меньше, чем у трапеции:

18 × 2 = 36 кв. верст
19 × 1 = 19 » »
19½ × ½ = 9¾ » »

Следовательно, на вопрос задачи нельзя дать определенного ответа. Есть прямоугольники с большею площадью, чем трапеция, но есть и с меньшею при одном и том же обводе. Зато можно дать вполне определенный ответ на вопрос: какая из всех прямоугольных фигур с заданным периметром заключает самую большую площадь? Сравнивая наши прямоугольники, мы замечаем, что чем меньше разница в длине сторон, тем площадь прямоугольника больше. Естественно заключить, что, когда этой разницы не будет вовсе, т. е. когда прямоугольник превратится в квадрат, площадь фигуры достигнет наибольшей величины. Она будет равна тогда 10 × 10 = 100 кв. верст. Легко видеть, что этот квадрат действительно превосходит по площади любой прямоугольник одинакового с ним периметра. Пахому следовало идти по сторонам квадрата, чтобы получить участок наибольшей площади, — на 22 кв. версты больше, чем он успел охватить.

## ЗАМЕЧАТЕЛЬНОЕ СВОЙСТВО КВАДРАТА

Замечательное свойство квадрата — заключать в своих границах наибольшую площадь по сравнению со всеми другими прямоугольниками того же периметра — многим неизвестно. Приведем поэтому строгое доказательство этого положения.

Обозначим периметр прямоугольной фигуры через $P$. Если взять квадрат с таким периметром, то каждая сторона его должна равняться $\frac{P}{4}$. Докажем, что, укорачивая одну его сторону на какую-нибудь величину $b$ при таком же удлинении смежной стороны, мы получим прямоугольник строго одинакового с ним периметра, но меньшей площади. Другими словами, докажем, что площадь $\left(\frac{P}{4}\right)^2$ квадрата больше площади $\left(\frac{P}{4}-b\right)\left(\frac{P}{4}+b\right)$ прямоугольника:

$$\left(\frac{P}{4}\right)^2 > \left(\frac{P}{4}-b\right)\left(\frac{P}{4}+b\right).$$

Так как правая сторона этого неравенства равна $\left(\frac{P}{4}\right)^2 - b^2$, то все выражение принимает вид

$$0 > -b^2, \text{ или } b^2 > 0.$$

Но последнее неравенство очевидно: квадрат всякого количества, положительного или отрицательного, больше 0. Следовательно, справедливо и первоначальное неравенство, которое привело нас к этому.

Итак, квадрат имеет наибольшую площадь из всех прямоугольников с таким же периметром.

Отсюда следует, между прочим, и то, что из всех прямоугольных фигур с одинаковыми площадями квадрат имеет *наименьший периметр*. В этом можно убедиться следующим рассуждением. Допустим, что это неверно и что существует такой прямоугольник $A$, который при равной с квадратом $B$ площади имеет периметр меньший, чем у него. Тогда, начертив квадрат $C$ того же периметра, как у прямоугольника $A$, мы получим квадрат, имеющий бóльшую площадь, чем у $A$, и, следовательно, бóльшую, чем у квадрата $B$. Что же у нас вышло? Что квадрат $C$ имеет периметр меньший, чем квадрат $B$, а площадь бóльшую, чем он. Это очевидно невозможно: раз сторона квадрата меньше, то и площадь должна быть меньше. Значит, нельзя было допустить существования прямоугольника $A$, который при одинаковой площади имеет периметр меньший, чем у квадрата. Другими словами, из всех прямоугольников с одинаковой площадью наименьший периметр имеет квадрат.

Знание этих свойств квадрата помогло бы Пахому правильно рассчитать свои силы и получить прямоугольный участок наибольшей площади. Зная, что он может пройти в день без напряжения, скажем, 36 верст, он пошел бы по границе квадрата со стороною 9 верст и к вечеру был бы обладателем участка в 81 кв. версту, — на 3 кв. версты больше, чем он получил со смертельным напряжением сил. И наоборот, если бы он наперед ограничился какою-нибудь определенною площадью прямоугольного участка, например в 36 кв. верст, то мог бы достичь результата с наименьшей затратой сил, идя по границе квадрата, сторона которого — 6 верст.

## УЧАСТКИ ДРУГОЙ ФОРМЫ

Но, может быть, Пахому еще выгоднее было бы выкроить себе участок вовсе не прямоугольной формы, а какой-нибудь другой — четырехугольной, треугольной, пятиугольной и т. д.?

Этот вопрос может быть рассмотрен строго математически; однако, из опасения утомить нашего добровольного читателя, мы не станем входить здесь в это рассмотрение и познакомим его только с результатами.

Можно доказать, во-первых, что из всех четырехугольников с одинаковым периметром наибольшую площадь имеет квадрат. Поэтому, желая иметь четырехугольный участок, Пахом никакими ухищрениями не мог бы овладеть более чем 100 кв. верстами (считая, что максимальный дневной пробег его — 40 верст).

Во-вторых, можно доказать, что квадрат имеет бóльшую площадь, чем всякий треугольник равного периметра. Равносторонний треугольник такого же периметра имеет сторону $40/3 = 13\tfrac{1}{3}$ версты, а площадь (по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где $S$ — площадь, а $a$ — сторона) —

$$\frac{1}{4}\left(\frac{40}{3}\right)^2\sqrt{3} = 77 \text{ кв. верст},$$

т. е. меньше даже, чем у той трапеции, которую Пахом обошел. Дальше (с. 489) будет доказано, что из всех треугольников с равными периметрами *равносторонний* обладает наибольшею площадью. Значит, если даже этот наибольший треугольник имеет площадь, меньшую площади квадрата, то и все прочие треугольники того же периметра по площади меньше, чем квадрат.

Но если будем сравнивать площадь квадрата с площадью пятиугольника, шестиугольника и т. д. равного периметра, то здесь первенство его прекращается: *правильный* пятиугольник обладает большею площадью, правильный шестиугольник — еще большею, и т. д. Легко убедиться в этом на примере правильного шестиугольника. При периметре в 40 верст его сторона $40/6$, площадь (по формуле $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$) равна —

$$\frac{3}{2}\left(\frac{40}{6}\right)^2\sqrt{3} = 115 \text{ кв. верст}.$$

Избери Пахом для своего участка форму правильного шестиугольника, он при том же напряжении сил овладел бы площадью на 115 – 78, т. е. на 37 кв. верст больше, чем в действительности, и на 15 кв. верст больше, чем дал бы ему квадратный участок (но для этого, конечно, пришлось бы ему пуститься в путь с угломерными инструментами).

**Задача № 64**

Из шести спичек сложить фигуру с наибольшей площадью.

**Решение**

Из шести спичек можно составить довольно разнообразные фигуры: разносторонний треугольник, прямоугольник, множество параллелограммов, целый ряд неправильных пятиугольников, ряд неправильных шестиугольников и, наконец, правильный шестиугольник. Геометр, не сравнивая между собою площадей этих фигур, заранее знает, какая фигура имеет наибольшую площадь: правильный шестиугольник.

## ФИГУРА С НАИБОЛЬШЕЮ ПЛОЩАДЬЮ

Можно бы доказать строго геометрически, что чем больше сторон у правильного многоугольного участка, тем бóльшую площадь заключает он в одних и тех же границах. А самую большую площадь при данном периметре охватывает окружность. Если бы Пахом бежал по кругу, то, пройдя те же 40 верст, он получил бы площадь в

$$\pi\left(\frac{40}{2\pi}\right)^2 = 127 \text{ кв. верст.}$$

Большею площадью, при данном периметре, не может обладать никакая другая фигура, безразлично — прямолинейная или криволинейная.

Мы позволим себе несколько остановиться на этом удивительном свойстве круга заключать в своих границах бóльшую площадь, чем всякая другая фигура любой формы, имеющая тот же периметр. Может быть, некоторые читатели полюбопытствуют узнать, каким способом доказываются подобные положения. Приводим далее доказательство — правда, не вполне строгое — этого свойства круга, доказательство, предложенное знаменитым германским математиком Яковом Штейнером. Оно довольно длинно, но те, кому оно покажется утомительным, могут пропустить его без ущерба для понимания дальнейшего.

Надо доказать, что фигура, имеющая при данном периметре наибольшую площадь, есть круг. Прежде всего установим, что искомая фигура должна быть выпуклой. Это значит, что всякая ее хорда должна полностью располагаться внутри фигуры. Пусть у нас имеется фигура *AaBC* (рис. 149), имеющая

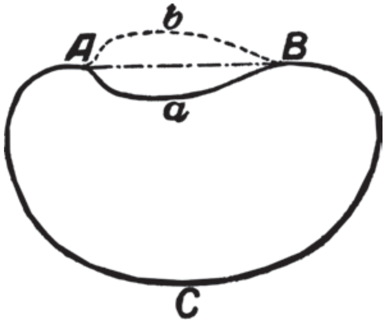



*Рис. 149*

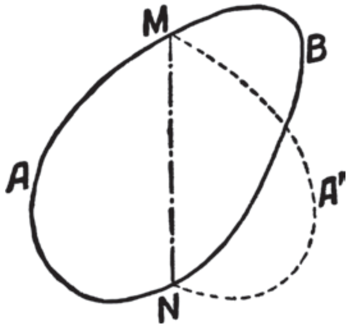



*Рис. 150*

внешнюю хорду *AB*. Заменим дугу *a* дугою *b*, симметричною с нею. От такой замены периметр фигуры *ABC* не изменится, площадь же явно увеличится. Значит, фигуры вроде *AaBC* не могут быть теми, которые при одинаковом периметре заключают наибольшую площадь.

Итак, искомая фигура есть фигура *выпуклая*. Далее, мы можем наперед установить еще и другое свойство этой фигуры: всякая хорда, которая делит пополам ее периметр, рассекает пополам и ее площадь. Пусть фигура *AMBN* (рис. 150) есть искомая, и пусть хорда *MN* делит ее периметр пополам. Докажем, что площадь *AMN* равна площади *MBN*. В самом деле, если бы какая-либо из этих частей была по площади больше другой, — например, *AMN* > *MNB*, — то, перегнув фигуру *AMN* по *MN*, мы получили бы фигуру *AMA'N*, площадь которой больше, чем у первоначальной фигуры *AMBN*, периметр же одинаков с нею. Значит, фигура *AMBN*, в которой хорда, рассекающая периметр пополам, делит площадь на неравные части, не может быть искомая (т. е. не может иметь *наибольшую* площадь при данном периметре).

Прежде чем идти далее, докажем еще следующую вспомогательную теорему: из всех треугольников с двумя данными сторонами наибольшую площадь имеет тот, у которого стороны эти заключают прямой угол. Чтобы доказать это, вспомним тригонометрическое выражение площади $S$ треугольника со сторонами $a$ и $b$ и углом между ними $C$:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Выражение это будет, очевидно, наибольшим (при данных сторонах) тогда, когда $\sin C$ примет наибольшее значение, т. е. будет равен единице. Но угол, синус которого равен 1, есть прямой, — что и требовалось доказать.

Теперь можем приступить к основной задаче — к доказательству того, что из всех фигур с периметром p наибольшую площадь ограничивает круг. Чтобы убедиться в этом, попробуем допустить существование некруговой выпуклой

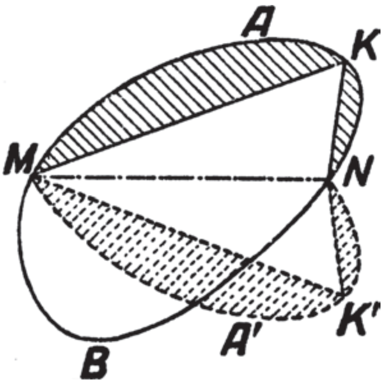



*Рис. 151*

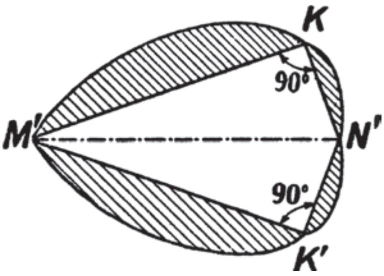



*Рис. 152*

фигуры *MANB* (рис. 151), которая обладает этим свойством. Проведем в ней хорду *MN*, делящую пополам ее периметр; она же — как мы уже знаем — разделит пополам и площадь фигуры. Перегнем половину *MAN* по линии *MN* так, чтобы она расположилась симметрично (*MA'N*). Заметим, что фигура *MANA'* обладает тем же периметром и тою же площадью, что и первоначальная фигура *MANB*. Так как дуга *MAN* не есть полуокружность (иначе нечего было бы и доказывать), то на ней должны находиться такие точки, из которых отрезок *MN* виден не под прямым углом. Пусть *K* такая точка, а *K'* — ей симметричная, т. е. углы *K* и *K'* — не прямые. Раздвигая (или сдвигая) стороны *MK*, *KN*, *M'K*, *NK'*, мы можем сделать заключенный между ними угол прямым и получим тогда равные прямоугольные треугольники. Эти треугольники приложим друг к другу гипотенузами, как на рис. 152, и присоединим к ним в соответствующих местах заштрихованные сегменты. Получим фигуру *M'KN'K'*, обладающую тем же периметром, что и первоначальная, но, очевидно, бóльшею площадью (потому что прямоугольные треугольники *M'KN'* и *M'K'N'* имеют бóльшую площадь, чем непрямоугольные *MKN* и *MK'N*). Значит, никакая некруговая фигура не может обладать при данном периметре наибольшею площадью. И только в случае круга мы указанным способом не могли бы построить фигуры, имеющей при том же периметре еще бóльшую площадь.

Вот каким рассуждением можно доказать, что круг есть фигура, обладающая при данном периметре наибольшею площадью.

Легко доказать справедливость и такого положения: из всех фигур равной площади круг имеет наименьший периметр. Для этого нужно применить к кругу те рассуждения, которые мы раньше приложили к квадрату (см. с. 482).

## ГВОЗДИ

**Задача №65**

Какой гвоздь должен крепче держаться — круглый, квадратный или треугольный, — если они забиты одинаково глубоко и имеют одинаковую площадь поперечного сечения?

**Решение**

Будем исходить из того, что крепче держится тот гвоздь, который соприкасается с окружающим материалом по большей поверхности. У какого же из наших гвоздей бóльшая боковая поверхность? Мы уже знаем, что при равных площадях периметр квадрата меньше периметра треугольника, а окружность меньше периметра квадрата. Если сторону квадрата принять за единицу, то вычисление дает для этих трех величин значения: 4,53; 4; 3,55. Следовательно, крепче других должен держаться треугольный гвоздь.

Таких гвоздей, однако, не изготовляют, — по крайней мере, в продаже они не встречаются. Причина кроется, вероятно, в рутинной приверженности покупателей к старым, привычным образцам[1].

## ТЕЛО НАИБОЛЬШЕГО ОБЪЕМА

Свойством, сходным со свойством круга, обладает и шаровая поверхность: она обхватывает наибольший объем при данной величине поверхности. И, наоборот, из всех тел одинакового объема наименьшую поверхность имеет шар. Эти свойства не лишены значения в практической жизни. Шарообразный самовар обладает меньшей поверхностью, чем цилиндрический или какой-либо иной формы, вмещающий столько же стаканов; а так как тело теряет теплоту только с поверхности, то шарообразный самовар остывает медленнее, чем всякий другой того же объема. Напротив, резервуар градусника быстрее нагревается и охлаждается (т. е. принимает температуру окружающих предметов), когда ему придают форму не шарика, а цилиндра.

По той же причине земной шар, — если он действительно состоит из твердой оболочки и жидкого ядра, — должен уменьшаться в объеме, т. е. сжиматься, уплотняться, от всех причин, изменяющих форму его поверхности: его внутреннему содержимому должно становиться тесно всякий раз, когда наружная его форма претерпевает какое-либо изменение, отклоняясь от шара. Возможно, что этот геометрический факт находится в связи с землетрясениями и вообще с тектоническими явлениями; но об этом должны иметь суждение геологи.

---

[1] Такие гвозди существуют, но следует помнить, что они не только крепче держатся — при необходимости их труднее и извлечь (*примеч. ред.*).

## ПРОИЗВЕДЕНИЕ РАВНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ

Задачи вроде тех, которыми мы сейчас занимались, рассматривают вопрос со стороны как бы экономической: при данной затрате сил (например, при прохождении 40-верстного пути) как достигнуть наивыгоднейшего результата (охватить наибольший участок)? Отсюда и заглавие настоящего отдела этой книги: «Геометрическая экономия». Но это — вольность популяризатора; в математике вопросы подобного рода носят другое название: задачи «на максимум и минимум». Они могут быть весьма разнообразны по сюжетам и по степени трудности. Многие разрешаются лишь приемами высшей математики; но немало есть и таких, для решения которых достаточно самых элементарных сведений. В дальнейшем будет рассмотрен ряд подобных задач из области геометрии, которые мы будем решать, пользуясь одним любопытным свойством произведения равных множителей.

Для случая двух множителей свойство это уже знакомо нам. Мы знаем, что площадь квадрата больше, чем площадь всякого прямоугольника такого же периметра. Если перевести это геометрическое положение на язык арифметики, оно будет означать следующее: когда требуется разбить число на две такие части, чтобы произведение их было наибольшим, то следует делить пополам. Например, из всех произведений

$$13 \times 17,\ 16 \times 14,\ 12 \times 18,\ 11 \times 19,\ 10 \times 20,\ 15 \times 15$$

и т. д., сумма множителей которых равна 30, наибольшим будет 15 × 15 — даже если сравнивать и произведения дробных чисел ($14\frac{1}{2} \times 15\frac{1}{2}$ и т. п.).

То же справедливо и для произведений трех множителей, имеющих постоянную сумму: произведение их достигает наибольшей величины, когда множители равны между собою. Это прямо вытекает из предыдущего. Пусть три множителя $x$, $y$, $z$ в сумме равны $a$:

$$x + y + z = a.$$

Допустим, что $x$ и $y$ не равны между собою. Если заменим каждый из них полусуммою $\frac{x+y}{2}$, то сумма множителей не изменится:

$$\frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2} + z = x + y + z = a.$$

Но так как, согласно предыдущему,

$$\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x+y}{2}\right) > xy,$$

то произведение трех множителей

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right) z$$

больше произведения xyz:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)z > xyz.$$

Вообще, если среди множителей $xyz$ есть хотя бы два неравных, то можно всегда подобрать числа, которые, не изменяя общей суммы, дадут большее произведение, чем $xyz$. И только когда все три множителя равны, произвести такой замены нельзя. Следовательно, при $x + y + z = a$ произведение $xyz$ будет наибольшим тогда, когда

$$x = y = z.$$

Воспользуемся теперь знанием этого свойства равных множителей, чтобы решить несколько интересных задач.

## ТРЕУГОЛЬНИК С НАИБОЛЬШЕЙ ПЛОЩАДЬЮ

### Задача № 66

Какую форму нужно придать треугольнику, чтобы при данной сумме его сторон он имел наибольшую площадь?

Мы уже заметили раньше (с. 483), что этим свойством обладает треугольник равносторонний. Но как это доказать?

### Решение

Площадь $S$ треугольника со сторонами $a$, $b$, $c$ и периметром $a + b + c = 2p$ выражается, как известно из курса геометрии, так:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

откуда

$$\frac{S^2}{p} = (p-a)(p-b)(p-c).$$

Площадь $S$ треугольника будет наибольшей тогда же, когда станет наибольшей величиной и ее квадрат $S^2$, или выражение $\frac{S^2}{p}$, где $p$, полупериметр, есть, согласно условию, величина неизменная. Но так как обе части равенства получают наибольшее значение одновременно, то вопрос сводится к тому, при каком условии произведение

$$(p-a)(p-b)(p-c)$$

становится наибольшим. Заметив, что сумма этих трех множителей есть величина постоянная,

$$p-a+p-b+p-c = 3p-(a+b+c) = 3p-2p = p,$$

мы заключаем, что произведение их достигнет наибольшей величины тогда, когда множители станут равны, т. е. когда осуществится равенство

$$p - a = p - b = p - c,$$

откуда

$$a = b = c.$$

Итак, треугольник имеет при данном периметре наибольшую площадь тогда, когда стороны его равны между собою.

## САМЫЙ ТЯЖЕЛЫЙ БРУС

**Задача № 67**

Из цилиндрического бревна нужно выпилить брус наибольшего веса. Как это сделать?

**Решение**

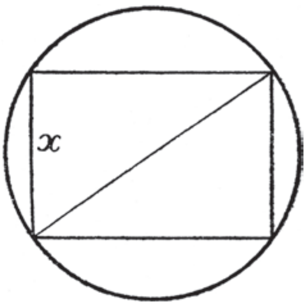



*Рис. 153*

Задача, очевидно, сводится к тому, чтобы вписать в круг прямоугольник с наибольшей площадью. Хотя после всего сказанного читатель уже подготовлен к мысли, что таким прямоугольником будет квадрат, все же интересно строго доказать это положение.

Обозначим одну сторону искомого прямоугольника через $x$, тогда другая выразится через $\sqrt{4R^2 - x^2}$, где $R$ — радиус кругового сечения бревна. Площадь прямоугольника

$$S = x\sqrt{4R^2 - x^2}, \text{ откуда}$$

$$S^2 = x^2\,(4R^2 - x^2).$$

Так как сумма множителей $x^2$ и $4R^2 - x^2$ есть величина постоянная ($x^2 + 4R^2 - x^2 = 4R^2$), то произведение их $S^2$ будет наибольшим при $x^2 = 4R^2 - x^2$, т. е. при $x = R\sqrt{2}$. Тогда же достигнет наибольшей величины и $S$, т, е. площадь искомого прямоугольника.

Итак, одна сторона прямоугольника с наибольшей площадью $= R\sqrt{2}$, т. е. стороне вписанного квадрата. Брус имеет наибольший объем, если сечение его есть квадрат, вписанный в сечение цилиндрического бревна.

## ИЗ КАРТОННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

**Задача № 68**

Имеется кусок картона треугольной формы. Нужно вырезать из него параллельно данному основанию и высоте прямоугольник наибольшей площади.

**Решение**

Пусть (рис. 154) $ABC$ есть данный треугольник, а $MNOP$ — тот прямоугольник, который должен остаться после обрезки. Из подобия треугольников $ABC$ и $NBO$ имеем

$$\frac{BD}{BE} = \frac{AC}{NO}, \text{ откуда } NO = \frac{BE \times AC}{BD}.$$

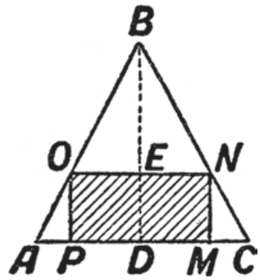


*Рис. 154*

Обозначив одну сторону $NO$ искомого прямоугольника через $y$, ее расстояние $BE$ от вершины треугольника через $x$, основание $AC$ данного треугольника через $a$, а его высоту $BD$ — через $h$, переписываем полученное ранее выражение в таком виде:

$$y = \frac{ax}{h}.$$

Площадь $S$ искомого прямоугольника $MNOP$ равна

$$MN \times NO = (BD - BE)\,NO = (h - x)\,y = (h - x)\,\frac{ax}{h}.$$

Следовательно,

$$\frac{Sh}{a} = (h - x)\,x.$$

Площадь $S$ будет наибольшей тогда же, когда и произведение $\frac{Sh}{a}$, а следовательно, тогда, когда достигнет наибольшей величины произведение множителей $(h - x)$ и $x$. Но сумма $h - x + x = h =$ постоянной величине. Значит, произведение их максимальное, когда $h - x = x$, т. е.

$$x = \frac{h}{2}.$$

Мы узнали, что сторона $NO$ искомого прямоугольника проходит через середину высоты треугольника и, следовательно, соединяет середины его сторон. Значит, эта сторона прямоугольника $\frac{a}{2}$, а другая $\frac{h}{2}$.

## ЗАТРУДНЕНИЯ ЖЕСТЯНИКА

**Задача № 69**

Жестянику заказали изготовить из квадратного куска жести в 60 см ширины четырехугольную коробку без крышки и поставили условием, чтобы коробка имела наибольшую вместимость. Жестяник долго примерял, какой ширины нужно для этого отогнуть края, но не мог прийти к определенному решению. Не удастся ли читателю выручить его из затруднения?

**Решение**

Пусть ширина отгибаемых полос $x$ (рис. 155). Тогда ширина квадратного дна коробки будет равна $60 - 2x$; объем же $v$ коробки выразится произведением

$$v = (60 - 2x)\,(60 - 2x)\,x.$$

При каком $x$ это произведение имеет наибольшее значение? Если бы сумма трех множителей была постоянна, произведение было бы наибольшим в случае их равенства. Но здесь сумма множителей

$$60 - 2x + 60 - 2x + x = 120 - 3x$$

не есть постоянная величина, так как изменяется с изменением $x$. Однако нетрудно добиться того, чтобы сумма трех множителей была постоянной: для этого достаточно лишь умножить обе части равенства на 4. Получим

$$4v = (60 - 2x)(60 - 2x)\,4x.$$

Сумма этих множителей равна

$$60 - 2x + 60 - 2x + 4x = 120,$$

величине постоянной. Значит, произведение этих множителей достигает наибольшей величины при их равенстве, т. е. когда

$$60 - 2x = 4x, \quad \text{откуда} \quad x = 10.$$

Тогда же и $4v$, а с ними и $v$ достигнут своего максимума.

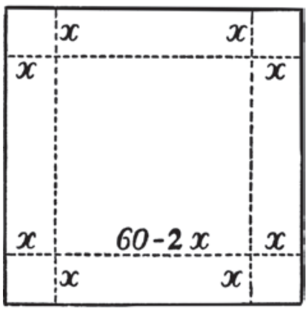
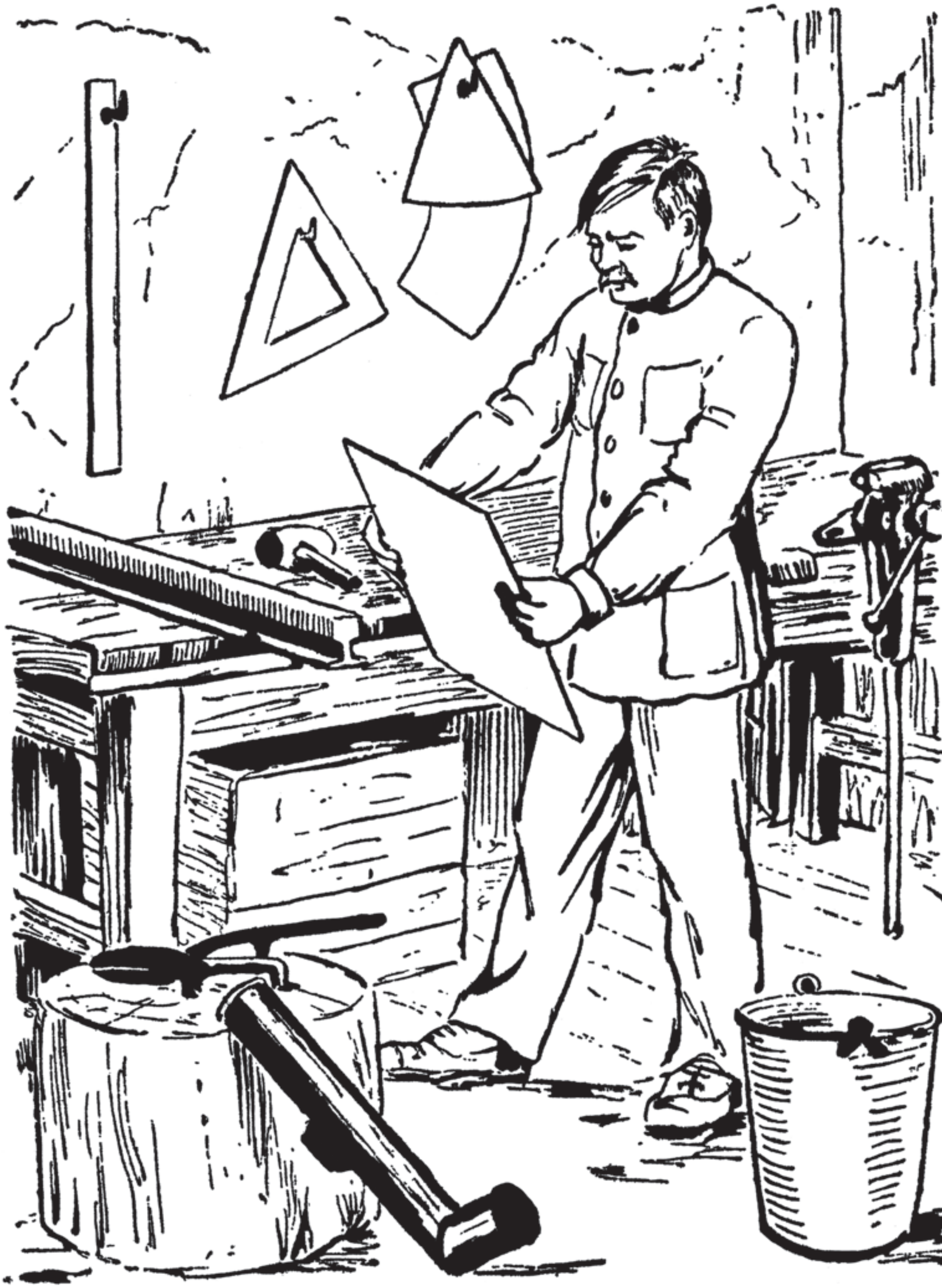



*Рис. 155*



*Затруднение жестяника*

Итак, коробка получится наибольшего объема, если у жестяного листа отогнуть 10 см. [1] Этот наибольший объем равен $40 \times 40 \times 10 = 16\,000$ см$^3$. Отогнув на сантиметр меньше или больше, мы уменьшим объем коробки. Действительно:

$$9 \times 42 \times 42 = 15\,900 \text{ см}^3,$$
$$11 \times 38 \times 38 = 15\,900 \text{ см}^3, \text{ —}$$

в обоих случаях меньше 16 000 см$^3$.

## ЗАТРУДНЕНИЕ ТОКАРЯ

### Задача № 70

Токарю дан конус и поручено выточить из него цилиндр так, чтобы сточено было возможно меньше материала. Токарь стал размышлять о форме искомого цилиндра: сделать ли его высоким, хотя и узким (рис. 156), или, наоборот, широким, зато низким (рис. 157). Он никак не мог решить, при какой форме цилиндр получится наибольшего объема, т. е. будет сточено меньше материала. Как он должен поступить?

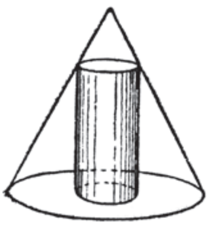


*Рис. 156*

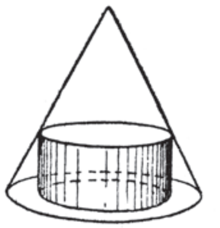


*Рис. 157*

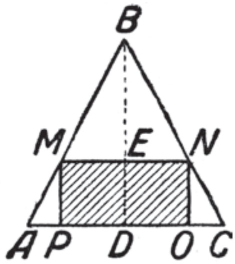


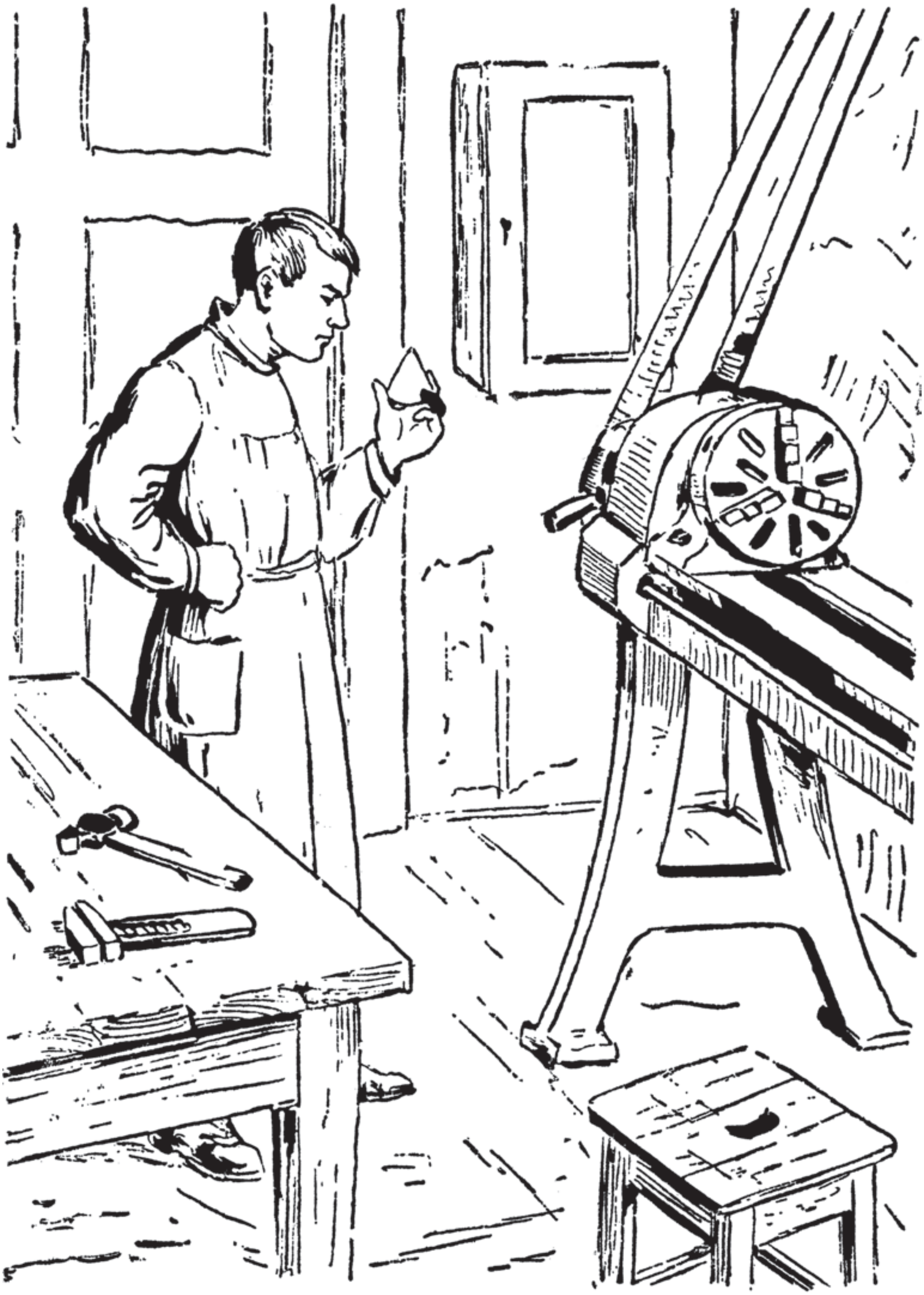

*Рис. 158*

### Решение

Задача требует внимательного геометрического рассмотрения. Пусть $ABC$ (рис. 158) — сечение конуса, $BD$ — его высота, которую обозначим через $h$, радиус основания $AD = DC$ обозначим через $R$. Цилиндр, который можно из конуса выточить, имеет сечение $MNOP$. Найдем, на каком расстоянии $BE = x$ от вершины $B$ должно находиться верхнее основание цилиндра, чтобы объем его был наибольший.

---

[1] Решая задачу в общем виде, найдем, что при ширине $a$ квадратного листа следует для получения коробки наибольшего объема отогнуть полоски шириною $x = \frac{1}{6}a$, потому что произведение $(a - 2x)(a - 2x)x$ или $(a - 2x)(a - 2x)4x$ наибольшее при $a - 2x = 4x$.



*Затруднение токаря*

Радиус $r$ основания цилиндра ($PD$ или $ME$) легко найти из пропорции

$$\frac{ME}{AD} = \frac{BE}{BD}, \text{ т. е. } \quad \frac{r}{R} = \frac{x}{h},$$

откуда

$$r = \frac{Rx}{h}.$$

Высота $ED$ цилиндра $= h - x$. Следовательно, объем его

$$v = \pi \left(\frac{Rx}{h}\right)^2 (h - x) = \pi \frac{R^2x^2}{h} (h - x),$$

откуда

$$\frac{vh}{\pi R^2} = x^2 (h - x).$$

В выражении $\frac{vh}{\pi R^2}$ величины $h$, $\pi$ и $R$ постоянные, и только $v$ переменная. Мы желаем разыскать такое $x$, при котором $v$ делается наибольшим. Но, очевидно, $v$ станет наибольшим одновременно с $\frac{vh}{\pi R^2}$, т. е. с $x^2 (h - x)$. Когда же это последнее выражение становится наибольшим? Мы имеем здесь три переменных множителя $x$, $x$ и $(h - x)$. Если бы их сумма была постоянной, произведение было бы наибольшим тогда, когда множители были бы равны. Этого постоянства суммы легко добиться, если обе части последнего равенства умножить на 2. Тогда получим:

$$\frac{2vh}{\pi R^2} = x^2 (2h - 2x).$$

Теперь три множителя правой части имеют постоянную сумму

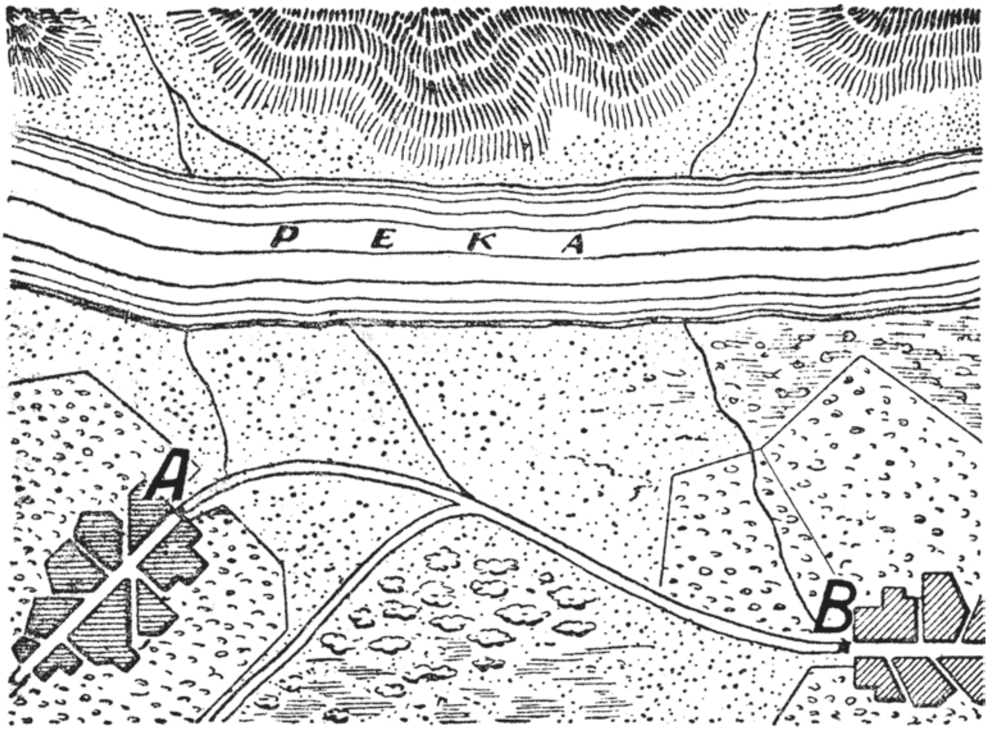
$$x + x + 2h - 2x = 2h.$$

Следовательно, произведение их будет наибольшим, когда все множители равны, т. е.

$$x = 2h - 2x, \text{ и } x = \frac{2h}{3}.$$

Тогда же станет наибольшим и выражение $\frac{2vh}{\pi R^2}$, а с ним вместе и объем $v$ цилиндра.

Теперь мы знаем, как должен быть выточен искомый цилиндр: его верхнее основание должно отстоять от вершины на ⅔ его высоты.




## КРАТЧАЙШИЙ ПУТЬ

В заключение рассмотрим задачу на «максимум и минимум», разрешаемую крайне простым геометрическим построением.

**Задача № 71**

У берега реки надо построить водонапорную башню, из которой вода доставлялась бы по трубам в селения *A* и *B*.

В какой точке нужно ее соорудить, чтобы общая длина труб от башни до обоих селений была наименьшей?

**Решение**

Задача сводится к отысканию кратчайшего пути от *A* к берегу и затем к *B*.

Допустим, что искомый путь есть *ACB* (рис. 159). Перегнем чертеж около *CN*. Получим точку *B′*. Если *ACB* есть кратчайший путь, то, так как *CB′* = *CB*, путь *ACB′* должен быть короче всякого иного (например, *ADB′*). Это будет лишь в том случае, когда точка *C* лежит на прямой *AB′*: тогда всякий иной путь от *A* до *B′*, как ломаный, будет длиннее. Значит, для нахождения кратчайшего пути нужно найти лишь точку *C* пересечения прямой *AB′* с линией берега. Тогда, соединив *C* и *B*, найдем обе части кратчайшего пути от *A* до *B*.

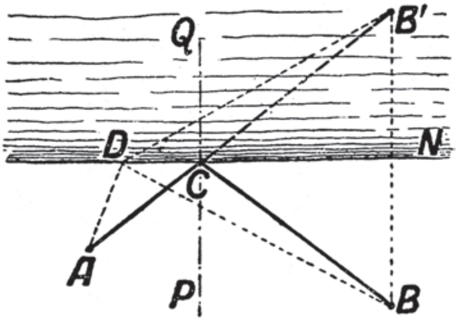



*Рис. 159*

Проведя в точке $C$ перпендикуляр к $CN$, легко видеть, что углы $ACP$ и $BCP$, составляемые обеими частями кратчайшего пути с этим перпендикуляром, равны между собою (уг. $ACP$ = уг. $B'CQ$ = уг. $BCP$).

Таков, как известно, закон следования светового луча, когда он отражается от зеркала: угол падения равен углу отражения. Отсюда следует, что световой луч при отражении избирает *кратчайший* путь, — вывод, который был известен еще древнему физику и геометру Герону Александрийскому две тысячи лет назад.

Другие примеры задач такого же рода, разрешаемых простым геометрическим построением, мы уже имели ранее в главе «Геометрия у реки». Читатель найдет также ряд задач подобного типа в нашей книге «Занимательная алгебра», в отделе квадратных уравнений.

Я. И. ПЕРЕЛЬМАН

# ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА


«ВРЕМЯ» 1927

Текст и иллюстрации воспроизводятся по изданиям:
*Перельман Я. И. Занимательная математика. — Л. : Время, 1927*
*Перельман Я. И. Занимательная математика. — 2-е изд. — Л. : Время, 1928*
*Перельман Я. И. Занимательная математика в рассказах. — 3-е изд. — Л. : Время, 1929*

Обложка издания 1927 г.

## Предисловие ко второму изданию

В поисках средств для оживления в широких кругах интереса к математике мне пришла мысль собрать ряд произведений, трактующих математические темы в беллетристической или полубеллетристической форме, и предложить их читателю с соответствующими комментариями. Число таких произведений, впрочем, весьма ограничено. Этим объясняются скромные размеры настоящего сборника. Однако затрагиваемые в нем математические темы все же довольно разнообразны: относительность пространства и времени, четырехмерный мир, расчеты из области небесной механики, вопросы математической географии, комбинаторика и исполинские числа, приближенные вычисления, приложение математического анализа к играм, неопределенный анализ, уравнения. Можно надеяться, что этот небольшой сборник натолкнет иных читателей на более серьезные размышления и побудит к систематическому ознакомлению с тем или иным отделом математики.

Предлагаемый сборник является первым известным мне опытом подобного рода.

—

Настоящее, второе издание было пополнено очерком составителя «Пирамида Хеопса и ее тайны», сопровождающимся краткой статьей о действиях над приближенными числами. Исправлены, кроме того, опечатки первого издания.

*Я. П.*

## НА МЫЛЬНОМ ПУЗЫРЕ[1]

*Рассказ Курда Лассвица*

### I

— Дядя Вендель! А дядя Вендель! Какой большой мыльный пузырь, смотри... Что за чудесные краски! Откуда такие? — кричал мой сынишка из окна в сад, куда он сбрасывал свои пестрые мыльные пузыри.

Дядя Вендель сидел со мной в тени высокого дерева, и сигары наши улучшали чистый воздух прелестного летнего дня.

— Гм! — проворчал, обращаясь ко мне, дядя Вендель. — Ну-ка, объясни ему! Желал бы я видеть, как ты с этим справишься. Интерференция в тонких пластинках, не так ли? Волны различной длины; полосы, не покрывающие друг друга, и т. д. Много бы из этого понял мальчуган! Гм...

---

[1] Даровитого германского математика, физика, философа и беллетриста Курда Лассвица (1848–1910) часто называют «немецким Жюлем Верном», так как он был первым удачным последователем знаменитого французского романиста. Особенно широкую известность получил его большой астрономический роман «На двух планетах» (1897) — одно из лучших произведений научной фантастики. Печатаемые в настоящем сборнике два его рассказа появляются в русском переводе впервые.

Рассказ «На мыльном пузыре» написан в 1887 г. Он приведен здесь с незначительными сокращениями (исключены излишние длинноты).

Дядя Вендель сделал уже ряд открытий. В сущности, он ничего, кроме открытий, и не делал. Его квартира была настоящая лаборатория — наполовину мастерская алхимика, наполовину — современный физический кабинет. Удостоиться проникнуть в него было большою честью. Все открытия свои он держал в секрете. Лишь изредка, в тесном кругу, приподнимал он немного завесу своих тайн. И тогда я изумлялся его учености, а еще больше — глубине проникновения в научные методы, в эволюцию культурных достижений. Но немыслимо было убедить его выступить публично со своими взглядами, а следовательно, и с открытиями, которые, как он утверждал, не могут быть поняты без его собственных теорий. Я сам присутствовал при том, как он искусственным путем приготовил бело́к из неорганических веществ. Когда я настаивал, чтобы он обнародовал это выдающееся открытие, способное, быть может, совершенно преобразовать наши социальные отношения, он отвечал:

— Не имею охоты выставлять себя на посмешище. Не поймут. Не созрели еще. Никаких общих точек... Другой мир, другой мир! Лет через тысячу... Пусть себе спорят... Все одинаково невежественны...

Последним открытием его был «микроген». Не знаю наверное, что это такое — особое вещество или аппарат. Но насколько я понял, дядя Вендель мог посредством него достигать уменьшения как пространственных, так и временных отношений в любом масштабе. Уменьшения не только для глаза, какое достигается с помощью оптических приборов, но и для всех прочих чувств. Деятельность сознания изменяется так, что хотя восприятия остаются качественно неизменными, все количественные отношения сокращаются. Дядя утверждал, что любого человека и всю воспринимаемую им окружающую обстановку он может уменьшить в миллион или в биллион раз. Как? В ответ на этот вопрос дядя тихо рассмеялся про себя и пробормотал:

— Гм... Не понять тебе... Невозможно объяснить... Совершенно бесполезно!.. Не хочешь ли лучше испытать на себе? Да? Взгляни-ка на эту вещицу.

Он вынул из кармана небольшой аппарат. Я различил несколько стеклянных трубок в металлической оправе с винтами и мелкой шкалой. Дядя поднес трубки к моему носу и начал что-то вращать. Я почувствовал, что вдыхаю нечто необычное.

— Как красиво! — опять воскликнул мой сынишка, восхищенный новым мыльным пузырем, который плавно опускался с подоконника.

— Всматривайся в этот пузырь, — сказал дядя, продолжая вертеть.

Мне показалось, что пузырь увеличивается у меня на глазах. Я словно приближался к нему все более и более. Окно с мальчиком, стол, за которым мы сидели, деревья сада — все отодвигалось вдаль, становилось туманнее. Один лишь дядя по-прежнему оставался вблизи меня; трубки свои он снова положил в карман. Наконец, прежняя обстановка наша исчезла совсем. Подобно исполинскому матовому куполу, расстилалось над нами небо, примыкавшее к горизонту. Мы стояли на зеркальной глади обширного замерзшего моря. Лед был гладок и без трещин. Тем не менее он, казалось, находился в легком волнообразном движении. Здесь и там возвышались над гладью какие-то неясные фигуры.

— Что произошло? — крикнул я в испуге. — Где мы? Несемся по льду?

— По мыльному пузырю, — невозмутимо ответил дядя. — Ты принимаешь за лед поверхность водяной пленки, образующей пузырь. Знаешь, какой толщины та пленка, на которой мы стоим? В обычных человеческих мерах она равна 5000-й доле сантиметра. Пятьсот таких слоев, наложенные друг на друга, составят вместе один миллиметр.

Я невольно поднял ногу, словно мог этим уменьшить свой вес.

— О, дядя, — воскликнул я, — перестань шутить! Неужели ты говоришь правду?

— Сущую правду. Но не трусь. Пленочка эта для нынешних твоих размеров равна по прочности стальной панцирной плите в 200 метров толщиною. Благодаря микрогену, мы уменьшены сейчас в масштабе 1 : 100 миллионов. Это значит, что мыльный пузырь, обхват которого в человеческих мерах 40 сантиметров, теперь столь же велик для нас, как земной шар для людей.

— Какой же величины мы сами? — спросил я в отчаянии.

— Рост наш равен $\frac{1}{60000}$ доле миллиметра. Нас невозможно разглядеть в сильнейшие микроскопы.

— Но почему не видим мы дома, сады, людей, не видим земли, наконец?

— Все это находится за пределами нашего горизонта. Но даже когда Земля и взойдет над горизонтом, ты ничего на ней не различишь, кроме матового сияния; вследствие нашего уменьшения оптические условия настолько изменились, что, хотя мы вполне ясно видим все в нашей новой обстановке, мы совершенно отрешены от прежнего своего мира, размеры которого в 100 миллионов раз больше. Тебе придется довольствоваться тем, что доступно нашему зрению на мыльном пузыре, — этого будет достаточно.

Тем временем мы брели по мыльному пузырю и достигли места, где вокруг нас фонтаном били вверх прозрачные струи. В голове моей пронеслась мысль, от которой кровь застучала в висках... Ведь пузырь может каждую секунду лопнуть! Что будет, если я окажусь на одной из разбрызганных водяных пылинок, а дядя Вендель со своим микрогеном — на другой? Кто меня тогда разыщет? И что будет со мной, если я на всю жизнь останусь ростом в $\frac{1}{60000}$ миллиметра? Кем буду я среди людей? Гулливера среди великанов нельзя и сравнить со мной, потому что никто из людей не мог бы меня даже увидеть. Жена... бедные мои дети!.. Кто знает, не вдохнут ли они меня с ближайшим вдохом в свои легкие! И когда они станут оплакивать мое загадочное исчезновение, я буду прозябать в их крови, подобно невидимой бактерии...

— Скорей, дядя, скорей! — завопил я. — Возврати нам человеческий рост! Пузырь должен сейчас лопнуть... Странно, что он еще цел. Как долго мы здесь?

— Пусть это не тревожит тебя, — невозмутимо ответил дядя. — Пузырь сохранит свою целость дольше, чем мы здесь пробудем. Наша мера времени уменьшилась вместе с нами, и то, что ты здесь принимаешь за минуту, составляет по земной оценке лишь стомиллионную ее долю. Если мыльный пузырь витает в воздухе только 10 земных секунд, то при нынешних наших условиях это отвечает целой человеческой жизни. Обитатели же пузыря живут, наверное, еще в сто тысяч раз быстрее, нежели мы теперь.

— Как? На мыльном пузыре обитатели?

— Конечно, и даже довольно культурные. Но время течет для них в десять биллионов раз быстрее человеческого темпа; это значит, что они воспринимают все впечатления и вообще живут в десять биллионов раз[1] стремительнее. Три земных секунды составляют столько же, сколько на мыльном пузыре миллион лет, — если только его обитателям знакомо понятие «год»: ведь наш пузырь не обладает равномерным, достаточно быстрым круговым движением. Мы находимся на пузыре, который образовался не менее 6 секунд тому назад; в течение этих двух миллионов лет могла успеть развиться пышная живая природа и достаточная цивилизация. По крайней мере, это вполне согласуется с моими наблюдениями над другими мыльными пузырями: всякий раз я обнаруживал в них родственное сходство с матерью-Землею.

— Но эти обитатели... где же они? Здесь видны предметы, которые я готов принять за растения; эти полушаровидные купола могли бы быть городами. Но я не вижу ничего похожего на людей.

— Вполне естественно. Способность наша воспринимать внешний мир, даже ускоренная в сто миллионов раз по сравнению с человеческой, все еще в 100 000 раз медленнее, нежели у «мылоземельцев» (будем так называть обитателей мыльного пузыря). Если сейчас нам кажется, что прошла одна секунда, то они прожили 28 часов[2]. В такой пропорции ускорена здесь вся жизнь. Взгляни-ка на эти растения.

— Действительно, — сказал я, — мне видно, как деревья (эти коралловидные образования, конечно, не что иное, как деревья) вырастают на наших глазах, цветут и приносят плоды. А вот тот дом словно сам растет из-под земли.

— Его сооружают мылоземельцы. Мы не видим самих строителей, движения их слишком быстры для нашей способности восприятия. Но сейчас мы поможем делу. С помощью микрогена я изощрю наше чувство времени еще в 100 000 раз. Вот — понюхай-ка еще раз. Размеры наши останутся те же, я переставил только шкалу времени.

---

[1] Здесь под биллионом надо понимать миллион миллионов (1 000 000 000 000).

[Т. е. триллион по короткой шкале (см. с. 116) (*примеч. ред.*)]

[2] 28 часов содержат около 100 000 секунд.

## II

Дядя вновь извлек свои трубки. Я понюхал — и тотчас же очутился в городе, окруженный многочисленными, деятельно занятыми существами, имевшими несомненное сходство с людьми. Они казались мне немного прозрачными, что обусловливалось, вероятно, их происхождением из глицерина и мыла. Мы слышали и их голоса, хотя не могли понять их языка. Растения утратили быструю свою изменчивость; мы находились теперь по отношению к ним в тех же условиях восприятия, как и мылоземельцы или как обыкновенные люди по отношению к земным организмам. То, что представлялось нам раньше струями фонтана, оказалось стеблями быстро растущего высокого злака.

Обитатели мыльного пузыря также воспринимали нас теперь и забросали многочисленными вопросами, обнаруживавшими их живую любознательность.

Взаимное понимание налаживалось туго, так как члены их, имевшие некоторое сходство с щупальцами полипов, делали настолько странные движения, что даже язык жестов оказывался неприменимым. Тем не менее мылоземельцы встретили нас дружелюбно; как мы узнали позже, они приняли нас за обитателей другой, еще неисследованной части их собственного шара. Они предложили нам пищу, имевшую сильный щелочный привкус и не особенно нам понравившуюся; со временем мы привыкли к ней, но было очень неприятно, что здесь не имелось настоящих напитков, а одни только кашеобразные супы. На этом мировом теле вообще все имело нежную студенистую консистенцию, и удивительно было наблюдать, что даже в таких своеобразных условиях творческая сила природы произвела путем приспособления самые целесообразные создания. Мылоземельцы оказались действительно культурными существами. Пища, дыхание, движение и покой — необходимые потребности всех живых созданий — дали нам первые опорные точки, чтобы понять кое-что из их языка.

Так как они бережно заботились о наших потребностях, а дядя убедил меня, что наше отсутствие из дому не превзойдет границ, совершенно незаметных в земных условиях, то я с удовольствием пользовался случаем изучить этот новый мир. Чередования дней и ночей здесь не было, зато были правильные перерывы в работе, соответствовавшие приблизительно нашему суточному делению времени. Мы усердно занимались изучением мылоземельского языка и успели тщательно исследовать физическое строение мыльного пузыря, а также господствующие здесь общественные отношения. С последнею целью мы предприняли путешествие в столицу, где были представлены главе государства, носившему титул «Владыки мыслящих». Мылоземельцы называли себя «мыслящими» и имели на это право, потому что научная культура стоит у них высоко и все население принимает живое участие в научных спорах. Мы имели печальный случай близко с этим познакомиться.

Я старательно записывал результаты наших наблюдений и накопил богатый материал, который собирался по возвращении на землю обработать в виде «Истории культуры мыльного пузыря». К несчастью, я не учел одного обстоятельства. При нашем весьма поспешном вынужденном возвращении к прежним размерам записки оказались не при мне и вследствие этой несчастной случайности были недосягаемы для действия микрогена. Теперь же эту неувеличенную рукопись нет возможности отыскать: она витает невидимой пылинкой где-нибудь кругом нас, а с нею вместе — доказательство моего пребывания на мыльном пузыре...

### III

Мы прожили среди мылоземельцев года два, когда спор двух распространенных здесь главных школ обострился до крайности. Утверждения более старой школы об устройстве мира подверглись убийственной критике со стороны выдающегося естествоиспытателя Глагли[1], которого энергично поддерживала более молодая прогрессивная школа. Ввиду этого, как принято здесь в подобных случаях, Глагли привлечен был к трибуналу «Академии мыслящих», чтобы установить, допустимы ли его теории и открытия с точки зрения государственных интересов и общественного порядка. Противники Глагли опирались главным образом на то, что новые учения противоречат древним незыблемым основным законам «мыслящих». Они требовали поэтому, чтобы Глагли либо отрекся от своих взглядов, либо понес законную кару за лжеучение. В особенности зловредными и еретическими находили следующие три пункта учения Глагли.

*Первый*. Мир внутри полый, наполнен воздухом, и кора его не превышает 300 локтей. — Против этого возражали: если бы земля, на которой обитают «мыслящие», была пуста, она давно бы уже проломилась. Между тем в книге древнего мудреца Эмзо (это — мылоземельный Аристотель) читаем: «Мир наш сплошной и не разрушится веками».

*Во-вторых*, Глагли утверждал: мир состоит всего из двух первичных элементов — жира и щелочи, которые вообще единственные в мире вещества и существуют извечно; из них механическим путем развился мир; в мире не может быть ничего иного, кроме того, что состоит из жира и щелочи. Воздух есть испарения этих элементов. — Этому противопоставлялось утверждение, что элементами являются не одни жир и щелочь, но также глицерин и вода; немыслимо допустить, чтобы они приняли шарообразную форму самопроизвольно; в древнейших же письменных памятниках «мыслящих» читаем: «Мир выдут устами исполина, имя коего Рудипуди».

---

[1] Избрав имя, созвучное с именем Галилея, автор, по-видимому, желает подчеркнуть сходство судьбы обоих мыслителей.

*В-третьих*, Глагли учил: мир наш — не единственный: существует бесчисленное множество миров, представляющих собою полые шары из жира и щелочи и свободно парящих в воздухе. На них также живут мыслящие существа. — Эти утверждения объявлены были не только ложными, но и опасными для государства, так как если бы существовали другие миры, которых мы не знаем, то на них не распространялась бы власть «Владыки мыслящих». Между тем основной закон государства гласит: «Каждый, утверждающий, что существует нечто, Владыке мыслящих неподвластное, подлежит кипячению в глицерине до полного размягчения».

Глагли защищался. На суде он особенно напирал на то, что учение о сплошности мира противоречит утверждению, что он выдут, и спрашивал: на чем же стоял исполин Рудипуди, если других миров не существует? Академики старой школы сами были противниками этого учения, и Глагли отстоял бы перед трибуналом свои первые два тезиса, если бы третий не подрывал его лояльности. Политическая неблагонадежность этого тезиса была очевидна, и даже друзья Глагли не решались выступить по этому пункту в его защиту, ибо утверждение, будто существуют другие миры, рассматривалось как противогосударственное и антинациональное. Но так как Глагли не желал отречься от своих взглядов, то большинство академиков было против него, и наиболее рьяные враги его приготовили уже котел с глицерином, чтобы кипятить еретика до размягчения.

Я слушал эти необоснованные доводы за и против, хорошо зная, что нахожусь на пузыре, который секунд шесть тому назад сынишка мой выдул соломинкой у садового окна моего дома. Видя, что в результате столкновений этих вдвойне ложных мнений должно погибнуть благородное мыслящее существо (так как кипячение до размягчения является для мылоземельцев смертельным), я не мог больше сдерживать себя, поднялся и потребовал слова.

— Не делай глупостей, — шептал, придвигаясь ко мне, дядя Вендель. — Ты себя погубишь. Ничего не поймут, увидишь! Молчи!

Я не поддался и начал:

— Граждане мыслящие! Позвольте высказаться гражданину, располагающему достоверными сведениями о происхождении и устройстве вашего мира.

Поднялся всеобщий ропот. «Что! Как! Вашего мира? У вас разве другой? Слушайте! Слушайте!.. Дикарь, варвар!.. Он знает, как возник мир!»

— Как возник мир, не знает никто, ни вы, ни я, — продолжал я, повысив голос. — Потому что все «мыслящие», как и мы оба, — лишь ничтожная частица мыслящих существ, рассеянных по различным мирам. Но как возник тот эфемерный клочок мира, на котором мы сейчас находимся, — это я могу вам сказать. Мир ваш действительно полый и наполнен воздухом; кора его не толще, чем указано гражданином Глагли. Она, без сомнения, когда-нибудь лопнет, — но до того времени пройдут еще миллионы ваших лет (громкое «браво» глаглианцев). Верно и то, что существует еще много обитаемых миров, но не все они представляют собою полые шары; нет, это во много миллионов раз более крупные каменные массы, обитаемые такими существами, как я. Жир и щелочь не только не единственные элементы, но и вообще не элементы: это вещества сложные, которые лишь случайно являются преобладающими в вашем крошечном мыльнопузырном шаре...

— Мыльнопузырный мир? — Буря возмущения поднялась со всех сторон.

— Да, — храбро кричал я, не обращая внимания на жесты дяди Венделя. — Да, мир ваш — не более как мыльный пузырь, который выдули на конце соломинки уста моего маленького сына и который в ближайший же момент пальцы ребенка могут раздавить. По сравнению с этим миром ребенок мой, конечно, исполин...

— Неслыханно!.. Безумие!.. — доносилось до меня со всех сторон, и чернильницы пролетали близ моей головы. — Это сумасшедший! Мир — мыльный пузырь! Сын его выдул мир! Он объявляет себя отцом творца мира. Закидать его камнями! Кипятить, кипятить...

— Во имя справедливости! — кричал я. — Выслушайте! Заблуждаются обе стороны. Не мир сотворен моим сыном; он выдул лишь этот шар в пределах мира, выдул по законам, которые господствуют над всеми нами. Он ничего не знает о вас, и вы ничего не можете знать о нашем мире. Я — человек. Я в сто миллионов раз больше вас и в десять триллионов раз старше. Освободите Глагли! Не спорьте по вопросам, которых вы не в состоянии разрешить...

— Долой Глагли!.. Долой «людей»! Посмотрим, сможешь ли ты раздавить мир между своими пальцами! Зови же своего сынишку! — раздавалось вокруг, когда меня и Глагли волокли к котлу с кипящим глицерином.

Пышущий жар обдавал меня. Напрасно пытался я защищаться.

— Внутрь его! — кричала толпа. — Посмотрим, кто лопнет раньше...

Горячий пар окружил меня, жгучая боль пронизала все тело и . . . . . . . . . . .

Я сидел рядом с дядей Венделем за садовым столом. Мыльный пузырь еще парил на прежнем месте.

— Что это было? — спросил я, изумленный и пораженный.

— Одна стотысячная доля секунды. На земле ничего не изменилось. Я успел вовремя передвинуть шкалу прибора, — иначе ты сварился бы в глицерине. Ну что: опубликовать открытие микрогена? Так тебе и поверят! Попробуй-ка, объясни им...

Дядя рассмеялся, и мыльный пузырь лопнул.

Сын мой выдул новый.

## *ПРИМЕЧАНИЕ Я. П.*

## ОТНОСИТЕЛЬНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ

Рассказ «На мыльном пузыре» подводит непосредственно к вопросу об относительности пространства. Фантастический «микроген» обладает способностью уменьшать людей в произвольное число раз. Однако, если бы уменьшились не только оба героя рассказа, их платье и содержимое их карманов, но также и весь мир, вся Вселенная[1], то они не ощутили бы ровно никакой перемены. Путешествие по мыльному пузырю не могло бы состояться по той простой причине, что самый пузырь уменьшился бы во столько же раз и был бы для наших героев так же мал, как и прежде. Вообще, все предметы, по сравнению с которыми уменьшенные люди могли бы удостовериться в совершившемся изменении своего роста, тоже уменьшились бы в соответствующее число раз, и для людей исчезла бы всякая возможность обнаружить уменьшение своих размеров. Каждый желающий может поэтому смело объявить своим согражданам, что он сейчас уменьшил (или увеличил) их вместе со всем миром в миллион раз, — и никто не сможет его опровергнуть, никто не сможет доказать ему, что этого сделано не было. Зато и сам он, правда, ничем не сможет удостоверить свое утверждение[2].

Принято думать, что невозможно обнаружить изменение размеров мира только при том условии, если все три его измерения подверглись соразмерному изменению, т. е. если мир изменил свою величину без *искажения*; всякое искажение мира, — полагают обычно, — не может ускользнуть от наших наблюдений. Однако это не так. Если бы, например, мир наш внезапно заменился другим миром, представляющим зеркальное отражение прежнего, — мы, проснувшись в таком мире, ничем не могли бы обнаружить произошедшей перемены. Мы писали бы левой рукой, выводя строки справа налево, наклоняя буквы налево, — и вовсе не сознавали бы, что совершаем нечто необычное. Ведь мы различаем Р и Ч или И и N только потому, что связываем правильное начертание с определенным направлением, — запоминаем, например, что у Р полукруг должен быть обращен в правую сторону[3]. Но в новом, «зеркальном» мире место правой руки заняла левая, и потому мы неизбежно будем теперь считать правильным начертание Ч. Короче говоря: отличить мир от симметричного с ним мира, если первый исчез и заменен вторым, — мы не в состоянии.

---

[1] Или изолированная часть Вселенной, за пределы которой наблюдатели не могут выйти.

[2] Однако *масса* тела должна быть изменена в иное число раз, чем линейные протяжения. Этот вопрос выходит за пределы геометрии и должен рассматриваться с точки зрения механики.

[3] Поучительно сопоставить с этим тот факт, что дети в начале обучения грамоте не замечают никакой разницы между Р и Ч, если не видят их *одновременно*.

Более того: мы не заметили бы ни малейшей перемены в мире даже и в том случае, если бы все предметы увеличились (или уменьшились) в разных направлениях в *неодинаковое* число раз. Если мир изменяется таким образом, что все предметы увеличиваются, например, в восточном направлении, скажем, в 1000 раз, а в прочих направлениях остаются неизменными, то и такое чудовищное искажение прошло бы для нас совершенно незамеченным. Действительно, как мог бы я убедиться, что стол, за которым я сижу, вытянулся в восточном направлении в 1000 раз? Казалось бы, весьма простым способом: если прежняя его длина в этом направлении была один метр, то теперь она равна 1000 метрам. Достаточно только, значит, произвести измерение. Но не забудем, что когда я поверну метровый стержень в восточном направлении, чтобы выполнить это измерение, стержень мой удлинится (как и все предметы мира) в 1000 раз, и длина стола в восточном направлении по-прежнему будет одинакова с длиною стержня; я буду считать ее на основании проделанного измерения равной 1 метру. Теперь понятно, почему мы никаким способом не в силах были бы обнаружить, что форма мира подверглась указанному искажению.

Германский математик проф. О. Дзиобек[1] приводит в одной из своих статей еще более удивительные соображения.

«Представим себе зеркало с отражающей поверхностью произвольной кривизны — одно из тех уродующих зеркал, которые выставляются в балаганах для увеселения посетителей, забавляющихся своим карикатурным отражением. Обозначим реальный мир через *A*, а его искаженное изображение через *B*. Если некто стоит в мире *A* у рисовальной доски и чертит на ней линейкой и циркулем линии и фигуры, то уродливый двойник его в *B* занимается тем же делом. Но доска наблюдателя в *A* на наш взгляд — плоская, доска же в *B* — изогнутая. Наблюдатель в *A* проводит прямую линию, а отраженный наблюдатель в *B* — кривую (т. е. представляющуюся нам кривой). Когда в *A* чертится полный круг, то в *B* выполняется то же самое, но замкнутая линия мира *B* кажется нам не окружностью, а некоторой сложной кривой, быть может, даже двоякой кривизны. Когда наблюдатель в мире *A* берет в руки прямой масштаб с нанесенными на нем равными делениями, то в руках его двойника оказывается тот же масштаб, но для нас он не прямой, а изогнутый, и притом с неравными делениями.

Допустим теперь, что *B* — не зеркальное отражение, а реально существующий объект. Каким образом мог бы наблюдатель мира *B* узнать, что его мир и собственное его тело искажены, если искажение одинаково захватывает все измерения, всю обстановку? Никаким. Более того: наблюдатель в *B* будет думать о мире *A* то же, что наблюдатель в *A* думает о мире *B*; он будет убежден, что мир *A* искажен. Свои линии

[1] *Отто Франц Дзиобек* (1856–1919) — немецкий математик, автор множества трудов и журнальных статей по математике и астрономии. На русский язык переведен в 1912 году его «Учебник аналитической геометрии» в двух томах (*примеч. ред.*).

он будет считать прямыми, а наши — искривленными, свою чертежную доску плоской, а нашу — изогнутой, свои масштабные деления равными, а наши — неравными. Между обоими наблюдателями и их мирами полная взаимность. Когда наблюдатель в *A*, любуясь формами „своей“ статуи Аполлона, взглянет на искаженное изваяние в мире *B*, он найдет его, конечно, безобразно изуродованным. Гармония форм исчезнет бесследно: руки чересчур длинны и тонки и т. п. Но что сказал бы наблюдатель из мира *B*? Его Аполлон представился бы ему таким же совершенным, каким представляется нам наш, он будет превозносить его красоту и гармонию форм, а нашего Аполлона подвергнет уничтожающей критике: никакой пропорциональности, руки — бесформенные обрубки, и т. п.

Если предмет перед искажающей зеркальной поверхностью меняет свое положение — приближается, удаляется, отходит влево или вправо, — то изменяется и характер искажения. Искажения могут зависеть и от *времени*, если допустить, что кривизна отражающей поверхности непрестанно изменяется, порою исчезая вовсе (зеркало становится тогда плоским).

Отбросим теперь зеркало, которым мы пользовались только ради наглядности, и обобщим сказанное: если бы вся окружающая нас Вселенная претерпела любое искажение, зависящее от места и времени, при условии, что искажение распространяется на все твердые тела, в частности на все измерительные инструменты и на наше тело, — то не было бы никакой возможности это искажение обнаружить».

—

Микроген Лассвица обладает способностью изменять не только пространственные размеры, но и быстроту течения времени. И здесь следует отметить, что изменение темпа времени в любое число раз не может быть никакими средствами обнаружено, если оно распространяется на все явления, совершающиеся во Вселенной (или в ее изолированной части, за пределы которой наблюдатель не может проникнуть). Это станет понятнее, если напомним, что единственным мерилом времени являются для нас пространственные промежутки на измерителе времени — на часовом циферблате, на звездном небе и т. п. У нас нет никакой возможности убедиться, действительно ли часы идут равномерно или Земля вращается равномерно, — как мы всегда допускаем. «Если бы сутки и их подразделения — часы, минуты, секунды — были неравномерны, если бы ход наших часов во времени менялся, если бы менялась и скорость вращения Земли вокруг оси и обращения вокруг Солнца, а также скорость обращения Луны вокруг Земли, если бы тому же закону изменяемости подвержены были и всякие иные мерила для времени, — мы не были бы в состоянии обнаружить этой изменяемости, и все осталось бы для нас по-старому» (Дзиобек). Не заметили бы мы никакой перемены в мире даже и в том случае, если бы «в некоторый момент все часы согласно остановились и прекратились все движения, все изменения в окружающем нас мире, а по истечении определенного промежутка времени все ожило бы вновь, продолжало двигаться и жить, — словно в сказке об окаменелом царстве, где с наивной смелостью предвосхищено то, что мы называем относительностью нашего мерила времени».

Мы видим, что мир вовсе не должен быть в действительности так неизменен, как думает большинство людей, полагаясь на привычные представления и на показания наших чувств. Напротив, мир может ежесекундно претерпевать самые фантастические изменения: уменьшаться или увеличиваться в любое число раз, «выворачиваться наизнанку» (т. е. заменяться симметричным ему миром), искажать всячески свою форму, вырастая в одних направлениях и сокращаясь в других, искривляться на всевозможные лады, может ускорять или замедлять темп событий, порою останавливая их вовсе, — и никто из нас не в состоянии был бы обнаружить ни следа этих изменений. Волшебный микроген, о котором мечтал Лассвиц, даже несравненно более чудодейственный по своей силе, мог бы быть давно уже изобретен и совершать над нами свои парадоксальные метаморфозы, — и никто из нас об этом не подозревал бы.

Таковы следствия, неизбежно вытекающие из относительности пространства и времени[1].

[1] Не излишне отметить, что эта относительность не есть та, о которой трактует так называемый «принцип относительности» — новое учение о пространстве и времени, созданное Альбертом Эйнштейном. Изложенные здесь соображения могут лишь служить некоторой подготовкой мышления к пониманию крайне трудной по своей отвлеченности теории гениального германского физика.

## МАШИНА ВРЕМЕНИ

*Извлечение из повести Г. Уэллса*

### I. Введение

Путешественник во времени (вполне подходящее для него название) объяснял нам малодоступные пониманию вопросы. Его серые глаза блестели и мерцали; лицо, обыкновенно бледное, разгорелось от оживления. Мы же лениво восхищались серьезностью, с которой он выяснил свой новый парадокс (каковым мы в это время считали его идею), восхищались также и плодовитостью ума этого человека. Вот что он говорил:

— Вы должны внимательно следить за моими словами, потому что я постараюсь опровергнуть несколько общепринятых идей. Я утверждаю, например, что та геометрия, которой нас учили в школе, основана на неправильных представлениях.

— Вы, кажется, хотите начать со слишком трудного для нас вопроса, — сказал Фильби, известный спорщик.

— Я совсем не требую, чтобы вы принимали мои слова на веру, без всякого обоснования. Но вы скоро согласитесь с частью моих положений, а это все, чего я требую. Вам, конечно, известно, что математической линии, линии без малейшей толщины, реально не существует. То же самое можно сказать и относительно материальной плоскости. То и другое — отвлеченности.

— Правильно, — подтвердил психолог.

— Точно так же куб, имеющий только длину, ширину и толщину, не может существовать реально.

— Против этого я возражаю, — сказал Фильби. — Твердое тело, конечно, существует.

— Так думает большинство. Но может ли существовать «мгновенный» куб?

— Я вас не понимаю, — сказал Фильби.

— Можно ли говорить о реальном бытии куба, который на самом деле не существовал ни малейшего промежутка времени?

Фильби задумался.

— Ясно, — продолжал Путешественник, — что каждое реальное тело должно иметь протяжение в четырех измерениях, то есть обладать длиной, шириной, толщиной и продолжительностью существования. Существует четыре измерения: три мы называем измерениями пространства, четвертое — времени. Но люди совершенно неправильно склонны считать четвертое измерение чем-то существенно отличным от трех остальных. Это происходит потому, что наше сознание в течение всей жизни, от ее начала до конца, движется в одном направлении, вдоль времени. Люди совершенно упускают из виду упомянутый факт; между тем это-то и есть четвертое измерение, хотя многие толкуют о нем, совершенно не зная, о чем они говорят. В сущности, я указываю вам только новый взгляд на время. Существует всего одно различие между временем и каким-либо другим из трех измерений пространства; вот оно: наше сознание движется вдоль времени. Но многие трактуют эту идею совершенно неправильно. Вы все слыхали, что говорят о четвертом измерении.

«Пространство, по мнению наших математиков, имеет три измерения. Между тем некоторые философски настроенные люди спрашивали, почему всегда говорят только *о трех* измерениях; почему не может существовать другое направление под прямыми углами к остальным трем? Ученые пытались даже создать геометрию четвертого измерения. Вы все знаете, что на плоской поверхности, имеющей всего два измерения, легко изобразить предмет с тремя измерениями; упомянутые же ученые полагают, что с помощью трех измерений они могли бы построить модель четырехмерную, если бы только овладели надлежащей перспективой.

Некоторое время я тоже работал над вопросом о геометрии четвертого измерения. Я достиг даже некоторых поразительных результатов. Например, вот портрет человека, сделанный, когда ему было восемь лет; другой — когда ему минуло пятнадцать; третий — в семнадцатилетнем возрасте, и так далее. Все это, очевидно, отдельные трехмерные представления его существования в пределах четвертого измерения. Вот перед вами общеизвестная научная диаграмма — запись погоды. Линия, которую я показываю пальцем, изображает колебания барометра; вчера он стоял вот на этой высоте, к ночи упал; сегодня утром опять поднялся и постепенно дошел до сих пор. Без сомнения, ртуть не наметила этой линии в каком-либо из общепринятых измерений пространства. Но она, несомненно, эту линию создала; следовательно, линия эта находится в четвертом измерении».

— Но, — сказал врач, — если время действительно только четвертое измерение пространства, то почему же его всегда считали чем-то совершенно иным? И почему мы не можем совершать перемещений во времени, как в других измерениях пространства?

Путешественник усмехнулся.

— А вы вполне уверены, что мы можем без помех двигаться в пространстве? Правда, мы довольно свободно перемещаемся вправо и влево, назад и вперед; а что скажете вы относительно движения вверх и вниз? Земное притяжение ставит нам в этом большие препоны.

— Не вполне, — сказал врач. — А воздушные шары?

— Ну, а до их появления человек не мог свободно двигаться в вертикальном направлении, если не считать судорожных подпрыгиваний да карабканья на возвышенности.

— А все-таки люди могут немного двигаться и вверх, и вниз, — заметил врач. — Во времени же вы совсем не можете перемещаться, не в состоянии уйти от настоящего мгновения.

— В этом отношении вы очень ошибаетесь, как ошибался и ошибается весь мир. Мы постоянно отдаляемся от настоящего мгновения. Наша духовная, лишенная всяких измерений жизнь проходит вдоль времени с равномерной быстротой, начиная с колыбели до могилы.

— Но существует одно очень большое затруднение, — прервал Путешественника психолог. — Человек может произвольно двигаться во всех направлениях пространства, во времени же — нет.

— Вот это-то и составляет ядро моего великого открытия. Впрочем, вы ошибаетесь, говоря, что мы не в силах двигаться во времени. Возьмем следующий пример. Я очень живо вспоминаю какой-нибудь случай и таким образом как бы возвращаюсь к мгновению, в которое он произошел. Как часто мы слышим выражение: «я делаю прыжок в прошлое». Конечно, у нас нет средств оставаться в этом прошлом в течение продолжительного времени; но точно так же и дикарь или животное не в силах сколько-нибудь времени продержаться на высоте шести футов от земли. В этом отношении человек цивилизованный имеет преимущество. С помощью аэростата он превозмогает силу тяготения. Почему же не смеет он надеяться, что в конце концов ему удастся останавливать или ускорять свое движение во времени или даже обращаться вспять, путешествовать в противоположном направлении? Уже давно рисовалась мне идея машины, которая могла бы по воле машиниста двигаться во всех направлениях пространства и времени.

Фильби едва удерживался от смеха.

— Я проверял это опытом, — заметил Путешественник.

— Проверяли опытом? — сказал я.

Путешественник, улыбаясь, обвел нас взглядом, потом медленно вышел из комнаты.

Психолог взглянул на нас:

— Интересно, что там у него?

— Какой-нибудь аппарат для фокусов, — предположил врач, а Фильби стал было рассказывать нам об одном фокуснике, но не успел окончить. В комнату вернулся Путешественник.

## II. Машина

Путешественник держал в руке блестящий металлический прибор, чуть-чуть покрупнее небольших часов, очень тонкой работы. Некоторые его части были из слоновой кости; я заметил на нем также какое-то прозрачное кристаллическое вещество.

Мы все насторожились. Мне кажется невероятным, чтобы фокус, хотя бы ловко и тонко задуманный и выполненный необыкновенно искусно, мог обмануть нас при таких условиях.

— Эта штучка, — начал Путешественник, — только модель машины для путешествия во времени. Заметьте, какой у нее необыкновенный вид; взгляните также, как странно мерцает вот эта пластинка; не правда ли, она кажется не вполне реальной? — Он указал пальцем на одну из частей машинки. — Видите, вот здесь один маленький беленький рычаг, а вот другой.

Врач поднялся со своего кресла и наклонился над моделью.

— Она превосходно сделана, — одобрил он.

— Теперь запомните следующее; если я надавлю на этот рычаг, машина двинется в будущее; надавлю на другой, она начнет скользить в противоположном направлении. Вот это седло для путешественника. Сейчас я нажму первый рычаг, и машина понесется. Она перейдет в будущее, скроется. Смотрите на нее пристально. Осмотрите также стол и сами удостоверьтесь, что тут нет никакого обмана и фокуса.

Повернувшись к психологу, он взял его за палец и попросил нажать на рычаг. Мы все видели, как наклонился рычаг. Почувствовалось дыхание ветра; маленькая машина внезапно качнулась, повернулась, стала неясной; с секунду казалась каким-то призраком, превратилась в слабое мерцание меди и слоновой кости, промелькнула, исчезла... На столе не осталось ничего, кроме лампы.

Широко раскрытыми глазами мы смотрели друг на друга.

— Послушайте, — сказал врач, — неужели вы действительно верите, что машина отправилась странствовать во времени?

— Конечно, — ответил Путешественник. — Скажу вам больше: у меня там (он показал в сторону лаборатории) стоит большая, почти оконченная машина, и, собрав все ее части, я отправлюсь в путешествие сам.

— Вы хотите сказать, что ваша модель отправилась в будущее? — спросил Фильби.

— В будущее или прошедшее; я сам хорошенько не знаю, куда именно.

Через короткое время психолога, по-видимому, осенило вдохновение; он сказал:

— Если машина отправилась куда-нибудь, то, конечно, в прошедшее.

— Почему? — спросил Путешественник.

— Видите ли, мы предполагаем, что в пространстве модель не двигалась; следовательно, если бы она отправилась в будущее, она в данный момент была бы здесь; ведь она должна была бы пройти через настоящее.

— Но, — заметил я, — если бы она ускользнула в прошедшее, мы видели бы ее, входя сегодня в эту комнату, а также в предыдущий четверг, в четверг две недели тому назад и т. д.

Путешественник повернулся к психологу.

— Вы человек мыслящий и должны понять, почему машина сейчас недоступна восприятию наших органов внешних чувств.

— Понятно, — согласился с ним психолог. — Мы не можем видеть этой находящейся в движении модели, как не могли бы различить отдельно одну из спиц вращающегося колеса или разглядеть летящую пулю. Если машина движется во времени в пятьдесят или сто раз скорее, нежели мы сами, если она проносится через минуту, как мы проходим через секунду, то впечатление, производимое ею на наше зрение, должно равняться одной пятидесятой или сотой доле того, какое она произвела бы на него, оставаясь неподвижной во времени. Это вполне понятно.

— А не хотите ли вы взглянуть на самое машину времени? — предложил Путешественник.

Он взял со стола лампу и повел нас в свою лабораторию. В лаборатории мы увидели большую копию исчезнувшего аппарата. Кроме никелевых и костяных частей, в машине были стержни и другие части механизма, несомненно выпиленные из горного хрусталя. В общем аппарат казался совсем готовым, только подле чертежей, на скамье, лежали какие-то бруски. Мне хотелось узнать, что это такое, и я поднял один из них. Кварц.

— На этой машине, — высоко поднимая лампу, объявил Путешественник, — я надеюсь совершить экскурсию в области времени.

## III. Путешественник во времени возвращается

В течение недели между двумя четвергами мы почти не упоминали о путешествиях во времени, хотя многие из нас, конечно, думали о тех необычайных результатах, к которым повели бы странствия во времени; думали о видимой правдоподобности этих путешествий и об их практической невероятности.

В следующий четверг я опять отправился в Ричмонд. Приехал я поздно, когда все остальные уже собрались в гостиной. Врач стоял подле камина. В одной руке он держал листок бумаги, в другой — часы. Я обвел глазами комнату, ища Путешественника.

— Половина восьмого, — сказал врач. — Не сесть ли обедать?

— А где же?.. — спросил я.

— Ну, его, очевидно, где-то задержали. В этой записке он просит вас всех к столу, если к семи его не будет. По возвращении он обещает объяснить все.

Во время обеда толковали о том, где мог быть хозяин, и я высказал предположение, что он отправился в странствования во времени. Издатель попросил объяснить ему, о чем я говорю, и психолог начал тяжеловесно и неуклюже рассказывать «об остроумном парадоксе и о фокусе», который мы видели на прошлой неделе. Он с увлечением толковал об этом, когда дверь из коридора приоткрылась, и мы увидели Путешественника во времени.

— Что с вами? — спросил врач.

Удивительный вид был у Путешественника.

Его платье покрывали пыль и грязь; на рукавах виднелись зеленые пятна; волосы пришли в полный беспорядок, и мне показалось, что они поседели больше прежнего. Лицо Путешественника было смертельно бледно; через его подбородок шел коричневый рубец, полузаживший порез. Его обтянувшееся лицо выражало растерянность и страдание. Мгновение он колебался, стоя на пороге, точно ослепленный светом; потом вошел в комнату, прихрамывая, с трудом подошел к столу и потянулся к бутылке вина. Издатель налил в стакан шампанского и подвинул его Путешественнику. Тот выпил вина, и это, по-видимому, его оживило.

— Не обращайте на меня внимания, — сказал он с легкими запинками. — Я вполне здоров. — Он протянул свой стакан, чтобы ему налили еще вина, и залпом осушил его.

— Я пойду, умоюсь и переоденусь; после этого вернусь к вам и объясню все...

Он поставил свой стакан на стол и направился к двери на лестницу.

— В чем дело? — сказал журналист. — Разыгрывал он вора-любителя, что ли?

— Я вполне уверен, что все это дело машины времени, — ответил я. Издатель возражал.

— Что такое странствие во времени? — говорил он. — Разве можно покрыться пылью, валяясь в парадоксе?

В столовую вошел Путешественник. Он был во фраке, и только его изможденный и растерянный вид говорил о той перемене, которая меня так поразила.

Путешественник молча подошел к своему месту, улыбнулся и спросил:

— Где баранина? Что за наслаждение опять воткнуть вилку в мясо!

— Только одно слово, — спросил я. — Вы путешествовали во времени?

— Да, — ответил Путешественник и с полным ртом кивнул головой.

Наконец он отодвинул от себя тарелку и обвел нас взглядом.

— Полагаю, мне следует извиниться, — сказал он. — Но, право же, я умирал от голода. Я пережил удивительные приключения. Перейдемте в курительную. Моя история будет длинна. Только, пожалуйста, не перебивайте меня. Мне хочется высказаться. Бóльшая часть этого рассказа покажется вымыслом. Пусть. В четыре часа я был в моей лаборатории, потом... потом... Я прожил неделю... такую неделю, какой не переживал ни один человек. Я измучен, но не засну, пока не расскажу вам обо всем.

Путешественник во времени начал свой рассказ. Почти все мы, слушатели, сидели в тени, потому что свечей не зажгли. Сначала мы переглядывались, но через несколько времени перестали делать это и смотрели только на лицо Путешественника.

## IV. Рассказ путешественника

«Прошедший четверг я изложил некоторым из вас принципы машины времени, показал и ее самое, хотя и недоконченную, в моей мастерской. Аппарат был готов только сегодня утром. Ровно в десять часов первая из машин времени начала действовать. Я попробовал все ее винты, налил еще одну каплю масла на стержень из кварца и сел в седло. Вероятно, самоубийца, приставивший к своему черепу дуло револьвера, совершенно так же спрашивает себя, что будет с ним, как я в ту минуту. Одной рукой я взял рычаг движения, другой — рычаг, задерживающий ход, нажал на первый и почти тотчас же на второй. Мне показалось, что я шатаюсь; я почувствовал затем кошмарное ощущение падения, огляделся и увидел лабораторию в ее обычном виде. Случилось ли что-нибудь? Мгновение я подозревал, что моя теория меня обманула, потом заметил часы. Как мне казалось, за секунду перед тем их стрелки показывали одну минуту одиннадцатого, теперь же я увидел на циферблате половину четвертого.

Я глубоко вздохнул, стиснул зубы; обеими руками сжал рычаг движения и двинулся. Глухой шум. Лаборатория наполнилась дымкой. В комнату вошла миссис Уатчерт и, по-видимому, не замечая меня, направилась к двери в сад. Вероятно, на то, чтобы пройти через комнату, она затратила около минуты; мне же показалось, будто моя экономка пронеслась как ракета. Я отвел рычаг до самого предела. Наступила ночь, стемнело так быстро, точно потушили лампы. Через мгновение рассвело следующее утро. Лаборатория сделалась неясной, призрачной. Пришла следующая черная ночь, потом опять день, опять ночь, опять день и т. д.; они мелькали все быстрее и быстрее.

Вряд ли смогу я передать странные ощущения путешествия во времени. Кажется, будто скользишь по наклонной плоскости, беспомощно летишь куда-то с невероятной быстротой. И я ежесекундно с ужасом ждал, что мне предстоит разбиться. Ночь сменяла день с такой быстротой, точно надо мной веяло черное крыло. Солнце двигалось через небо, каждую минуту делая прыжок; а каждая такая минута обозначала день. Вот мне показалось, что лаборатория разрушена, что я очутился на открытом воздухе и куда-то поднимаюсь; однако я двигался слишком быстро, чтобы заметить какие-либо другие движущиеся предметы. Глаза мои страдали от мерцающей смены темноты и света. В промежутках тьмы я видел, как луна меняла свои фазы от серпа до полнолуния. Я несся все с большей скоростью; наконец трепетание ночи и дня слилось в сплошную серую тень; небо приняло изумительно глубокий синий тон, — великолепный лучезарный оттенок раннего рассвета; прыгающее солнце превратилось в огненную полосу, в блестящую арку, перекинутую в пространстве, луна — в менее ярко колеблющуюся световую ленту; звезды я перестал видеть; только время от времени на лазури обозначался яркий круг.

Окружавший меня пейзаж был неопределенным, туманным. Я все еще оставался на том холме, на котором теперь стоит этот дом. Я видел, как вырастали деревья, как они изменялись, точно клубы пара; делались то коричневыми, то зелеными; увеличивались, расширялись, трепетали и исчезали. Я видел, как поднимались слабо очерченные величавые и прекрасные строения и как они исчезали, точно грезы. Поверхность земли изменялась, она как бы таяла и утекала на моих глазах. Маленькие стрелки циферблатов, которые отмечали скорость движения моей машины, все быстрее и быстрее бегали кругом. Я заметил, что солнечная полоса колыхалась вверх и вниз, от одного солнцестояния до другого, и что это совершалось в течение одной минуты или меньше; в одну минуту я пролетал через год. Ежеминутно изменялся также вид земли: то ее окутывал снег, то она одевалась кратковременной яркой весенней зеленью. Во мне зашевелились новые чувства — некоторое любопытство, а вместе страх; еще немного, и они совершенно подчинили меня себе. Мне думалось: какое странное развитие человечества, какие удивительные успехи нашей зачаточной цивилизации увижу я, если пристальнее всмотрюсь в смутный, ускользающий мир, который мчится и колеблется перед моими глазами? И я решил остановиться. Я нажал рычаг; машина мгновенно опрокинулась, и я полетел куда-то...

Раздался раскат грома и на мгновение оглушил меня. Свистел жестокий град; окруженный серой пеленой непогоды, я сидел на траве возле опрокинутой машины. Через несколько времени я перестал слышать смутный шум и огляделся кругом. Я был, как казалось, на небольшом садовом лужке».

—

(*Конец этой главы и следующие десять глав посвящены описанию приключений Путешественника в обстановке отдаленнейшего будущего. Эпизоды эти здесь опущены, так как не затрагивают математической основы повести.*)

### XV. Путешественник возвращается

«Я помчался обратно. Снова началась мерцающая смена дней и ночей. Колеблющиеся абрисы земли изменялись, уплывали. Стрелки бегали по циферблатам в обратную сторону. Наконец, я снова увидел неясные тени зданий, признаки жизни пришедшего в упадок человечества. Это тоже миновало; явились другие очертания. Когда стрелка циферблата, указывающего миллионы дней, дошла до нуля, я замедлил движение машины и различил знакомые мне мелкие произведения нашей архитектуры; тысячная стрелка побежала к своей исходной точке; ночи все медленнее и медленнее сменяли дни. Наконец я очутился между привычными стенами моей лаборатории. Осторожно, не спеша, очень постепенно остановил я ход моего аппарата.

Между прочим, случилась одна вещь, которая удивила меня. Помните, я говорил вам, что в самом начале моего путешествия, раньше чем машина времени понеслась с огромной скоростью, через лабораторию прошла миссис

Уатчерт, как мне тогда показалось, промелькнувшая мимо меня с мгновенностью ракеты. На возвратном пути мой аппарат, понятно, опять пронес меня через ту же минуту; я снова увидел мою экономку, и все ее движения повторились, но в противоположном направлении. Дверь из сада отворилась; миссис Уатчерт спокойно скользнула через комнату, спиной вперед, и исчезла за той дверью, через которую она тогда вошла.

Машина остановилась. Я был в моей давно знакомой мне лаборатории. Мои инструменты, мои приборы, все нашел я в том виде, в каком оставил. Я спустился с седла совершенно разбитый и сел на скамейку. Я услышал ваши голоса, звон посуды и, уловив обонянием запах мяса, открыл дверь в столовую. Остальное вы знаете. Я умылся, пообедал, а теперь рассказываю вам о моих странствиях».

## XVI. После рассказа

Почти всю ночь я не спал, раздумывая о слышанном, и на следующий день решил повидаться с Путешественником во времени. Когда я пришел к нему, мне сказали, что он в лаборатории, и я отправился туда же. Однако лаборатория оказалась пустой. Я посмотрел на машину времени и даже потрогал один из рычагов. Я вернулся в курительную; там меня встретил Путешественник, который, видимо, собрался куда-то. В одной руке он держал маленькую фотографическую камеру, в другой — дорожную сумку. Завидев меня, Путешественник засмеялся и для рукопожатия подал мне локоть.

— Я страшно занят, — сказал он, — знаете, опять той вещью... там.

— Вы действительно путешествовали во времени?

— Действительно и реально, — был его ответ. Он посмотрел мне в глаза ясным, правдивым взглядом. Несколько мгновений Путешественник колебался, обводя комнату глазами, наконец прибавил: — Дайте мне только полчаса времени. На столе несколько журналов; займитесь ими. Если вы останетесь позавтракать со мной, я окончательно рассею ваше сомнение относительно моих странствий. А теперь позвольте мне покинуть вас на короткое время.

Я согласился, не вполне, впрочем, понимая, о чем он говорит. Путешественник же, кивнув мне головой, ушел по коридору в свою лабораторию. Я слышал, как за ним закрылась дверь; сев в кресло, я взял газету. Что собирался он сделать до завтрака? Случайно на глаза мне попалось одно объявление и напомнило, что я обещал в два часа побывать у издателя Ричардсона; посмотрев же на часы, я понял, что у меня на это осталось мало времени, а потому поднялся с места и пошел по коридору; я собирался сказать Путешественнику, что мне не придется завтракать у него.

В ту минуту, когда я взялся за ручку двери в лабораторию, прозвучало странно оборвавшееся восклицание; послышался звон и стук. Через растворенную дверь на меня хлынул порыв воздуха; в ту же секунду я услышал звон разбитого стекла, осколки которого сыпались на пол. Путешественника в комнате не было. Передо мною на мгновение мелькнула призрачная сидячая человеческая фигура, еле различимая в хаосе вращающейся черной тени и отблесков меди, — фигура такая прозрачная, что сквозь нее ясно была видна скамейка, заваленная листами чертежей. Через мгновение все пропало. Едва я протер глаза, призрак как бы растаял. Машина времени исчезла. Я был поражен. Я понимал, что произошло нечто необыкновенное, но не мог сообразить, что именно. Я стоял как окаменелый, широко открыв глаза; в эту минуту садовая дверь открылась, и в лабораторию вошел лакей Путешественника.

Мы посмотрели друг на друга, и мало-помалу мои мысли начали приходить в порядок.

— Скажите, он прошел через эту дверь? — спросил я.

— Нет, в сад никто не проходил. Я думал, что застану его здесь, — был ответ.

Я все понял. Я остался ждать Путешественника, а также и второго, может быть еще более удивительного рассказа. Но я начинаю бояться, что мне придется ждать всю жизнь. Путешественник во времени исчез три года тому назад и, как все теперь знают, не вернулся.

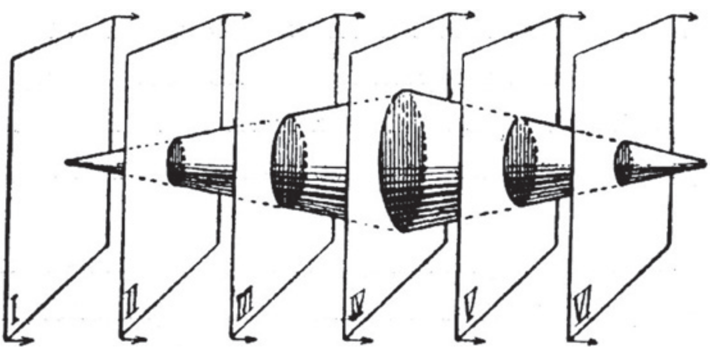
## *ПРИМЕЧАНИЕ Я. П.*

## ВРЕМЯ КАК ЧЕТВЕРТОЕ ИЗМЕРЕНИЕ

Полезно остановиться подробнее на высказанном Уэллсом своеобразном понимании *времени* как четвертого измерения пространства.

Чтобы уяснить себе это, перенесемся мысленно из знакомого нам мира трех измерений в мир *двух* измерений. Таким двухмерным миром, имеющим длину и ширину, но вовсе не имеющим толщины, является *плоскость*. Вообразим же себе, что весь пространственный мир сплющился в одну плоскость и что в таком мире обитают разумные существа, — конечно, также двухмерные. Для двухмерных обитателей существуют только двухмерные вещи. Всякая линия, пересекающая их плоский мир, должна представляться им в виде точки, так как они могут из всей линии воспринять только одну точку — именно ту, в которой эта линия встречает плоскость. Двухмерные существа могли бы исследовать всю эту линию только в том случае, если бы их плоский мир двигался в третьем измерении — например, по перпендикулярному направлению. Наделим этот мир таким движением. Следя тогда за тем, как изменяется положение точки встречи линии с их плоскостью, двухмерные мыслители могли бы составить себе некоторое понятие обо всей трехмерной линии. Но, конечно, они не могли бы так наглядно, как мы, представить себе, какое положение занимает в трехмерном мире эта линия: все трехмерное не укладывается в сознании существа двухмерного. Двухмерный мыслитель высказался бы об этом в других выражениях: он сказал бы, что исследуемая им точка изменяет свое положение во «времени». То, что для нас является движением двухмерного мира (плоскости) в трехмерном пространстве, то для обитателя двухмерного мира представлялось бы как «течение времени». То, что для нас существует одновременно в пространстве трех измерений, — для них *появляется последовательно* в пространстве двух измерений.

Рассмотрим еще пример. Двухмерный мир (плоскость), двигаясь в трехмерном пространстве, наткнулся на тело в форме двойного конуса (см. рис.). Двухмерный обитатель плоскости, конечно, не может воспринять этот конус как тело; не может даже и вообразить его себе. Что же будет он видеть и думать, когда мир его наткнется на подобное трехмерное тело и оно пройдет сквозь плоский мир? Проследим за этим. Сначала в двухмерном мире появится




точка — вершина конуса. Затем, по мере дальнейшего продвижения плоского мира в направлении третьего измерения (т. е. «с течением времени», как сказал бы двухмерный мыслитель), точка превратится в небольшой кружок или эллипс — сечение конуса плоскостью двухмерного мира. Кружок будет расти, расширяться и, достигнув наибольшего размера, станет сокращаться, постепенно превратится в точку и вновь исчезнет. Двухмерный исследователь наблюдал *историю* зарождения, развития, увядания и исчезновения «кружка», между тем как мы, существа трехмерные, воспринимаем ту же вещь сразу, одновременно в трех измерениях. Для них он существовал в ряде последовательно воспринимаемых плоских сечений, для нас — весь целиком, как трехмерное тело. Движение плоскости в третьем измерении знакомого нам пространства переживается двухмерным существом как *течение времени*. Для него «прошедшее» конуса — это те его части, которые лежат по одну сторону его плоского мира (по ту, откуда плоскость движется); «будущее» конуса — те его части, которые расположены по другую сторону, а «настоящее» — пересечение конуса с двухмерным миром.

Приложим теперь те же рассуждения к миру трехмерному. Когда мы описываем *историю* изменений какой-нибудь вещи в нашем трехмерном пространстве, не даем ли мы последовательные изображения этой вещи во времени? Если так, то можно рассматривать время как четвертое измерение мира, измерение, в котором движется наш трехмерный мир; каждое явление, наблюдаемое в трехмерном мире, есть одно из последовательных «пересечений» нашего трехмерного мира с четырехмерною вещью. Существо четырех измерений могло бы сразу охватить всю историю вещи, всю ее «жизнь» в виде некоторого четырехмерного объекта, недоступного нашему воображению[1].

Само собою разумеется, что фантастическая мысль Уэллса — придумать механизм для произвольного движения в четвертом измерении — не свободна от внутренних противоречий и должна быть принимаема не иначе как чисто художественный прием, удобный для успешного развития интриги фантастической повести.

[1] Современная наука различает понятия «четырехмерное пространство» и «пространство-время». В соответствии с теорией относительности, Вселенная имеет три пространственных измерения и одно временное измерение, и все четыре измерения органически связаны в единое целое и в определенных рамках способными переходить друг в друга. Экспериментально подтвеждено замедление атомных часов на борту космических кораблей и самолетов относительно установленных на Земле часов (*примеч. ред.*).

## НА КОМЕТЕ

*Из романа Жюля Верна*[1]

Однажды, 27 июня, профессор Розетт бомбой влетел в общий зал, где собрались капитан Сервадак, лейтенант Прокофьев, Тимашев и ординарец Бен-Зуф.

— Лейтенант Прокофьев, — крикнул он, — отвечайте без обиняков и лишних разговоров на вопрос, который я вам задам.

— Я и не имею обыкновения... — начал было лейтенант.

— И отлично! — перебил профессор, обращавшийся с лейтенантом как учитель с учеником. — Отвечайте: вы объехали на вашей шхуне «Добрыня» кругом Галлии почти по экватору, иначе говоря — по ее большому кругу. Да или нет?

— Да, — ответил лейтенант, которому Тимашев подал знак не противоречить раздраженному ученому.

— Хорошо. А измерили вы при этом путь, пройденный шхуной?

— Приблизительно, т. е. с помощью лага и буссоли, но не измеряя высоты солнца и звезд, которую невозможно было определить.

— И что же вы узнали?

— Что окружность Галлии составляет около 2300 километров, а следовательно, ее диаметр равен 720 километрам.

---

[1] Отрывок из романа «Гектор Сервардак» (1877 г.). Сюжет романа — астрономический: комета задевает земной шар в области Средиземного моря и уносит с собою часть земной поверхности вместе с несколькими обитателями — французами и русскими, — благополучно пережившими катастрофу. Жизнь их на этом небесном теле — Галлии — и составляет главное содержание романа.

— Да, — сказал профессор, словно про себя, — диаметр в 16 раз меньше земного диаметра, равного 12 792 километрам[1].

Сервадак и его спутники смотрели на ученого, не понимая, куда он ведет.

— Так вот, — оказал профессор, — для завершения моего изучения Галлии мне остается определить ее поверхность, объем, массу, плотность и напряжение тяжести[2] на ней.

— Что касается поверхности и объема, — ответил Прокофьев, — то раз мы знаем диаметр Галлии, нет ничего легче, как определить их.

— А я говорю разве, что это трудно? — воскликнул профессор. — Ученик Сервадак, возьмите перо. Зная длину большого круга Галлии, определите величину ее поверхности.

— Вот, — ответил Сервадак, решивший держаться примерным учеником. — Множим окружность 2300 километров на диаметр, т. е. на 720. [3]

— Скорее же, — торопил профессор, — пора бы уже иметь результат. Ну!

— Так вот, — ответил Сервадак, — я получил в произведении 1 656 000 квадратных километров. Это и есть поверхность Галлии.

— Ну, — продолжал профессор, разгорячаясь, — а теперь, каков же объем Галлии?

— Объем... — замялся Сервадак.

— Ученик Сервадак, неужели вы не можете вычислить объем шара, раз вам известна его поверхность?

— Но, профессор, вы не даете мне времени вздохнуть...

— При вычислениях не дышат, сударь, не дышат!

Слушатели с большим трудом удерживались от смеха.

— Мы когда-нибудь кончим с этим? — спросил профессор. — Объем шара равен...

— Произведению поверхности на...

— На треть радиуса, сударь, на треть радиуса! — гремел профессор. — Кончили?

— Почти. Треть радиуса Галлии равна 120.

— Ну?

— Произведение 1 656 000 на 120 составляет 198 720 000 кубических километров.

— Итак, — сказал профессор, — мы знаем теперь диаметр, окружность, поверхность и объем Галлии. Это уже нечто, но еще не все. Я намерен определить ее массу, плотность и напряжение тяжести на ее поверхности.

— Это будет трудно, — сказал Тимашев.

---

[1] По новейшим измерениям средний диаметр Земли = 12 736 км.

[Согласно последним данным, средний диаметр Земли составляет 12 742 км (*примеч. ред.*).]

[2] Т. е. силу тяжести (см. текст на с. 528) (*примеч. ред.*).

[3] Выкладки здесь и далее проверены и исправлены Я. П.

— Все равно. Я желаю знать, сколько весит моя комета, и узнаю это!

— Задача нелегкая, — заметил лейтенант Прокофьев. — Ведь нам неизвестен состав вещества Галлии.

— Вам неизвестен ее состав? — спросил профессор.

— Неизвестен, — сказал Тимашев, — и если вы нам поможете...

— Пустяки, — заметил ученый, — я решу свою задачу и без этого.

— Мы всегда к вашим услугам, — сказал капитан Сервадак.

—

62-го галлийского апреля[1] на имя капитана Сервадака пришла краткая записка от профессора. Розетт сообщал, что в этот день предполагает выполнить работы, необходимые для определения массы, плотности кометы и напряжения тяжести на ее поверхности. Сервадак, Тимашев и Прокофьев боялись пропустить свидание, назначенное вспыльчивым ученым. С утра все собрались в большом зале.

Профессор, по-видимому, не был в дурном настроении, — но день только начался.

Все знают, что такое напряжение тяжести. Это сила притяжения, проявляемая Землей по отношению к телу, масса которого равна единице. Галлийцам было известно, что это притяжение на Галлии ослаблено, — откуда и возрастание мускульной силы галлийцев. Но они не знали, на сколько именно тяжесть ослабела.

Итак, первый вопрос, подлежавший разрешению, был: как велико напряжение тяжести на поверхности Галлии?

Второй вопрос: какова масса Галлии, а следовательно, и ее вес?

Третий вопрос: какую массу заключает вещество Галлии в единице объема? Другими словами: какова ее плотность?

— Сегодня, — начал профессор, — мы закончим определение элементов моей кометы. Когда мы определим напряжение тяжести на ее поверхности, ее массу и плотность, для нас не будет больше тайн на Галлии. В результате мы взвесим Галлию.

Ординарец Бен-Зуф как раз при этих последних словах вошел в зал. Он тотчас же молча вышел, но вскоре появился вновь и сказал лукаво:

— Я обшарил кладовую, но не нашел весов, подходящих для взвешивания кометы. Да я и не знаю, куда бы мы их привесили.

При этом Бен-Зуф выглянул наружу, словно ища гвоздя на небе.

Взгляд, брошенный на него профессором, и жест Сервадака заставили шутника замолчать.

— Прежде всего, — сказал профессор, — нужно узнать, сколько весит на Галлии земной килограмм. Так как масса Галлии меньше массы Земли, то все

[1] Так как Галлия делала оборот вокруг Солнца в два года и этот период был разделен обитателями кометы на 12 частей, то месяцы на Галлии были также вдвое длиннее земных.

тела на ее поверхности весят меньше, чем на Земле[1]. Но на сколько именно — вот это необходимо знать.

— Совершенно верно, — ответил Прокофьев. — Но обыкновенные весы, если бы мы их даже имели, не годились бы для этого, так как обе их чашки одинаково подвержены притяжению Галлии и не указали бы нам соотношения весов галлийского и земного.

— Действительно, — подхватил Тимашев, — килограмм, которым мы будем пользоваться, потеряет в своем весе столько же, сколько и взвешиваемая вещь, и...

— Если вы говорите все это в назидание мне, — объявил профессор, — то напрасно теряете время. Прошу вас, позвольте мне продолжать курс.

Профессор держал себя, словно на кафедре.

— Есть ли у вас пружинные весы и гири в один килограмм? — продолжал он. — Это необходимо. В пружинных весах вес тела определяется степенью растяжения пружины, обусловленного ее упругостью. Поэтому, если я подвешу груз в 1 килограмм к пружинным весам, указатель покажет в точности, сколько весит 1 килограмм на Галлии. Повторяю: имеются у вас пружинные весы?

Слушатели смотрели друг на друга. Сервадак обратился к Бен-Зуфу, хорошо знавшему весь инвентарь колонии.

— У нас нет ни пружинных весов, ни гирь, — ответил ординарец.

Профессор выразил свою досаду, энергично топнув ногой.

— Но, — продолжал Бен-Зуф, — я, кажется, знаю, где есть пружинные весы, а пожалуй, и гири.

— Где?

— У Хаккабута[2].

— Так надо пойти за ними, — сказал капитан.

— Иду, — ответил ординарец.

— Я с тобой, — сказал капитан. — Хаккабут не особенно сговорчив, когда дело доходит до того, чтобы ссудить что-нибудь.

— Пойдемте все, — предложил Тимашев. — Посмотрим, как устроился он на своей тартане[3].

Когда все выходили, профессор сказал Тимашеву:

— Не может ли кто-нибудь из ваших людей обтесать осколок каменистой массы, чтобы получился в точности кубический дециметр?

— Наш механик сделает это без труда, но при одном условии: если его снабдить метром, необходимым для точного отмеривания.

— Разве у вас нет метра? — спросил профессор.

---

[1] Направление тяжести на поверхности небесного тела зависит, впрочем, не от одной лишь массы этого тела, но и от величины его радиуса.

[2] Имя торговца, также очутившегося на комете.

[3] Маленькое судно.

В кладовых не было метра: это удостоверил Бен-Зуф.

— Но, — прибавил он, — весьма возможно, что метр найдется у Хаккабута.

— Так идемте же, — торопил профессор, поспешно направляясь в коридор.

—

Исаак Хаккабут стоял в углу с видом человека, ожидающего приговора суда.

— Хозяин Исаак, — сказал капитан, — мы пришли к вам, чтобы попросить об услуге.

— Услуге?

— Одним словом: можете ли вы ссудить нам пружинные весы?

— Вы просите меня ссудить вам...

— Только на один день, — вмешался профессор, — всего на один день. Вам возвратят их.

— Но это очень деликатный инструмент: пружина может сломаться на таком холоде... Вам понадобится, может быть, взвешивать что-нибудь очень тяжелое?

— Уж не думаешь ли ты, — сказал ординарец, — что мы будем вешать гору?

— Больше чем гору, — заметил профессор. — Мы взвесим Галлию.

— Помилуйте! — воскликнул Хаккабут.

— Хозяин, — вмешался капитан, — пружинные весы нам нужны, чтобы взвесить вещь не тяжелее килограмма.

— Еще меньше килограмма, вследствие ослабления тяжести на Галлии. Словом, вам нечего опасаться за свои весы.

— А вы внесете мне залог?

— Да. Сто франков. Весы стоят двадцать. Достаточно?

— А плата за пользование?

— Двадцать франков.

Торг был заключен. Хаккабут принес инструмент. Это были пружинные весы с крючком, на который навешивался груз. Стрелка на циферблате показывала вес. Предназначенный для взвешивания земных предметов инструмент был градуирован на Земле. Но каковы будут его показания на Галлии?

Посетители встали, чтобы покинуть тартану, когда профессор задержал всех:

— Нам надо еще взять у него метр и гирю в один килограмм.

— К сожалению, невозможно, — ответил Хаккабут, — я рад был бы их дать вам...

На этот раз он говорил искренно, утверждая, что у него нет ни метра, ни гири и что он охотно дал бы их в пользование: сделка была бы выгодная.

— Придется как-нибудь обойтись без них, — сказал раздосадованный профессор.

Не успели посетители сойти с тартаны, как из каюты донесся звон монет: Хаккабут пересчитывал золото в своих ящиках.

Услышав этот звук, профессор кинулся назад к лестнице; все с недоумением смотрели на него, не зная, чему приписать его стремительность.

— У вас есть деньги? — крикнул профессор, хватая торговца за платье.

— У меня... деньги!.. — шептал Хаккабут, словно на него напал грабитель.

— Французские монеты! — продолжал профессор. — Пятифранковые монеты!

Профессор наклонился над ящиком.

— Это французские монеты, — заявил он, — и они мне нужны.

— Никогда!.. — кричал торговец.

— Они мне нужны, — говорю тебе, — и они у меня будут!

Сервадак видел, что пришло время вмешаться.

— Вам нужны деньги? — спросил он профессора. — Определенное число монет для ваших исследований?

— Да, сорок монет.

— Двести франков! — шептал торговец.

— И кроме того, десять монет в два франка и двадцать монет по 50 сантимов.

— Тридцать франков! — жалобно стонал Хаккабут.

— Хорошо, — сказал капитан, обращаясь к Тимашеву: — Есть у вас что дать Хаккабуту в обеспечение займа?

— Двести рублей кредитными билетами.

Тимашев бросил на стол деньги. Французские монеты, потребованные профессором, были ему вручены, и он с видимым довольством спрятал их в карман.

Через несколько минут капитан и его спутники покинули тартану.

— Это не двести тридцать франков, — воскликнул профессор, — это то, из чего мы изготовим в точности и метр, и килограмм!

—

Спустя четверть часа посетители тартаны вновь собрались в общем зале, и последние слова профессора получили свое объяснение.

Профессор распорядился расчистить место на столе. Деньги, занятые у торговца, были рассортированы по их достоинству, образовав два столбика в 20 монет по пяти франков, один — из 10 монет по два франка и еще один — из 20 монет по 50 сантимов.

Профессор начал с удовлетворенным видом:

— Так как при столкновении с кометой мы не догадались запастись метром и гирей в один килограмм, то я вынужден был придумать способ заменить эти предметы, необходимые мне для определения напряжения тяжести, массы и плотности моей кометы.

Никто не прерывал этого странного вступления.

— Я убедился, — продолжал профессор, — что монеты эти почти новы, нисколько не изношены, не потерты. Они как раз в таком состоянии, какое необходимо, чтобы разрешить нашу задачу с надлежащею точностью.

Сервадак и его товарищи угадали намерения профессора, прежде чем он изложил их до конца. Но ординарец взирал на него, как на фокусника, готовящегося выполнить очередной «номер».

Вот на чем основывал ученый свою первую операцию, идея которой возникла в его уме, когда он услышал звон монет в ящике торговца.

Известно, что монеты Франции заготовляются по десятичной системе, включающей в пределах от сантима до ста франков: 1) медные монеты в 1, в 2, в 3 и в 10 сантимов; 2) серебряные — в 20 и в 50 сантимов, в 1, в 2 и в 5 франков; 3) золотые — в 5, в 10, в 20, в 50 и в 100 франков.

Для профессора Розетта важно было то, что диаметры этих монет были строго определены законом. Так, диаметр пятифранковой монеты равен 37 миллиметрам, двухфранковой — 27 миллиметрам, полуфранковой — 18 миллиметрам. Нельзя ли поэтому, прикладывая друг к другу монеты различного достоинства, получить точно длину метра?

Вполне возможно, и профессор знал это; вот почему он выбрал 10 монет по пяти франков, десять по два франка и 20 монет по 50 сантимов.

В самом деле: набросав быстро на клочке бумаги следующий расчет, он представил его слушателям:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 | монет 5-франковых | по 0,037 м | = 0,37 м |
| 10 | » 2 » | по 0,027 » | = 0,27 » |
| 20 | » 50-сантимовых | по 0,018 » | = 0,36 » |
| | | Итого — | 1,00 м |

— Прекрасно, дорогой профессор, — сказал Сервадак. — Остается лишь тщательно выложить эти 40 монет в одну прямую линию, чтобы получить точную длину метра.

— О, — воскликнул ординарец. — Быть ученым, я вижу, совсем неплохо!

— Он называет это быть ученым, — заметил профессор, пожимая плечами.

Десять пятифранковых монет были выложены в один ряд, одна к другой так, чтобы центры их были на одной прямой; к ним примыкали десять двухфранковых монет и двадцать полуфранковых. Границы составившейся длины были отмечены черточками.

— Вот, — объявил профессор, — точная длина метра!

Операция была выполнена с крайней тщательностью.

Полученная длина была циркулем разделена на десять частей, т. е. на дециметры, и брусок соответствующей длины был вручен судовому механику.

Тот уже раздобыл обломок неизвестной горной породы, из которой составлена была масса Галлии, и оставалось лишь, как требовал профессор, обтесать его в форме кубического дециметра.

Метр был получен. Теперь надо было изготовить гирю в один килограмм.

Это было более легким делом. Действительно, французские монеты имеют не только строго определенный диаметр, но и установленный законом вес. Пятифранковая монета весит ровно 25 граммов, что составляет вес пяти монет по одному франку[1]. Достаточно поэтому взять 40 серебряных монет по 5 франков, чтобы получился вес в 1 килограмм.

— Как вижу я, — оказал ординарец, — быть ученым все же недостаточно, надо еще...

— Что еще? — спросил Сервадак.

— Быть богатым.

Замечание было встречено дружным хохотом.

Через несколько часов механик доставил профессору тщательно выточенный кубик из горной породы. Теперь ученый имел все необходимое.

— Должен напомнить вам, — начал профессор, — на случай, если вы забыли или не знали, знаменитый закон Ньютона, согласно которому сила притяжения прямо пропорциональна произведению масс и обратно пропорциональна квадрату расстояния. Прошу всегда твердо помнить этот закон.

Он читал лекцию блестяще. Да и аудитория его, надо признать, была хорошо дисциплинирована.

— В этом мешочке, — продолжал он, — 40 пятифранковых монет. На Земле эта кучка монет весит ровно один килограмм. Следовательно, будь мы на Земле и я привесил бы к весам этот мешочек с монетами, указатель остановился бы на одном килограмме. Понятно?

Произнося эти слова, профессор не спускал глаз с Бен-Зуфа. Он подражал при этом Араго, во время лекций всегда смотревшего в упор на того из слушателей, который казался ему наименее понятливым; и когда этот слушатель обнаруживал признаки понимания, лектор приобретал уверенность в том, что прочитанное усвоено всеми[2].

Ординарец капитана Сервадака не был тупицей, но был невежествен, — а при данных обстоятельствах это было одно и то же.

Так как Бен-Зуф, по-видимому, понял, профессор продолжал:

---

[1] Вот вес французских монет:

Золотых: 100 фр. — 32, 25 грамма; 50 фр. — 16,12 г, 20 фр. — 6,45 г, 10 фр. — 3,22 г, 5 фр. — 1,61 г.

Серебряных: 5 фр. — 25 г, 2 фр. — 10 г, 1 фр. — 5 г., ½ фр. — 2,5 г.

Медные: 10 сант. — 10 г, 5 с. — 5 г, 2 с. — 2 г, 1 с. — 1 г. (*примеч. Ж. Верна*).

[2] По этому поводу знаменитый астроном рассказывал о следующем забавном случае. Однажды в его гостиную вошел незнакомый ему молодой человек, вежливо поклонившийся профессору.

— С кем имею удовольствие разговаривать? — осведомился Араго.

— О, мсье Араго, вы, наверное, хорошо знаете меня: я посещаю аккуратно ваши лекции, а вы не спускаете с меня взгляда во все время чтения (*примеч. Ж. Верна*).

— Итак, я подвешиваю мешочек с монетами: наше взвешивание происходит на Галлии, поэтому мы сейчас узнаем, сколько весят монеты на поверхности моей кометы.

Мешочек был подвешен к крючку; указатель после нескольких колебаний остановился, показывая на разделенном круге 133 грамма.

— Итак, — объяснил профессор, — то, что на Земле весит 1 килограмм, на Галлии весит только 133 грамма, т. е. приблизительно в 7 раз меньше. Ясно?

Бен-Зуф кивнул головой, и профессор, ободренный, продолжал:

— Вы понимаете, конечно, что результат, полученный с помощью пружинных весов, совершенно недостижим на весах обыкновенных. В самом деле: если на одну чашку таких весов положить эти монеты, на другую — гирю в один килограмм, то обе чашки потеряют в весе на Галлии одинаково, и равновесие не нарушится. Понятно?

— Даже мне, — ответил ординарец.

— Итак, здесь вес в 7 раз меньше, чем на земном шаре. Отсюда следует, что напряжение тяжести на Галлии составляет седьмую часть напряжения тяжести на поверхности Земли.

— Прекрасно, — ответил Сервадак. — Теперь, дорогой профессор, перейдем к массе.

— Нет, сначала к плотности, — возразил Розетт.

— В самом деле, — вмешался лейтенант Прокофьев. — Раз объем Галлии известен, то, зная плотность, мы получим и массу.

Он был прав; оставалось лишь произвести измерение плотности.

К этому и приступил профессор. Он взял выточенный из горной породы кубик объемом в один кубический дециметр.

— Этот кубик, — объяснил он, — состоит из того неизвестного вещества, которое мы всюду находили на Галлии во время кругосветного плавания. По-видимому, моя комета целиком состоит из этого вещества. Здесь перед нами кубический дециметр этого минерала. Сколько бы весил он на Земле? Мы найдем его земной вес, если умножим на 7 вес его на Галлии, так как напряжение тяжести на Галлии в 7 раз слабее, чем на Земле. Взвесим же этот образчик. Это равносильно тому, как если бы мы нацепили на крючок весов нашу комету.

Кубик был подвешен к крючку, и стрелка показала 1 килограмм 430 граммов.

— Один килограмм 430 граммов, — громко объяснял профессор, — умноженные на 7, составляют почти ровно 10 килограммов. А так как средняя плотность земного шара круглым счетом равна 5, то средняя плотность Галлии вдвое более плотности Земли. Если бы не это обстоятельство, напряжение тяжести на комете было бы не в 7 раз слабее земного, а в 14.

Итак, теперь уже были известны диаметр Галлии, ее поверхность, объем, плотность и напряжение на ней тяжести. Оставалось определить ее массу, а следовательно, и вес.

Вычисление было выполнено быстро. Так как кубический дециметр вещества Галлии весил 10 земных килограммов, то вся комета должна весить столько раз по 10 килограммов, сколько в ее объеме содержится кубических дециметров. Объем Галлии, как мы уже знаем, равен 198 720 000 кубическим километрам. Поэтому вес Галлии выражается в килограммах огромным числом из 22 цифр, а именно:

1 987 200 000 000 000 000 000,

т. е. 1987 квинтиллионов 200 квадриллионов килограммов. Такова в земных килограммах масса Галлии.

— Сколько же тогда весит Земля? — спросил ординарец.

— А понимаешь ли ты, что такое миллиард? — спросил его Сервадак.

— Плоховато, капитан.

— Ну, так знай же, что от начала нашей эры не прошло еще одного миллиарда минут[1], и если бы ты должен был миллиард франков, то, начав выплачивать с того времени по франку каждую минуту, ты до сих пор не расплатился бы.

— По франку в минуту! — воскликнул Бен-Зуф. — Да я разорился бы в первую четверть часа. А сколько же все-таки весит Земля?

— Пять септиллионов 979 секстиллионов килограммов[2], — ответил лейтенант Прокофьев. — Число это состоит из 25 цифр.

— А Луна?

— 73 секстиллиона 700 квинтиллионов килограммов[3].

— Только всего. А Солнце?

— Два нониллиона килограммов, число из 31 цифры[4].

— Ровно два нониллиона? — воскликнул Бен-Зуф. — Наверное, на несколько граммов ошиблись...

Профессор бросил на ординарца презрительный взгляд и величественно вышел из зала, чтобы подняться в свою обсерваторию.

— И к чему, скажите, все эти вычисления, — спросил ординарец, — которые ученые проделывают, словно какие-то фокусы?

— Ни к чему, — ответил капитан, — в этом-то и вся их прелесть!

---

[1] Миллиард минут истекло лишь 29 апреля 1902 г. в 10 ч. 40 м. утра.

[2] По современным данным, масса земного шара составляет $5{,}9726 \times 10^{24}$ кг, т. е. пять септиллионов 972 секстиллиона 600 квинтиллионов килограммов (см. также примечание на с. 317) (*примеч. ред.*).

[3] По современным данным, масса Луны составляет $7{,}3477 \times 10^{22}$ кг, т. е. 73 секстиллиона 477 квинтиллионов килограммов (*примеч. ред.*).

[4] По современным данным, масса Солнца составляет $1{,}9885 \times 10^{30}$ кг, т. е. 1 нониллион 988 октиллионов 500 септиллионов килограммов (*примеч. ред.*).

## *ПРИМЕЧАНИЯ Я. П.*

### I

Жюль Верн держится в этом произведении устарелого ныне взгляда на кометы, считая их голову сплошным твердым шаром большой поверхности. В настоящее время голову кометы рассматривают как весьма рыхлое скопление твердых частиц.

### II

Монеты СССР, как и французские, имеют установленные законом размеры и вес, а именно:

| *Серебряные:* | *Диаметр:* | *Вес:* |
|---|---|---|
| 1 рубль | 33,4 мм | 20 граммов |
| 50 коп. | 26,67 » | 10 » |
| 20 » | 21,84 » | 3,6 » |
| 15 » | 19,56 » | 2,7 » |
| 10 » | 17,27 » | 1,8 » |

| *Медные, образца 1924 г.* | | |
|---|---|---|
| 5 коп. | 32 мм | |
| 3 » | 27,7 » | Медные монеты на сумму 50 р. |
| 2 » | 24 » | весят 16,38 кг (1 пуд) |
| 1 » | 21,3 » | |

| *Медные (бронзовые) нов. образца:* | | |
|---|---|---|
| 5 коп. | 25 мм | 5 граммов |
| 3 » | 20 » | 3 » |
| 2 » | 18 » | 2 » |
| 1 » | 15 » | 1 » |

Диаметр золотого червонца — 2 сантиметра, вес — 8,53 грамма (2 золотника).

Легко видеть, что восстановить длину метра, пользуясь нашими монетами, довольно просто: для этого достаточно выложить в ряд 30 серебряных рублей.

$$33{,}4 \text{ мм} \times 30 = 1002 \text{ миллиметра} = 1{,}002 \text{ метра.}$$

Здесь получается избыток в 2 миллиметра. Пользуясь же новыми бронзовыми монетами, это можно сделать вполне точно, взяв 40 пятаков или 50 трехкопеечных монет:

$$25 \text{ мм} \times 40 = 1000 \text{ мм} = 1 \text{ м};$$
$$20 \text{ мм} \times 50 = 1000 \text{ мм} = 1 \text{ м}.$$

Для составления веса в 1 килограмм можно взять 50 серебряных рублей или 100 полтинников:

$$20 \text{ г} \times 50 = 1000 \text{ г} = 1 \text{ кг};$$
$$10 \text{ г} \times 100 = 1000 \text{ г} = 1 \text{ кг}.$$

## III

Для вычисления массы Галлии существует другой, более короткий путь, нежели тот, который описан в романе. Действительно, раз известны диаметр Галлии и напряжение тяжести на ее поверхности, то массу ее можно было вычислить, не делая никаких новых измерений, — в частности, не измеряя непосредственно ее средней плотности. Напротив, эту плотность можно было по указанным данным определить вычислением гораздо надежнее, чем измерением.

Ход вычисления массы весьма несложен. Допустим, что масса Галлии равна массе Земли, между тем как радиус ее составляет всего 370 километров. Тогда напряжение тяжести на Галлии было бы больше, чем на поверхности Земли, соответственно большей близости тяготеющих предметов к центру притяжения. А именно: по закону обратных квадратов, сила притяжения на уменьшенном расстоянии должна была бы возрасти в отношении

$$\frac{6400^2}{370^2} = \frac{40\,960\,000}{136\,900} = 299.$$

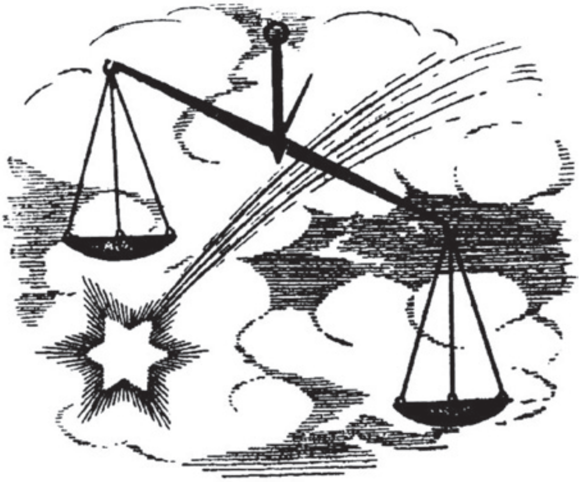
В действительности же, как показало измерение с помощью пружинных весов, напряжение тяжести на поверхности Галлии не только не возросло в указанном отношении, но, напротив, еще ослабело в 7 раз. Другими словами: напряжение тяжести на реальной Галлии меньше, чем на нашей воображаемой (с массой, равной массе Земли) в 7 × 299 = 2093 раза. Это различие может быть обусловлено только одной причиной: тем, что истинная масса Галлии во столько же раз меньше предположенной (притяжение прямо пропорционально массе). Итак, масса Галлии составляет долю массы земного шара. Зная массу Земли (5 979 000 квинтиллионов килограммов), находим массу Галлии:

2857 квинтиллионов килограммов.

Этот результат не согласуется с результатом, упомянутым в тексте романа (1987 квинтиллионов кг).

Зная массу Галлии и ее диаметр, нетрудно уже определить вычислением ее среднюю плотность. Для этого нужно лишь полученную массу кометы разделить на ее объем; в частном получится число килограммов вещества в единице объема (в 1 дециметре), т. е. то, что называется плотностью тела. Объем Галлии — 198 720 000 кубических километров — раздробляем в кубические дециметры; получаем 198 872 000 триллионов. Разделив на это число ранее полученную массу кометы, т. е. 2857 квинтиллионов килограммов, получаем для средней плотности Галлии величину около 14 килограммов, — т. е. не ту, которую профессор Розетт нашел непосредственным измерением.

Мы видим, что не было никакой надобности определять вес кубического дециметра горной породы, составляющей Галлию. Это измерение не годилось даже в качестве контрольного — для проверки результата, полученного вычислением, — так как вычисленная средняя плотность дает более надежный результат: здесь нет рискованного допущения, что вся комета до самого центра состоит из того же вещества, которое обнаружено на ее поверхности.



## ПРЕДШЕСТВЕННИК НАНСЕНА

*Рассказ В. Ольдена*[1]

— Вы верите, что Нансен открыл Северный полюс? — спросил я старого моряка, моего приятеля, когда интересная весть разнеслась по Европе[2].

Он уклонился от прямого ответа и небрежно заметил, что «если Нансен и добрался до полюса, то во всяком случае не прежде всех».

— Странно, друг мой. По-вашему, у Нансена были предшественники? Почему же они не рассказали ничего, вернувшись домой?

— Нисколько не странно, — отвечал моряк. — Разве можно обо всем рассказывать? Вы думаете, мало на свете людей, которые видели собственными глазами морскую змею? Не очень лестно, когда всякая встречная газета выбранит вас, — вот все и молчат по возможности. Никто все равно не поверит. Ну, если, например, я скажу вам, что я единственный оставшийся в живых из команды китоловного судна, проживший на Северном полюсе почти неделю, — что вы на это скажете? Поверите или нет?

— Не могу ничего ответить, пока не узнаю подробностей.

— Для вас я, пожалуй, сделаю исключение, — ответил мой приятель, — и расскажу (хотя и не думаю, что вы поверите), как я и шестеро других людей открыли Северный полюс двадцать девять лет тому назад.

Мы вышли на шхуне «Марта Уилльямс» из Нью-Бедфорда, в Соединенных Штатах, в Северный Ледовитый океан на ловлю китов. Судно было

[1] Английский беллетрист. Рассказ передан здесь в извлечении по переводу Н. Жаринцевой (1900 г.).

[2] В 1895 г. Хотя Фритьофу Нансену удалось проникнуть тогда только до 84° 4' сев. широты, многие газеты, недостаточно осведомленные, поспешили оповестить, что Нансен открыл полюс.

в пятьсот пятьдесят тонн; я занимал на нем место штурмана; капитан наш, Билль Шаттук, пользовался славой ловкого командира, у которого комар носа не подточит. В Вальпарайзо мы пристали за картофелем, в Сан-Франциско — за водой, и пришли в китовые места — к северу от Берингова пролива — в половине июня. Китоловных судов там оказался целый флот, но добычи очень мало. Лето было жаркое, и киты, вероятно, ушли дальше на север, вместо того чтобы поджидать нас на месте. Целый месяц мы прошатались в этих водах и нашли только одного, да и то жалкого. Наконец надоело; некоторые шхуны пошли обратно на юг, а большинство к северо-востоку. Наш капитан вздумал отделиться от всех и направился на северо-запад. Льда не было видно нигде, и решение капитана не могло вызвать никаких подозрений, хотя — как оказалось впоследствии — он неожиданно сошел с ума.

Двенадцать дней шли мы на северо-запад, под ровным южным ветром, не встретив ни одного кита. В море стали попадаться плавучие ледяные горы, и я думал, что капитан повернет обратно, — но у него не то было на уме. Он держал теперь прямо на север и объявил, что намерен пройти к Северному полюсу, а оттуда в Атлантический океан.

— Для этого нам понадобится не более двух недель, если продержится ветер, а открытием Северного полюса мы наживем вдвое больше денег, чем если бы переполнили судно китовым жиром.

Я промолчал, потому что моей обязанностью было исполнять приказания, а не рассуждать.

Через восемь с половиной суток нас прищемили изрядные ледяные горы. Вся передняя часть судна до самой грот-мачты превратилась в тонкий слой щепок. Я едва успел выскочить на палубу, когда оставшиеся на корме пять человек команды и капитан спустили лодку. Через минуту мы отчалили, а еще через несколько минут увидели, как останки «Марты Уилльямс» медленно опустились на дно.

Вы, вероятно, думаете, что после этого старик Шаттук отказался от фантазии открыть Северный полюс и постарался пройти к берегам Сибири, где мы могли встретить туземцев или русских купцов. Но нет, куда тут! Он прехладнокровно отдал приказание держать прямо на полюс.

Развернули паруса, — народу было немного, лодка хорошая, — и весело полетели вперед, насколько могут быть веселы добрые матросы, когда табак давно вышел и нечего будет курить в продолжение нескольких недель.

На вторые сутки мы попали в какой-то пролив и увидели с одной стороны ледяные горы, а с другой — высокий скалистый берег. Жители заметили нас и уже стояли в ожидании на прибрежном утесе, с любопытством поглядывая, как мы причаливали и выходили на землю. Человек тридцать мужчин, женщин и детей окружили нас и приветствовали.

Добродушные они были ребята; сейчас повели нас в свои снеговые пещеры и накормили рыбьим жиром, какой-то морской травой и рыбой. Наевшись до тошноты, старый Шаттук вынул секстант и принялся за наблюдения.

— Мы находимся в такой точке земного шара, где ни долготы, ни широты нет, — объявил он нам, окончив исследования: — на Северном полюсе! Мы сделали величайшее открытие; нам принадлежит честь, которой добивались многие.

Затем он наклонился и принялся отыскивать кончик земной оси. Видя, что старик рассматривает землю и что-то ищет, туземцы повели нас на вершину острова и показали нечто вроде кресла, вырезанного из каменной глыбы. Через матроса Джаксона, датчанина, они объяснили, что с этим креслом у них связаны какие-то священные понятия, и никто не запомнит, сколько времени оно тут стоит.

— Отлично, — объявляет вдруг безумный старик. — Это-то и есть Северный полюс, и я беру его в свое владение. Да здравствуют Северо-Американские Соединенные Штаты и капитан Билль Шаттук!

С этими словами он усаживается на первобытное кресло и отдает нам приказание «обращаться» вокруг него.

Видите ли: так как мы находились на Северном полюсе, то солнце действительно обращалось вокруг нас, как вращаются иногда улицы, когда выпьешь лишнее. На шесть месяцев «солнце уходило отдыхать», — как сообщили нам туземцы, — но другие шесть месяцев оно разгуливало на десять градусов над горизонтом, не делая даже вида, что хочет закатиться. Вот капитан Шаттук, сильно рехнувшись, и вообразил, что если солнце вокруг него обращается, то подавно обязаны и мы.

Уселся он на каменный трон и роздал приказания. Мне, как старшему, велено было занять первое место, отступя на десять футов от полюса; остальные матросы должны были расположиться по очереди дальше, на пять футов расстояния друг за другом. Туземцам капитан объявил, что пока они еще не нужны, но когда первые планеты выбьются из сил, тогда он заставит и их исполнять астрономические обязанности.

Нечего делать: пришлось «обращаться». Мы должны были ходить вокруг старика слева направо, со скоростью трех узлов, хотя молодцам, которых он поставил на дальние орбиты, приходилось двигаться быстрее. Старик порядочно муштровал нас. Если кто-нибудь сбивался с круга, он свирепо заявлял, что мы не имеем права устраивать «возмущений» без его приказания; а тому, кто выказывал признаки усталости, кричал:

— Если ты не будешь держаться, как подобает небесному светилу, то я превращу тебя в комету и отправлю по такому эллипсу, что ты через тысячу лет не вернешься.

Вы, конечно, спросите, с какой стати мы подчинились подобным глупостям, так как капитан, согласно морским законам, не имел над нами никакой власти с тех пор, как мы потерпели крушение. Но дело в том, что Шаттук не расставался с двумя револьверами, которые ему удалось сохранить при себе, и эти-то инструменты заставляли нас плясать вокруг него и притворяться насколько возможно, что нам очень весело.

В полдень он позволил нам передохнуть и сам сытно пообедал. Воспользовавшись его хорошим настроением, я предложил сделать запас воды и пищи и вернуться в цивилизованные места, прежде чем океан замерзнет. Он удивился моему невежеству:

— Как, м-р Мартин! Вы тридцать лет провели на море и не имеете необходимейших первоначальных сведений. Да ведь мы находимся в точке земного шара, где нет ни долготы, ни широты и где стрелка компаса вращается так бестолково, что немыслимо ничего разобрать. Почем я знаю, где восток и где запад? И куда я поеду без компаса и без долготы?.. Нет, сэр, мы на полюсе, и здесь останемся. Мне здесь очень нравится, и вам всем тоже должно нравиться. Когда я сижу в этом кресле, — я центр Солнечной системы и не намерен оставлять такого положения ради того, чтобы выпрашивать новый корабль.

Больше от него ничего нельзя было добиться. Хорошо, что у него хватило еще смысла не заставлять команду обращаться двадцать четыре часа в сутки. Отпустив нас на отдых, он велел Джаксону передать туземцам, что теперь их очередь. Я думал, они не подчинятся и не станут бегать без толку, не имея понятия о значении капитанских револьверов. Но, очевидно, они приняли его за какое-то божество, так как принялись обращаться немедленно с величайшей охотой и благоговейно выполняли роль планет с полудня до четырех часов. Потом наступила наша очередь, затем опять их и т. д.

На следующее утро, когда наша партия принялась за работу, капитан обращается к матросу Смидлею и велит ему приготовиться к затмению.

— Смотри в оба, чтобы все было аккуратно! Ровно в шесть склянок на тебе должно начаться затмение от Джаксона и в семь склянок должно дойти до полного.

Смидлей был порядочный драчун, и все мы знали его кулаки, хотя офицерские приказания он исполнял до сих пор, как хороший матрос. Но это приказание пришлось ему не по нраву. Он обращается к старику и отвечает, что согласен встретить кого угодно и где угодно, но «затмевать» себя никому не позволит, пока у него есть здоровые руки. Капитан напрасно старался убедить Смидлея, что астрономическое затмение нисколько не позорно для матроса; мне пришлось уговаривать его забыть на время, что он матрос, и отнестись к делу хладнокровно, как относятся все небесные тела. Едва-едва уладилось дело.

Потом Шаттук выдумал и для меня занятие.

— М-р Мартин, — говорит он. — По моим вычислениям, вы находитесь теперь в первой четверти. Потрудитесь приращаться постепенно в течение двух недель. На четырнадцатый день у вас должен быть полный диск. Прошу обратить на это внимание.

Я сделал вид, что обратил внимание, хотя не мог понять, чего ему надо и как может человек приращаться, когда нет сердцекрепительных напитков и нечего есть, кроме рыбьего жира.

Двое суток продолжалось вращательное занятие. Этого было вполне достаточно даже и без всяких затмений, приращений и полных дисков, которые как будто и не к лицу порядочному матросу. В один из отдыхов, пока туземцы бегали с прежним умилением, мы решили, что капитан окончательно рехнулся и что с нашей стороны будет даже великодушием схватить его, связать по рукам и ногам и уложить в лодку, а потом запастись у туземцев пищей и отправиться домой. План казался легким, потому что капитан был не особенно сильный мужчина; мы решили, что двое из нас схватят его сзади и обезоружат, пока остальные будут пробегать по своим орбитам перед его глазами.

Так мы и попробовали сделать на третий день утром.

Когда он, казалось, задремал и двое самых сильных матросов подскочили к нему сзади, — он внезапно обернулся и первыми двумя выстрелами уложил обоих на месте. Тогда остальные бросились на него, понимая, что если мы не овладеем оружием, то всем придется плохо. Несколько минут длилась отчаянная борьба. Когда она окончилась, пятеро матросов были убиты наповал, капитан лежал с ножом Джаксона в сердце, а у меня засела пуля в левой руке выше локтя.

Я остался один из всей команды и сейчас же принялся делать туземцам разные жесты и знаки, стараясь объяснить, что у меня самые мирные намерения, и я только прошу дать мне воды и пищи, чтобы уехать. Они меня прекрасно поняли и уложили в лодку столько рыбы и воды, что хватило бы на два месяца.

Я пустил лодку по ветру, не обращая внимания на компас; только через три или четыре дня, взглянув на него, я увидел, что иду к юго-западу. На пятый день я «нашел» долготу места и так обрадовался, словно это был не десятый меридиан, а добрая мера табаку. Пользуясь северным ветром, я старался не уклоняться в сторону и через тридцать пять дней был взят на первое встретившееся судно. Это была английская китоловная шхуна, которая и доставила меня в Бристоль в конце октября.

Конечно, я никогда ни одним словом не обмолвился о Северном полюсе. Но вам я сообщил сущую правду и хотел бы знать ради любопытства, что вы теперь думаете.

— Давайте выпьемте по второму стакану горячего джина, — отвечал я.

## *ПРИМЕЧАНИЕ Я. П.*

## ЖИВОЙ ПЛАНЕТАРИЙ

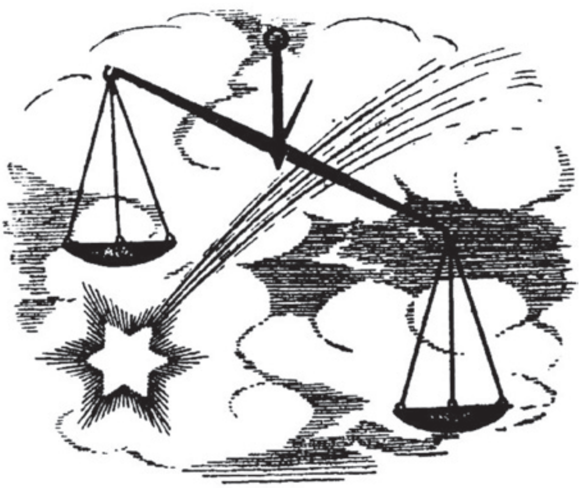
Странная фантазия — приказать матросам «исполнять астрономические обязанности», будто бы возникшая, по словам моряка, в помутившемся уме капитана, вовсе не так сумасбродна и фантастична, как, пожалуй, склонны подумать иные читатели. Идея заставить товарищей разыгрывать в лицах планетную систему является, по-видимому, лишь неуместным воспоминанием о школьных упражнениях на уроках космографии. Эти оригинальные упражнения состоят в том, что ради наглядности школьники устраивают так называемый «живой планетарий», то есть своими движениями изображают живое подобие планетной системы. У нас подобный прием почему-то мало употребителен, хотя он значительно облегчает уяснение многих трудностей планетных движений. Опишем поэтому некоторые из этих поучительных упражнений.

Возьмем, например, движение Луны вокруг Земли. Мы знаем, что Луна всегда обращена к Земле одною и тою же своей стороной, и выводим отсюда, что период обращения нашего спутника вокруг Земли равен периоду его вращения вокруг своей оси. Однако такой вывод для многих непонятен: некоторым представляется более правильным вывод, что Луна вовсе не вращается вокруг своей оси, раз она неизменно обращена к Земле одной и той же стороной. «Живой планетарий» легко и просто разъясняет это недоразумение. Проделаем такое упражнение: пусть один из учащихся станет в середине комнаты, впереди класса, — он будет изображать Землю; другой, изображающий Луну, пусть обходит кругом него, все время обращаясь лицом к «Земле». Тогда остальные учащиеся, сидящие на своих партах, будут видеть «Луну» сначала сзади, потом сбоку, потом с лица, потом с другого бока и, наконец, когда «Луна» закончит полный круг, — снова сзади. Другими словами, все наглядно убедятся, что «Луна», обходя вокруг «Земли» с неизменно обращенным к ней лицом, вращается в то же время и вокруг своей оси — иначе они не видели бы ее последовательно со всех четырех сторон.

Напротив, если бы наша живая Луна обращалась вокруг «Земли» так, чтобы сидящие на партах все время видели «Луну» с одной и той же стороны, например спереди (т. е. если бы она не вращалась вокруг собственной оси), то «Земля» видела бы ее последовательно со всех четырех сторон, — вопреки мнению тех, кто полагает, что именно при этом условии Луна должна быть обращена к Земле неизменно одной и той же стороной.

В более пространном помещении — в обширном зале или на открытом воздухе — можно наглядно «разыграть в лицах» также совместное движение Земли и Луны вокруг Солнца. Для этого один из учащихся, изображающий Солнце, помещается в середине зала, а на некотором расстоянии становится другой, представляющий Землю, который и обходит медленным шагом кругом «Солнца», в то время как третий — в роли Луны — кружится вокруг этой живой Земли с такой скоростью, чтобы успеть сделать около 12 полных оборотов, пока «Земля» замкнет один круг. При этом станет ясно, что путь Луны в пространстве представляет собою волнистую круговую линию. Для большей наглядности можно натереть мелом подошвы учащегося, изображающего Луну, — и тогда следы его ног непосредственно начертят лунный путь. Под открытым небом, если упражнение производится зимою, путь Луны отметится сам собою следами ног по снегу.

Благодаря такого рода упражнениям можно с легкостью уяснить и многие другие особенности планетных движений, затруднительные для понимания. Рассмотрим хотя бы явление прямого и попятного движения планет, которое обычно, по мертвым книжным чертежам, усваивается не без труда. Живой планетарий поможет весьма быстро составить вполне отчетливое представление об этих движениях. Один из учащихся в роли Солнца становится в середине просторного зала или площадки на дворе; у стен зала или у краев площадки размещаются остальные, играющие в данном случае роль неподвижных звезд. Двое на этот раз будут изображать собою планеты, один — Землю, другой — какую-нибудь внешнюю планету, например Юпитер. Обе живые планеты обходят вокруг «Солнца», но с различной скоростью: «Земля» движется быстрее «Юпитера», совершая 11–12 полных кругов, пока «Юпитер» закончит один круг. И вот, выполняя свое движение, учащийся, принявший на себя роль Земли, внимательно следит за тем, против каких «неподвижных звезд» оказывается при этом «Юпитер»: он ясно заметит, что Юпитер движется то вперед между «звездами», то назад, совершая характерные для внешних планет прямое и попятное движения на звездном небе[1].



[1] Число упражнений, выполняемых помощью живого планетария, довольно велико, и их можно всячески видоизменять. Кто интересуется ими, тому советуем обратиться к книге Н. Платонова «Практические занятия по начальной астрономии».


## УНИВЕРСАЛЬНАЯ БИБЛИОТЕКА

*Рассказ Курда Лассвица*[1]

— Ну, садись же сюда, Макс, — сказал профессор. — В бумагах моих, право, ничего для твоей газеты не найдется.

— В таком случае, — отвечал Макс Буркель, — тебе придется что-нибудь написать для нее.

— Не обещаю. Написано уже, да к сожалению и напечатано, так много лишнего...

— Я и то удивляюсь, — вставила хозяйка, — что вы вообще находите еще что-нибудь новое для печатания. Уж, кажется, давно бы должно было быть перепробовано решительно все, что мыслимо составить из вашей горсти типографских литер.

— Можно было бы, пожалуй, так думать. Но дух человеческий поистине неистощим...

— В повторениях?

— О да, — рассмеялся Буркель, — но также и в изобретении нового.

— И несмотря на это, — заметил профессор, — можно изобразить буквами все, что человечество когда-либо создаст на поприще истории, научного познания, поэтического творчества, философии. По крайней мере поскольку это поддается словесному выражению. Книги наши ведь заключают все знание человечества и сохраняют сокровища, накопленные работой мысли. Но число возможных сочетаний будет ограничено. Поэтому вся вообще возможная литература должна уместиться в конечном числе томов.

— Э, старина, в тебе говорит сейчас математик, а не философ! Может ли неисчерпаемое быть конечным?

---

[1] Написан в 1904 г. Переведен с несущественными пропусками.

— Позволь, я подсчитаю тебе сейчас, сколько именно томов должна заключать такая универсальная библиотека... Дай-ка мне с письменного стола листок бумаги и карандаш, — обратился профессор к жене.

— Прихватите заодно и таблицы логарифмов, — сухо заметил Буркель.

— Они не понадобятся, — сказал профессор и начал: — Скажи мне, пожалуйста: если печатать экономно и отказаться от роскоши украшать текст разнородными шрифтами, имея в виду читателя, заботящегося лишь о смысле...

— Таких читателей не бывает.

— Ну, допустим, что они существуют. Сколько типографских литер потребовалось бы при таком условии для изящной и всякой иной литературы?

— Если считать лишь прописные и строчные буквы, обычные знаки препинания, цифры и, не забудем, шпации...

Племянница профессора вопросительно взглянула на говорившего.

— Это типографский материал для промежутков, — пояснил он, — которым наборщики разъединяют слова и заполняют пустые места. В итоге наберется не так уж много. Но для книг научных!.. У вас, математиков, такая масса символов...

— Нас выручают индексы, — те маленькие цифры, которые мы помещаем при буквах: $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ и т. д. Для этого понадобится лишь еще один или два ряда цифр от 0 до 9. Аналогичным образом можно условно обозначать и любые звуки чужих языков.

— Если так, то потребуется, я думаю, не более сотни различных знаков, чтобы выразить печатными строками все мыслимое[1].

— Теперь дальше. Какой толщины взять тома?

— Я полагаю, что можно вполне обстоятельно исчерпать тему, если посвятить ей том в 500 страниц. Считая на странице по 40 строк с 50 типографскими знаками в каждой (включаются, конечно, шпации и знаки препинания), имеем $40 \times 50 \times 500$ букв в одном томе, т. е... впрочем, ты подсчитаешь это лучше...

— Миллион букв, — сказал профессор. — Следовательно, если повторять наши 100 литер в любом порядке столько раз, чтобы составился том в миллион букв, мы получим некую книгу. И если вообразим все возможные сочетания этого рода, какие только осуществимы чисто механическим путем, то получим полный комплект сочинений, которые когда-либо были написаны в прошлом или появятся в будущем.

Буркель хлопнул своего друга по плечу.

— Идет! Беру абонемент в твоей универсальной библиотеке. Тогда получу готовыми, в напечатанном виде, все полные комплекты моей газеты за будущие годы. Не будет больше заботы о подыскании материала. Для издателя — верх удобства: полное исключение авторов из издательского дела. Замена писателя комбинирующей машиной, неслыханное достижение техники!

— Как! — воскликнула хозяйка. — В твоей библиотеке будет решительно все? Полный Гете? Собрание сочинений всех когда-либо живших философов?

---

[1] Напомним, что на пишущей машинке имеется обычно не более 80 различных знаков.

— Со всеми разночтениями, притом какие никем еще даже не отысканы. Ты найдешь здесь полностью все утраченные сочинения Платона или Тацита и в придачу — их переводы. Далее, найдешь все будущие мои и твои сочинения, все давно забытые речи депутатов рейхстага и все те речи, которые еще должны быть там произнесены, полный отчет о международной мирной конференции и о всех войнах, которые за нею последуют... Что не уместится в одном томе, может быть продолжено в другом.

— Ну, благодарю за труд разыскивать продолжения.

— Да, отыскивать будет хлопотливо. Даже и найдя том, ты еще не близок к цели: ведь там будут книги не только с надлежащими, но и с всевозможными неправильными заглавиями.

— А ведь верно, так должно быть!

— Встретятся и иные неудобства. Возьмешь, например, в руки первый том библиотеки. Смотришь: первая страница — пустая, вторая — пустая, третья — пустая и т. д. все 500 страниц. Это тот том, в котором шпация повторена миллион раз...

— В такой книге не может быть, по крайней мере, ничего абсурдного, — заметила хозяйка.

— Будем утешаться этим. Берем второй том: снова все пустые страницы, и только на последней, в самом низу, на месте миллионной литеры приютилось одинокое *а*. В третьем томе — опять та же картина, только *а* передвинуто на одно местечко вперед, а на последнем месте — шпация. Таким порядком буква *а* последовательно передвигается к началу, каждый раз на одно место, через длинный ряд из миллионов томов, пока в первом томе второго миллиона благополучно достигнет наконец первого места. А за этой буквой в столь увлекательном томе нет ничего — белые листы. Такая же история повторяется и с другими литерами в первой сотне миллионов наших томов, пока все сто литер не совершат своего одинокого странствования от конца тома к началу. Затем то же самое происходит с группою *аа* и с любыми двумя другими литерами во всевозможных комбинациях. Будет и такой том, где мы найдем одни только точки; другой — с одними лишь вопросительными знаками.

— Но эти бессодержательные тома можно ведь будет сразу же разыскать и отобрать, — сказал Буркель.

— Пожалуй. Гораздо хуже будет, если нападешь на том, по-видимому, вполне разумный. Хочешь, например, навести справку в «Фаусте» и берешь том с правильным началом. Но, прочитав немного, находишь дальше что-нибудь в таком роде: «Фокус-покус, во — и больше ничего», или просто: «аааааа...» Либо следует дальше таблица логарифмов, неизвестно даже — верная или неверная. Ведь в библиотеке нашей будет не только все истинное, но и всякого рода нелепости. Заголовкам доверяться нельзя. Книга озаглавлена, например, «История Тридцатилетней войны», а далее следует: «Когда Блюхер при Фермопилах женился на дагомейской королеве»...

— О, это уж по моей части! — воскликнула племянница. — Такие тома я могла бы сочинить.

— Ну, в нашей библиотеке будут и твои сочинения, все, что ты когда-либо говорила, и все, что скажешь в будущем.

— Ах, тогда уж лучше не устраивай твоей библиотеки…

— Не бойся: эти сочинения твои появятся не за одной лишь твоей подписью, но и за подписью Гете и вообще с обозначением всевозможных имен, какие только существуют на свете. А наш друг журналист найдет здесь за своей ответственной подписью статьи, которые нарушают все законы о печати, так что целой жизни не хватит, чтобы за них отсидеть. Здесь будет его книга, в которой после каждого предложения заявляется, что оно ложно, и другая его книга, в которой после тех же самых фраз следует клятвенное подтверждение их истинности.

— Ладно, — воскликнул Буркель со смехом. — Я так и знал, что ты меня подденешь. Нет, я не абонируюсь в библиотеке, где невозможно отличить истину от лжи, подлинное от фальшивого. Миллионы томов, притязающие на правдивое изложение истории Германии в XX веке, будут все противоречить один другому. Нет, благодарю покорно!

— А разве я говорил, что легко будет отыскивать в библиотеке все нужное? Я только утверждал, что можно в точности определить число томов нашей универсальной библиотеки, где наряду со всевозможными нелепостями будет также вся осмысленная литература, какая только может существовать.

— Ну, подсчитай же наконец, сколько это составит томов, — сказала хозяйка. — Чистый листок бумаги, я вижу, скучает в твоих пальцах.

— Расчет так прост, что его можно выполнить и в уме. Как составляем мы нашу библиотеку? Помещаем сначала однократно каждую из сотни наших литер. Затем присоединяем к каждой из них каждую из ста литер, так что получаем сотню сотен групп из двух букв. Присоединив в третий раз каждую литеру, получаем $100 \times 100 \times 100$ групп из трех знаков, и т. д. А так как мы должны заполнить миллион мест в томе, то будем иметь такое число томов, какое получится, если взять число 100 множителем миллион раз. Но $100 = 10 \times 10$; поэтому составится то же, что и от произведения двух миллионов десятков. Это, проще говоря, единица с двумя миллионами нулей. Записываю результат так: десять в двухмиллионной степени —

$$10^{2\,000\,000}.$$

Профессор поднял руку с листком бумаги[1].

— Да, вы, математики, умеете-таки упрощать свои записи, — сказала хозяйка. — Но напиши-ка это число полностью.

— О, лучше и не начинать; пришлось бы писать день и ночь две недели подряд, без передышки. Если бы его напечатать, оно заняло бы в длину четыре километра.

— Уф! — изумилась племянница. — Как же оно выговаривается?

[1] См. примечание 1 в конце рассказа.

— Для таких чисел и названий нет. Никакими средствами невозможно сделать его хоть сколько-нибудь наглядным, — настолько это множество огромно, хотя и безусловно конечно. Все, что мы могли бы назвать из области невообразимо больших чисел, исчезающе мало рядом с этим числовым чудовищем.

— А если бы мы выразили его в квинтиллионах? — спросил Буркель.

— Квинтиллион — число внушительное: единица с 18 нулями. Но если ты разделишь на него число наших томов, то от двух миллионов нулей отпадает 18. Останется единица с 1 999 982 нулями, — число столь же непостижимое, как и первое. Впрочем... — профессор сделал на листке бумаги какие-то выкладки.

— Я была права: без письменного вычисления не обойдется, — заметила его жена.

— Оно уже кончено. Могу теперь иллюстрировать наше число. Допустим, что каждый том имеет в толщину 2 сантиметра и все тома расставлены в один ряд. Какой длины, думаете вы, будет этот ряд?

Он с торжеством взирал на молчащих собеседников.

Последовало неожиданное заявление племянницы:

— Я знаю, какую длину займет ряд. Сказать?

— Конечно.

— Вдвое больше сантиметров, чем томов.

— Браво, браво! — подхватили кругом. — Точно и определенно.

— Да, — сказал профессор, — но попытаемся представить это наглядно. Вы знаете, что свет пробегает в секунду 300 000 километров, т. е. в год 10 триллионов километров, или квинтиллион сантиметров. Если, значит, библиотекарь будет мчаться вдоль книжного ряда с быстротой света, то за два года он успеет миновать всего только один квинтиллион томов. А чтобы обозреть таким манером всю библиотеку, понадобилось бы лет дважды единица с 1 999 982 нулями. Вы видите, что даже число лет, необходимое для обозрения библиотеки, столь же трудно себе представить, как и число самих томов. Здесь яснее всего сказывается полная бесполезность всяких попыток наглядно представить себе это число, хотя, повторяю, оно и конечно.

Профессор хотел было уже отложить листок, когда Буркель сказал:

— Если собеседницы наши не запротестуют, я позволю себе задать еще только один вопрос. Мне кажется, что для придуманной тобою библиотеки не хватит места в целом мире.

— Это мы сейчас узнаем, — сказал профессор и снова взялся за карандаш. Сделав выкладки, он объявил:

— Если нашу библиотеку сложить так, чтобы каждые 1000 томов заняли один кубический метр, то целую Вселенную, до отдаленнейших туманностей, пришлось бы заполнить такое число раз, которое короче нашего числа томов всего лишь на 60 нулей[1]. Словом, я был прав: никакими средствами невозможно приблизиться к наглядному представлению этого исполинского числа.

---

[1] См. примечание 2 в конце рассказа.

## *ПРИМЕЧАНИЕ Я. П.*

*Примечание 1.* Это поражающее вычисление нередко фигурирует в книгах по теории вероятности. Французский математик Э. Борель в своей известной книге «Случай» придает ему следующую форму.

Предположим, что число знаков, употребляемых в письме, считая также знаки препинания и т. п., равняется 100; книга среднего размера содержит менее миллиона типографских знаков. Спрашивается: какова вероятность вынуть целую книгу, выбирая наудачу по одной букве?

Очевидно, вероятность того, чтобы вынутая буква была первой буквой книги, равна $1/100$; она также равна $1/100$ для того, чтобы вторая вынутая буква была второй буквой книги; а так как эти две вероятности независимы, то вероятность, что случатся оба события, равна

$$\frac{1}{100} \times \frac{1}{100} = \left(\frac{1}{100}\right)^2.$$

То же самое рассуждение можно повторить и для третьей буквы, для четвертой и т. д. Если их миллион, то вероятность, что случай даст именно их, равна произведению миллиона множителей, из которых каждый равен одной сотой; оно равно

$$\left(\frac{1}{100}\right)^{1000000} = 10^{-2000000}.$$

*Примечание 2.* В этом расчете нет преувеличения: он вполне точен для тех представлений о размере Вселенной, которые господствовали в момент написания рассказа. Интересно повторить вычисление, исходя из современных представлений.

Согласно новейшим исследованиям астронома Кертиса, самые далекие объекты Вселенной — спиральные туманности — расположены от нас на расстоянии 10 миллионов световых лет[1]. Световой год, т. е. путь, проходимый светом в течение года, равен круглым числом 10 триллионам километров, т. е. $10^{13}$ км. Следовательно, радиус видимой Вселенной мы можем считать равным

$$10^{13} \times 10^7 = 10^{20} \text{ километрам,}$$

или

$$10^{20} \times 1000 = 10^{23} \text{ метрам.}$$

[1] В настоящее время самый удаленный от Земли наблюдаемый объект, не считая реликтового излучения, — галактика, получившая обозначение GN-z11. Вследствие расширения Вселенной сопутствующее расстояние до галактики составляет около 32 миллиардов световых лет, а радиус наблюдаемой Вселенной 13,7 млрд световых лет , то есть в тысячу раз больше, чем по расчетам Я. П. (*примеч. ред.*).

Объем такого шара в кубических метрах равен

$$\tfrac{4}{3}\,\pi\,(10^{23})^3 = \text{около } 4 \times 10^{69}\ \text{м}^3.$$

Считая по 1000 томов в кубическом метре объема, узнаем, что Вселенная указанных размеров могла бы вместить только

$$4 = 10^{69} \times 1000 = 4 \times 10^{72}\ \text{томов}.$$

Следовательно, разделив все число томов «универсальной библиотеки» на это число, мы сократили бы ряд нулей на 73; разница между этим результатом и приведенным в рассказе, как видим, несущественна.

## ЛИТЕРАТУРНАЯ МАШИНА

Поучительно рассмотреть придуманный Я. И. Перельманом проект видоизменения идеи Лассвица[1], сущность которого ясна из следующего воображаемого разговора.

— В том виде, какой Лассвиц придал своей идее «универсальной библиотеки», она, конечно, неосуществима. Слишком уж велик размах: перебирать все комбинации из миллиона типографских знаков! Неудивительно, что получаются сверхастрономические числа. Другое дело — если ограничиться гораздо более скромными рамками.

— Например?

— Например, удовольствовавшись комбинациями всего лишь из 1000 литер, среди которых сто различных. Вообразим механизм, который систематически составляет все сочетания, возможные при наборе отрывка в 1000 литер. С каждого сочетания делаются оттиски. Что же мы получим?

— Ясно что: всевозможные образчики вздора и бессмыслицы.

— Да, но в этом море бессмыслицы неизбежно должны оказаться и все осмысленные сочетания литер. Это тоже ясно. Значит, у нас в руках очутятся все литературные отрывки, какие мыслимо написать тысячью литерами. А именно: по отдельным страницам, по полустраницам будем мы иметь все, что когда-либо было написано и когда-либо будет написано в прозе и стихах на русском языке и на всех существующих и будущих языках (потому что иностранные слова можно ведь передавать буквами русского алфавита). Все романы и рассказы, все научные сочинения и доклады, все журнальные и газетные статьи и известия, все стихотворения, все разговоры, когда-либо веденные всеми населяющими земной шар людьми и всеми прежде жившими (в том числе и наш нынешний разговор с вами), все интимные тайны, когда-либо кем-либо кому-либо доверенные, и все, что еще

[1] Идея эта принадлежит, собственно, Лейбницу; Лассвиц лишь облек ее в форму рассказа.

предстоит придумать, высказать и написать людям будущих поколений по-русски и в переводе на все языки, — все это без исключения будет в наших оттисках.

— Бесспорно так. Не забывайте, однако, что мы будем иметь разрозненные, беспорядочно перемешанные отрывки. Придется их еще подобрать и сопоставить.

— Конечно. Будет немало работы по отыскиванию разрозненных частей. Но эта работа сторицей окупится ценностью ее результата. Подумайте: без гениев искусства и науки, чисто механическим путем, мы получим величайшие произведения мировой литературы и науки, овладеем всеми будущими открытиями и изобретениями.

— Как же это осуществить? Как устроить вашу «литературную машину»?

— Тут-то и сказывается огромное преимущество моего проекта перед проектом Лассвица. Уменьшив число литер в 1000 раз, заменив толстый том одной страничкой малого формата, я достиг технической осуществимости этой замечательной идеи. То, что немыслимо сделать при миллионе литер, вполне возможно выполнить для тысячи.

— А именно?

— Довольно просто. Вообразите шестеренку, на ободе которой помещаются 100 необходимых нам литер. Высота и ширина литеры, скажем для простоты, 2 миллиметра. Окружность шестеренки в 2 × 100, т. е. в 200 миллиметров, имеет диаметр меньше 7 сантиметров. Толщина шестеренки может быть пошире литеры — ну, пусть в 4 мм. Вообразите 1000 таких шестеренок, насаженных рядом на одну общую ось. Получите вал длиною в 4 метра и толщиною в 7 см. Шестеренки соединены между собою так, как это делается в нумераторах и в счетных машинах, а именно: при полном повороте первой шестеренки — вторая повертывается на одну литеру, при полном повороте второй — третья повертывается на одну литеру, и так до последней, 1000-й шестеренки. Валик покрывается типографской краской и делает оттиски на длинной 4-метровой бумажной полосе. Вот и устройство «литературной» машины. Как видите, просто и не очень громоздко.

— Как же она работает?

— Шестеренки приводятся во вращение, как я уже сказал, последовательно. Сначала начинает вращаться первая и дает на бумаге оттиски своих литер — это первые 100 «литературных произведений» из категории бессмысленных. Когда она обернется один раз, она вовлекает во вращение вторую шестеренку: та повертывается на одну литеру и остается в этом положении, пока первая продолжает вращаться; получите еще 100 оттисков, теперь уже из двух букв. После 100 таких оборотов вторая шестеренка повертывается еще на одну литеру, опять обе дают 100 новых оттисков, и т. д. Когда же и вторая сделает полный оборот, присоединяется третья шестеренка, и получаются всевозможные оттиски из трех литер. И так далее, пока не дойдет очередь до последней, 1000-й шестеренки. Вы понимаете, что когда эта 1000-я шестеренка сделает полный оборот, все возможные комбинации в 1000 литер будут исчерпаны, и останется лишь работа по разборке оттисков.

— Много ли времени потребует вся работа вашей машины?

— Времени, конечно, порядочно. Но простота конструкции моей машины дает возможность значительно сократить необходимое время. Ведь работа машины сводится к вращению небольших шестерен, а скорость вращения можно технически довести до весьма высокой степени. Турбина Лаваля делает 30 000 оборотов в минуту. Почему бы и «литературную» машину не пустить таким темпом? Словом, как видите, у меня идея Лассвица получает конструктивное воплощение, и притом в довольно простой форме — длинного ряда шестеренок, насаженных на одну ось и вращаемых с большою (но технически осуществимою) скоростью.

—

Что мы должны думать об этом проекте «литературной» машины?

То, что он так же несбыточен, как и первоначальный проект Лассвица. Соорудить и пустить в ход эту «литературную» машину, пожалуй, вполне возможно, но дождаться конца ее работы человечество не сможет. Солнце погаснет, прежде чем последняя шестеренка закончит свое вращение. Действительно, при 30 000 оборотов в секунду

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2-я шестеренка начнет работать спустя | | | | | $\frac{60}{30000} = \frac{1}{600}$ мин |
| 3-я | » | » | » | » | $\frac{60 \times 60}{30000} = \frac{3}{26}$ мин |
| 4-я | » | » | » | » | $\frac{60 \times 60 \times 60}{30000} = 7{,}2$ мин |
| 5-я | » | » | » | » | $\frac{60^4}{30000} = 7{,}2$ часа |
| 6-я | » | » | » | » | 7,2 ч. × 60 = 18 суток |
| 7-я | » | » | » | » | 18 сут. × 60 = 3 года[1] |
| 8-я | » | » | » | » | 3 г. × 60 = 180 лет |
| 9-я | » | » | » | » | 180 л. × 60 = 1080 лет |
| 10-я | » | » | » | » | 1080 л. × 60 = 64 800 лет |
| 11-я | » | » | » | » | 3 888 000 лет |
| 12-я | » | » | » | » | 233 280 000 лет |

Надо ли продолжать? Если 12-я шестеренка начнет вращаться только через двести миллионов лет, то когда дойдет очередь до 1000-й? Нетрудно вычислить. Число минут выразится числом $\frac{60^{1000}}{3000}$ — числом, в котором 1775 цифр.

[1] Для удобства подсчета принимаем год равным 360 суткам.

Во всей Вселенной не хватит материи, чтобы дать материал для всех оттисков, число которых выражается 1779 цифрами. Ведь во Вселенной, по подсчетам специалистов (де Ситтера), «всего» $10^{77}$ электронов, и даже если бы каждый оттиск состоял из одного электрона, можно было бы отпечатать лишь ничтожную долю всей продукции «литературной» машины. Перерабатывать старые оттиски вновь на бумагу? Но допуская даже при этом ничтожнейшую потерю материи в 1-триллионную долю, мы должны были бы иметь — считая снова по электрону на оттиск — число оттисков из 1767 цифр, а электронов у нас имеется число всего из 78 цифр...

Можно возразить, пожалуй, что незачем ждать окончания работы «литературной» машины: ведь шедевры литературы и замечательные открытия могут случайно оказаться среди первого миллиона оттисков. При невообразимо огромном числе всех возможных сочетаний эта вероятность еще более ничтожна, чем вероятность случайно наткнуться на один определенный электрон среди всех электронов Вселенной. Число электронов во Вселенной неизмеримо меньше, чем общее число возможных оттисков нашей машины.

Но пусть даже осуществилось несбыточное, пусть случилось чудо, и в наших руках имеется сообщение о научном открытии, появившееся из-под машины без участия творческой мысли. Сможем ли мы этим открытием воспользоваться?

Нет, мы даже не сможем признать этого открытия. Ведь у нас не будет критерия, который позволил бы нам отличить истинное открытие от многих мнимых, столь же авторитетно возвещаемых в процессе работы нашей машины. Пусть, в самом деле, машина дала нам отчет о превращении ртути в золото. Наряду с правильным описанием этого открытия будет столько же шансов иметь множество неправильных его описаний, а кроме того, описаний и таких невозможных процессов, как превращение меди в золото, марганца в золото, кальция в золото и т. д., и т. д. Оттиск, утверждающий, что превращение ртути в золото достигается при высокой температуре, ничем не отличается от оттиска, предписывающего прибегнуть к низкой температуре, причем могут существовать варианты оттисков с указанием всех температур от минус 273° до бесконечности. С равным успехом могут появиться из-под машины указания на необходимость пользоваться высоким давлением (тысячи вариантов), электризацией (опять тысячи вариантов), разными кислотами (снова тысячи и тысячи вариантов) и т. п.

Как при таких условиях отличить подлинное открытие от мнимого? Пришлось бы тщательно проверять на опыте каждое указание (кроме, конечно, явно нелепых), т. е. проделать такую огромную лабораторную работу, которая совершенно обесценила бы идеи «литературной» машины.

Точно так же пришлось бы проделать обширные исторические изыскания, чтобы проверить правильность каждого исторического факта, утверждаемого каким-нибудь продуктом механического производства открытий. Словом, ввиду полной невозможности отличать истину от лжи, подобный «механический» способ двигать науку вперед был бы совершенно бесполезен, даже если бы каким-нибудь чудом удалось дождаться осмысленного оттиска.

Интересно отметить здесь следующий расчет Бореля (из книги «Случай»): вероятность выпадения орла 1000 раз подряд при игре в орлянку равна $2^{1000}$, т. е. числу, содержащему около 300 цифр. Этот шанс приблизительно таков же, как и шанс получить две первых строки определенного стихотворения, вынимая наудачу из шапки буквы по следующему способу: в шапке 25 букв, одна из них вынимается, записывается и кладется обратно в шапку, после встряхивания вынимается вторая и т. д. Строго говоря, получить таким образом две первых строки определенного стихотворения вполне возможно. «Однако, — замечает Борель, — это представляется нам до такой степени маловероятным, что если бы подобный опыт удался на наших глазах, мы считали бы это плутовством»[1].

[1] Единственное, для чего может, пожалуй, пригодиться механический способ составления фраз из отдельных букв — это подыскание так называемых «анаграмм». Анаграммой какого-нибудь предложения называется другая фраза, составленная из тех же самых букв, что и первая, но размещенных в ином порядке. Анаграммы могут существовать даже и для сравнительно коротких фраз. Вот любопытный пример нескольких анаграмм предложения:

*ПРОЛЕТАРИИ ВСЕХ СТРАН, СОЕДИНЯЙТЕСЬ!*

1) Не теряйте дара своих сил, проснитесь!

2) Лида, не растеряйте своих, проснитесь!

3) Радость при Ленине, сотрясайте их все!

Но и эти 4 фразы приходятся на огромное число бессмысленных сочетаний тех же букв, определяемое произведением

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \ldots\ldots\ldots\ldots 30 \times 31 = 7 \text{ с } 33 \text{ цифрами.}$$

## ПИРАМИДА ХЕОПСА И ЕЕ ТАЙНЫ

*Я. И. Перельман*

Высочайшая пирамида Древнего Египта — Хеопсова, уже пять тысячелетий обвеваемая знойным воздухом пустыни, представляет, без сомнения, самую удивительную постройку, сохранившуюся от Древнего мира. Высотою почти в полтораста метров, она покрывает своим основанием площадь в 40 тысяч квадратных метров и сложена из двухсот рядов исполинских камней. Сто тысяч рабочих в течение 30 лет трудились над возведением этого сооружения, — сначала подготовляя 10 лет дорогу для перевозки камней от каменоломни до места постройки, а затем громоздя их 20 лет друг на друга с помощью несовершенных машин того времени.

Кажется странным, чтобы такое огромное сооружение воздвигнуто было с единственною целью — служить гробницею для правителя страны. Поэтому некоторые исследователи стали доискиваться: не раскроется ли тайна пирамиды из соотношения ее размеров?

Им посчастливилось, по их мнению, найти ряд удивительных соотношений, свидетельствующих о том, что жрецы, руководители работ по постройке, обладали глубокими познаниями в математике и астрономии и эти познания воплотили в каменных формах пирамиды.

«Геродот[1] рассказывает, — читаем мы в книге французского астронома Море (Загадки науки, 1926 г., т. I), — что египетские жрецы открыли ему следующее соотношение между стороною основания пирамиды и ее высотою: квадрат, построенный на высоте пирамиды, в точности равен площади каждого из боковых треугольников. Это вполне подтверждается новейшими измерениями. Вот доказательство, что во все времена пирамида Хеопса рассматривалась как памятник, пропорции которого рассчитаны математически.

Приведу более позднее доказательство: мы знаем, что отношение между длиною окружности и ее диаметром есть постоянная величина, хорошо известная современным школьникам. Чтобы вычислить длину окружности, достаточно умножить ее диаметр на 3,1416.

Математики древности знали это отношение лишь грубо приближенно.

Но вот, если сложить четыре стороны основания пирамиды, мы получим для ее обвода 931,22 метра. Разделив же это число на удвоенную высоту (2 × 148,208), имеем в результате 3,1416, т. е. отношение длины окружности к диаметру. (Другие авторы из тех же измерений пирамиды выводят значение $\pi$ с еще большею точностью: 3,14159 — *Я. П.*)

Этот единственный в своем роде памятник представляет собою, следовательно, материальное воплощение числа „пи“, игравшего столь важную роль в истории математики. Египетские жрецы имели, как видим, точные представления по ряду вопросов, которые считаются открытиями ученых позднейших веков»[2].

Еще удивительнее другое соотношение: если сторону основания пирамиды разделить на точную длину года — 365,2422 суток, то получается как раз 10-миллионная доля земной полуоси, с точностью, которой могли бы позавидовать современные астрономы…

Далее: высота пирамиды составляет ровно миллиардную долю расстояния от Земли до Солнца — величины, которая европейской науке стала известна лишь в конце XVIII века. Египтяне 5000 лет назад знали, оказывается, то, чего не знали еще ни современники Галилея и Кеплера, ни ученые эпохи Ньютона. Неудивительно, что изыскания этого рода породили на Западе обширную литературу.

А между тем все это — не более как пустая игра цифрами. Дело представится совсем в другом свете, если подойти к нему с элементарными правилами оценки результатов приближенных вычислений.

Рассмотрим же по порядку те примеры, которые мы привели:

1) О числе «пи». Арифметика приближенных чисел утверждает, что если в результате действия деления мы желаем получить число с шестью верными

[1] Знаменитый греческий историк посетил Египет за 300 лет до нашей эры.

[2] Значение «пи» с той точностью, которая получена здесь из соотношений размеров пирамиды, стало известно европейским математикам только в XVI веке.

цифрами (3,14159), мы должны иметь в делимом и делителе по крайней мере столько же верных цифр. Это значит, в применении к пирамиде, что для получения шестизначного «пи» надо было измерить стороны основания и высоту пирамиды с точностью до миллионных долей результата, т. е. до одного миллиметра. Астроном Море приводит для высоты пирамиды — 148,208 м, на первый взгляд как будто действительно с точностью до 1 мм. [1]

Но кто поручится за такую точность измерения пирамиды? Вспомним, что лаборатория Палаты мер и весов, где производятся точнейшие в мире измерения, не может при измерении длины добиться такой точности (она получает при измерении длины лишь 6 верных цифр). Понятно, насколько грубее может быть выполнено измерение каменной громады в пустыне. К тому же истинных, первоначальных размеров пирамиды давно нет в натуре, так как облицовка ее выветрилась и никто не знает, какой она была толщины. Чтобы быть добросовестным, надо брать размеры пирамиды в целых метрах; а тогда получается довольно грубое «пи», — не более точное, чем то, которое мы извлекаем из математического папируса Ринда.

Если пирамида действительно есть каменное воплощение числа «пи», то воплощение это, как видим, далеко не совершенное. Но вполне допустимо, что пирамида не сооружена ради выражения именно этого соотношения. В пределы приближенных трехзначных выражений для размеров пирамиды хорошо укладываются и другие допущения. Возможно, например, что для высоты пирамиды было взято ⅔ ребра пирамиды или ⅔ диагонали ее основания. Вполне допустимо и то соотношение, которое было указано Геродотом: что высота пирамиды есть квадратный корень из площади боковой грани. Все это догадки, столь же вероятные, как и «гипотеза пи».

2) Следующее утверждение касается продолжительности года и длины земного радиуса: если разделить сторону основания пирамиды на точную длину года (число из 7 цифр), то получим в точности 10-миллионную долю земной оси (число из 5 цифр). Но раз мы уже знаем, что в делимом у нас не больше трех верных цифр, то ясно, какую цену имеют здесь эти 7 и 5 знаков в делителе и в частном. Арифметика уполномочивает нас в этом случае только на 3 цифры в длине года и земного радиуса. Год в 365 суток и земной радиус около 6400 километров — вот числа, о которых мы вправе здесь говорить.

3) Что же касается расстояния от Земли до Солнца, то здесь недоразумение иного рода. Странно даже, как приверженцы теории могут не замечать допускаемой ими здесь логической ошибки. Ведь если, как они утверждают, сторона пирамиды составляет известную долю земного радиуса, а высота — известную долю основания, то нельзя уже говорить, будто та же высота составляет

[1] Высота пирамиды Хеопса первоначально составляла 146,60 м, в наши дни — 138,75 м (*примеч. ред.).*

определенную долю расстояния до Солнца. Что-нибудь одно — либо то, либо другое. А если случайно тут обнаруживается любопытное соответствие, то оно испокон веков существовало в нашей планетной системе, и никакой заслуги египтян в этом быть не может.

Сторонники рассматриваемой теории идут еще далее: они утверждают, что масса пирамиды составляет ровно одну тысячетриллионную долю массы земного шара. Это соотношение, по их мнению, не может быть случайным и свидетельствует о том, что древнеегипетские жрецы знали не только геометрические размеры нашей планеты, но и задолго до Ньютона и Кавендиша исчислили ее массу, «взвесили» земной шар.

Однако здесь та же нелогичность, что и в примере с расстоянием от Земли до Солнца. Совершенно нелепо говорить о том, будто масса пирамиды «выбрана» в определенном соответствии с массою земного шара. Масса пирамиды определилась с того момента, как назначены были размеры ее основания и высоты. Нельзя одновременно сообразовать высоту пирамиды с основанием, составляющим определенную долю земного радиуса, — и *независимо от этого* ставить ее массу в связь с массою Земли. Одно определяется другим. Значит, должны быть отвергнуты всякие домыслы о знании египтянами массы земного шара. Это — не более как числовая эквилибристика.

Искусно оперируя с числами, опираясь на случайные совпадения, можно доказать, пожалуй, все что угодно. Один французский астроном ради шутки доказывал, что строители большой пирамиды были знакомы с числом $e$ — основанием натуральных логарифмов. Он ссылался на следующее соотношение в размерах пирамиды: длина полудиагонали основания, выраженная в 10-миллионных долях четверти земного меридиана (т. е. в метрах), состоит из тех же цифр, идущих, кроме того, в том же порядке, что и квадратный корень из числа $e$... Чем это доказательство хуже тех, которые приводятся приверженцами «математической теории пирамиды»?

Мы видим, на каких шатких основаниях покоится легенда о непостижимой учености строителей большой пирамиды. А попутно мы имеем тут и маленькую наглядную демонстрацию пользы того отдела арифметики, который занимается приближенными числами.

## *ПРИМЕЧАНИЕ*
## ДЕЙСТВИЯ НАД ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

Читателю, не знакомому с правилами действий над приближенными числами, вероятно, интересно будет хотя бы вкратце с ними ознакомиться, тем более что знание этих простых приемов, несомненно, окажется и практически полезным, сберегая много труда и времени при вычислениях.

Прежде всего — несколько слов о самом понятии приближенного числа. В технике приходится производить действия большей частью над такими числами, которые получены при измерении. Числа эти никогда не выражают результата измерения совершенно точно. Измерив, например, толщину трубки и получив в результате 2,5 см, можно утверждать, что число целых сантиметров указано здесь вполне верно. Но нельзя все же поручиться за то, что толщина трубки заключает ровно 2,5 сантиметра, а не больше или меньше на несколько сотых долей сантиметра. Если бы истинная величина его была, например, 2,53 см или 2,48 см, — мы и тогда сочли бы его равным 2,5 см, потому что разница в 0,03 см или 0,02 см ускользает от нашего внимания при подобных измерениях. Поэтому результат измерения диаметра стержня — 2,5 см — число не точное, а *приближенное*.

Как бы тщательно ни производилось измерение, как бы совершенны ни были инструменты, — в результате не может получиться вполне точное число. В технике результаты измерения заключают обычно только 3, редко 4 верных цифры, а зачастую даже и всего 2 верных цифры.

Покажем теперь, как следует производить действия над такими приближенными числами.

*Сложение и вычитание*. Пусть требуется к длине 422 метра прибавить 6,75 м. Если сложить эти числа как точные, получится 428,75. Но оба числа — приближенные. «422 метра» не означает ровно 422 метра, а 422 метра и еще несколько неизвестных десятых, сотых и т. д. долей метра, которыми при измерении пренебрегли. Значит, мы можем изобразить приближенное число 422 так:

422,???

где знаки ??? означают неизвестные цифры десятых, сотых и т. д. долей. Точно так же и приближенное число 6,75 можно изобразить так

6,75?

Если мы сложим эти числа в таком изображении, т. е. напишем

$$+\begin{array}{r}422,???\\ \underline{6,75?}\end{array},$$

то результат получится такой:

428,???

(Надо иметь в виду, что ? + 5 = ?, т. е. неизвестная цифра + 5 есть, конечно, неизвестная цифра. Точно так же ? + 7 = ?. Но так как эта цифра заведомо больше 7, то, отбрасывая ее, мы должны предыдущую цифру увеличить.)

Итак, в результате сложения мы получили 429 целых и неизвестное число десятых, сотых и т. д. долей. Это значит, что сумма приближенных чисел 422 и 6,75 есть приближенное число 429.

Вообще *правило сложения приближенных чисел таково: надо сохранять в результате всего столько цифр после запятой, сколько их имеется в данном* *числе с наименьшим числом цифр после запятой*. В нашем случае у одного слагаемого совсем нет цифр после запятой; поэтому и в результате надо откинуть все цифры после запятой. То же правило относится и к вычитанию. Приведем несколько примеров применения этого правила.

$$\begin{array}{r} 37{,}673 \\ + \quad 0{,}52 \\ \hline 38{,}29 \end{array} \text{ (вместо 38,193)} \qquad \begin{array}{r} 7{,}8 \\ + \quad 2{,}905 \\ \hline 10{,}7 \end{array} \text{ (вместо 10,705)}$$

$$\begin{array}{r} 16{,}483 \\ - \quad 3{,}71 \\ \hline 12{,}77 \end{array} \text{ (вместо 12,773)} \qquad \begin{array}{r} 21{,}7 \\ - \quad 10{,}364 \\ \hline 11{,}3 \end{array} \text{ (вместо 11,336)}$$

*Умножение и деление*. Пусть нам нужно найти площадь прямоугольника, стороны которого 22,4 метра и 4,3 метра. Перемножая эти числа как точные, мы получили бы 96,32 м$^2$. Но мы знаем, что оба числа приближенные и что после 4-х десятых долей в первом числе и после 3-х десятых во втором имеются еще неизвестные цифры. Написав эти числа в виде 22,4? и 4,3? и перемножая их, получаем:

$$\begin{array}{r} \times \; 22{,}4? \\ 4{,}3? \\ \hline ???? \\ 672? \; \\ 896? \;\;\; \\ \hline 96{,}???? \end{array}$$

Мы видим, что верных цифр в этом произведении всего две и что результат умножения есть не 96,32, а приближенное число 96.

Общее правило умножения приближенных чисел таково: *в результате сохраняют всего столько цифр, сколько их имеется в том из данных чисел, у которого число цифр меньше*.

То же правило относится и к действию деления. (При подсчете числа цифр не принимаются во внимание нули, стоящие впереди и в конце числа, т. е. 0,018 считается за двузначное, 3240 — за трехзначное.)

Приведем примеры:

$$76{,}3 \times 1{,}6 = 120 \qquad 2{,}31 \times 2 = 4{,}6$$
$$3{,}445 \times 2{,}3 = 7{,}9 \qquad 82 : 3{,}25 = 25.$$

*Степени и корни*. При возвышении во вторую и третью степень, а также и при извлечении корня второй и третьей степени в результате сохраняют столько же цифр, сколько их в данном числе (т. е. в возвышаемом числе или в подкоренном).

$$72^2 = 5200 \qquad 1{,}77^2 = 3{,}13$$
$$0{,}478^2 = 0{,}229 \qquad 6{,}8^3 = 310$$
$$\sqrt{134} = 11{,}6 \qquad \sqrt[3]{0{,}419} = 0{,}748$$

К этим правилам прибавим еще два правила:

1) Когда результат какого-нибудь действия не окончательный (т. е. когда с ним предстоит еще производить другие действия), то сохраняют одной цифрой больше, чем требуют предыдущие правила.

2) Когда приходится перемножать два числа, состоящие не из одинакового числа цифр, то более длинное число можно округлить, оставив только одну лишнюю цифру. То же правило относится и к действию деления. Например, взамен умножения 3,44 × 5 умножают 3,4 × 5; взамен деления 3,3 : 76,65 делят 3,3 : 76,6.

# ИСТОРИЯ ОДНОЙ ИГРЫ

*Вильгельма Аренса*[1]

## I

Около полувека назад — в конце 1870-х годов — вынырнула в Соединенных Штатах одна игра, «игра в 15»; она быстро распространилась по всему цивилизованному миру и, благодаря несчетному числу усердных игроков, которых она заполонила, превратилась в настоящее общественное бедствие, в истинный бич человечества. Заглавный рисунок, заимствуемый из одного американского сочинения, изображает эту игру: коробку с 15 шашками,

[1] Доктор Вильгельм Аренс широко известен своими исследованиями в области математических игр. Главный его труд «Математические развлечения и игры» в двух больших томах разрабатывает эту область с исчерпывающей полнотой и строгой научностью. Ему принадлежат также следующие сочинения: «Математические развлечения» (более краткое и общепонятное, чем упомянутое выше; есть русский перевод), «Старое и новое из области занимательной математики», «Забава и дело в математике», «Анекдоты о математиках». — Предлагаемый здесь очерк опубликован в 1924 г. в одном математическом сборнике и появляется на русском языке впервые.

перенумерованными от 1 до 15, и одним свободным полем. Перед ящиком мы видим жертву игорной страсти, одного из многочисленных одержимых этой манией; в разгар полевых работ он, поддавшись внезапно приступу игорной лихорадки, кинулся на колени перед демоном, которому поклонялся. Растерянность видна во всей его фигуре, во всех его чертах; лицо искажено отчаянием; правая рука нервно сжата в кулак; левая рука и наморщенный лоб охвачены судорогой. Кожа головы после ряда усилий скинула шляпу; волосы дико растрепаны. Забыт труд, покинуты лошадь и плуг; на нем уселась пара птиц; даже заяц, обычно столь пугливый, сознает, что этот потерянный для мира маньяк, всецело погруженный в 15 шашек своей коробки, не представляет для него ни малейшей опасности.

То же наблюдалось и по эту сторону океана, в Европе. Здесь можно было даже в конках видеть коробочки с 15 шашками в суетливых руках, передвигавших шашки по разным направлениям. В конторах и торговых помещениях хозяева приходили в отчаяние от игорного увлечения своих служащих и вынуждены были строгими угрозами воспретить им игру в часы занятий и торговли. Оборотливые содержатели увеселительных заведений ловко использовали эту манию и устраивали у себя большие игорные турниры. Так описывает гамбургский математик Г. Шуберт зарождение игорной эпидемии в его городе.

Даже в торжественные залы германского рейхстага сумел проникнуть змий-искуситель. «Эта вещица поистине околдовывала. Как сейчас вижу я в рейхстаге седовласых людей, сосредоточенно рассматривающих в своих руках квадратную коробочку», — рассказывал спустя десятилетия известный географ и математик Зигмунд Гюнтер, бывший в годы игорной эпидемии депутатом рейхстага.

В Париже опасная игра нашла себе приют под открытым небом, на бульварах, и быстро распространилась из столицы по всей провинции[1]. Вскоре, говорят французские источники, не было в провинции ни одного уединенного сельского домика, где не угнездился бы этот паук, подстерегая жертву, готовую запутаться в его сетях. Настоящий бич человечества, вот какой рисуется эта игра одному французскому автору. «Бедствие, более страшное, чем табак и алкоголь!» — восклицает он в комическом отчаянии.

В 1880 г. игорная лихорадка достигла, по-видимому, своей высшей точки. Вся пестрая, разноязычная литература, порожденная этой игрой, относится к немногим годам между 1879 и 1883.

Вскоре после этого демон, тиранивший стольких людей, был повержен и побежден. Математика — вот его победительница, и победа не была для нее особенно трудной, между тем как «демон алкоголя и табака» никогда, конечно, не будет следовать за ее триумфальной колесницей, сколько бы славы ни сулила победа над ним.

[1] Во Франции игра эта более известна под названием такен.

Когда демон был оружием математики повержен во прах, источник мучений столь многих и многих стал ясен для всех. Математическая теория игры обнаружила, что из многочисленных задач, которые могут быть предложены, только половина разрешима, между тем как другая не разрешима никакими ухищрениями.

Стало ясно, почему иные задачи не поддавались самым упорным усилиям; стало ясно, почему устроители турниров отваживались назначать огромные премии за разрешения некоторых задач и ни один из многочисленных соревнователей не смог овладеть ими.

В этом отношении всех превзошел сам изобретатель игры, предложивший издателю нью-йоркской газеты для воскресного приложения неразрешимую задачу с премией в 1000 долларов за ее разрешение; и так как издатель колебался, то изобретатель выразил полную готовность внести названную сумму из собственного кармана.

Мы до сих пор не назвали имени изобретателя: Самуэль (Сэм) Лойд. Он родился в городе Филадельфия. В шахматных кругах он приобрел широкую известность как составитель остроумных задач; кроме того, им придумано множество иных головоломок. Мы воспроизводим здесь портрет этого изобретательного человека. Любопытно, что ему не удалось получить в Америке патента на придуманную им игру. Хотя Лойд не мог предусмотреть чудовищного успеха своего изобретения и совершенно не ожидал его, он подал заявление о патенте. Согласно инструкции, он должен был представить «рабочую модель» для исполнения пробной партии; он предложил чиновнику патентного бюро неразрешимую задачу (вероятно, ту самую, которая изображена на с. 564), и когда последний осведомился, разрешима ли она, изобретатель должен был ответить: «Нет, это математически невозможно». — «В таком случае, — последовало возражение, — раз задача неразрешима, то не может быть и рабочей модели, а без модели нет и патента». Странным образом Лойд удовлетворился этой мнимой логикой и этой удивительной резолюцией, — но, вероятно, был бы более настойчив, если бы хоть отчасти предвидел неслыханный успех своего изобретения.

## II

Изобретенная в Америке, игра эта получила там и первую свою математическую теорию — в трудах американских математиков Вулсей Джонсона и Вильяма Сторна. Впрочем, независимо от них и вскоре вслед за ними развили основания этой теории также ряд других математиков в различных странах Европы.

Сейчас мы набросаем очерк этой теории, по крайней мере в главных ее чертах. Задача игры состоит обыкновенно в том, чтобы посредством последовательных передвижений, допускаемых наличием одного свободного поля, перевести любое начальное расположение 15 шашек в нормальное,


*Самуэль Лойд — популярнейший и плодовитейший в мире изобретатель головоломных задач и развлечений. Он и в настоящее время*[1] *продолжает вести во многих американских журналах отдел головоломок, получая от решающих десятки тысяч ответов ежемесячно.*

[1] Данный комментарий Я. П. относится к началу XX века, на момент написания статьи В. Аренсом. Самуэль Лойд умер в 1911 году (*примеч. ред.*).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

**Схема I**

т. е. в такое, при котором шашки идут в порядке своих чисел: в верхнем левом углу 1, направо — 2, затем 3, потом в верхнем правом углу 4; в следующем ряду слева направо: 5, 6, 7, 8, и т. д. Такое нормальное конечное расположение мы даем здесь на чертеже (схема I).

Вообразите теперь любое начальное расположение шашек, т. е. такое, при котором 15 шашек размещены в пестром беспорядке. Нетрудно убедиться, что рядом передвижений всегда можно привести шашку № 1 на место, занимаемое ею на чертеже. Точно так же возможно, не трогая шашки 1, привести шашку 2 на место рядом с ней, которое она занимает на схеме I.

Затем, не трогая шашек 1 и 2, можно поместить шашки 3 и 4 на свои нормальные места: если они случайно не находятся в двух последних вертикальных рядах, то легко привести их в эту область и затем рядом передвижений достичь желаемого результата. Теперь весь верхний ряд 1, 2, 3, 4 приведен в порядок, и при дальнейших манипуляциях с шашками мы трогать этого ряда не будем. Таким же путем стараемся мы привести в порядок и вторую строку: 5, 6, 7, 8; легко убедиться, что это всегда достижимо. Далее, на пространстве двух последних рядов необходимо привести в нормальное положение (схема I) шашки 9 и 13: это тоже всегда возможно, в чем нетрудно удостовериться. Из всех приведенных в порядок шашек 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 13 ни одной не перемещают в дальнейшем; остается небольшой участок в 6 полей, в котором одно свободно, а пять остальных заняты шашками 10, 11, 12, 14, 15 в произвольном порядке. Легко, однако, убедиться, что в пределах этого шестиместного участка всегда можно привести на нормальные места шашки 10, 11, 12, и когда это достигнуто, то в последнем ряду шашки 14 и 15 окажутся размещенными либо в нормальном порядке, либо в обратном (схема II). Таким путем, — который здесь был лишь намечен и который читатели легко могут испытать и проверить на деле, — мы приходим к следующему результату.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 15 | 14 | |

**Схема II**

Любое начальное положение может быть приведено либо к нормальному схемы I, либо к конечному схемы II.

Это значительно упрощает задачу: все необозримое разнообразие положений шашек сведено к двум типичным схемам I или II, так что приходится иметь дело лишь с этими двумя. Если некоторое расположение, которое для краткости обозначим буквою *S*, может быть преобразовано в положение схемы I, то, очевидно, возможно и *обратное* — перевести положение схемы I в положение *S*. Ведь все передвижения шашек (все «ходы», как будем говорить кратко), несомненно, обратимы: если, например, в схеме I мы можем шашку 4 поместить на свободное поле, то можно ход этот тотчас взять обратно противоположным движением. И если расположение переводится в расположение не схемы I, а схемы II, то соответственно этому расположение схемы II может быть переведено в расположение *S*.

Итак, мы имеем две серии расположений, таких, что положения одной серии могут быть переведены в «нормальное» I, а другой серии — в положение II. И наоборот, мы уже видели, что из «нормального» расположения можно получить любое положение первой серии, а из расположения схемы II — любое положение второй серии. Наконец, два любых расположения, принадлежащие к одной и той же серии, могут быть взаимно переводимы друг в друга: если оба относятся, например, к первой серии, то это значит, что одно из них может быть переведено в положение схемы I, а положение схемы I переводится в другое из данных двух положений; короче — одно данное положение переводимо в другое, и наоборот.

Возникает вопрос: нельзя ли идти дальше и объединить эти два типичных расположения — схем I и II? Это было бы возможно, если бы одно из них переводилось каким-нибудь образом в другое. Тогда обе серии расположений естественно слились бы в одну. Сопоставляя друг с другом расположения схем I и II, можно строго доказать (не станем входить здесь в подробности), что положения эти не могут быть превращены одно в другое никаким числом передвижений. Это — огонь и вода. Поэтому все огромное число размещений шашек распадается на две разобщенные серии: 1) на те, которые могут быть переведены в «нормальное» схемы I: это — положения *разрешимые*; 2) на те, которые могут быть переведены в положение схемы II и, следовательно, ни при каких обстоятельствах не переводятся в «нормальное» конечное расположение: это — положения *неразрешимые*, те именно, за разрешение которых тщетно назначались огромные премии.

Но как узнать, принадлежит ли заданное расположение к первой или второй серии? Пример разъяснит это.

Рассмотрим представленное здесь расположение.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 9 |
| 8 | 10 | 14 | 12 |
| 13 | 11 | 15 | |

Первый ряд шашек в порядке, как и второй, за исключением последней шашки (9). Эта шашка занимает место, которое в «нормальном» расположении принадлежит 8. Шашка 9 стоит, значит, «ранее» шашки 8; такое упреждение нормального порядка будем называть «инверсией». О шашке 9 мы скажем: здесь имеет место «одна инверсия». Рассматривая дальнейшие шашки, обнаруживаем упреждение для шашки 14; она поставлена на три места (шашек 12, 13, 11) ранее своего нормального положения; здесь у нас 3 инверсии (14 ранее 12; 14 ранее 13; 14 ранее 11). Всего мы насчитали уже 1 + 3 = 4 инверсии. Далее шашка 12 помещена ранее шашки 11, и точно так же шашка 13 — ранее шашки 11. Это дает еще 2 инверсии. Итого имеем, таким образом, 6 инверсий. Подобным образом для каждого заданного расположения устанавливают «общее число инверсий», освободив предварительно последнее место в правом нижнем углу. Если общее число инверсий, как в рассмотренном случае, *четное*, то заданное расположение может быть приведено к «нормальному» конечному; другими словами, оно принадлежит к разрешимым. Если же число инверсий *нечетное*, то данное расположение принадлежит ко второй серии, т. е. к неразрешимым.

За недостатком места мы должны отказаться от строгого доказательства всего изложенного. Но можно наметить кратко главные этапы в ходе этого доказательства. Среди ходов будем различать «горизонтальные» и «вертикальные» (смысл этих слов, конечно, ясен). Легко видеть, что всякий «вертикальный» ход изменяет число инверсий либо на 1, либо на 3, т. е. на нечетное число. Чтобы одно положение шашек перевести в какое-либо другое, необходимо сделать *h* горизонтальных и *v* вертикальных ходов, причем — если в обоих положениях свободное поле находится в правом нижнем углу — оба числа, *h* и *v*, четные. Горизонтальные ходы не могут изменить инверсий, вертикальные же изменяют их каждый раз на нечетное число, т. е. в общем итоге — так как *v* число четное — на четное число. Вот почему для переводимости двух расположений (в которых пустое поле находится в правом нижнем углу) одного в другое необходимо, чтобы они различались между собою *четным* числом инверсий. Это условие взаимного перевода является притом не только необходимым, но, очевидно, также и достаточным. — «Нормальное» расположение имеет 0 инверсий, и, следовательно, ему соответствует серия положений с четным числом инверсий (при условии, что свободное поле на одном и том же месте). Расположение II имеет одну инверсию, — его серия есть серия *нечетных* инверсий.

Поучительной в этой игре является и ее история. При своем появлении игра вызвала всюду, как мы уже рассказывали, сильнейшее, прямо лихорадочное возбуждение и породила настоящую манию игры. С этой лихорадкой удалось справиться только математике. И удалось ей это так полно, что в наши дни подобная страстность в этой игре уже совершенно немыслима. Победа достигнута была благодаря тому, что математика создала исчерпывающую теорию игры, теорию, не оставляющую в ней ни одного сомнительного пункта и превратившую ее в образчик настоящей математической игры. Исход игры зависит здесь не от каких-либо случайностей и даже не от исключительной находчивости, как в других играх, а от чисто математических факторов, предопределяющих исход с безусловной достоверностью[1].

[1] «Такен (игра в 15) — говорит французский математик Люка — не только весьма интересная игрушка, но также и прибор, с помощью которого чрезвычайно легко дать наглядное понятие об одном из важнейших отделов алгебры, а именно о *теории определителей*, принадлежащей Лейбницу. Поэтому теорию и практические приемы игры в такен можно считать своего рода подготовкой к изучению этой части алгебры».

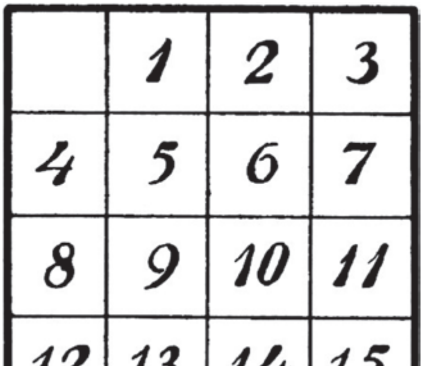
## *ПРИМЕЧАНИЕ Я. П.*

Иллюстрация, приведенная в начале этой статьи, помещена в любопытной книге Сэма Лойда «Энциклопедия головоломок» (Нью-Йорк, 1914). Это большой том, заключающий 5000 разнообразных задач и развлечений, из которых тысяча иллюстрирована. Рисунок интересующей нас игры сопровождается следующим текстом.

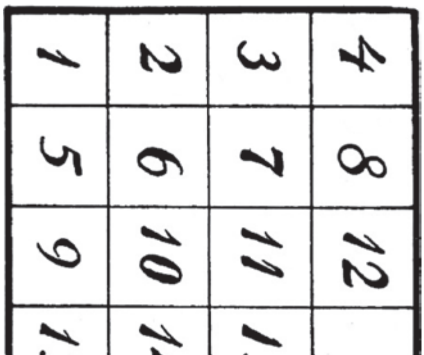
«Давнишние обитатели царства смекалки помнят, как в начале 70-х годов я заставил весь мир ломать голову над коробкой с подвижными шашками, получившей известность под именем „игры в 14–15“. Пятнадцать шашек были размещены в квадратной коробочке в правильном порядке, и только шашки 14-я и 15-я были переставлены, как показано на прилагаемой иллюстрации. Задача состояла в том, чтобы, последовательно передвигая шашки, привести их в исходное положение, причем, однако, порядок шашек 14-й и 15-й должен быть исправлен.

Премия в 1000 долларов, предложенная за первое правильное решение этой задачи, никем не была заслужена, хотя тысячи людей уверяли, что выполнили требуемое. Все принялись без устали решать эту задачу. Рассказывали забавные истории о торговцах, забывавших из-за этого открывать свои магазины, о почтенных чиновниках, целые ночи напролет простаивавших под уличным фонарем, отыскивая путь к решению. Непостижимой особенностью игры было то, что никто не желал отказываться от поисков решения, так как все чувствовали уверенность в ожидающем их успехе. Штурманы, говорят, из-за игры сажали на мель свои суда, машинисты проводили поезда мимо станций, торговля была деморализована. Фермеры забрасывали свои плуги, — один из таких моментов изображен на прилагаемой иллюстрации.

Вот несколько новых задач, кроме той, которая приведена выше:




**К задаче 2-й**




**К задаче 3-й**

*Задача 2-я.* Исходя из расположения, показанного на схеме I, привести шашки в правильный порядок, но со свободным полем в левом верхнем углу (см. чертеж).

*Задача 3-я.* Исходя из расположения схемы I, поверните коробку на четверть оборота и передвигайте шашки до тех пор, пока они не примут расположения чертежа.

*Задача 4-я.* Передвижением шашек превратите коробку в „магический квадрат", а именно: разместите шашки так, чтобы сумма чисел была во всех направлениях равна 30».

## РЕШЕНИЯ

Расположение задачи 2-й может быть получено из начального положения следующими 44 ходами:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14, | 11, | 12, | 8, | 7, | 6, | 10, | 12, | 8, | 7, |
| 4, | 3, | 6, | 4, | 7, | 14, | 11, | 15, | 13, | 9, |
| 12, | 8, | 4, | 10, | 8, | 4, | 14, | 11, | 15, | 13, |
| 9, | 12, | 4, | 8, | 5, | 4, | 8, | 9, | 13, | 14, |
| 10, | 6, | 2, | 1 | | | | | | |

Расположение задачи 3-й достигается следующими 39 ходами:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14, | 15, | 10, | 6, | 7, | 11, | 15, | 10, | 13, | 9, |
| 5, | 1, | 2, | 3, | 4, | 8, | 12, | 15, | 10, | 13, |
| 9, | 5, | 1, | 2, | 3, | 4, | 8, | 12, | 15, | 14, |
| 13, | 9, | 5, | 1, | 2, | 3, | 4, | 8, | 12, | |

Магический квадрат с суммою 30 получается после ряда ходов:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12, | 8, | 4, | 3, | 2, | 6, | 10, | 9, | 13, | 15, |
| 14, | 12, | 8, | 4, | 7, | 10, | 9, | 14, | 12, | 8, |
| 4, | 7, | 10, | 9, | 6, | 2, | 3, | 10, | 9, | 6, |
| 5, | 1, | 2, | 3, | 6, | 5, | 3, | 2, | 1, | 13, |
| 14, | 3, | 2, | 1, | 13, | 14, | 3, | 12, | 15, | 3 |

Приведем замечание немецкого математика Шуберта о числе возможных задач при «игре в 15».

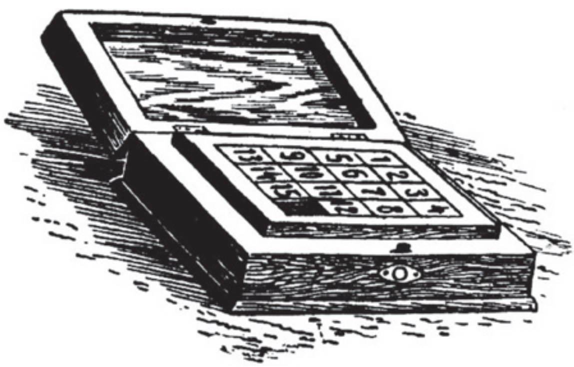
«Сколько всего возможно задач, т. е. сколько различных расположений можно дать 15 шашкам, причем каждый раз пустое поле расположено справа внизу? Чтобы определить, сколько перестановок можно получить с помощью 15 предметов, начнем с 2-х предметов: *a* и *b*. Они могут дать лишь две перестановки, именно — *ab* и *ba*. При трех предметах имеется уже втрое больше перестановок, т. е. 6, так как предмет „*a*" может быть поставлен перед *bc* и перед *cb*, и, кроме того, имеются еще две перестановки, начинающиеся с *b*, и две, начинающиеся с *c*. Отсюда можно заключить, что четыре предмета *a*, *b*, *c*, *d* могут дать вчетверо большее число различных перестановок, т. е. 4 × 3 × 2 = 24 перестановки. Продолжая так, можно найти, что 15 шашек допускают всего

$$2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15$$

перестановок. Вычислив это произведение, мы найдем для числа задач игры внушительное число:

1 триллион 307 674 миллиона 365 000».

Из этого огромного числа задач ровно половина принадлежит к разрешимым и столько же — к неразрешимым. Заметим еще, что если бы возможно было ежесекундно давать шашкам новое положение, то, чтобы перепробовать все возможные расположения, потребовалось бы при непрерывной работе круглые сутки свыше 40 000 лет.



## СТРАННАЯ ЗАДАЧА НА ПРЕМИЮ

*Профессор Г. Симон*

Лет 20 тому назад[1] в Берлине подвизался искусный счетчик, предлагавший публике такую задачу (переделываем ее на русский лад):

«Кто сможет уплатить 5 рублей, 3 рубля или 2 рубля полтинниками, двугривенными и пятаками, всего 20-ю монетами, — тому будет выдано наличными деньгами сто рублей».

Посетителям вручались необходимые монеты, — конечно, заимообразно. Но обещанная сотня рублей должна была остаться навсегда в руках счастливца, которому удалось бы решить задачу.

Разумеется, пол-Берлина потело над разрешением этой задачи (стояли как раз жаркие июльские дни), казавшейся не особенно трудной. Сто рублей хорошо пригодились бы всем, значит — стоит потрудиться. По мере того как выяснялась бесполезность попыток, физиономии решавших вытягивались и розовые мечты о заманчивой награде испарялись. Надежды оказывались обманчивыми. Ловкий счетчик мог безбоязненно обещать в десять раз бо́льшую награду. Никто не вправе был бы на нее притязать, ибо задача требует *невозможного*.

Как в этом убедиться?

Нам не понадобится глубоко забираться в дебри алгебры, но все же не будем бояться $x$, $y$ и $z$.

Рассмотрим сначала, можно ли уплатить требуемым образом *пять рублей*. Пусть для этого нужно $x$ полтинников, $y$ — двугривенных и $z$ — пятаков. Сумма их должна составить 500 копеек, т. е.

$$50x + 20y + 5z = 500,$$

[1] Т. е. в начале XX века (*примеч. ред.*).

или, разделив на 5,

$$10x + 4y + z = 100.$$

Это легко осуществить на разные лады. Если, например, взять $x = 8$, то будем иметь

$$80 + 4y + z = 100,$$

или

$$4y + z = 20;$$

последнему уравнению можно удовлетворить, если принять $z = 4$, или 8, или 12, или 16 и, следовательно (при $z = 4$), $4y = 16$, $y = 4$. Действительно, 8 полтинников, 4 двугривенных и 4 пятака составляют 500. Однако при этом не выполнено условие употребить в общей сложности 20 монет: мы употребили $8 + 4 + 4 = 16$ монет. К нашему первому уравнению

$$10x + 4y + z = 100$$

необходимо, следовательно, присоединить второе

$$x + y + z = 20.$$

Соединяя их в одно посредством вычитания второго из первого, мы освобождаемся от $z$ и получаем

$$9x + 3y = 80;$$

теперь сразу становится очевидным, что не может быть таких целых чисел, которые удовлетворили бы этому уравнению. Потому что 9 раз $x$, каково бы ни было $x$, есть непременно число, кратное 3; то же верно для числа $3y$; следовательно, сумма $9x + 3y$ должна делиться без остатка на 3, то есть никак не может равняться 80.

Задача приводит к противоречивому требованию, и значит — ее решение невозможно.

Совершенно так же невозможно и составление требуемым образом сумм в 3 рубля и в 2 рубля. В первом случае, как каждый легко может убедиться, получается уравнение:

$$9x + 3y = 40;$$

во втором:

$$9x + 3y = 20.$$

Оба равенства невозможны, так как ни 40, ни 20 не делятся без остатка на 3.

Сказанным задача, собственно, исчерпывается. Но поучительно присоединить к ней рассмотрение вопроса, какие же суммы можно этими 20-ю монетами в самом деле уплатить, — разумеется так, чтобы получилось *целое число* рублей.

Если обозначим это число рублей через $m$, то у нас будет уравнение:

$$50x + 20y + 5z = 100m,$$

или

$$10x + 4y + z = 20m,$$

при условии, что

$$x + y + z = 20,$$

откуда путем вычитания имеем:

$$9x + 3y = 20m - 20 = 20(m - 1).$$

Так как $9x + 3y$ кратно 3, то и $20(m - 1)$ должно быть кратно 3.

Но 20 не делится на 3, так что кратным 3 должно быть только $m - 1$.

Если $m - 1$ равно 0, 3, 6, 9, 12 и т. д., то $m$ должно быть на единицу больше, т. е. одно из чисел: 1, 4, 7, 10, 13 и т. д. Только такие суммы рублей могут быть уплачены нашими 20-ю монетами. Но очевидно, что 10 рублей — наибольшая сумма, так как 20 полтинников составляют уже 10 рублей. Принимая поэтому только четыре возможных суммы — в 1 р., в 4 р., в 7 р. и в 10 р., имеем четыре случая:

$$9x + 3y — 20(m - 1) = 0, \text{ или } 60, \text{ или } 120, \text{ или } 180,$$

другими словами,

$$3x + y = 0, \text{ или } 20, \text{ или } 40, \text{ или } 60.$$

Только эти случаи и надо рассмотреть.

1) *Один рубль*. $3x + y = 0$.

Это равенство возможно лишь тогда, когда и $x$ и $y$ равны нулю, так как, приняв для них даже наименьшее целое число 1, получим 4, а не 0. Единственное решение для этого случая, следовательно, есть $x = 0$, $y = 0$, а потому $z = 20$, т. е. *один рубль* можно уплатить, только употребив 20 пятаков.

Рассмотрим теперь другой крайний случай:

2) *Десять рублей*. $3x + y = 60$.

Так как $y$ должно быть кратно 3 (иначе сумма его с $3x$ не делилась бы без остатка на 3), то примем $y = 0, 3, 6$... Для случая $y = 0$ имеем $x = 20$ и $z = 0$. Это дает нам уже упомянутое решение: 20 полтинников. Но оно и единственное, потому что для $y = 3$ имеем $x = 19$, и $(x + y)$ превышает высшую сумму 20.

3) *Четыре рубля*. $3x + y = 20$.

Принимая

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8...,$$

получаем, что

$$y = 20 = 3x = 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2\ (- , -4...).$$

Имеют смысл, очевидно, только первые семь значений. Им соответствуют

$$z = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12.$$

Четыре рубля можно, как видим, уплатить 7-ю различными способами, например: 6 полтинниками, 2 двугривенными и 12 пятаками.

4) *Семь рублей*. $3x + y = 40$.

Здесь не приходится рассматривать значения для $x$ от 0 до 9, так как при этом для $y$ получаются числа от 40 до 13 и $x + y$ составляет по меньшей мере 22, что нарушает требование. Остается рассмотреть поэтому лишь случаи:

$$x = 10, 11, 12, 13,$$

причем

$$y = 40 - 3x = 10, 7, 4, 1$$
$$z = 0, 2, 4, 6.$$

Остальные случаи исключаются, так как ближайшее $y$ уже отрицательное.

Этим вопрос исчерпывается полностью. Кто хотя бы немного имел дело с уравнениями, тот заметил, вероятно, что здесь не приходится оперировать так механически, как обычно. Это оттого, что мы имеем в нашем случае больше неизвестных, нежели уравнений, а именно — 3 неизвестных при 2 уравнениях. Неизвестное $z$ мы устранили и получили одно уравнение с двумя неизвестными $x$ и $y$. Поэтому задача становится неопределенной; можно лишь установить взаимную обусловленность чисел $x$ и $y$, так что для любого $x$ можно найти соответствующее значение $y$. В сущности, имеется бесконечное множество пар решений задач такого рода. Но число их ограничивается требованием, вытекающим из сущности задачи, а именно: либо чтобы искомые числа были целые (как в нашей задаче, где речь идет о монетах), либо чтобы они не были отрицательные (наш случай), либо чтобы их сумма не превышала определенного числа (у нас — 20-ти), и т. п.

Итак, возвращаясь к первоначальной задаче, скажем: счетчик мог безопасно посулить сколь угодно большую награду — задача *неразрешима*. Для вас тем самым открывается легкая возможность предлагать своим друзьям крепкие головоломки. Можете обещать им величайшую награду — не попадетесь: как истые математики, вы можете быть твердо уверены в себе. А кто пожелал бы узнать подробнее об уравнениях вроде рассмотренных выше, пусть спросит своего учителя математики о Диофанте Александрийском.

## *ПРИМЕЧАНИЕ Я. П.*
## ДИОФАНТ АЛЕКСАНДРИЙСКИЙ

Упомянутый в конце очерка александрийский математик Диофант жил в III веке нашей эры. Им написана была «Арифметика», от которой до нас дошла только первая половина сочинения. В этом труде рассматриваются, между прочим, неопределенные уравнения, которые Диофантом и были впервые введены в математику; поэтому имя его осталось навсегда связанным с этими уравнениями.

О жизни Диофанта известно лишь то, что сообщается в надписи, сохранившейся на его могильном памятнике, — надписи, которая составлена в форме следующей задачи:

Путник! Здесь прах погребен Диофанта. И числа поведать
Могут, о чудо, сколь долог был век его жизни.
Часть шестую его составляло прекрасное детство;
Двенадцатая часть протекла еще жизни, — покрылся
Пухом тогда подбородок; седьмую в бездетном
Браке провел Диофант. Еще пять прошло лет,
Был осчастливлен рожденьем прекрасного первенца-сына,
Коему рок половину лишь жизни прекрасной и светлой
Дал на земле по сравненью с отцом. И в печали глубокой
Старец земного удела конец воспринял, проживши
Года четыре с тех пор, как сына лишился. Скажи,
Скольких лет жизни достигнув, смерть воспринял Диофант?

Составив уравнение:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x,$$

узнаем из его решения ($x = 84$), что Диофант умер 84 лет, женился 21 года, стал отцом на 38 году и потерял сына на 80 году.

## ЧИСЛОВЫЕ АНЕКДОТЫ
*Барри Пэна*[1]

**1**

— Еще веревочку? — спросила мать, вытаскивая руки из лоханки с бельем. — Можно подумать, что я вся веревочная. Только и слышишь: веревочку да веревочку. Ведь я вчера дала тебе порядочный клубок. На что тебе такая уйма? Куда ты ее девал?

— Куда девал бечевку? — отвечал мальчуган. — Во-первых, половину ты сама же взяла обратно...

— А чем же прикажешь мне обвязывать пакеты с бельем?

— Половину того, что осталось, взял у меня Том, чтобы удить в канаве колюшек, хотя там и нет никаких колюшек.

— Старшему брату ты всегда должен уступать.

— Я и уступил. Осталось совсем немного, да из того еще папа взял половину для починки подтяжек, которые лопнули у него от смеха, когда случилась

---

[1] Английский беллетрист. Английские меры подлинника заменены метрическими, вследствие чего пришлось несколько видоизменить и сами задачи.

[*Барри Пейн* (1864–1928) — английский писатель и журналист, автор множества фантастических, мистических и юмористических романов и рассказов (*примеч. ред.*).]

беда с автомобилем. А после понадобилось еще сестре взять две пятых оставшегося, чтобы завязать свои волосы узлом...

— Что же ты сделал с остальной бечевкой?

— С остальной? Остальной-то было всего-навсего 30 сантиметров. Вот и устраивай телефон из такого обрывка!

Какую же длину имела бечевка первоначально?

### 2

Снимая наколенники, спортсмен спросил веселого малого, считавшего очки:

— Сколько у меня, Билл?

— А вот сколько: часы только что пробили по одному разу на каждую пару ваших очков, — затараторил веселый малый. — А если бы у вас было вдвое более того, что у вас есть, то имелось бы у вас втрое против того, что пробьют часы при следующем бое.

Спрашивается: который был час в начале этого разговора?

### 3

В воскресенье был устроен в школе детский праздник под открытым небом. Пора было звать ребят к чаю. У палатки, где предполагалось устроить чаепитие, стоял пирожник и заведующий школой. Пирожник был полный мужчина, потому что по роду своей профессии питался главным образом остатками пирожных. Заведующий был высок и тонок.

— Да, — сказал пирожник, — будь у нас еще пяток стульев, я мог бы накормить всю компанию в три очереди, по равному числу ребят в каждой. Надо будет поискать, нельзя ли промыслить здесь пять стульев или табуретов.

— Не беспокойтесь, — ответил заведующий, — я распределю их на четыре очереди, в каждой поровну.

— О, тогда на каждую партию придется еще по три лишних стула.

Сколько было детей и сколько стульев?

### 4

— Зайдите ко мне завтра днем на чашку чая, — сказал старый доктор своему молодому знакомому.

— Благодарю вас. Я выйду в три часа. Может быть, и вы надумаете прогуляться, так выходите в то же время. Встретимся на полпути.

— Вы забываете, что я старик, шагаю в час всего только 3 километра, а вы, молодой человек, проходите при самом медленном шаге 4 километра в час. Не грешно бы дать мне немного вперед.

— Справедливо. Так как я прохожу больше вас на 1 километр в час, то, чтобы уравнять нас, я и дам вам этот километр, т. е. выйду на четверть часа раньше. Достаточно?

— Даже очень мило с вашей стороны, — поспешил согласиться старик.

Молодой человек так и сделал: вышел из дому в три четверти третьего и шел со скоростью 4 километра в час. А доктор вышел ровно в три и делал по 3 километра в час. Когда они встретились, старик повернул обратно и направился домой вместе с молодым другом.

Только за чаем сообразил молодой человек, что с льготной четвертью часа вышло не совсем ладно. Он сказал доктору, что из-за этого ему придется в общем итоге пройти вдвое больше, чем доктору.

— Не вдвое, а вчетверо, — возразил доктор, и был прав.

Как далеко от дома доктора до дома его молодого знакомого?

### 5

Возвратившись из театра, где ставили «Фауста», молодой бакалейщик плотно поужинал и лег спать. Возбуждение и переполненный желудок вызвали у него кошмар.

Приснилось ему, что он стоит за прилавком. На прилавке жестянка с чаем, весы и несколько листов оберточной бумаги. Гирь не было.

«Нечем отвешивать, — подумал бакалейщик. — Если забредет покупатель, придется его как-нибудь сплавить».

В ту же минуту появился Мефистофель в красном плаще, застегнутом огромной пряжкой.

— Отвесьте килограмм чаю! — грозно сказал он.

— Слушаюсь, сию минуту пришлем вам на дом... Славная погода нынче, не правда ли? Тепло не по сезону.

— Нечего зубы заговаривать! — рявкнул Мефистофель. — Отвешивайте!

— Простите великодушно... Удивительное происшествие... никогда раньше не случалось... Все наши гири сейчас только отправлены в поверку.

— Вот оно что, — сказал Мефистофель. — А как чашки ваших весов: обе протекают или хоть одна может удержать воду?

— Правая сделана ковшиком, и в нее можно налить воды граммов триста или даже побольше. Левая — совсем плоская.

— Вот и отлично, — сказал Мефистофель, вынимая из-под плаща бутылочку с водой. — В этой бутылочке (сколько она сама весит, я не знаю) ровно 300 граммов воды. Пряжка моего плаща весит 650 граммов. Берите бутылочку и пряжку и отвесьте мне ровно килограмм чаю. Килограмм чистого веса; бумага не в счет.

— Этого никак невозможно сделать, — начал было бакалейщик.

— Нет, возможно! — крикнул Мефистофель так грозно, что бакалейщик проснулся.

Когда он обдумал свой сон, ему стало ясно, что Мефистофель-то был прав: с 300 граммов воды и пряжкой в 650 граммов совсем нетрудно отвесить в точности 1 килограмм чаю.

Каким образом?

**6**

Старый Осип явился на базар с арбузами и начал торговать. Арбузы были как на подбор все одинаковы.

Первый покупатель взял несколько арбузов, за которые торговец спросил по 36 копеек за штуку. Второй также купил несколько штук, за которые торговец взял по 32 копейки за штуку. Третьему покупка обошлась по 24 копейки штука.

Постовой милиционер, все время присматривавшийся к коммерческим оборотам торговца, также пожелал выступить в роли покупателя.

— Цена на арбузы, я вижу, падает, — сказал он. — У вас остался всего один последний арбуз. Что вы хотите за него?

— 48 копеек, — ответил торговец.

— Вот так раз! — с досадой воскликнул милиционер. — Почему это вы берете с меня дороже, чем со всех других?

— Я ни с кого не беру лишнего, — ответил торговец. — На всем базаре не найдете более добросовестного торговца. Для меня все покупатели равны, такое уж у меня правило. Хочу со всех нажить одинаково, много ли покупают или мало.

Сколько арбузов было у торговца?

7

Учительница задала двум ученицам один и тот же пример на умножение:

1 год 1 мес. $1\frac{1}{4}$ дня × 36.

Первая девочка умножила сначала на 9, а полученное произведение — на 4. Ответ получился правильный.

Вторая девочка умножила сначала на 4, а потом на 9 и тоже получила правильный ответ.

Учительница оценила обе работы одинаково. Если предполагать, что вторая девочка избрала свой путь решения вполне сознательно, то учительница поступила несправедливо, дав обоим ответам одинаковую оценку.

Почему?

## *ДОБАВЛЕНИЕ Я. П.*
## РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1) После того как мать взяла половину, осталась $\frac{1}{2}$, после заимствования старшего брата осталась $\frac{1}{4}$, после отца $\frac{1}{8}$, после сестры $\frac{1}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{40}$. Если 30 сантиметров составляет $\frac{3}{40}$ первоначальной длины, то искомая длина равна $30 : \frac{3}{40} = 400$ сантиметрам, или 4 метрам.

2) Пусть часы пробили $x$. Наличное число очков надо обозначить через $2x$. Если их было вдвое больше, т. е. $4x$, то это число превышало бы втрое число ударов часов при последующем бое, т. е. $(x + 1)$. Следовательно, имеем уравнение

$$\frac{4x}{3} = x + 1,$$

откуда $x = 3$. Было 3 часа.

3) Обозначим число наличных стульев через $x$. Тогда число учеников можно выразить двояко: через $3(x + 5)$ и через $4(x - 3)$. Оба выражения должны быть равны, откуда имеем уравнение

$$3(x + 5) = 4(x - 3).$$

Решив его, находим $x = 27$. Следовательно, стульев было 27, а учеников

$$3 \times (27 + 5) = 96.$$

4) Обозначим расстояние между домами через $x$. Молодой человек всего прошел $2x$, а доктор вчетверо меньше, т. е. $\frac{x}{2}$. До встречи доктор прошел половину пройденного им пути, т. е. $\frac{x}{4}$, а молодой человек — остальное, т. е. $\frac{3x}{4}$. Свою часть пути доктор прошел в $\frac{x}{12}$ часов, а молодой человек — в $\frac{3x}{16}$ часов, причем мы знаем, что он был в пути на ¼ часа дольше, чем доктор. Имеем уравнение:

$$\frac{3x}{16} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4},$$

откуда $x = 2{,}4$ километра. Итак, от дома молодого человека до дома доктора 2,4 километра.

5) Налив 300 граммов воды в чашку весов, отвешиваем этой «водяной гирей» сначала 300 граммов чаю. Затем, положив на одну чашку весов эти 300 граммов чаю, кладем на другую — пряжку, т. е. 650 граммов, и досыпаем на менее нагруженную чашу в отдельный пакет столько чаю, чтобы весы пришли в равновесие, — т. е. 350 г. Отвесив еще с помощью пряжки 650 г чаю, имеем 650 г + 350 г = 1000 г, т. е. 1 килограмм.

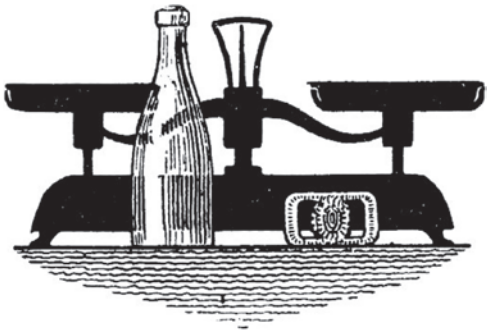
6) Обозначим себестоимость одного арбуза через $x$. Тогда чистая прибыль от продажи одного арбуза первой партии равна $36 - x$, второй $32 - x$, третьей $27 - x$, наконец, последнего арбуза $48 - x$. Так как чистая прибыль от продажи каждой партии одинакова, то число арбузов в первой партии должно равняться $\frac{48 - x}{36 - x}$, во второй $\frac{48 - x}{32 - x}$, в третьей $\frac{48 - x}{27 - x}$.

Все эти выражения, согласно условию задачи, суть целые числа. Надо, следовательно, подобрать для *x* такое значение, при котором выражения

$$\frac{48-x}{36-x}, \frac{48-x}{32-x}, \frac{48-x}{27-x}$$

превращаются в целые числа. Нетрудно найти путем нескольких испытаний, что этому условию удовлетворяет только $x = 24$. Тогда первое выражение равно 2, второе — 3, третье — 8. Другими словами, в первой партии было 2 арбуза, во второй 3, в третьей 8. Всего же арбузов было привезено торговцем $2 + 3 + 8 + 1 = 14$.

7) Способ второй ученицы удобнее, так как при умножении 1 года 1 мес. $1\frac{1}{4}$ дней на 4 мы сразу освобождаемся от дроби, и тогда умножение на 9 выполняется легче. Способ первой ученицы таких удобств не дает, он более громоздкий. Поэтому учительница должна была дать второму решению более высокую оценку.



## ХИТРОЕ РАЗРЕШЕНИЕ МУДРЕНОЙ ЗАДАЧИ

*В. Г. Бенедиктова*[1]

Одна баба, торговавшая яйцами, имея у себя к продаже девять десятков яиц, отправила на рынок трех дочерей своих и, вверив старшей и самой смышленой из них десяток, поручила другой 3 десятка, а третьей полсотни. При этом она сказала им:

— Условьтесь наперед между собой насчет цены, по которой вы продавать будете, и от этого условия не отступайтесь; все вы крепко держитесь одной и той же цены; но я надеюсь, что старшая дочь моя по своей смышлености, даже и при общем между вами условии, по какой цене продавать, сумеет выручить столько за свой десяток, сколько вторая выручит за 3 десятка, да научит вторую сестру выручить за ее 3 десятка столько же, сколько младшая выручит за полсотни. Пусть выручки всех троих да цены будут одинаковы. Притом я желала бы, чтоб вы продали все яйца так, чтобы пришлось круглым счетом не меньше 10 копеек за десяток, а за все 9 десятков — не меньше 90 копеек, или 30 алтын[2].

Задача была мудреная. Дочери, идучи на рынок, стали между собой совещаться, причем вторая и третья обращались к уму и совету старшей. Та, обдумав дело, сказала:

— Будем, сестры, продавать наши яйца не десятками, как это делалось у нас до сих пор, а семерками: семь яиц — семерик; на каждый семерик и цену

[1] Из неизданной рукописи поэта В. Г. Бенедиктова, относящейся к 1869 году.

[2] *Алтын* — старинное название 3-копеечной монеты (отсюда «пятиалтынный» — 15 коп.)

положим одну, которой все и будут крепко держаться, как мать сказала. Чур, не опускать с положенной цены ни копейки. За первый семерик алтын, согласны?

— Дешевенько, — сказала вторая.

— Ну, — возразила старшая, — зато мы поднимем цену на те яйца, которые за продажею круглых семериков в корзинах у нас останутся. Я заранее проверила, что яичных торговок, кроме нас, на рынке никого не будет. Сбивать цены некому; на остальное же добро, когда есть спрос, а товар на исходе, известное дело, цена возвышается. Вот мы на остальных-то яйцах и наверстаем.

— А почем будем продавать остальные? — спросила младшая.

— По 3 алтына за каждое яичко. Давай, да и только. Те, кому очень нужно, — дадут.

— Дорогонько, — заметила опять средняя.

— Что ж, — подхватила старшая, — зато первые-то яйца по семеркам пойдут дешево. Одно на другое и наведет.

Согласились.

Пришли на рынок. Каждая из сестер села на своем месте отдельно и продает. Обрадовавшись дешевизне, покупщики и покупщицы бросились к младшей, у которой было полсотни яиц, и все их расхватали. Семерым она продавала по семерику и выручила 7 алтын, а одно яйцо осталось у нее в корзине. Вторая, имевшая 3 десятка, продала 4-м покупательницам по семерику, и в корзине у нее осталось два яйца: выручила она 4 алтына. У старшей купили семерик, за который она получила один алтын; 3 яйца осталось.

Вдруг явилась кухарка, посланная барыней на рынок с тем, чтобы купить непременно десяток яиц во что бы то ни стало. На короткое время к барыне в гости приехали сыновья ее, которые страшно любят яичницу. Кухарка туда-сюда по рынку мечется: яйца распроданы; всего у трех торговок, пришедших на рынок, осталось только 6 яиц: у одной — одно яйцо, у другой — 2, у третьей — 3. Давай и те сюда!

Разумеется, кухарка прежде кинулась к той, у которой осталось 3, а это была старшая дочь, продавшая за алтын свой единственный семерик. Кухарка спрашивает:

— Что хочешь за свои 3 яйца?

А та в ответ:

— По три алтына за яичко.

— Что ты? С ума сошла! — говорит кухарка.

А та:

— Как угодно, — говорит, — ниже не отдам. Это последние.

Кухарка бросилась к той, у которой 2 яйца в корзине.

— Почем?

— По 3 алтына. Такая цена установилась. Все яйца вышли.

— А твое яйчишко сколько стоит? — спрашивает кухарка у младшей.

Та отвечает:

— Три алтына.

Нечего делать. Пришлось купить по неслыханной цене.

— Давайте сюда все остальные яйца.

И кухарка дала старшей за ее 3 яйца — 9 алтын, что и составило с имевшимся у нее алтыном — 10; второй заплатила она за ее пару яиц — 6 алтын; с вырученными за 4 семерика 4-мя алтынами это составило также 10 алтын. Младшая получила от кухарки за свое остальное яичко — 3 алтына и, приложив их к 7-ми алтынам, вырученным за проданные прежде 7 семериков, увидела у себя в выручке тоже 10 алтын.

После этого дочери возвратились домой и, отдав матери своей каждая свои 10 алтын, рассказали, как они продавали и как, соблюдая относительно цены одно общее условие, достигли того, что выручки как за один десяток, так и за три десятка и за полсотни оказались одинаковыми.

Мать была очень довольна точным выполнением данного ею дочерям своим поручения и находчивостью своей старшей дочери, по совету которой оно выполнилось; а еще больше осталась довольна тем, что и общая выручка дочерей — 30 алтын, или 90 копеек, — соответствовала ее желанию.

## *ПРИМЕЧАНИЯ Я. П.*
## УВЕСЕЛИТЕЛЬНАЯ АРИФМЕТИКА В. Г. БЕНЕДИКТОВА

В библиотеке Русского Общества Любителей Мироведения в Ленинграде хранится найденная лишь в 1924 г. неопубликованная рукопись поэта В. Г. Бенедиктова, посвященная математическим развлечениям (поэт в последние годы жизни посвящал свой досуг занятиям математикой и астрономией).

Рукопись эта представляет собою, по-видимому, вполне законченное сочинение небольшого объема (около двух печатных листов) и является, по всем признакам, не переводом, а трудом самостоятельным. На рукописи нет даты ее составления, но можно установить, что она относится к 1869 году, за пять лет до смерти поэта. Указание это извлечено мною из данных одного расчета в последней главе рукописи, где автор говорит о 7376 годах, «насчитываемых от сотворения мира»: это соответствует по церковному летосчислению 1868 годам нашей эры.

Заглавие рукописи неизвестно, так как первый лист не сохранился. О характере же труда и его назначении говорится в кратком «вступлении» следующее:

«Арифметический расчет может быть прилагаем к разным увеселительным занятиям, играм, шуткам и т. п. Многие так называемые *фокусы* (подчеркнуто в рукописи) основываются на числовых соображениях, между прочим и производимые при посредстве обыкновенных игральных карт, где принимается в расчет или число самих карт, или число очков, представляемых теми или другими картами, или и то и другое вместе. Некоторые задачи, в решение которых должны входить самые громадные числа, представляют факты любопытные и дают понятие об этих превосходящих всякое воображение числах. Мы вводим их в эту дополнительную часть арифметики. Некоторые вопросы для разрешения их требуют особой изворотливости ума и могут быть решаемы, хотя с первого взгляда кажутся совершенно нелепыми и противоречащими здравому смыслу, как, например, приведенная здесь между прочим задача под заглавием „Хитрая продажа яиц". Прикладная практическая часть арифметики требует иногда не только знания теоретических правил, излагаемых в чистой арифметике, но и находчивости, приобретаемой через умственное развитие при знакомстве с различными сторонами не только дел, но и безделиц, которым поэтому дать здесь место мы сочли не излишним».

Сочинение разбито на 20 коротких ненумерованных глав, имеющих каждая особый заголовок — в стиле сходного по содержанию старинного труда Баше де Мезирьяка «Занимательные и приятные задачи», единственного сборника арифметических развлечений, с которым наш поэт мог быть знаком. Первые главы носят следующие заголовки: «Так называемые магические квадраты», «Угадывание задуманного числа от 1 до 30», «Угадывание втайне распределенных сумм», «Задуманная втайне цифра, сама по себе обнаруживающаяся», «Узнавание вычеркнутой цифры» и т. п. Затем следует ряд карточных фокусов арифметического характера. После них — любопытная глава «Чародействующий полководец и арифметическая армия» (оригинальный, незаимствованный сюжет); умножение с помощью пальцев, представленное в форме анекдота; перепечатанная нами выше задача с продажей яиц. Предпоследняя глава «Недостаток в пшеничных зернах для 64 клеток шахматной доски» рассказывает старинную легенду об изобретателе шахматной игры.

Наконец, 20-я глава: «Громадное число живших на земном шаре его обитателей» заключает очень любопытный подсчет. «Предположим, что первоначально от одной пары людей произошло две пары, что от каждой из этих пар произошло по две пары, и потом каждая пара производит две пары. По этому предположению размножение на земле людей шло в геометрической прогрессии: 1, 2, 4, 8,16, 32... Возьмем столько членов этой прогрессии, сколько могло перейти человеческих поколений в течение 7376 лет, насчитываемых от сотворения мира [по библейскому исчислению; отсюда выясняется дата рукописи: 1869 г.]. Положим на каждое поколение 50 лет». Насчитывая всех поколений, начиная от первой пары человеческих существ, 140 и беря 140 членов прогрессии, автор приходит к выводу, что число всех живших на земле людей достигает 4 *септаллионов*. «Половину из этого числа отбросим, принимая в соображение, что многие из родившихся умирают в младенчестве... Значит, останемся только при двух *септаллионов*». *Септаллионом* Бенедиктов называет единицу с 42 нулями[1].

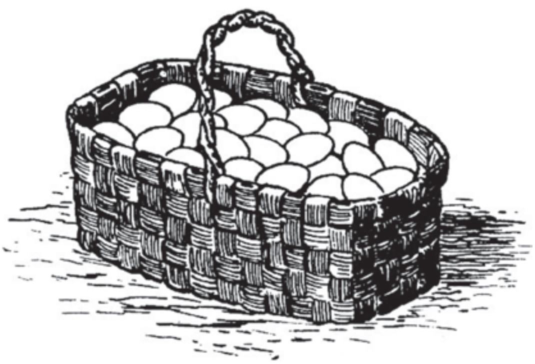
[1] См. примечание на с. 317 (*примеч. ред.*).

Далее, вес этого количества людей — «160 *септаллионов* фунтов» — он сопоставляет с «весом» земного шара, который принимает в 3½ септиллиона фунтов (вместо 14 септиллионов).

Результат получается поистине разительный: общий вес всех прежде живших людей превышает вес земного шара в 1600 миллиардов раз (приводим исправленную цифру). «Это показывает, — заключает автор, — что один и тот же вещественный материал, из которого формировались телесные составы живших на свете людей, был в обороте по крайней мере 1600 миллиардов раз, и за каждую вещественную частицу, перебывавшую в различных живых человеческих телах, могли бы спорить 1600 миллиардов индивидуумов».

Результат этот станет еще более поразителен, если принять в расчет, что человечество существует на земном шаре не 7 тысяч лет, а около полумиллиона. Далее, надо иметь в виду, что не вся масса земного шара участвовала в «формировании телесных составов живших на свете людей», а только масса поверхностного слоя нашей планеты, составляющего незначительную часть всего объема Земли. Наконец, в споре за «каждую вещественную частицу, перебывавшую в живых телах» должно было предъявить свои права и бесчисленное множество животных, населявших нашу планету начиная с древнейших геологических эпох...

Возвращаясь к рукописи, надо отметить еще, что в период ее составления (1869 г.) на русском языке не было еще ни одного сочинения подобного содержания, не только оригинального, но даже и переводного. Да и на Западе имелись только два старинных французских сочинения — Баше де Мезирьяка (1612 г.) и 4-томный труд Озанама (1694 г. и ряд позднейших переизданий). По планировке и отчасти по содержанию сочинение Бенедиктова приближается к книге Баше.




Я. И. ПЕРЕЛЬМАН
ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА
М А Т Е М А Т И К А
М А Т Е М А Т И К
М А Т Е М А Т И
М А Т Е М А Т
М А Т Е М А
М А Т Е М
М А Т Е
М А Т
М А
М
ГТТИ

Текст и иллюстрации воспроизводятся по изданию:

*Перельман Я. И. Живая математика : Математические рассказы и головоломки. — Л. ; М. : ОНТИ ГТТИ, 1934*

Обложка издания 1934 г.

## Предисловие

Для чтения этой книги достаточна весьма скромная математическая подготовка: знание правил арифметики и элементарные сведения из геометрии. Лишь незначительная часть задач требует уменья составлять и решать простейшие уравнения. Тем не менее содержание книги весьма разнообразно: от пестрого подбора головоломок и замысловатых трюков математической гимнастики до полезных практических примеров счета и измерения. Составитель заботился о свежести включаемого материала и избегал повторения того, что входит в другие сборники того же автора («Фокусы и развлечения», «Занимательные задачи»). Читатель найдет здесь сотню головоломок, не включенных в прежние книги, причем некоторые из задач, например крокетные, вообще никогда не публиковались. Глава VII — «Рассказы о числах-великанах» — представляет собою переработку брошюры автора, пополненную четырьмя новыми рассказами.

Читатели, желающие поделиться с автором своими замечаниями, могут направлять письма по адресу издательства. Все указания будут приняты с благодарностью.

*Я. П.*

## Глава I

# В ДОМЕ ОТДЫХА

## ЗАВТРАК С ГОЛОВОЛОМКАМИ

### 1. Белка на поляне

— Сегодня утром я с белкой в прятки играл, — рассказывал во время завтрака один из собравшихся за столом дома отдыха. — Вы знаете в нашем лесу круглую полянку с одинокой березой посередине? За этим деревом и пряталась от меня белка. Выйдя из чащи на полянку, я сразу заметил беличью мордочку с живыми глазками, уставившуюся на меня из-за ствола. Осторожно, не приближаясь, стал я обходить по краю полянки, чтобы взглянуть на зверька. Раза четыре обошел я дерево — но плутовка отступала по стволу в обратную сторону, по-прежнему показывая только мордочку. Так и не удалось мне обойти кругом белки.

— Однако, — возразил кто-то, — сами же вы говорите, что четыре раза обошли вокруг дерева.

— Вокруг *дерева*, но не вокруг *белки*!

— Но белка-то на дереве?

— Что же из того?

— То, что вы кружились и около белки.

— Хорошо кружился, если ни разу не видел ее спинки.

*Рис. 1. «Раза четыре обошел я дерево...»*

*Рис. 2. «Плутовка отступала в обратную сторону...»*

— При чем тут спинка? Белка в центре, вы ходите по кругу, значит, — ходите кругом белки.

— Ничуть не значит. Вообразите, что я хожу около вас по кругу, а вы поворачиваетесь ко мне все время лицом, пряча спину. Скажете вы разве, что я кружусь около вас?

— Конечно, скажу. Как же иначе?

— Кружусь, хотя не бываю позади вас, не вижу вашей спины?

— Далась вам спина! Вы замыкаете вокруг меня путь — вот в чем суть дела, а не в том, чтобы видеть спину.

— Позвольте: что значит кружиться около чего-нибудь? По-моему, это означает только одно: становиться последовательно в такие места, чтобы видеть предмет со всех сторон. Ведь правильно, профессор? — обратился спорящий к сидевшему за столом старику.

— Спор идет у вас, в сущности, о словах, — ответил ученый. — А в таких случаях надо начинать всегда с того, о чем вы сейчас только завели речь: надо договориться о значении слов. Как понимать слова: «двигаться вокруг предмета»? Смысл их может быть двоякий. Можно, во-первых, разуметь под ними перемещение по замкнутой линии, внутри которой находится предмет.

Это одно понимание. Другое: двигаться по отношению к предмету так, чтобы видеть его со всех сторон. Держась первого понимания вы должны признать, что четыре раза обошли вокруг белки. Придерживаясь же второго, — обязаны заключить, что не обошли вокруг нее ни разу. Поводов для спора здесь, как видите, нет, если обе стороны говорят на одном языке, понимают слова одинаково.

— Прекрасно, можно допустить двоякое понимание. Но какое все же правильнее?

— Так ставить вопрос не приходится. Условливаться можно о чем угодно. Уместно только спросить, что более согласно с общепринятым пониманием. Я сказал бы, что лучше вяжется с духом языка первое понимание, и вот почему. Солнце, как известно, делает полный оборот кругом своей оси в 26 суток...

— Солнце вертится?

— Конечно, как и Земля, вокруг оси. Вообразите, однако, что вращение Солнца совершается медленнее, а именно, что оно делает один оборот не в 26 суток, а в 365 ¼ суток, т. е. в год. Тогда Солнце было бы обращено к Земле всегда одной и той же своей стороной; противоположной половины, «спины» Солнца, мы никогда не видели бы. Но разве стал бы кто-нибудь утверждать из-за этого, что Земля не кружится около Солнца?

— Да, теперь ясно, что я все-таки кружился около белки.

— Есть предложение, товарищи! Не расходиться, — сказал один из слушавших спор. — Так как в дождь гулять никто не пойдет, а перестанет дождик, видно, не скоро, то давайте проведем здесь время за головоломками. Начало сделано. Пусть каждый по очереди придумает или припомнит какую-нибудь головоломку. Вы же, профессор, явитесь нашим верховным судьей.

— Если головоломки будут с алгеброй или с геометрией, то я должна отказаться, — заявила молодая женщина.

— И я тоже, — присоединился кто-то.

— Нет, нет, участвовать должны все! А мы попросим присутствующих не привлекать ни алгебры, ни геометрии, разве только самые начатки. Возражений не имеется?

— Тогда я согласна и готова первая предложить головоломку.

— Прекрасно, просим! — донеслось с разных сторон. — Начинайте.

### 2. В коммунальной кухне

— Головоломка моя зародилась в обстановке коммунальной квартиры. Задача, так сказать, бытовая. Жилица — назову ее для удобства Тройкиной — положила в общую плиту 3 полена своих дров, жилица Пятеркина — 5 полен. Жилец Бестопливный, у которого, как вы догадываетесь, не было своих дров, получил от обеих гражданок разрешение сварить обед на общем огне. В возмещение расходов он уплатил соседкам 80 копеек. Как должны они поделить между собой эту плату?

— Пополам, — поспешил заявить кто-то. — Бестопливный пользовался их огнем в равной мере.

— Ну, нет, — возразил другой, — надо принять в соображение, как участвовали в этом огне дровяные вложения гражданок. Кто дал 3 полена, должен получить 30 копеек; кто дал 5 полен — получает 50 копеек. Вот это будет справедливый дележ.

— Товарищи, — взял слово тот, кто затеял игру и считался теперь председателем собрания. — Окончательные решения головоломок давайте пока не объявлять. Пусть каждый еще подумает над ними. Правильные ответы судья огласит нам за ужином. Теперь следующий. Очередь за вами, товарищ пионер!

### 3. Работа школьных кружков

— В нашей школе, — начал пионер, — имеется 5 кружков: политкружок, военный, фотографический, шахматный и хоровой. Политкружок занимается через день, военный — через 2 дня на 3-й, фотографический — каждый 4-й день, шахматный — каждый 5-й день и хоровой — каждый 6-й день. Первого января собрались в школе все 5 кружков, а затем занятия велись в назначенные по плану дни, без отступлений от расписания. Вопрос состоит в том, сколько в первом квартале было еще вечеров, когда собирались в школе все 5 кружков.

— А год был простой или високосный? — осведомились у пионера.

— Простой.

— Значит, первый квартал, — январь, февраль, март, — надо считать за 90 дней?

— Очевидно.

— Позвольте к вопросу вашей головоломки присоединить еще один, — сказал профессор. — А именно: сколько в том же квартале года было таких вечеров, когда кружковых занятий в школе вовсе не происходило?

— Ага, понимаю! — раздался возглас. — Задача с подвохом. Ни одного дня не будет больше с 5 кружками и ни одного дня без всяких кружков. Это уж ясно!

— Почему? — спросил председатель.

— Объяснить не могу, но чувствую, что отгадчика хотят поймать впросак.

— Ну, это не довод. Вечером выяснится, правильно ли ваше предчувствие. За вами очередь, товарищ!

### 4. Кто больше?

— Двое считали в течение часа всех, кто проходил мимо них на тротуаре. Один стоял у ворот дома, другой прохаживался взад и вперед по тротуару. Кто насчитал больше прохожих ?

— Идя, больше насчитаешь, ясное дело, — донеслось с другого конца стола.

— Ответ узнаем за ужином, — объявил председатель. — Следующий!

### 5. Дед и внук

— То, о чем я скажу, происходило в 1932 г. Мне было тогда ровно столько лет, сколько выражают последние две цифры года моего рождения. Когда я об этом соотношении рассказал деду, он удивил меня заявлением, что с его возрастом выходит то же самое. Мне это показалось невозможным...

— Разумеется, невозможно, — вставил чей-то голос.

— Представьте, что вполне возможно. Дед доказал мне это. Сколько же было лет каждому из нас?

### 6. Железнодорожные билеты

— Я — железнодорожная кассирша, продаю билеты, — начала следующая участница игры. — Многим это кажется очень простым делом. Не подозревают, с каким большим числом билетов приходится иметь дело кассиру даже маленькой станции. Ведь необходимо, чтобы пассажиры могли получить билеты от данной станции до любой другой на той же дороге, притом в обоих направлениях. Я служу на дороге с 25 станциями. Сколько же, по-вашему, различных образцов билетов заготовлено железной дорогой для всех ее касс?

— Ваша очередь, товарищ летчик, — провозгласил председатель.

### 7. Полет дирижабля

— Из Ленинграда вылетел прямо на север дирижабль. Пролетев в северном направлении 500 км, он повернул на восток. Пролетев в эту сторону 500 км, дирижабль сделал новый поворот — на юг и прошел в южном направлении 500 км. Затем он повернул на запад и, пролетев 500 км, опустился на землю.


*Рис. 3. Продаю железнодорожные билеты...*

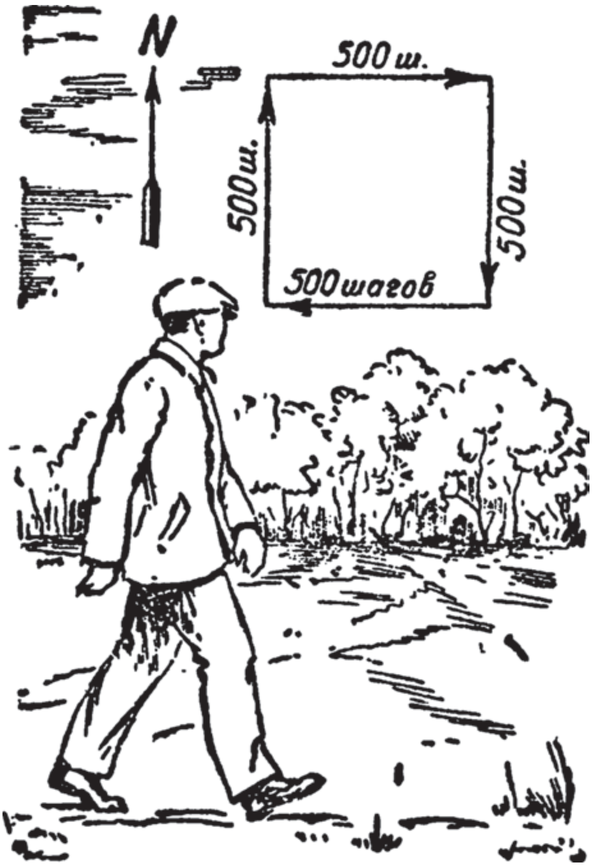



*Рис. 4. «500 шагов вперед, 500 вправо, 500 назад...»*

Спрашивается: где расположено место спуска дирижабля относительно Ленинграда — к западу, к востоку, к северу или к югу?

— На простака рассчитываете, — сказал кто-то: — 500 шагов вперед, 500 вправо, 500 назад да 500 влево — куда придем? Откуда вышли, туда и придем!

— Итак, где, по-вашему, спустился дирижабль?

— На том же ленинградском аэродроме, откуда поднялся. Не так разве?

— Именно не так.

— В таком случае я ничего не понимаю!

— В самом деле, здесь что-то неладно, — вступил в разговор сосед. — Разве дирижабль спустился не в Ленинграде?.. Нельзя ли повторить задачу?

Летчик охотно исполнил просьбу. Его внимательно выслушали и с недоуменьем переглянулись.

— Ладно, — объявил председатель. — До ужина успеем подумать об этой задаче, а сейчас будем продолжать.

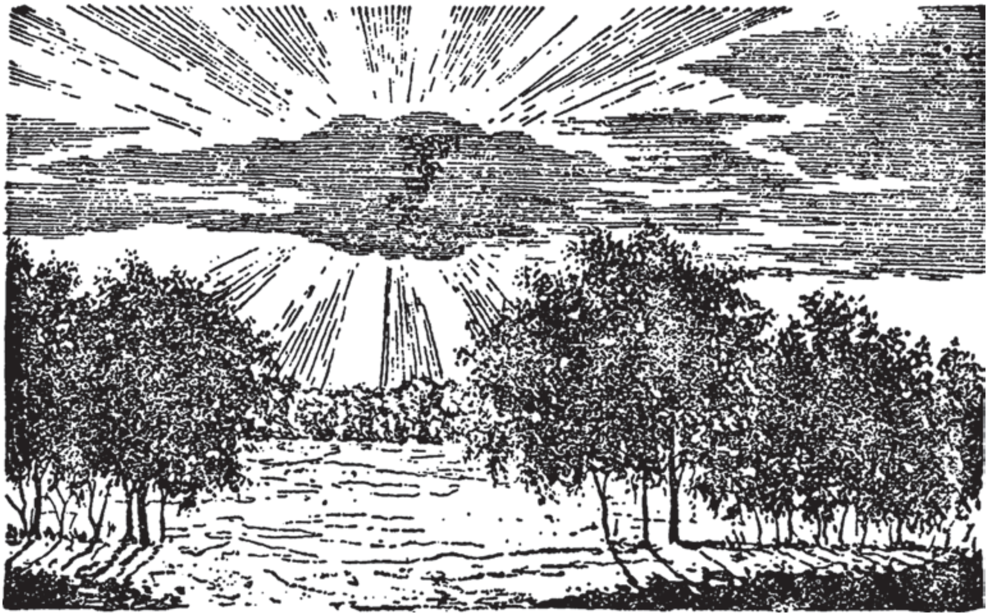


*Рис. 5. Расходящиеся лучи от спрятанного за облаком солнца*

### 8. Тень

— Позвольте мне, — сказал очередной загадчик, — взять сюжетом головоломки тот же дирижабль. Что длиннее: дирижабль или его полная тень?

— В этом и вся головоломка?

— Вся.

— Тень, конечно, длиннее дирижабля: ведь лучи солнца расходятся веером, — последовало сразу решение.

— Я бы сказал, — возразил кто-то, — что, напротив, лучи солнца параллельны; тень и дирижабль одной длины.

— Что вы? Разве не случалось вам видеть расходящиеся лучи от спрятанного за облаком солнца? Тогда можно воочию убедиться, как сильно расходятся солнечные лучи. Тень дирижабля должна быть значительно больше дирижабля, как тень облака больше самого облака.

— Почему же обычно принимают, что лучи солнца параллельны? Моряки, астрономы — все так считают...

Председатель не дал спору разгореться и предоставил слово следующему загадчику.

### 9. Задача со спичками

Очередной оратор высыпал на стол все спички из коробка и стал распределять их в три кучки.

— Костер собираетесь раскладывать? — шутили слушатели.

— Головоломка, — объяснил загадчик, — будет со спичками. Вот их три неравных кучки. Во всех вместе 48 штук. Сколько в каждой, я вам не сообщаю. Зато отметьте следующее: если из первой кучи я переложу во вторую столько спичек, сколько в этой второй куче имелось; затем из второй в третью переложу столько, сколько в этой третьей перед тем будет находиться; и, наконец, из третьей переложу в первую столько спичек, сколько в этой первой куче будет тогда иметься, — если, говорю, все это проделать, то число спичек во всех кучках станет одинаково. Сколько же было в каждой кучке первоначально?

### 10. Коварный пень

— Головоломка эта, — начал сосед последнего загадчика, — напоминает задачу, которую давно как-то задал мне деревенский математик. Это был целый рассказ, довольно забавный. Повстречал крестьянин в лесу незнакомого старика. Разговорились. Старик внимательно оглядел крестьянина и сказал:

— Известен мне в леску этом пенечек один удивительный. Очень в нужде помогает.

— Как помогает? Вылечивает?

— Лечить не лечит, а деньги удваивает. Положишь под него кошель с деньгами, досчитаешь до ста — и готово: деньги, какие были в кошельке, удвоились. Такое свойство имеет. Замечательный пень!

— Вот бы мне испробовать, — мечтательно сказал крестьянин.

— Это можно. Отчего же? Заплатить только надо.

— Кому платить? И много ли?

— Тому платить, кто дорогу укажет. Мне, значит. А много ли, о том особый разговор.

Стали торговаться. Узнав, что у крестьянина в кошельке денег мало, старик согласился получать после каждого удвоения по 1 р. 20 коп. На том и порешили.

Старик повел крестьянина вглубь леса, долго бродил с ним и наконец разыскал в кустах старый, покрытый мохом еловый пень. Взяв из рук крестьянина кошелек, он засунул его между корнями пня. Досчитали до ста. Старик снова стал шарить и возиться у основания пня, наконец извлек оттуда кошелек и подал крестьянину.

Заглянул крестьянин в кошелек, и что же? — деньги в самом деле удвоились! Отсчитал из них старику обещанные 1 р. 20 коп. и попросил засунуть кошелек вторично под чудодейственный пень.

Снова досчитали до ста, снова старик стал возиться в кустах у пня, и снова совершилось диво: деньги в кошельке удвоились. Старик вторично получил из кошелька обусловленные 1 р. 20 коп.

В третий раз спрятали кошель под пень. Деньги удвоились и на этот раз. Но когда крестьянин уплатил старику обещанное вознаграждение, в кошельке не осталось больше ни одной копейки. Бедняга потерял на этой комбинации все свои деньги. Удваивать дальше было уже нечего, и крестьянин уныло побрел из лесу.

Секрет волшебного удвоения денег вам, конечно, ясен: старик недаром, отыскивая кошелек, мешкал в зарослях у пня. Но можете ли вы ответить на другой вопрос: сколько было у крестьянина денег до злополучных опытов с коварным пнем?

### 11. Задача о декабре

— Я, товарищи, языковед, от всякой математики далек, — начал пожилой человек, которому пришел черед задавать головоломку. — Не ждите от меня поэтому математической задачи. Могу только предложить вопрос из знакомой мне области. Разрешите задать календарную головоломку?

— Просим!

— Двенадцатый месяц называется у нас «декабрь». А вы знаете, что, собственно, значит «декабрь»? Слово это происходит от греческого слова «дека» — десять, отсюда также слова «декалитр» — десять литров, «декада» — десять дней и др. Выходит, что месяц декабрь носит название «десятый». Чем объяснить такое несоответствие?

— Ну, теперь осталась только одна головоломка, — произнес председатель.

### 12. Арифметический фокус

— Мне приходится выступать последним, двенадцатым. Для разнообразия покажу вам арифметический фокус и попрошу раскрыть его секрет. Пусть кто-нибудь из вас, хотя бы вы, товарищ председатель, напишет на бумажке тайно от меня любое трехзначное число.

— Могут быть и нули в этом числе?

— Не ставлю никаких ограничений. Любое трехзначное число, какое пожелаете.

— Написал. Что теперь?

— Припишите к нему это же число еще раз. У вас получится, конечно, шестизначное число.

— Есть. Шестизначное число.

— Передайте бумажку соседу, что сидит подальше от меня. А он пусть разделит это шестизначное число на семь.

— Легко сказать: разделить на семь! Может и не разделиться.

— Не беспокойтесь, поделится без остатка.

— Числа не знаете, а уверены, что поделится.

— Сначала разделите, потом будем говорить.

— На ваше счастье, разделилось.

— Результат вручите своему соседу, не сообщая мне. Он разделит его на 11.

— Думаете, опять повезет — разделится?

— Делите, остатка не получится.

— В самом деле без остатка! Теперь что?

— Передайте результат дальше. Разделим его... ну, скажем, на 13.

— Нехорошо выбрали. Без остатка на 13 мало чисел делится... Ан нет, разделилось нацело. Везет же вам!

— Дайте мне бумажку с результатом; только сложите ее, чтобы я не видел числа.

Не развертывая листка бумаги, «фокусник» вручил его председателю.

— Извольте получить задуманное вами число. Правильно?

— Совершенно верно! — с удивлением ответил тот, взглянув на бумажку. — Именно это я и задумал... А теперь, так как список ораторов исчерпан, позвольте закрыть наше собрание, благо и дождь успел пройти. Разгадки всех головоломок будут оглашены сегодня же после ужина. Записки с решениями можете подавать мне.

## РАЗВЯЗКА ЗАВТРАКА

### Решения головоломок 1–12

**1.** Головоломка с белкой на поляне рассмотрена была полностью раньше. Переходим к следующей.

**2.** Нельзя считать, как многие делают, что 80 коп. уплачено за 8 полен, по гривеннику за полено. Деньги эти уплачены только за третью часть от 8 полен, потому что огнем пользовались *трое* в одинаковой мере. Отсюда следует, что все 8 полен оценены были в 80 × 3, т. е. в 2 р. 40 коп., и цена одного полена — 30 коп.

Теперь легко сообразить, сколько причитается каждому. Пятеркиной за ее 5 полен следует 150 коп.; но она сама воспользовалась плитой на 80 коп.; значит, ей остается дополучить еще 150 — 80, т. е. 70 коп. Тройкина за три свои полена должна получить 90 коп.; а если вычесть 80 коп., причитающиеся с нее за пользование плитой, то следовать ей будет всего только 90 — 80, т. е. 10 коп.

Итак, при правильном дележе Пятеркина должна получить 70 коп., Тройкина — 10 коп.

**3.** На первый вопрос — через сколько дней в школе соберутся одновременно все 5 кружков — мы легко ответим, если сумеем разыскать наименьшее из всех чисел, которое делится без остатка на 2, на 3, на 4, на 5 и на 6. Нетрудно сообразить, что число это 60. Значит, на 61-й день соберется снова 5 кружков: политический — через 30 двухдневных промежутков, военный — через 20 трехдневных, фотокружок — через 15 четырехдневных, шахматный — через 12 пятидневок и хоровой — через 10 шестидневок. Раньше чем через 60 дней такого вечера не будет. Следующий подобный же вечер будет еще через 60 дней, т. е. уже во втором квартале.

Итак, в течение первого квартала окажется только один вечер, когда в клубе снова соберутся для занятий все 5 кружков.

Хлопотливее найти ответ на второй вопрос задачи: сколько будет вечеров, свободных от кружковых занятий? Чтобы разыскать такие дни, надо выписать по порядку все числа от 1 до 90 и зачеркнуть в этом ряду дни работы политкружка, т. е. числа 1, 3, 5, 7, 9 и т. д. Потом зачеркнуть дни работы военного кружка: 4-й, 10-й и т. д. После того как зачеркнем затем дни занятий фотокружка, шахматного и хорового, у нас останутся незачеркнутыми те дни первого квартала, когда ни один кружок не работал.

Кто проделает эту работу, тот убедится, что вечеров, свободных от занятий, в течение первого квартала будет довольно много: 24. В январе их 8, а именно: 2-го, 8-го, 12-го, 14-го, 18-го, 20-го, 24-го и 30-го. В феврале насчитывается 7 таких дней, в марте — 9.

**4.** Оба насчитали одинаковое число прохожих. Хотя тот, кто стоял у ворот, считал проходивших в обе стороны, зато тот, кто ходил, видел вдвое больше встречных людей.

**5.** С первого взгляда может действительно показаться, что задача неправильно составлена: выходит как будто, что внук и дед одного возраста. Однако требование задачи, как сейчас увидим, легко удовлетворяется.

Внук, очевидно, родился в XX столетии. Первые две цифры года его рождения, следовательно, 19: таково число сотен. Число, выражаемое остальными цифрами, будучи сложено с самим собою, должно составить 32. Значит, это число 16: год рождения внука 1916, и ему в 1932 г. было 16 лет.

Дед его родился, конечно, в XIX столетии; первые две цифры года его рождения 18. Удвоенное число, выражаемое остальными цифрами, должно составить 132. Значит, само это число равно половине 132, т. е. 66. Дед родился в 1866 г., и ему теперь 66 лет.

Таким образом, и внуку и деду в 1932 г. столько лет, сколько выражают последние два числа годов их рождения.

**6.** На каждой из 25 станций пассажиры могут требовать билет до любой станции, т. е. на 24 пункта. Значит, разных билетов надо напечатать $25 \times 24 = 600$ образцов.

**7.** Задача эта никакого противоречия не содержит. Не следует думать, что дирижабль летел по контуру квадрата: надо принять в расчет шарообразную форму Земли. Дело в том, что меридианы к северу сближаются (рис. 6); поэтому, пройдя 500 м по параллельному кругу, расположенному на 500 м севернее широты Ленинграда, дирижабль отошел к востоку *на большее число градусов*,

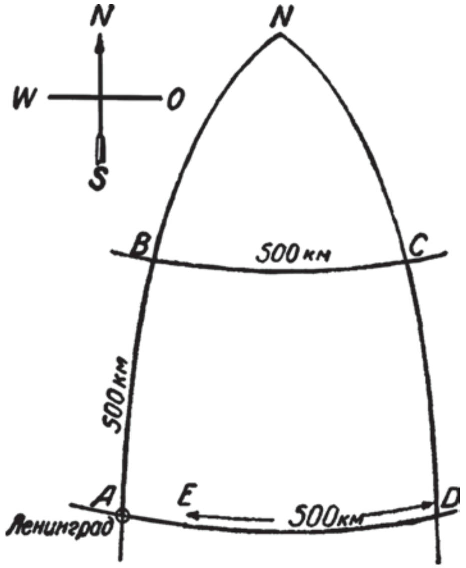



*Рис. 6. Как летел дирижабль*

чем пролетел потом в обратном направлении, очутившись снова на широте Ленинграда. В результате дирижабль, закончив полет, оказался *восточнее* Ленинграда.

На сколько именно? Это можно рассчитать. На рис. 6 вы видите маршрут дирижабля: *ABCDE*. Точка *N* — северный полюс; в этой точке сходятся меридианы *AB* и *DC*. Дирижабль пролетел сначала 500 км на север, т. е. по меридиану *AN*. Так как длина градуса меридиана 111 км, то дуга меридиана в 500 км содержит 500 : 111 = 4,5°. Ленинград лежит на 60-й параллели; значит, точка *B* находится на 60° + + 4,5° = 64°,5. Затем дирижабль летел к востоку, т. е. по параллели *BC*, и прошел по ней 500 км. Длину одного градуса на этой параллели можно вычислить (или узнать из таблиц); она равна 48 км. Отсюда легко определить, сколько градусов пролетел дирижабль на восток: 500 : 48 = 10,4°. Далее воздушный корабль летел в южном направлении, т. е. по меридиану *CD*, и, пройдя 500 км, должен был очутиться снова на параллели Ленинграда. Теперь путь лежит на запад, т. е. по *DA*; 500 км этого пути явно короче расстояния *AD*. В расстоянии *AD* заключается столько же градусов, сколько и в *BC*. т. е. 10,4°. Но длина 1° на ширине 60° равна 55,5 км. Следовательно, между *A* и *D* расстояние равно 55,5 × 10,4 = 577 км. Мы видим, что дирижабль не мог спуститься в Ленинграде; он не долетел до него 77 км, т. е. спустился на Ладожском озере.

**8.** Беседовавшие об этой задаче допустили ряд ошибок. Неверно, что лучи солнца, падающие на земной шар, заметно расходятся. Земля так мала по сравнению с расстоянием ее от Солнца, что солнечные лучи, падающие на какую-либо часть ее поверхности, расходятся на неуловимо малый угол: практически лучи эти можно считать параллельными. То, что мы видим иногда (при так называемом «иззаоблачном сиянии», рис. 5) лучи солнца, расходящиеся веером, — не более как следствие перспективы.

В перспективе параллельные линии представляются сходящимися; вспомните вид уходящих вдаль рельсов (рис. 7) или вид длинной аллеи.

Однако из того, что лучи солнца падают на землю параллельным пучком, вовсе не следует, что полная тень дирижабля равна по длине самому дирижаблю. Взглянув на рис. 8, вы поймете, что полная тень дирижабля в пространстве

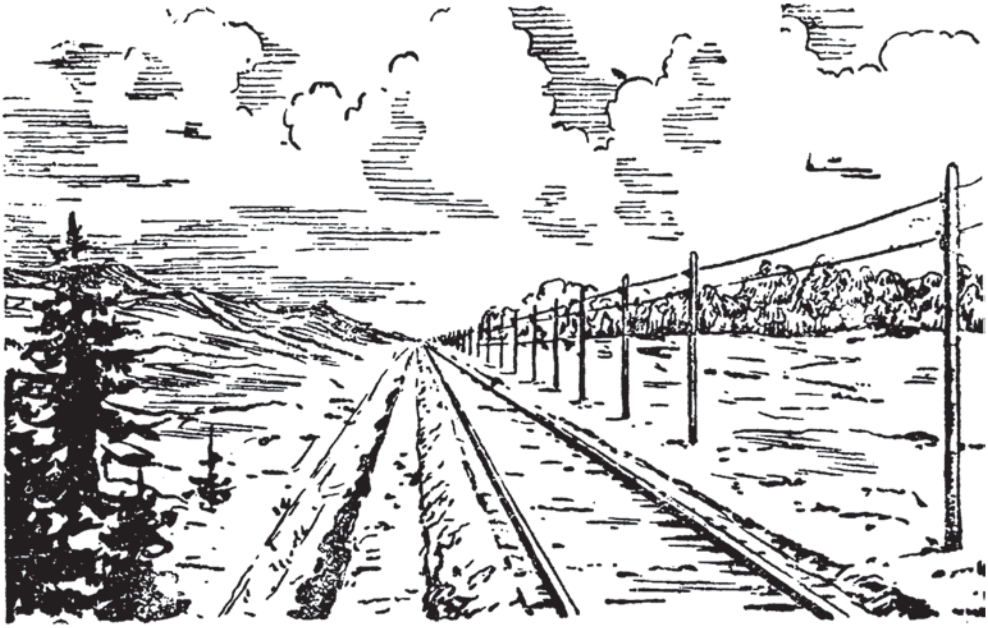


*Рис. 7. Рельсы, уходящие вдаль*

суживается по направлению к земле и что, следовательно, тень, отбрасываемая им на земную поверхность, должна быть короче самого дирижабля: *CD* меньше, чем *AB*.

Если знать высоту дирижабля, то можно вычислить и то, как велика эта разница. Пусть дирижабль летит на высоте 1000 м над земной поверхностью. Угол, составляемый прямыми *AC* и *BD* между собою, равен тому углу, под которым усматривается солнце с земли; угол этот известен: около ½°. С другой стороны, известно, что всякий предмет, видимый под углом в ½°, удален от глаза на 115 своих поперечников. Значит, избыток длины дирижабля над длиною тени (этот избыток усматривается с земной поверхности под углом в ½°) должен составлять 115-ю долю от *AC*. Величина *AC* больше отвесного расстояния от *A* до земной поверхности. Если угол между направлением солнечных лучей и земной поверхностью равен 45°, то *AC* (при высоте дирижабля 1000 м) составляет около 1400 м, и, следовательно, тень короче дирижабля на 1400 : 115 = 12 м.

Все сказанное относится к *полной* тени дирижабля — черной и резкой, и не имеет отношения к так называемой *полутени*, слабой и размытой.

Расчет наш показывает, между прочим, что, будь на месте дирижабля небольшой воздушный шар, диаметром меньше 12 м, он не отбрасывал бы вовсе полной тени; видна была бы только его смутная полутень.

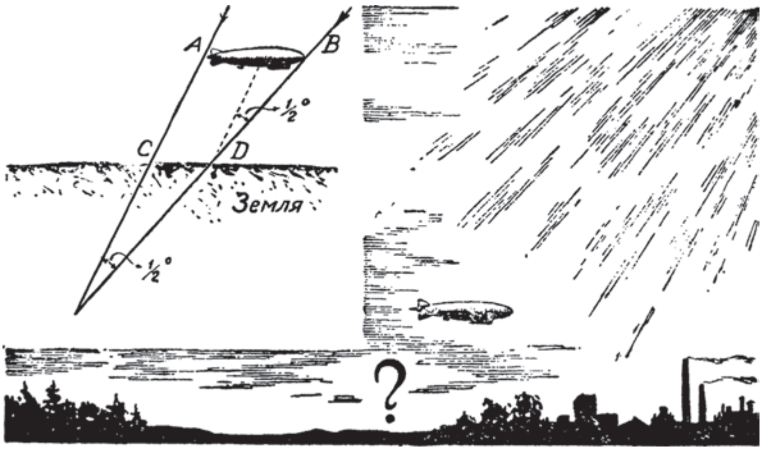



*Рис. 8. Как падает тень от дирижабля*

**9.** Задачу решают с конца. Будем исходить из того, что после всех перекладываний число спичек в кучках сделалось одинаковым. Так как от этих перекладываний общее число спичек не изменилось, осталось прежнее (48), то в каждой кучке к концу всех перекладываний оказалось 16 штук.

Итак, имеем в самом конце:

| 1-я кучка | 2-я кучка | 3-я кучка |
|---|---|---|
| 16 | 16 | 16 |

Непосредственно перед этим в 1-ю кучку было прибавлено столько спичек, сколько в ней имелось; иначе говоря, число спичек в ней было *удвоено*. Значит, до последнего перекладывания в 1-й кучке было не 16, а только 8 спичек. В кучке же 3-й, из которой 8 спичек было взято, имелось перед тем 16 + 8 = 24 спички. Теперь у нас такое распределение спичек по кучкам:

| 1-я кучка | 2-я кучка | 3-я кучка |
|---|---|---|
| 8 | 16 | 24 |

Далее: мы знаем, что перед этим из 2-й кучки было переложено в 3-ю столько спичек, сколько имелось в 3-й кучке. Значит, 24 — это *удвоенное* число спичек, бывших в 3-й кучке до этого перекладывания. Отсюда узнаем распределение спичек после первого перекладывания:

| 1-я кучка | 2-я кучка | 3-я кучка |
|---|---|---|
| 8 | 16 + 12 = 28 | 12 |

Легко сообразить, что раньше первого перекладывания (т. е. до того, как из 1-й кучки переложено было во 2-ю столько спичек, сколько в этой 2-й имелось) распределение спичек было таково:

| 1-я кучка | 2-я кучка | 3-я кучка |
|---|---|---|
| 22 | 14 | 12 |

Таковы первоначальные числа спичек в кучках.

**10.** Эту головоломку также проще решить с конца. Мы знаем, что после *третьего* удвоения в кошельке оказалось 1 р. 20 коп. (деньги эти получил старик в последний раз).

Сколько же было до этого удвоения? Конечно, 60 коп. Остались эти 60 коп. после уплаты старику вторых 1 р. 20 коп., а до уплаты было в кошельке 1 р. 20 коп. + 60 коп. = 1 р. 80 коп.

Далее: 1 р. 80 коп. оказались в кошельке после *второго* удвоения; до того было всего 90 коп., оставшиеся после уплаты старику первых 1 р. 20 коп. Отсюда узнаем, что до уплаты находилось в кошельке 90 коп. + 1 р. 20 коп. = = 2 р. 10 коп. Столько денег имелось в кошельке после *первого* удвоения; раньше же было вдвое меньше — 1 р. 5 коп. Это и есть те деньги, с которыми крестьянин приступил к своим неудачным финансовым операциям.

Проверим ответ:

Деньги в кошельке:

После 1-го удвоения .... 1р. 5 к. × 2 = 2 р. 10 к.
» 1-й уплаты ...... 2 р. 10 к. – 1р. 20 к. = 90 к.
» 2-го удвоения ....... 90 к. × 2 = 1 р. 80 к.
» 2-й уплаты ...... 1 р. 80 к. – 1 р. 20 к. = 60 к.
» 3-го удвоения ....... 60 к. × 2 = 1 р. 20 к.
» 3-й уплаты ...... 1р. 20 к. – 1р. 20 к. = 0

**11.** Наш календарь ведет свое начало от календаря древних римлян. Римляне же (до Юлия Цезаря) считали началом года не 1 января, а 1 марта. Декабрь тогда был, следовательно, *десятый* месяц. С перенесением начала года на 1 января названия месяцев изменены не были. Отсюда и произошло то несоответствие между названием и порядковым номером, которое существует теперь для ряда месяцев:

| Названия месяцев | Смысл названия | Порядковый номер |
|---|---|---|
| Сентябрь . . | седьмой | 9 |
| Октябрь . . | восьмой | 10 |
| Ноябрь . . | девятый | 11 |
| Декабрь . . | десятый | 12 |

**12.** Проследим за тем, что проделано было с задуманным числом. Прежде всего к нему приписали взятое трехзначное число еще раз. Это то же самое, что приписать три нуля и прибавить затем первоначальное число; например:

$$872872 = 872000 + 872.$$

Теперь ясно, что́, собственно, проделано было с числом: его увеличили в 1000 раз и, кроме того, прибавили его самого; короче сказать — умножили число на 1001.

Что же сделано было потом с этим произведением? Его разделили последовательно на 7, на 11 и на 13. В конечном итоге, значит, разделили его на $7 \times 11 \times 13$, т. е. на 1001.

Итак, задуманное число сначала умножили на 1001, потом разделили на 1001. Надо ли удивляться, что в результате получилось то же самое число?

—

Прежде чем закончить главу о головоломках в доме отдыха, расскажу еще о трех арифметических фокусах, которыми вы можете занять досуг ваших товарищей. Два состоят в отгадывании чисел, третий — в отгадывании владельцев вещей.

Это — старые, быть может даже и известные вам фокусы, но едва ли все знают, на чем они основаны. А без знания теоретической основы фокуса нельзя сознательно и уверенно его выполнять. Обоснование первых двух фокусов потребует от нас весьма скромной и ничуть не утомительной экскурсии в область начальной алгебры.

### 13. Зачеркнутая цифра

Пусть товарищ ваш задумает какое-нибудь многозначное число, например, 847. Предложите ему найти сумму цифр этого числа ($8 + 4 + 7 = 19$) и отнять ее от задуманного числа. У загадчика окажется:

$$847 - 19 = 828.$$

В том числе, которое получится, пусть он зачеркнет одну цифру — безразлично какую, — и сообщит вам все остальные. Вы немедленно называете ему зачеркнутую цифру, хотя не знаете задуманного числа и не видели, что с ним проделывалось.

Как можете вы это выполнить и в чем разгадка фокуса?

Выполняется это очень просто: подыскивается такая цифра, которая вместе с суммою вам сообщенных цифр составила бы ближайшее число, делящееся на 9 без остатка. Если, например, в числе 828 была зачеркнута первая цифра (8) и вам сообщены цифры 2 и 8, то сложив $2 + 8$, вы соображаете, что до ближайшего числа, делящегося на 9, т. е. до 18 — не хватает 8. Это и есть зачеркнутая цифра.

Почему так получается? Потому что если от какого- либо числа отнять сумму его цифр, то должно остаться число, делящееся на 9, — иначе говоря, такое, сумма цифр которого делится на 9. В самом деле, пусть в задуманном числе цифра сотен — $a$, цифра десятков — $b$ и цифра единиц — $c$. Значит, всего в этом числе содержится единиц

$$100a + 10b + c.$$

Отнимаем от этого числа сумму его цифр $a + b + c$. Получим

$$100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a - 9b = 9\,(11a + b).$$

Но $9(11a + b)$, конечно, делится на 9; значит, при вычитании из числа суммы его цифр всегда должно получиться число, делящееся на 9 без остатка.

При выполнении фокуса может случиться, что сумма сообщенных вам цифр сама делится на 9 (например, 4 и 5). Это показывает, что зачеркнутая цифра есть либо 0, либо 9. Так вы и должны ответить: 0 или 9.

Вот видоизменение того же фокуса: вместо того чтобы из задуманного числа вычитать сумму его цифр, можно вычесть число, полученное из данного какой-либо перестановкой его цифр. Например из числа 8247 можно вычесть 2748 (если получается число, большее задуманного, то вычитают меньшее из большего). Дальше поступают, как раньше сказано: 8247 — 2748 = 5499; если зачеркнута цифра 4, то, зная цифры 5, 9, 9, вы соображаете, что ближайшее к 5 + 9 + 9, т. е. 23, число, делящееся на 9, есть 27. Значит, зачеркнутая цифра 27 – 23 = 4.

### 13а. Отгадать число, ничего не спрашивая

Вы предлагаете товарищу задумать любое трехзначное число, не оканчивающееся нулем, и просите затем переставить цифры в обратном порядке. Сделав это, он должен вычесть меньшее число из большего и полученную разность сложить с нею же, но написанною в обратной последовательности цифр. Ничего не спрашивая у загадчика, вы сообщаете ему число, которое у него получилось в конечном итоге.

Если, например, было задумано 467, то загадчик должен выполнить следующие действия:

$$467; \quad 764; \quad \begin{array}{r} -\,764 \\ 467 \\ \hline 297 \end{array}\ ; \quad \begin{array}{r} +\,297 \\ 792 \\ \hline 1089 \end{array}.$$

Этот окончательный результат — 1089 — вы и объявляете загадчику. Как вы можете его узнать?

Рассмотрим задачу в общем виде. Возьмем число с цифрами $a$, $b$, $c$. Оно изобразится так:

$$100a + 10b + c.$$

Число с обратным расположением цифр имеет вид:

$$100c + 10b + a.$$

Разность между первым и вторым равна:

$$99a - 99c.$$

Делаем следующие преобразования:

$$99a - 99c = 99\,(a - c) = 100\,(a - c) - a - c =$$
$$= 100\,(a - c) - 100 + 100 - 10 + 10 - a + c =$$
$$= 100\,(a - c - 1\,) + 90 + (10 - a + c).$$

Значит, разность состоит из следующих трех цифр:

| | | |
|---|---|---|
| цифра | сотен: | $a - c - 1$ |
| » | десятков: | 9 |
| » | единиц: | $10 + c - a$ |

Число с обратным расположением цифр изображается так:

$$100\,(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1).$$

Сложив оба выражения

$$100\,(a - c - 1) + 90 + (10 - a + c)$$
$$100\,(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$$

получаем

$$100 \times 9 + 180 + 9 = 1089.$$

Каковы бы ни были цифры $a$, $b$, $c$, в итоге выкладок всегда получается одно и то же число: 1089. Нетрудно поэтому отгадать результат этих вычислений: вы знали его заранее.

Понятно, что показывать этот фокус одному лицу дважды нельзя — секрет будет раскрыт.

### 14. Кто что взял?

Для выполнения этого остроумного фокуса необходимо приготовить три какие-нибудь мелкие вещицы, удобно помещающиеся в кармане, например карандаш, ключ и перочинный ножик. Кроме того, поставьте на стол тарелку с 24 орехами; за неимением орехов годятся шашки, кости домино, спички и т. п.

Троим товарищам вы предлагаете во время вашего отсутствия из комнаты спрятать в карман карандаш, ключ или ножик, кто какую вещь хочет. Вы беретесь отгадать, в чьем кармане какая вещь.

Процедура отгадывания проводится так. Возвратившись в комнату после того, как вещи спрятаны по карманам товарищей, вы начинаете с того, что вручаете им на сохранение орехи из тарелки. Первому даете один орех, второму — два, третьему — три. Затем снова удаляетесь из комнаты, оставив товарищам следующую инструкцию. Каждый должен взять себе из тарелки еще орехов, а именно: обладатель карандаша берет столько орехов, сколько ему было вручено; обладатель ключа берет *вдвое* больше того числа орехов, какое ему было вручено; обладатель ножа берет *вчетверо* больше того числа орехов, какое ему было вручено.

Прочие орехи остаются на тарелке.

Когда все это проделано и вам дан сигнал возвратиться, вы, входя в комнату, бросаете взгляд на тарелку и объявляете, у кого в кармане какая вещь.

Фокус тем более озадачивает, что выполняется без участия тайного сообщника, подающего вам незаметные сигналы, В нем нет никакого обмана: он целиком основан на арифметическом расчете. Вы разыскиваете обладателя каждой вещи единственно лишь по числу оставшихся орехов. Остается их на тарелке немного — от 1 до 7, и счесть их можно одним взглядом.

Как же, однако, узнать по остатку орехов, кто взял какую вещь?

Очень просто: каждому случаю распределения вещей между товарищами отвечает иное число остающихся орехов. Мы сейчас в этом убедимся.

Пусть имена ваших товарищей Владимир, Георгий, Константин; обозначим их начальными буквами: *В*, *Г*, *К*. Вещи также обозначим буквами: карандаш — *a*, ключ — *b*, нож — *c*. Как могут три вещи распределиться между тремя обладателями? На 6 ладов:

| *В* | *Г* | *К* |
|---|---|---|
| *a* | *b* | *c* |
| *a* | *c* | *b* |
| *b* | *a* | *c* |
| *b* | *c* | *a* |
| *c* | *a* | *b* |
| *c* | *b* | *a* |

Других случаев, очевидно, быть, не может; наша табличка систематически исчерпывает все комбинации.

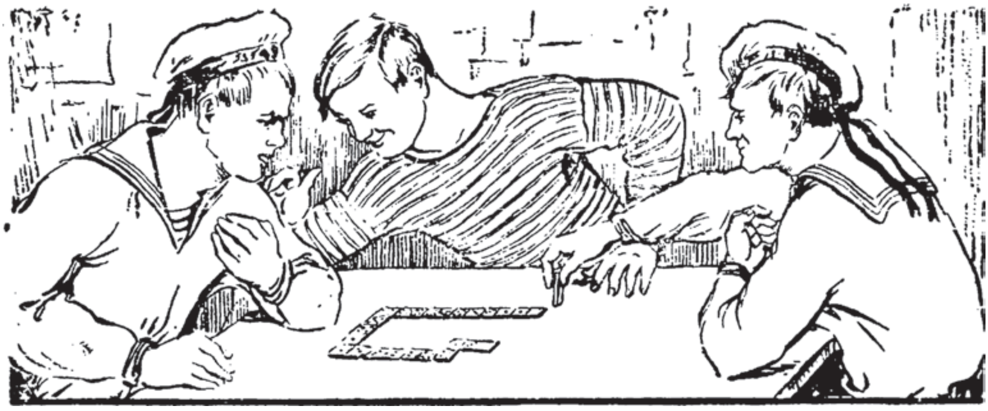
Посмотрим теперь, какие остатки отвечают каждому из этих 6 случаев:

| *В Г К* | Число взятых орехов | Итого | Остаток |
|---|---|---|---|
| *a b c* | 1 + 1 = 2; 2 + 4 = 6;<br>3 + 12 = 15 | 23 | 1 |
| *a c b* | 1 + 1 = 2; 2 + 8 = 10;<br>3 + 6 = 9 | 21 | 3 |
| *b a c* | 1 + 2 = 3; 2 + 2 = 4;<br>3 + 12 = 15 | 22 | 2 |
| *b c a* | 1 + 2 = 3; 2 + 8 = 10;<br>3 + 3 = 6 | 19 | 5 |
| *c a b* | 1 + 4 = 5; 2 + 2 = 4; 3 + 6 = 9 | 18 | 6 |
| *c b a* | 1 + 4 = 5; 2 + 4 = 6; 3 + 3 = 6 | 17 | 7 |

Вы видите, что остаток орехов всякий раз получается иной. Поэтому, зная остаток, вы легко устанавливаете, каково распределение вещей между вашими товарищами. Вы снова — в третий раз — удаляетесь из комнаты и заглядываете там в свою записную книжку, где записана сейчас воспроизведенная табличка (собственно, нужны вам только первая и последняя графы); запомнить ее наизусть трудно, да и нет надобности. Табличка скажет вам, в чьем кармане какая вещь. Если, например, на тарелке осталось 5 орехов, то это означает (случай *b*, *c*, *a*), что

ключ — у Владимира;
нож — у Георгия;
карандаш — у Константина.

Чтобы фокус удался, вы должны твердо помнить, сколько орехов вы дали каждому товарищу (раздавайте орехи поэтому всегда по алфавиту, как и было сделано в нашем случае).



## Глава II

# МАТЕМАТИКА В ИГРАХ

## ДОМИНО

### 15. Цепь из 28 костей

Почему 28 костей домино можно выложить с соблюдением правил игры в одну непрерывную цепь?

### 16. Начало и конец цепи

Когда 28 костей домино выложены в цепь, на одном ее конце оказалось 5 очков.

Сколько очков на другом конце?

### 17. Фокус с домино

Ваш товарищ берет одну из костей домино и предлагает вам из остальных 27 составить непрерывную цепь, утверждая, что это всегда возможно, какая бы кость ни была взята. Сам же он удаляется в соседнюю комнату, чтобы не видеть вашей цепи.

Вы приступаете к работе и убеждаетесь, что товарищ ваш прав: 27 костей выложились в одну цепь. Еще удивительнее то. что товарищ, оставаясь в соседней комнате и не видя вашей цепи, объявляет оттуда, какие числа очков на ее концах.

Как может он это знать? И почему он уверен, что из всяких 27 костей домино составится непрерывная цепь?

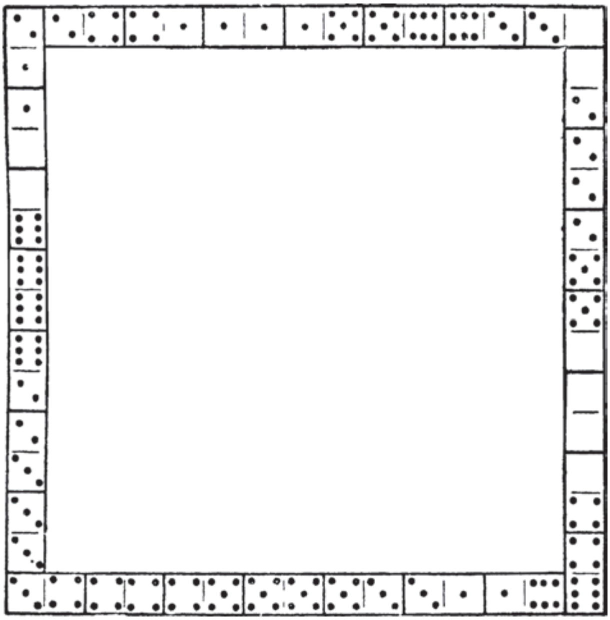


*Рис. 9. Рамка из домино*

**18. Рамка**

Рис. 9 изображает квадратную рамку, выложенную из костей домино с соблюдением правил игры. Стороны рамки равны по длине, но не одинаковы по сумме очков: верхний и левый ряды заключают по 44 очка, остальные же два ряда — 59 и 32.

Можете ли вы выложить такую квадратную рамку, все стороны которой заключали бы одинаковую сумму очков — именно 44?

**19. Семь квадратов**

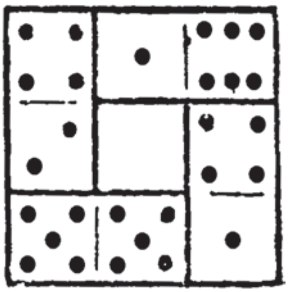


*Рис. 10*

Четыре кости домино можно выбрать так, чтобы из них составился квадратик с равной суммой очков на каждой стороне. Образчик вы видите на рис. 10: сложив очки на каждой стороне квадратика, во всех случаях получите 11.

Можете ли вы из полного набора домино составить одновременно семь таких квадратов? Не требуется, чтобы сумма очков на одной стороне получалась у всех квадратов одна и та же; надо лишь, чтобы каждый квадрат имел на своих четырех сторонах одинаковую сумму очков.

### 20. Магические квадраты из домино

На рис. 11 показан квадрат из 18 косточек домино, замечательный тем, что сумма очков любого его ряда — продольного, поперечного или диагонального — одна и та же: 13. Подобные квадраты издавна называются «магическими».

Вам предлагается составить несколько таких же 18-косточковых магических квадратов, но с другой суммой очков в ряду. 13 — наименьшая сумма в рядах магического квадрата, составленного из 18 костей. Наибольшая сумма — 23.

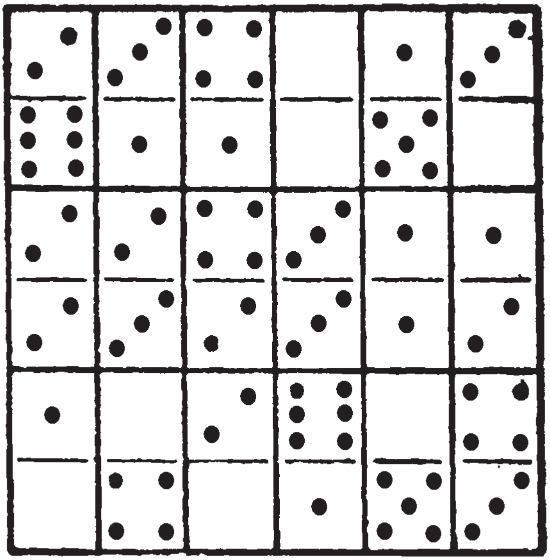


*Рис. 11. Магический квадрат из домино*

### 21. Прогрессия из домино

Вы видите на рис. 12 шесть косточек домино, выложенных по правилам игры и отличающихся тем, что число очков на косточках (на двух половинах каждой косточки) возрастает на 1: начинаясь с 4, ряд состоит из следующих чисел очков: 4; 5; 6; 7; 8; 9.

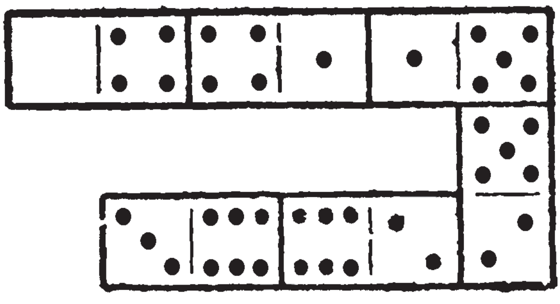


*Рис. 12. Прогрессия из домино*

Такой ряд чисел, которые возрастают (или убывают) на одну и ту же величину, называется «арифметической прогрессией». В нашем ряду каждое число больше предыдущего на 1; но в прогрессии может быть и любая другая «разность».

Задача состоит в том, чтобы составить еще несколько 6-косточковых прогрессий.

## ИГРА В 15, ИЛИ ТАКЕН

Общеизвестная коробочка с 15 нумерованными квадратными шашками имеет любопытную историю, о которой мало кто из игроков подозревает. Расскажем о ней словами немецкого исследователя игр математика В. Аренса.

«Около полувека назад — в конце 1870-х годов — вынырнула в Соединенных Штатах „игра в 15“; она быстро распространилась и, благодаря несчетному числу усердных игроков, которых она заполонила, превратилась в настоящее общественное бедствие.

То же наблюдалось по эту сторону океана, в Европе. Здесь можно было даже в конках видеть в руках пассажиров коробочки с 15 шашками. В конторах и магазинах хозяева приходили в отчаяние от увлечения своих служащих и вынуждены были воспретить им игру в часы занятий и торговли. Содержатели увеселительных заведений ловко использовали эту манию и устраивали большие игорные турниры. Игра проникла даже в торжественные залы германского рейхстага. „Как сейчас вижу в рейхстаге седовласых людей, сосредоточенно рассматривающих в своих руках квадратную коробочку“, — вспоминает известный географ и математик Зигмунд Гюнтер, бывший депутатом в годы игорной эпидемии.

В Париже игра эта нашла себе приют под открытым небом, на бульварах и быстро распространилась из столицы по всей провинции. „Не было такого уединенного сельского домика, где не гнездился бы этот паук, подстерегая жертву, готовую запутаться в его сетях“, — писал один французский автор.

В 1880 г. игорная лихорадка достигла, по-видимому, своей высшей точки. Но вскоре после этого тиран был повержен и побежден оружием математики. Математическая теория игры обнаружила, что из многочисленных задач, которые могут быть предложены, разрешима только половина; другая не разрешима никакими ухищрениями.

*Рис. 13. Игра в 15*

Стало ясно, почему иные задачи не поддавались самым упорным усилиям и почему устроители турниров отваживались назначать огромные премии за разрешения задач. В этом отношении всех превзошел изобретатель игры, предложивший издателю нью-йоркской газеты для воскресного прибавления неразрешимую задачу с премией в 1000 долларов за ее разрешение; так как издатель колебался, то изобретатель выразил полную готовность внести названную сумму из собственного кармана. Имя изобретателя Самуэль (Сэм) Лойд. Он приобрел широкую известность как составитель остроумных задач и множества головоломок. Любопытно, что получить в Америке патент на придуманную игру ему не удалось. Согласно инструкции, он должен был представить „рабочую модель" для исполнения пробной партии; он предложил чиновнику патентного бюро задачу, и когда последний осведомился, разрешима ли она, изобретатель должен был ответить: „Нет, это математически невозможно". — „В таком случае, — последовало возражение, — не может быть и рабочей модели, а без модели нет и патента". Лойд удовлетворился этой резолюцией, — но, вероятно, был бы более настойчив, если бы предвидел неслыханный успех своего изобретения».

*Рис. 14. Самуэль Лойд, изобретатель игры в 15*

Приведем собственный рассказ изобретателя игры о некоторых фактах из ее истории:

«Давнишние обитатели царства смекалки, — пишет Лойд, — помнят, как в начале 70-х годов я заставил весь мир ломать голову над коробкой с подвижными шашками, получившей известность под именем „игры в 15". Пятнадцать шашек были размещены в квадратной коробочке в правильном порядке, и только шашки 14 и 15 были переставлены, как показано на прилагаемой иллюстрации (рис. 16). Задача состояла в том, чтобы, последовательно передвигая шашки, привести их в нормальное положение, причем, однако, порядок шашек 14 и 15 должен быть исправлен.

Премия в 1000 долларов, предложенная за первое правильное решение этой задачи, никем не была заслужена, хотя все без устали решали эту задачу. Рассказывали забавные истории о торговцах, забывавших из-за этого открывать свои магазины, о почтенных чиновниках, целые ночи напролет простаивавших под уличным фонарем, отыскивая путь к решению. Никто не желал отказаться от поисков решения, так как все чувствовали уверенность в ожидающем их успехе. Штурмана, говорят, из-за игры сажали на мель свои суда, машинисты проводили поезда мимо станций; фермеры забрасывали свои плуги».

Познакомим читателя с начатками теории этой игры. В полном виде она очень сложна и тесно примыкает к одному из отделов высшей алгебры («теории определителей»). Мы ограничимся лишь некоторыми соображениями, изложенными В. Аренсом.

Задача игры состоит обыкновенно в том, чтобы посредством последовательных передвижений, допускаемых наличием свободного поля, перевести любое начальное расположение 15 шашек в нормальное, т. е. в такое, при котором шашки идут в порядке своих чисел: в верхнем левом углу 1, направо — 2, затем 3, потом в верхнем правом углу 4; в следующем ряду слева направо: 5, 6, 7, 8 и т. д. Такое нормальное конечное расположение мы даем здесь на рис. 15.

Вообразите теперь расположение, при котором 15 шашек размещены в пестром беспорядке. Рядом передвижений всегда можно привести шашку 1 на место, занимаемое ею на рисунке.

Точно так же возможно, не трогая шашки 1, привести шашку 2 на соседнее место вправо. Затем, не трогая шашек 1 и 2, можно поместить шашки 3 и 4 на их нормальные места: если они случайно не находятся в двух последних вертикальных рядах, то легко привести их в эту область и затем рядом передвижений достичь желаемого результата. Теперь верхняя строка 1, 2, 3, 4 приведена в порядок, и при дальнейших манипуляциях с шашками мы трогать этого ряда не будем. Таким же путем стараемся мы привести в порядок и вторую строку: 5, 6, 7, 8; легко убедиться, что это всегда достижимо. Далее, на пространстве двух последних рядов необходимо привести в нормальное положение шашки 9 и 13: это тоже всегда возможно. Из всех приведенных в порядок шашек 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 13 в дальнейшем ни одной не перемещают; остается небольшой участок в шесть полей, в котором одно свободно, а пять остальных заняты шашками 10, 11, 12, 14, 15 в произвольном порядке. В пределах этого шестиместного участка всегда можно привести на нормальные места шашки 10, 11, 12. Когда это достигнуто, то в последнем ряду шашки 14 и 15 окажутся размещенными либо в нормальном порядке, либо в обратном (рис. 16).

Таким путем, который читатели легко могут проверить на деле, мы приходим к следующему результату.

Любое начальное положение может быть приведено к расположению либо рис. 15 (положение I), либо рис. 16 (положение II).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | |

*Рис. 15. Нормальное расположение шашек (положение I)*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 5 | 6 | 7 | 8 |
| 9 | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 15 | 14 | |

*Рис. 16. Неразрешимый случай (положение II)*

*Рис. 17. «Фермеры забрасывали свои плуги...»*

Если некоторое расположение, которое для краткости обозначим буквою *S*, может быть преобразовано в положение I, то, очевидно, возможно и обратное — перевести положение I в положение *S*. Ведь все ходы шашек обратимы: если, например, в схеме I мы можем шашку 12 поместить на свободное поле, то можно ход этот тотчас взять обратно противоположными движениями.

Итак, мы имеем две серии расположений, таких, что положения одной серии могут быть переведены в нормальное I, а другой серии — в положение II. И наоборот, из нормального расположения можно получить любое положение первой серии, а из расположения II — любое положение второй серии. Наконец, два любых расположения, принадлежащие к одной и той же серии, могут быть переводимы друг в друга.

Нельзя ли идти дальше и объединить эти два расположеня — I и II? Можно строго доказать (не станем входить в подробности), что положения эти не превращаются одно в другое никаким числом ходов. Поэтому все огромное число размещений шашек распадается на две разобщенные серии: 1) на те, которые могут быть переведены в нормальное I: это — положения разрешимые, 2) на те, которые могут быть переведены в положение II и, следовательно, ни при каких обстоятельствах не переводятся в нормальное расположение: это — положения, за разрешение которых назначались огромные премии.

Как узнать, принадлежит ли заданное расположение к первой или ко второй серии? Пример разъяснит это.

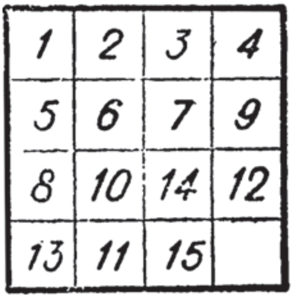



*Рис. 18. Шашки не приведены в порядок*

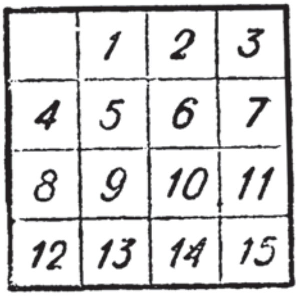



*Рис. 19. К первой задаче Лойда*

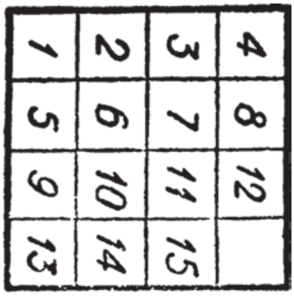



*Рис. 20. Ко второй задаче Лойда*

Рассмотрим расположение, представленное на рис. 18.

Первый ряд шашек в порядке, как и второй, за исключением последней шашки (9). Эта шашка занимает место, которое в нормальном расположении принадлежит 8. Шашка 9 стоит, значит, *ранее* шашки 8: такое упреждение нормального порядка называют «беспорядком». О шашке 9 мы скажем: здесь имеет место 1 беспорядок. Рассматривая дальнейшие шашки, обнаруживаем упреждение для шашки 14; она поставлена на три места (шашек 12, 13, 11) ранее своего нормального положения; здесь у нас 3 беспорядка (14 ранее 12; 14 ранее 13; 14 ранее 11). Всего мы насчитали уже 1 + 3 = 4 беспорядка. Далее, шашка 12 помещена ранее шашки 11, и точно так же шашка 13 ранее шашки 11. Это дает еще 2 беспорядка. Итого имеем 6 беспорядков. Подобным образом для каждого расположения устанавливают общее число беспорядков, освободив предварительно последнее место в правом нижнем углу. Если общее число беспорядков, как в рассмотренном случае, *четное*, то заданное расположение может быть приведено к нормальному конечному; другими словами, оно принадлежит к разрешимым. Если же число беспорядков *нечетное*, то расположение принадлежит ко второй серии, т. е. к неразрешимым (0 беспорядков принимается за четное число их).

Благодаря ясности, внесенной в эту игру математикой, прежняя лихорадочная страстность в увлечении сейчас совершенно немыслима. Математика создала исчерпывающую теорию игры, теорию, не оставляющую ни одного сомнительного пункта. Исход игры зависит не от каких-либо случайностей, не от находчивости, как в других играх, а от чисто математических факторов, предопределяющих его с безусловной достоверностью.

Обратимся теперь к головоломкам в этой области.

Вот несколько *разрешимых* задач, придуманных изобретателем игры:

### 22. Первая задача Лойда

Исходя из расположения, показанного на рис. 15, привести шашки в правильный порядок, но со свободным полем в левом верхнем углу (рис. 19).

### 23. Вторая задача Лойда

Исходя из расположения рис. 15, поверните коробку на четверть оборота и передвигайте шашки до тех пор, пока они не примут расположения рис. 20.

### 24. Третья задача Лойда

Передвигая шашки согласно правилам игры, превратите коробку в «магический квадрат», а именно, разместите шашки так, чтобы сумма чисел была во всех направлениях равна 30.

## КРОКЕТ

Крокетным игрокам предлагаю следующие пять задач.

### 25. Пройти ворота или крокировать?

Крокетные ворота имеют прямоугольную форму. Ширина их вдвое больше диаметра шара. При таких условиях что легче: свободно, не задевая проволоки, пройти с наилучшей позиции ворота или с такого же расстояния крокировать шар?

### 26. Шар и столбик

Толщина крокетного столбика внизу — 6 см. Диаметр шара 10 см. Во сколько раз попасть в шар легче, чем с такого же расстояния заколоться?

### 27. Пройти ворота или заколоться?

Шар вдвое уже прямоугольных ворот и вдвое шире столбика. Что легче: свободно пройти ворота с наилучшей позиции или с такого же расстояния заколоться?

### 28. Пройти мышеловку или крокировать?

Ширина прямоугольных ворот втрое больше диаметра шара. Что легче: свободно пройти с наилучшей позиции мышеловку или с такого же расстояния крокировать шар?

### 29. Непроходимая мышеловка

При каком соотношении между шириной прямоугольных ворот и диаметром шара пройти мышеловку становится невозможным?

## Решения головоломок 15–29

### Домино

**15.** Для упрощения задачи отложим пока в сторону все 7 двойных косточек: 0 — 0, 1 — 1, 2 — 2 и т. д. Останется 21 косточка, на которых каждое число очков повторяется 6 раз. Например 4 очка имеется (на одном поле) на следующих 6 косточках:

4 — 0; 4 — 1; 4 — 2; 4 — 3; 4 — 5; 4 — 6.

Итак, каждое число очков повторяется, мы видим, *четное* число раз. Ясно, что косточки такого набора можно приставлять одну к другой равными числами очков до исчерпания всего набора. А когда это сделано, когда наши 21 косточка вытянуты в непрерывную цепь, тогда между стыками 0 — 0, 1 — 1, 2 — 2 и т. п. вдвигаем отложенные 7 двойняшек. После этого все 28 косточек домино оказываются вытянутыми, с соблюдением правил игры, в одну цепь.

**16.** Легко показать, что цепь из 28 костей домино должна кончаться тем же числом очков, каким она начинается. В самом деле: если бы было не так, то числа очков, оказавшиеся на концах цепи, повторялись бы *нечетное* число раз (внутри цепи числа очков лежат ведь парами); мы знаем, однако, что в полном наборе костей домино каждое число очков повторяется 8 раз, т. е. четное число раз. Следовательно, сделанное нами допущение о неодинаковом числе очков на концах цепи — неправильно: числа очков должны быть одинаковы. (Такого рода рассуждения, как это, в математике называются «доказательствами от противного».)

Между прочим, из сейчас доказанного свойства цепи вытекает следующее любопытное следствие: цепь из 28 косточек всегда можно сомкнуть концами и получить кольцо. Полный набор костей домино может быть, значит, выложен с соблюдением правил игры не только в цепь со свободными концами, но также и в замкнутое кольцо.

Читателя может заинтересовать вопрос: сколькими различными способами выполняется такая цепь или кольцо? Не входя в утомительные подробности расчета, скажем здесь, что число различных способов составления 28-косточковой цепи (или кольца) огромно: свыше 7 миллиардов. Вот точное число:

7 959 229 931 520

(оно представляет собою произведение следующих множителей: $2^{13} \times 3^{8} \times$ $\times\ 5 \times 7 \times 4231$).

**17.** Решение этой головоломки вытекает из сейчас сказанного. 28 косточек домино, мы знаем, всегда выкладываются в сомкнутое кольцо; следовательно, если из этого кольца вынуть одну косточку, то

1) остальные 27 косточек составят непрерывную цепь с разомкнутыми концами;

2) концевые числа очков этой цепи будут те, которые имеются на вынутой косточке.

Спрятав одну кость домино, мы можем поэтому заранее сказать, какие числа очков будут на концах цепи, составленной из прочих костей.

**18.** Сумма очков всех сторон искомого квадрата должна равняться $44 \times 4 = 176$, т. е. на 8 больше, чем сумма очков на косточках полного набора домино (168). Происходит это, конечно, оттого, что числа очков, занимающих вершины квадрата, считаются дважды. Сказанным определяется, какова должна быть сумма очков на вершинах квадрата: 8. Это несколько облегчает поиски требуемого расположения, хотя нахождение его все же довольно хлопотливо. Решение показано на рис. 21.

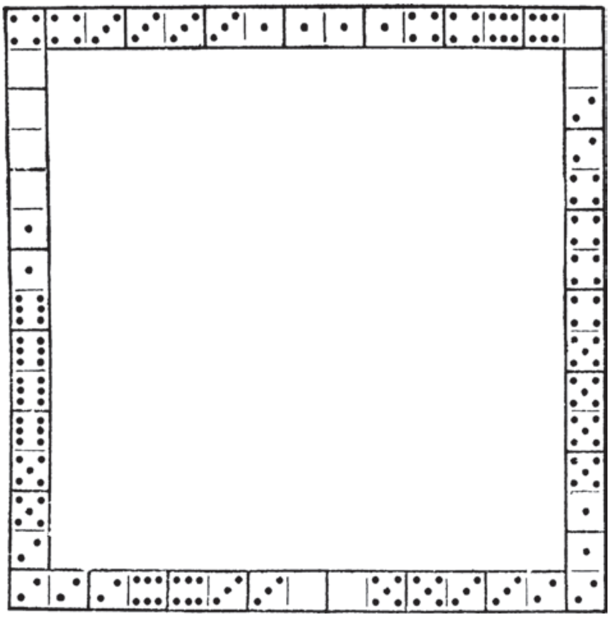


*Рис. 21*

**19.** Приводим два решения этой задачи из числа многих возможных. В первом решении (рис. 22) имеем:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 квадрат с суммою 3 | | | | | 4 и 5 квадрат с суммою | | | | 9 |
| » | » | » | » | 6 | 6 | » | » | » | 10 |
| » | » | » | » | 8 | 7 | » | » | » | 16 |

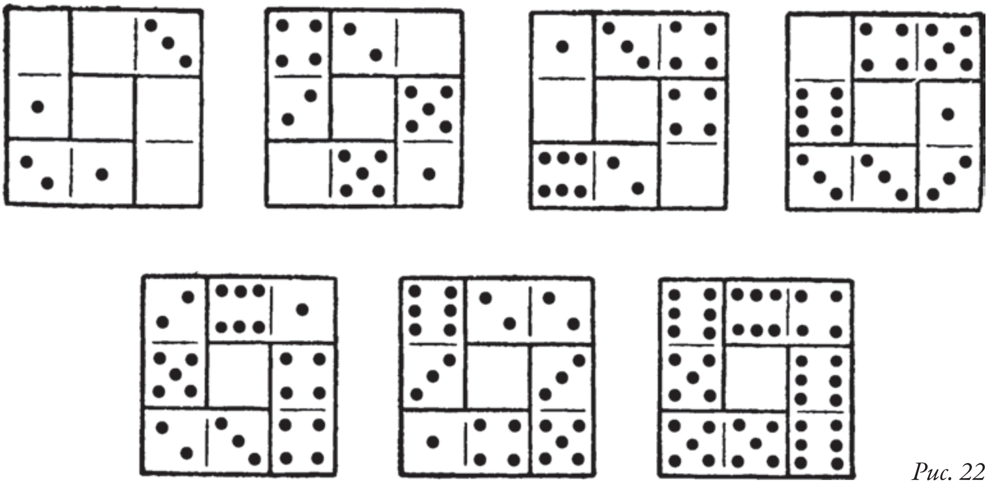


*Рис. 22*

Во втором решении (рис. 23):

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 квадрата с суммою | | | | 4 | 2 квадрата с суммою | | | | 10 |
| 1 | » | » | » | 8 | » | » | » | » | 12 |

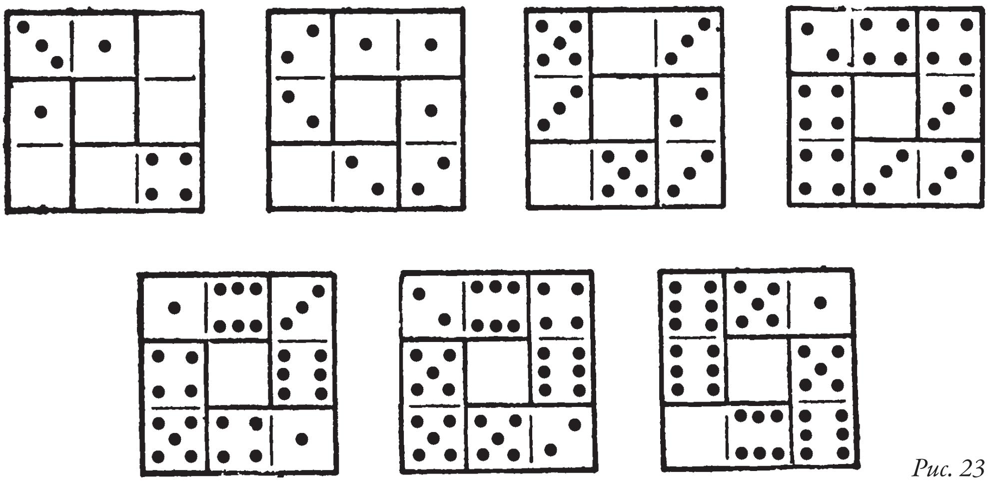


*Рис. 23*

**20.** На рис. 24 дан образчик магического квадрата с суммою очков в ряду 18.

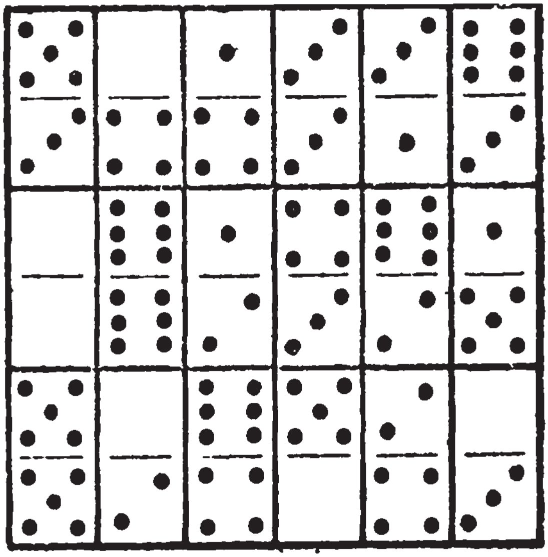


*Рис. 24*

**21.** Вот в виде примера две прогрессии с разностью 2:

a) 0 — 0; 0 — 2; 0 — 4; 0 — 6; 4 — 4 (или 3 — 5); 5 — 5 (или 4 — 6).

b) 0 — 1; 0 — 3 (или 1 — 2); 0 — 5 (или 2 — 3); 1 — 6 (или 3 — 4); 3 — 6 (или 4 — 5); 5 — 6.

Всех 6-косточковых прогрессий можно составить 23. Начальные косточки их следующие:

a) для прогрессий с разностью 1

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 — 0 | 1 — 1 | 2 — 1 | 2 — 2 | 3 — 2 |
| 0 — 1 | 2 — 0 | 3 — 0 | 3 — 1 | 2 — 4 |
| 1 — 0 | 0 — 3 | 0 — 4 | 1 — 4 | 3 — 5 |
| 0 — 2 | 1 — 2 | 1 — 3 | 2 — 3 | 3 — 4 |

b) для прогрессий с разностью 2

0 — 0    0 — 2    0 — 1

**22.** Расположение задачи может быть получено из начального положения следующими 44 ходами:

14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7,
4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9,
12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13,
9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14,
10, 6, 2, 1.

**23.** Расположение задачи достигается следующими 39 ходами:

14, 15, 10, 6, 7, 11, 15, 10, 13, 9,
5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 10, 13,
9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 14,
13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12.

**24.** Магический квадрат с суммою 30 получается после ряда ходов:

12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15,
14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8,
4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6,
5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13,
14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3.

### Крокет

Занимаясь головоломками, относящимися к домино и к игре 15, мы оставались в пределах арифметики. Переходя к головоломкам на крокетной площадке, мы вступаем отчасти в область геометрии.

25. Даже опытный игрок скажет, вероятно, что при указанных условиях пройти ворота легче, чем крокировать: ведь ворота вдвое шире шара. Однако такое представление ошибочно: ворота, конечно, шире, нежели шар, — но свободный проход для шара через ворота вдвое уже, чем мишень для крокировки.

Взгляните на рис. 25, и сказанное станет вам ясно. Центр шара не должен приближаться к проволоке ворот меньше чем на величину радиуса, иначе шар заденет проволоку. Значит, для центра шара останется мишень на два радиуса меньше ширины ворот. Легко видеть, что в условиях нашей задачи ширина мишени при прохождении ворот с наилучшей позиции равна диаметру шара.

Посмотрим теперь, как велика ширина мишени для центра движущегося шара при крокировке. Очевидно, что если центр крокирующего приблизится к центру крокируемого меньше чем на радиус шара, удар обеспечен. Значит, ширина мишени в этом случае, как видно из рис. 26, равна двум диаметрам шара.

Итак, вопреки мнению игроков, при данных условиях *вдвое легче* попасть в шар, нежели свободно пройти ворота с самой лучшей позиции.

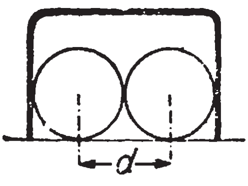



*Рис. 25*

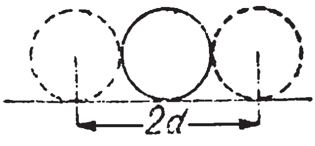



*Рис. 26*

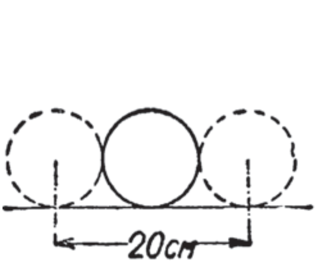



*Рис. 27*

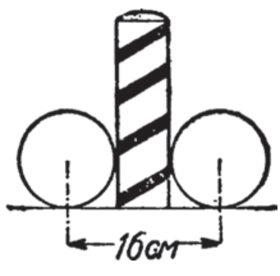



*Рис. 28*

**26.** После сейчас сказанного эта задача не требует долгих разъяснений. Легко видеть (рис. 27), что ширина цели при крокировке равна двум диаметрам шара, т. е. 20 см; ширина же мишени при нацеливании в столбик равна сумме диаметра шара и столбика, т. е. 16 см (рис. 28). Значит, крокировать легче, чем заколоться, в

$$20 : 16 = 1\tfrac{1}{4} \text{ раза},$$

всего на 25%. Игроки же обычно сильно преувеличивают шансы крокировки по сравнению с попаданием в столбик.

**27.** Иной игрок рассудит так: раз ворота вдвое шире, чем шар, а столбик вдвое уже шара, то для свободного прохода ворот мишень *вчетверо* шире, чем для попадания в столбик. Наученный предыдущими задачами, читатель наш подобной ошибки не сделает. Он сообразит, что для прицела в столбик мишень в 1½ раза шире, чем для прохода ворот с наилучшей позиции. Это ясно из рассмотрения рис. 29 и 30.

(Если бы ворота были не прямоугольные, а выгнутые дугой, проход для шара был бы еще уже — как легко сообразить из рассмотрения рис. 31).

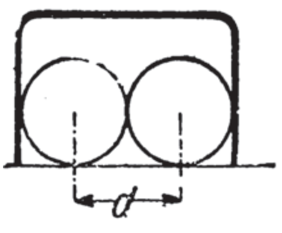



*Рис. 29*

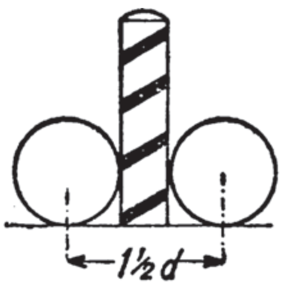



*Рис. 30*

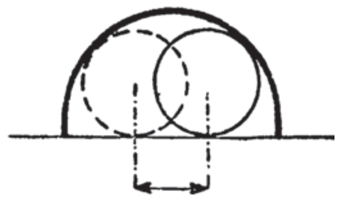


*Рис. 31*

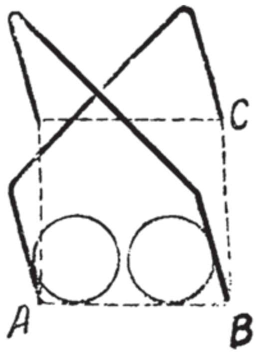



*Рис. 32*

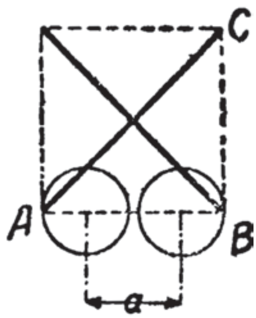



*Рис. 33*

**28.** Из рис. 33 видно, что промежуток *a*, остающийся для прохода центра шара, довольно тесен при указанных в задаче условиях. Знакомые с геометрией знают, что сторона (*AB*) квадрата меньше его диагонали (*AC*) в 1,4 раза. Если ширина ворот $3d$ (где $d$ — диаметр шара), то *AB* равно

$$3d : 1{,}4 = 2{,}1d.$$

Промежуток же *a*, который является мишенью для центра шара, проходящего мышеловку с наилучшей позиции, — еще уже. Он на целый диаметр меньше и равен:

$$2{,}1d - d = 1{,}1d.$$

Между тем, мишень для центра крокирующего шара равна, мы знаем, $2d$. Следовательно, крокировать почти вдвое легче при данных условиях, чем пройти мышеловку.

**29.** Мышеловка становится совершенно непроходимой в том случае, когда ширина ворот превышает диаметр шара менее чем в 1,4 раза. Это вытекает из объяснения, данного в предыдущей задаче. Если ворота дугообразные, условия прохождения еще ухудшаются.

## Глава III

## ЕЩЕ ДЮЖИНА ГОЛОВОЛОМОК

### 30. Веревочка[1]

— Еще веревочку? — спросила мать, вытаскивая руки из лоханки с бельем. — Можно подумать, что я вся веревочная. Только и слышишь: веревочку да веревочку. Ведь я вчера дала тебе порядочный клубок. На что тебе такая уйма? Куда ты ее девал?

— Куда девал бечевку? — отвечал мальчуган. — Во-первых, половину ты сама взяла обратно...

— А чем же прикажешь мне обвязывать пакеты с бельем?

— Половину того, что осталось, взял у меня Том, чтобы удить в канаве колюшек.

— Старшему брату ты всегда должен уступать.

— Я и уступил. Осталось совсем немного, да из того еще папа взял половину для починки подтяжек, которые лопнули у него от смеха, когда случилась беда с автомобилем. А после понадобилось еще сестре взять две пятых оставшегося, чтобы завязать свои волосы узлом...

— Что же ты сделал с остальной бечевкой?

— С остальной? Остальной-то было всего-навсего 30 см! Вот и устраивай телефон из такого обрывка...

Какую же длину имела бечевка первоначально?

---

[1] Эта головоломка принадлежит английскому беллетристу Барри Пэну.

### 31. Число сапог

Сколько штук сапог необходимо заготовить для городка, третья часть обитателей которого — одноногие, а половина остальных предпочитает ходить босиком?

### 32. Долговечность волоса

Сколько в среднем волос на голове человека? Сосчитано: около 150 000. [1] Определено также, сколько их средним числом выпадает в месяц: около 3000.

Как по этим данным высчитать, сколько времени — в среднем, конечно, — держится на голове каждый волос?

### 33. Зарплата

Мой заработок за последний месяц вместе со сверхурочными составляет 250 руб. Основная плата на 200 руб. больше, чем сверхурочные. Как велика моя зарплата без сверхурочных?

### 34. Лыжный пробег

Лыжник рассчитал, что если он станет делать в час 10 км, то прибудет на место назначения часом *позже* полудня; при скорости же 15 км в час он прибыл бы часом *раньше* полудня.

С какой же скоростью должен он бежать, чтобы прибыть на место ровно в полдень?

### 35. Двое рабочих

Двое рабочих, старик и молодой, проживают в одной квартире и работают на одном заводе. Молодой доходит от дома до завода в 20 мин., старый — в 30 мин. Через сколько минут молодой догонит старого, если последний выйдет из дому 5 минутами раньше его?

### 36. Переписка доклада

Переписка доклада поручена двум машинисткам. Более опытная из них могла бы выполнить всю работу в 2 часа, менее опытная — в 3 часа.

Во сколько времени перепишут они этот доклад, если разделят между собою работу так, чтобы выполнить ее в кратчайший срок?

Задачи такого рода обычно решают по образцу знаменитой задачи о бассейнах. А именно: в нашей задаче находят, какую долю всей работы выполняет в час каждая переписчица, складывают обе дроби и делят единицу на эту сумму.

---

[1] Многих удивляет, как могли это узнать: неужели пересчитали один за другим все волосы на голове? Нет, этого не делали, сосчитали лишь, сколько волос на 1 см$^2$ поверхности головы. Зная это и зная поверхность кожи, покрытой волосами, легко уже определить общее число волос на голове. Короче сказать, число волос сосчитано анатомами таким же приемом, каким пользуются лесоводы при пересчете деревьев в лесу.

*Рис. 34. С какой скоростью он должен бежать?*

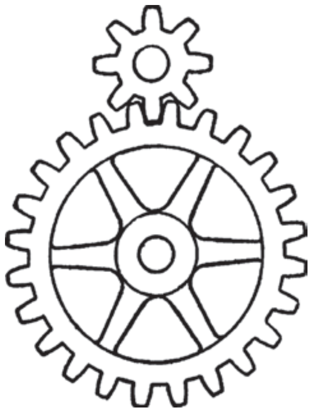


*Рис. 35*

Не можете ли вы придумать новый способ решения подобных задач, отличный от шаблонного?

### 37. Две зубчатки

Шестеренка о 8 зубцах сцеплена с колесом, имеющим 24 зубца (рис. 35). При вращении большего колеса шестеренка обходит кругом него.

Спрашивается, сколько раз обернется шестеренка вокруг своей оси за то время, пока она успеет сделать один полный оборот вокруг большей зубчатки?

### 38. Сколько лет?

У любителя головоломок спросили, сколько ему лет. Ответ был замысловатый:

— Возьмите трижды мои годы через три года да отнимите трижды мои годы три года назад, — у вас как раз и получатся мои годы.

Сколько же ему теперь лет?

### 39. Чета Ивановых

— Сколько лет Иванову?

— Давайте сообразим. Восемнадцать лет назад, в год своей женитьбы, он был, я помню, ровно *втрое* старше своей жены.

— Позвольте, сколько мне известно, он теперь как раз *вдвое* старше своей жены. Это другая жена?

— Та же. И потому нетрудно установить, сколько сейчас лет Иванову и его жене.

Сколько, читатель?

### 40. Игра

Когда мы с товарищем начали игру, у нас было денег поровну. В первый кон я выиграл 20 коп. Во второй я проиграл две трети того, что имел на руках, и тогда у меня оказалось денег вчетверо меньше, чем у товарища.

С какими деньгами мы начали игру?

### 41. Покупки

Отправляясь за покупками, я имел в кошельке около 15 руб. отдельными рублями и двугривенными. Возвратившись, я принес столько отдельных рублей, сколько было у меня первоначально двадцатикопеечных монет, и столько двадцатикопеечных монет, сколько имел я раньше отдельных рублей. Всего же уцелела у меня в кошельке треть той суммы, с какой я отправился за покупками.

Сколько стоили покупки?

## Решения головоломок 30–41

**30.** После того как мать взяла половину, осталась $\frac{1}{2}$; после заимствования старшего брата осталась $\frac{1}{4}$, после отца $\frac{1}{8}$, после сестры $\frac{1}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{40}$. Если 30 см составляют $\frac{3}{40}$ первоначальной длины, то вся длина равна $30 : \frac{3}{40} = 400$ см, или 4 м.

**31.** Так как число жителей городка неизвестно, то ответ на вопрос этой полушуточной головоломки возможен лишь в такой форме, достаточно, впрочем, определенной:

требуется столько штук сапог, сколько в городке жителей.

В самом деле. Пусть число жителей равно $n$. Тогда для снабжения одноногих требуется $n/3$ штук сапог. Из прочих $2n/3$ жителей нуждается в обуви только половина, $n/3$; а так как каждому из этой части населения нужно по два сапога, то им требуется $2n/3$ штук. Всего же для городка следует заготовить

$$\frac{n}{3} + \frac{2n}{3} = n,$$

т. е. столько штук, сколько в городке жителей.

**32.** Позже всего выпадет, конечно, тот волос, который сегодня моложе всех, т. е. возраст которого — 1 день.

Посмотрим же, через сколько времени дойдет до него очередь выпасть. В первый месяц из тех 150 000 волос, которые сегодня имеются на голове, выпадет 3 тысячи, в первые два месяца — 6 тысяч, в течение первого года — 12 раз по 3 тысячи, т. е. 36 тысяч. Пройдет, следовательно, четыре года с небольшим, прежде чем наступит черед выпасть последнему волосу. Так определилась у нас средняя долговечность человеческого волоса: 4 с небольшим года.

**33.** Многие, не подумав, отвечают: 200 р. Это неверно: ведь тогда основная зарплата будет больше сверхурочных только на 150 р., а не на 200.

Задачу нужно решать так. Мы знаем, что если к сверхурочным прибавить 200 р., то получим основную зарплату. Поэтому, если к 250 р. прибавим 200 р., то у нас должны составиться две основных зарплаты. Но 250 + 200 = 450. Значит, двойная основная зарплата составляет 450 р. Отсюда *одна* зарплата без сверхурочных равна 225 р., сверхурочные же составят остальное от 250 р., т. е. 25 р.

Проверим: зарплата, 225 р., больше сверхурочных, т. е. 25 р., на 200 р., — как и требует условие задачи.

**34.** Эта задача любопытна в двух отношениях: во-первых, она легко может внушить мысль, что искомая скорость есть средняя между 10 км и 15 км в час, т. е. равна 12½ км в час. Нетрудно убедиться, что такая догадка неправильна. Действительно, если длина пробега $a$ километров, то при 15-километровой скорости лыжник будет в пути $a/15$ часов, при 10-километровой $a/10$, при 12½-километровой — $a/12{,}5$, или $2a/25$. Но тогда должно существовать равенство

$$\frac{2a}{25}-\frac{a}{15}=\frac{a}{10}-\frac{2a}{25},$$

потому что каждая из этих разностей равна одному часу. Сократив на $a$, имеем

$$\frac{2}{25}-\frac{1}{15}=\frac{1}{10}-\frac{2}{25}$$

или, по свойству арифметической пропорции:

$$\frac{4}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{10},$$

равенство неверное:

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6},\ \text{ т. е. } \frac{4}{24}, \text{ а не } \frac{4}{25}.$$

Вторая особенность задачи та, что она может быть решена не только без помощи уравнений, но даже просто устным расчетом.

Рассуждаем так: если бы при 15-километровой скорости лыжник находился в пути на два часа дольше (т. е. столько же, сколько при 10-километровой), он прошел бы путь на 30 км больший, чем прошел в действительности. В один час, мы знаем, он проходит на 5 км больше; значит, он находился бы в пути 30 : 5 = = 6 час. Отсюда определяется продолжительность пробега при 15-километровой скорости: 6 – 2 = 4 часа. Вместе с тем становится известным и проходимое расстояние: 15 × 4 = 60 км.

Теперь легко уже найти, с какой скоростью должен лыжник идти, чтобы прибыть на место ровно в полдень, — иначе говоря, чтобы употребить на пробег 5 часов:

$$60 : 5 = 12 \text{ км.}$$

Легко убедиться испытанием, что этот ответ правилен.

**35.** Задачу можно решить, не обращаясь к уравнению, и притом различными способами.

Вот первый прием. Молодой рабочий проходит в 5 мин. $\frac{1}{4}$ пути, старый — $\frac{1}{6}$ пути, т. е. меньше, чем молодой, на

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Так как старый опередил молодого на $\frac{1}{6}$ пути, то молодой настигнет его через

$$\frac{1}{6} : \frac{1}{12} = 2$$

пятиминутных промежутка, иначе говоря, через 10 мин.

Другой прием проще. На прохождение всего пути старый рабочий тратит на 10 мин. больше молодого. Выйди старик на 10 мин. раньше молодого, оба пришли бы на завод в одно время. Если старик вышел только на 5 мин. раньше, то молодой должен нагнать его как раз посередине пути, т. е. спустя 10 мин. (весь путь молодой рабочий проходит в 20 мин.).

Возможны еще и другие арифметические решения.

**36.** Нешаблонный путь решения задачи таков. Прежде всего поставим вопрос: как должны машинистки поделить между собою работу, чтобы закончить ее одновременно? (Очевидно, что только при таком условии, т. е. при отсутствии простоя, работа будет выполнена в кратчайший срок.) Так как более опытная машинистка пишет в $1\frac{1}{2}$ раза быстрее менее опытной, то ясно, что доля первой должна быть в $1\frac{1}{2}$ раза больше доли второй — тогда обе кончат писать одновременно. Отсюда следует, что первая должна взяться переписывать $\frac{3}{5}$ доклада, вторая — $\frac{2}{5}$.

Собственно, задача уже почти решена. Остается только найти, во сколько времени первая переписчица выполнит свои $\frac{3}{5}$ работы. Всю работу она может сделать, мы знаем, в 2 часа; значит, $^3/_5$ работы будет выполнено в $2 \times \frac{3}{5} = 1\frac{1}{5}$. В такое же время должна сделать свою долю работы и вторая машинистка.

Итак, кратчайший срок, в какой может быть переписан доклад обеими машинистками, — 1 час 12 мин.

**37.** Если вы думаете, что шестеренка обернется три раза, то ошибаетесь: она сделает не три, а четыре оборота.

Чтобы наглядно уяснить себе, в чем тут дело, положите перед собою на гладком листке бумаги две одинаковые монеты, например два двугривенных, так, как показано на рис. 36. Придерживая рукой нижнюю монету, катите по ее ободу верхнюю. Вы заметите неожиданную вещь: когда верхняя монета обойдет нижнюю наполовину и окажется внизу, она успеет сделать уже полный оборот вокруг своей оси; это будет видно по положению цифр на монете. А обходя неподвижную монету кругом, монета наша успеет обернуться не один, а два раза.

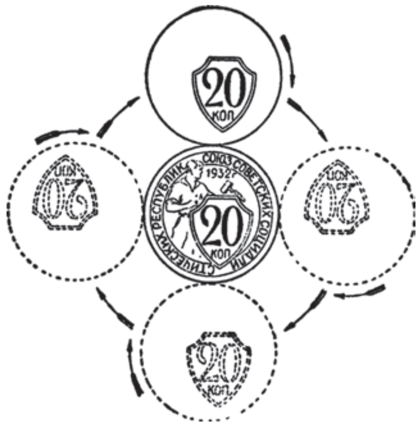


*Рис. 36*

Вообще, когда тело, вертясь, движется по кругу, оно делает одним оборотом больше, чем можно насчитать непосредственно. По той же причине и наш земной шар, обходя вокруг Солнца, успевает обернуться вокруг своей оси не 365 с четвертью, а 366 с четвертью раз, если считать обороты не по отношению к Солнцу, а по отношению к звездам. Вы понимаете теперь, почему звездные сутки короче солнечных.

**38.** Арифметическое решение довольно запутанное, но задача решается просто, если обратиться к услугам алгебры и составить уравнение. Искомое число лет обозначим буквою $x$. Возраст спустя три года надо тогда обозначить через $x + 3$, а возраст три года назад — через $x - 3$. Имеем уравнение

$$3(x + 3) - 3(x - 3) = x,$$

решив которое, получаем $x = 18$. Любителю головоломок теперь 18 лет.

*Проверим*: через три года ему будет 21 год; три года назад ему было 15 лет. Разность

$$3 \times 21 - 3 \times 15 = 63 - 45 = 18,$$

т. е. равна нынешнему возрасту любителя головоломок.

**39.** Как и предыдущая, задача разрешается с помощью несложного уравнения. Если жене теперь $x$ лет, то мужу $2x$. Восемнадцать лет назад каждому из них было на 18 лет меньше: мужу $2x - 18$, жене $x - 18$. При этом известно, что муж был тогда втрое старше жены:

$$3(x - 18) = 2x - 18.$$

Решив это уравнение, получаем $x = 36$: жене теперь 36 лет, мужу 72.

**40.** Пусть в начале игры у каждого было $x$ копеек. После первого кона у одного игрока стало $x + 20$, у другого $x - 20$. После второго кона прежде выигравший партнер потерял ⅔ своих денег; следовательно, у него осталось

$$\tfrac{1}{3}(x + 20).$$

Другой партнер, имевший $x - 20$, получил ⅔ $(x + 20)$; следовательно, у него оказалось

$$x - 20 + \frac{2}{3}(x + 20) = \frac{5x - 20}{3}.$$

Так как известно, что у первого игрока оказалось вчетверо меньше денег, чем у другого, то

$$\frac{2}{3}(x + 20) = \frac{5x - 20}{3},$$

откуда $x = 100$; у каждого игрока было в начале игры по одному рублю.

**41.** Обозначим первоначальное число отдельных рублей через $x$, а число двадцатикопеечных монет через $y$. Тогда, отправляясь за покупками, я имел в кошельке денег

$$100x + 20y \text{ коп.}$$

Возвратившись, я имел

$$100y + 20x \text{ коп.}$$

Последняя сумма, мы знаем, втрое меньше первой; следовательно,

$$3(100y + 20x) = 100x + 20y.$$

Упрощая это выражение, получаем

$$x = 7y.$$

Если $y = 1$, то $x = 7$. При таком допущении у меня первоначально было денег 7 р. 20 коп.; это не вяжется с условием задачи («около 15 рублей»).

Испытаем $y = 2$; тогда $x = 14$. Первоначальная сумма равнялась 14 р. 40 коп., что хорошо согласуется с условием задачи.

Допущение $y = 3$ дает слишком большую сумму денег: 21 р. 60 коп.

Следовательно, единственный подходящий ответ — 14 р. 40 коп. После покупок осталось 2 отдельных рубля и 14 двугривенных, т. е. $200 + 280 = 480$ коп.; это действительно составляет треть первоначальной суммы ($1440 : 3 = 480$).

Израсходовано же было $1440 - 480 = 960$. Значит, стоимость покупок 9 руб. 60 коп.

## Глава IV

## УМЕЕТЕ ЛИ ВЫ СЧИТАТЬ?

Вопрос, пожалуй, даже обидный для человека старше трехлетнего возраста. Кто не умеет считать? Чтобы произносить подряд «один», «два», «три», — особого искусства не требуется. И все же, я уверен, вы не всегда хорошо справляетесь с таким, казалось бы, простым делом. Все зависит от того, что́ считать. Нетрудно пересчитать гвозди в ящике. Но пусть в нем лежат не одни только гвозди, а вперемешку гвозди с винтами; требуется установить, сколько тех и других отдельно. Как вы тогда поступите? Разберете груду на гвозди и винты отдельно, а затем пересчитаете их?

Такая задача возникает и перед хозяйкой, когда ей приходится считать белье для стирки. Она раскладывает сначала белье по сортам: сорочки в одну кучу, полотенца — в другую, наволочки — в третью и т. д. И лишь провозившись с этой довольно утомительной работой, приступает она к счету штук в каждой кучке.

Вот это и называется не уметь считать! Потому что такой способ счета неоднородных предметов довольно неудобен, хлопотлив, а зачастую даже и вовсе неосуществим. Хорошо, если вам приходится считать гвозди или белье: их легко раскидать по кучкам. Но поставьте себя в положение лесовода, которому необходимо сосчитать, сколько на гектаре растет сосен, сколько на том же участке елей, сколько берез и сколько осин. Тут уж рассортировать деревья, сгруппировать их предварительно по породам — нельзя. Что же, вы станете считать сначала только сосны, потом только ели, потом одни березы, затем осины? Четыре раза обойдете участок?

Нет ли способа сделать это проще, *одним* обходом участка? Да, такой способ есть, и им издавна пользуются работники леса. Покажу, в чем он состоит, на примере счета гвоздей и винтов.

Чтобы в один прием сосчитать, сколько в коробке гвоздей и сколько винтов, не разделяя их сначала по сортам, запаситесь карандашом и листком бумаги, разграфленным по такому образцу:

| Гвоздей | Винтов |
|---|---|
| | |

Затем начинайте счет. Берите из коробки первое, что попадется под руку. Если это гвоздь, вы делаете на листке бумаги черточку в графе гвоздей; если винт — отмечаете его черточкой в графе винтов. Берете вторую вещь и поступаете таким же образом. Берете третью вещь и т. д., пока не опорожнится весь ящик. К концу счета на бумажке окажется в графе гвоздей столько черточек, сколько было в коробке гвоздей, а в графе винтов — столько черточек, сколько было винтов. Остается только подытожить черточки на бумаге.

Счет черточек можно упростить и ускорить, если не ставить их просто одну под другой, а собирать по пяти в такие, например, фигурки какие изображены на рис. 37.

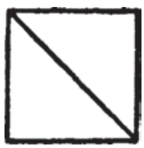


*Рис. 37*

Квадратики этого вида лучше группировать парами, т. е. после первых 10 черточек ставить 11-ю в новую колонку; когда во второй колонке вырастут 2 квадрата, начинают следующий квадрат в третьей колонке и т. д. Черточки будут располагаться тогда примерно в таком виде, как показано на рис. 38.

Считать так расположенные черточки очень легко: вы сразу видите, что тут три полных десятка, один пяток и еще три черточки, т. е. всего 30 + 5 + 3 = 38.

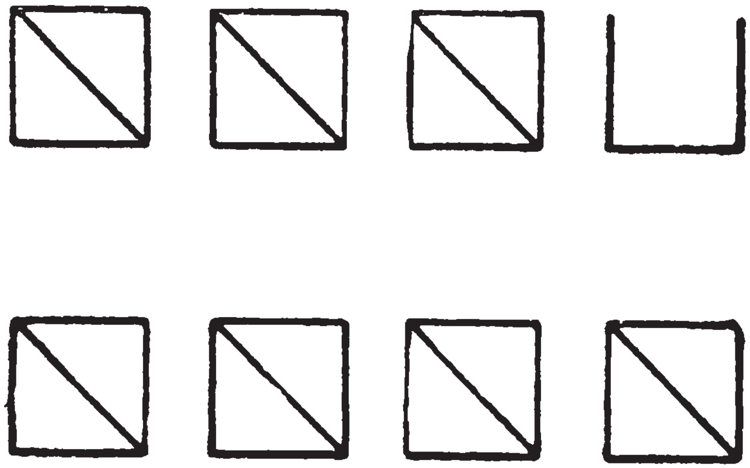


*Рис. 38*

Можно пользоваться фигурками и иного вида; часто, например, употребляют такие значки, где каждый полный квадратик означает 10 (рис. 39).

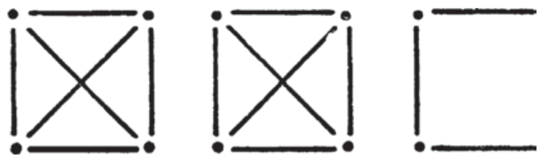


*Рис. 39*

При счете деревьев разных пород на участке леса вы должны поступить совершенно таким же образом, но на листке бумаги у вас будут уже не две графы, а четыре. Удобнее здесь иметь графы не стоячие, а лежачие. До подсчета листок имеет, следовательно, такой вид, как на рис. 40.

| | |
|---|---|
| Сосен | |
| Елей | |
| Берез | |
| Осин | |

*Рис. 40. Бланк для подсчета деревьев в лесу*

В конце же подсчета получается на листке, примерно, то, что показано на рис. 41.

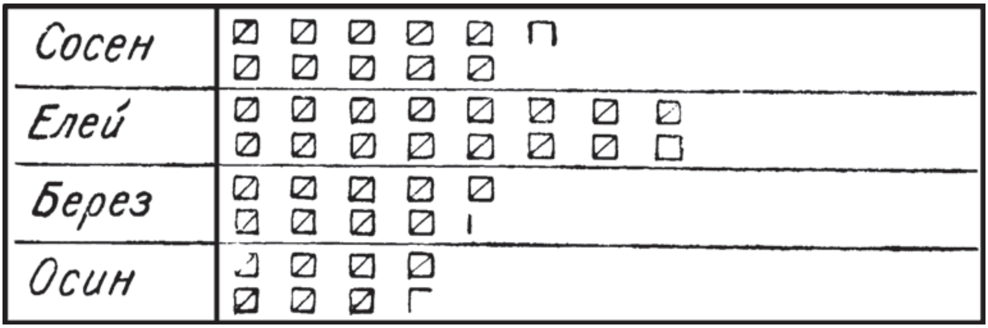



*Рис. 41. Вид бланка (рис. 40) после подсчета*

Подвести окончательный итог здесь очень легко:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Сосен ........... | 53 | Берез ........... | 46 |
| Елей ............ | 79 | Осин ........... | 37 |

Тем же приемом счета пользуется и медик, считая под микроскопом, сколько во взятой пробе крови оказывается красных шариков и сколько белых.

Составляя список белья для стирки, хозяйка может поступить таким же образом, сберегая труд и время.

Если вам понадобится сосчитать, например, какие растения и в каком числе растут на небольшом участке луга, вы уже будете знать, как справиться с этой задачей в возможно короткий срок. На листке бумаги вы заранее выпишете названия замеченных растений, отведя для каждого особую графу и оставив несколько свободных граф про запас для тех растений, которые вам могут еще попасться. Вы начнете подсчет с такой, например, бумажкой, какая указана на рис. 42.

Дальше поступают так же, как и при подсчете на участке леса.

Для чего, собственно, надо считать деревья в лесу? Городским жителям это представляется даже и вовсе невозможным делом. В романе Л. Н. Толстого «Анна Каренина» знаток сельского хозяйства Левин спрашивает своего несведущего в этом деле родственника, собирающегося продать лес:

— Счел ли ты деревья?

— Как счесть деревья? — с удивлением отвечает тот. — Сочесть пески, лучи планет хотя и мог бы ум высокий...

— Ну да, а ум высокий Рябинина (купца) может. И ни один мужик не купит, не считая.

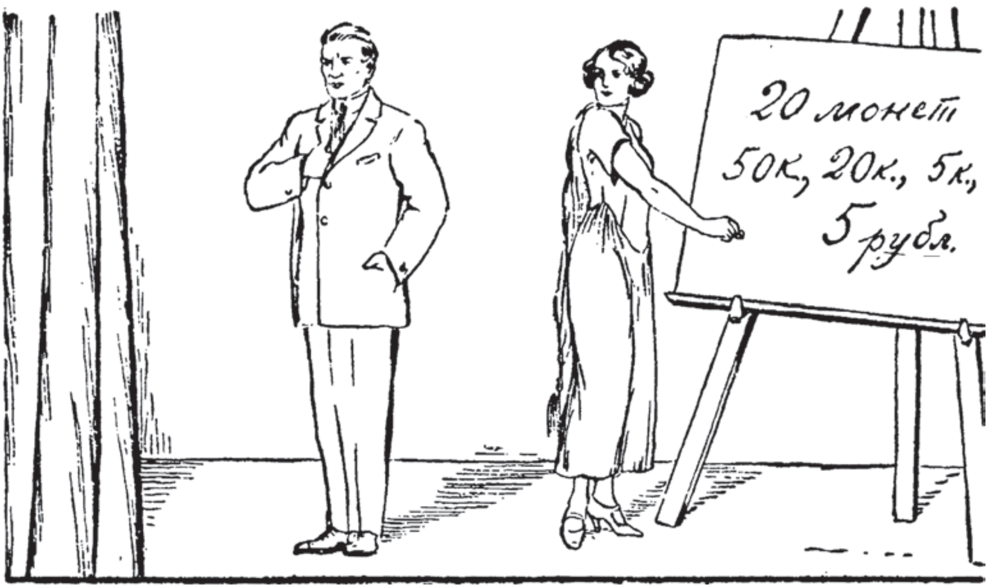
Деревья в лесу считают для того, чтобы определить, сколько в нем кубических метров древесины. Пересчитывают деревья не всего леса, а определенного

| | |
|---|---|
| Одуванчиков | |
| Лютиков | |
| Подорожн. | |
| Звездчаток | |
| Пастушьей сумки | |

*Рис. 42. Как начинать счет растений на участке луга*

участка в четверть или половину гектара, выбранного так, чтобы густота, состав, толщина и высота его деревьев были средние в данном лесу. Для удачного выбора такой «пробной площади» нужно, конечно, иметь опытный глаз. При подсчете недостаточно определять число деревьев каждой породы; необходимо еще знать, сколько имеется стволов каждой толщины: сколько 25-сантиметровых, сколько 33-сантиметровых, 35-сантиметровых и т. д. В счетной ведомости окажется поэтому не четыре только графы, как в нашем упрощенном примере, а гораздо больше. Вы можете представить себе теперь, какое множество раз пришлось бы обойти лес, если бы считать деревья обычным путем, а не так, как здесь объяснено.

Как видите, счет является простым и легким делом только тогда, когда считают предметы *однородные*. Если же надо приводить в известность число разнородных предметов, то приходится пользоваться особыми, объясненными сейчас приемами, о существовании которых многие и не подозревают.




Глава V

## ЧИСЛОВЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ

### 42. За пять рублей — сто

Один эстрадный счетчик на своих сеансах делал публике следующее заманчивое предложение:

— Объявляю при свидетелях, что плачу 100 рублей каждому, кто даст мне 5 рублей двадцатью монетами — полтинниками, двугривенными и пятаками. Сто рублей за пять! Кто желает?

Воцарялось молчание. Публика погружалась в размышление. Карандаши бегали по листкам записных книжек, — но ответного предложения не поступало.

— Публика, я вижу, находит 5 рублей слишком высокой платой за сторублевый билет. Извольте, я готов скинуть два рубля и назначаю пониженную цену: 3 рубля двадцатью монетами названного достоинства. Плачу 100 рублей за 3! Желающие, составляйте очередь!

Но очередь не выстраивалась. Публика явно медлила воспользоваться редким случаем.

— Неужели и 3 рубля дорого? Хорошо, понижаю сумму еще на рубль: уплатите указанными двадцатью монетами всего только 2 рубля, и я немедленно вручу предъявителю сто рублей.

Так как никто не выражал готовности совершить обмен, счетчик продолжал:

— Может быть, у вас нет при себе мелких денег? Не стесняйтесь этим, я поверю в долг. Дайте мне только на бумажке реестрик, сколько монет каждого достоинства вы обязуетесь доставить.

Со своей стороны, я также готов уплатить сто рублей каждому читателю, который пришлет мне на бумаге соответствующий реестр. Корреспонденцию направлять по адресу издательства на мое имя.

### 43. Тысяча

Можете ли вы число 1000 выразить девятью одинаковыми цифрами? (Кроме цифр, разрешается пользоваться также знаками действий.)

### 44. Двадцать четыре

Очень легко число 24 выразить тремя восьмерками: 8 + 8 + 8. Но можете ли вы сделать то же, пользуясь не восьмерками, а другими тремя одинаковыми цифрами? Задача имеет не одно решение.

### 45. Тридцать

Число тридцать легко выразить тремя пятерками: 5 × 5 + 5. Труднее сделать это тремя другими одинаковыми цифрами. Попробуйте. Может быть, вам удастся отыскать несколько решений?

### 46. Недостающие цифры

В этом примере умножения больше половины цифр заменено звездочками:

$$\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} *1* \\ 3*2 \end{array} \\
\hline
*3* \\
3*2*\phantom{0} \\
*2*5\phantom{00} \\
\hline
1*8*30
\end{array}$$

Можете ли вы восстановить недостающие цифры?

### 47. Какие числа?

Вот еще задача такого же рода. Требуется установить, какие числа перемножаются в примере:

$$\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} **5 \\ 1** \end{array} \\
\hline
2**5 \\
13*0\phantom{0} \\
***\phantom{00} \\
\hline
4*77*
\end{array}$$

### 48. Что делили?

Восстановите недостающие цифры в таком примере деления:

```
*2*5* | 325
***   | 1**
-----
*0**
*9**
-----
 *5*
 *5*
-----
```

### 49. Деление на 11

Напишите какое-нибудь девятизначное число, в котором нет повторяющихся цифр (все цифры разные) и которое делится без остатка на 11.

Напишите наибольшее из таких чисел.

Напишите наименьшее из таких чисел.

### 50. Странные случаи умножения

Рассмотрите такой случай умножения двух чисел:

$$48 \times 159 = 7632.$$

Он замечателен тем, что в нем участвуют по одному разу все девять значащих цифр.

Можете ли вы подобрать еще несколько таких примеров? Сколько их, если они вообще существуют?

### 51. Числовой треугольник

В кружках этого треугольника (рис. 43) расставьте все девять значащих цифр так, чтобы сумма их на каждой стороне составляла 20.

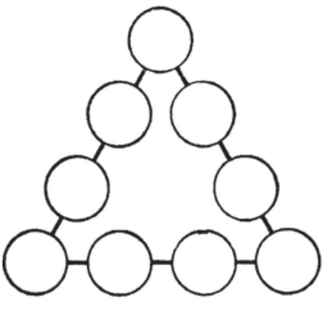


*Рис. 43*

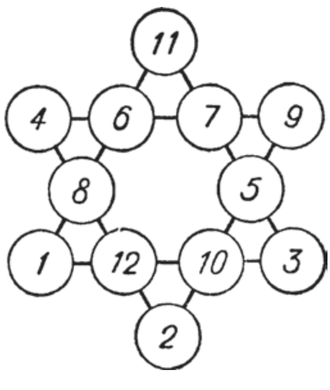



*Рис. 44*

### 52. Еще числовой треугольник

Все значащие цифры разместить в кружках того же треугольника (рис. 43) так, чтобы сумма их на каждой стороне равнялась 17.

### 53. Магическая звезда

Шестиконечная числовая звезда, изображенная на рис. 44, обладает «магическим» свойством: все шесть рядов чисел имеют одну и ту же сумму

$$\begin{aligned} 4 + 6 + 7 + 9 &= 26 \\ 4 + 8 + 12 + 2 &= 26 \\ 9 + 5 + 10 + 2 &= 26 \\ 11 + 6 + 8 + 1 &= 26 \\ 11 + 7 + 5 + 3 &= 26 \\ 1 + 12 + 10 + 3 &= 26 \end{aligned}$$

Но сумма чисел, расположенных на вершинах звезды, другая:

$$4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30.$$

Не удастся ли вам усовершенствовать эту звезду, расставив числа в кружках так, чтобы не только прямые ряды давали одинаковые суммы (26), но чтобы ту же сумму, 26, составляли числа на вершинах звезды?

### Решение головоломок 42–53

**42.** Все три задачи неразрешимы; и счетчик, и я могли безбоязненно обещать за их решения любую премию. Чтобы в этом удостовериться, обратимся к языку алгебры и рассмотрим задачи одну за другой.

1) *Уплата 5 рублей*. Предположим, что уплата возможна и что для этого понадобилось $x$ полтинников, $y$ двугривенных и $z$ пятаков. Имеем уравнение:

$$50x + 20y + 5z = 500.$$

Сократив на 5, получаем:

$$10x + 4y + z = 100.$$

Кроме того, так как общее число монет по условию равно 20, то $x$, $y$ и $z$ связаны еще и другим уравнением:

$$x + y + z = 20.$$

Вычтя это уравнение из первого, получаем:

$$9x + 3y = 80.$$

Разделив на 3, приводим уравнение к виду:

$$3x + y = 26\tfrac{2}{3}.$$

Но $3x$, тройное число полтинников, есть, конечно, число целое. Число двугривенных, $y$, также целое. Сумма же двух целых чисел не может оказаться числом дробным ($26\frac{2}{3}$). Наше предположение о разрешимости этой задачи приводит, как видите, к нелепости. Значит, задача неразрешима.

Подобным же образом читатель убедится в неразрешимости двух других, «удешевленных» задач: с уплатою 3-х и 2-х рублей. Первая приводит к уравнению

$$3x + y = 13\tfrac{1}{3},$$

вторая — к уравнению

$$3x + y = 6\tfrac{2}{3}.$$

То и другое в целых числах не разрешимо.

Как видите, ни счетчик, ни я нисколько не рисковали, предлагая крупные суммы за решение этих задач: выдать премий никогда не придется.

Другое дело было бы, если бы требовалось уплатить двадцатью монетами названного достоинства не 5, не 3 и не 2 р., а, например, 4 р.: тогда задача легко решалась бы, и даже семью различными способами[1].

**43.** $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000$.

**44.** Вот два решения:

$$22 + 2 = 24; \qquad 3^3 - 3 = 24.$$

**45.** Приводим три решения:

$$6 \times 6 - 6 = 30; \quad 3^3 + 3 = 30; \quad 33 - 3 = 30.$$

**46.** Недостающие цифры восстанавливаются постепенно, если применить следующий ход рассуждений.

Для удобства пронумеруем строки:

$$\begin{array}{rl}
{*}\,1\,{*} & \ldots\ldots\ \mathrm{I} \\
\underline{3\,{*}\,2} & \ldots\ldots\ \mathrm{II} \\
{*}\,3\,{*} & \ldots\ldots\ \mathrm{III} \\
3\,{*}\,2\,{*}\phantom{0} & \ldots\ldots\ \mathrm{IV} \\
\underline{{*}\,2\,{*}\,5\phantom{00}} & \ldots\ldots\ \mathrm{V} \\
1\,{*}\,8\,{*}\,30 & \ldots\ldots\ \mathrm{VI}
\end{array}$$

Легко сообразить, что последняя звездочка в III строке цифр есть 0: это ясно из того, что 0 стоит в конце VI строки.

[1] Вот одно из возможных решений: 6 полтинников, 2 двугривенных и 12 пятаков.

Теперь определяется значение последней звездочки I строки: это — цифра, которая от умножения на 2 дает число, оканчивающееся нулем, а от умножения на 3 — число, оканчивающееся 5 (V ряд). Цифра такая только одна — 5.

Нетрудно догадаться, что скрывается под звездочкой II строки: 8, потому что только при умножении на 8 цифра 5 дает результат, оканчивающийся 20 (IV строка).

Наконец, становится ясным значение первой звездочки строки I: это цифра 4, потому что только 4, умноженное на 8, дает результат, начинающийся на 3 (строка IV).

Узнать остальные неизвестные цифры теперь не составляет никакой трудности: достаточно перемножить числа первых двух строк, уже вполне определившиеся.

В конечном итоге получаем такой пример умножения:

$$\begin{array}{r} \times\, 415 \\ \underline{382} \\ 830 \\ 3320\phantom{0} \\ \underline{1245\phantom{00}} \\ 158530 \end{array}$$

**47.** Подобным сейчас примененному ходом рассуждений раскрываем значение звездочек и в этом случае.

Получаем:

$$\begin{array}{r} \times\, 325 \\ \underline{147} \\ 2275 \\ 1300\phantom{0} \\ \underline{325\phantom{00}} \\ 47775 \end{array}$$

**48.** Вот искомый случай деления:

$$\begin{array}{l|l} 52650 & \underline{325} \\ \underline{325} & 162 \\ 2015 & \\ \underline{1950} & \\ \phantom{0}650 & \\ \underline{\phantom{0}650} & \end{array}$$

**49.** Чтобы решить эту задачу, надо знать признак делимости на 11. Число делится на 11, если разность между суммою цифр, стоящих на четных местах, и суммою цифр, стоящих на нечетных местах, делится на 11 или равна нулю.

Испытаем, для примера, число 23658904.

Сумма цифр, стоящих на четных местах:

$$3 + 5 + 9 + 4 = 21,$$

сумма цифр, стоящих на нечетных местах:

$$2 + 6 + 8 + 0 = 16.$$

Разность их (надо вычитать из большего меньшее) равна:

$$21 - 16 = 5.$$

Эта разность (5) не делится на 11; значит, и взятое число не делится без остатка на 11.

Испытаем другое число — 7344535:

$$\begin{aligned} 3 + 4 + 3 &= 10 \\ 7 + 4 + 5 + 5 &= 21 \\ 21 - 10 &= 11. \end{aligned}$$

Так как 11 делится на 11, то и испытуемое число кратно 11.

Теперь легко сообразить, в каком порядке надо писать девять цифр, чтобы получилось число, кратное 11 и удовлетворяющее требованиям задачи.

Вот пример:

$$352049786.$$

Испытаем:

$$\begin{aligned} 3 + 2 + 4 + 7 + 6 &= 22 \\ 5 + 0 + 9 + 8 &= 22 \end{aligned}$$

Разность 22 – 22 = 0; значит, написанное нами число кратно 11.

Наибольшее из всех таких чисел есть:

987652413.

Наименьшее: 102347586.

**50.** Терпеливый читатель может разыскать девять случаев такого умножения. Вот они:

$$\begin{aligned} 12 \times 483 &= 5796 \\ 42 \times 138 &= 5796 \\ 18 \times 297 &= 5346 \\ 27 \times 198 &= 5346 \\ 39 \times 186 &= 7254 \\ 48 \times 159 &= 7632 \\ 28 \times 157 &= 4396 \\ 4 \times 1738 &= 6952 \\ 4 \times 1963 &= 7852 \end{aligned}$$

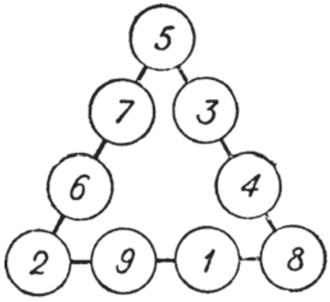



*Рис. 45*

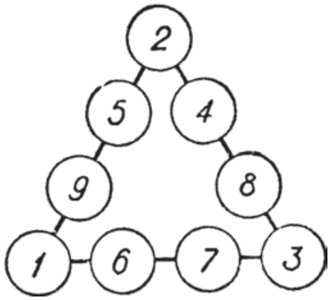



*Рис. 46*

**51–52.** Решения показаны на прилагаемых рисунках 45 и 46. Средние цифры каждого ряда можно переставить и получить таким образом еще ряд решений.

**53.** Чтобы облегчить себе отыскание требуемого расположения чисел, будем руководствоваться следующими соображениями.

Сумма чисел на концах искомой звезды равна 26; сумма же всех чисел звезды 78. Значит, сумма чисел внутреннего шестиугольника равна 78 − 26 = = 52.

Рассмотрим затем один из больших треугольников. Сумма чисел каждой его стороны равна 26; сложим числа всех трех сторон — получим 26 × 3 = 78, причем каждое из чисел, стоящих на углах, входит дважды. А так как сумма чисел трех внутренних пар (т. е. внутреннего шестиугольника) должна, мы знаем, равняться 52, то удвоенная сумма чисел на вершинах каждого треугольника равна 78 − 52 = 26; однократная же сумма = 13.

Поле поисков теперь заметно сузилось. Мы знаем, например, что ни 12, ни 11 не могут занимать вершины звезды (почему?). Значит, испытания можно начинать с 10, причем сразу определяется, какие два числа должны занимать остальные вершины треугольника 1 и 2.

Подвигаясь таким путем далее, мы наконец разыщем требуемое расположение. Оно показано на рис. 47.

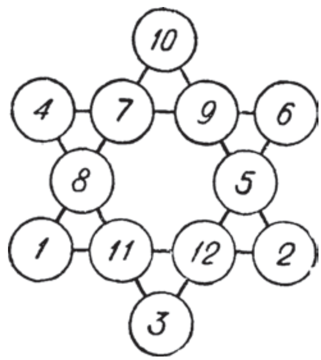



*Рис. 47*

## Глава VI

# СЕКРЕТНАЯ ПЕРЕПИСКА ПОДПОЛЬЩИКОВ

Революционер-подпольщик вынужден вести свои записи и переписку с товарищами таким образом, чтобы никто из посторонних не мог понять написанного. Для этого пользуются особым способом письма, называемым «тайнописью» (или «криптографией»). Придуманы разные системы тайнописи; к их услугам прибегают не одни подпольщики, но также дипломаты и военные для сохранения государственных тайн. Расскажем далее об одном из способов ведения секретной переписки, именно о так называемом способе «решетки». Он принадлежит к числу сравнительно простых и тесно связан с арифметикой.

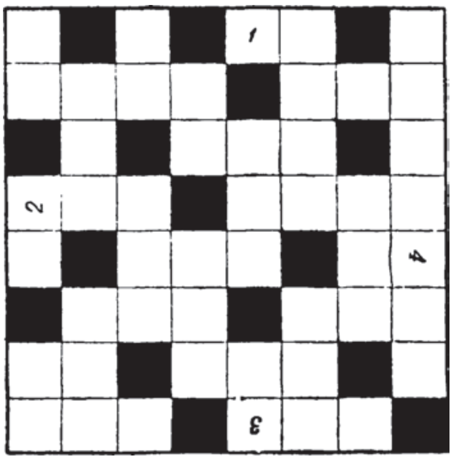



*Рис. 48. Решетка для тайной переписки. (Сделайте такую из бумаги и прочтите секретную запись рис. 52)*

Желающие вести тайную переписку по этому способу запасаются каждый «решеткой», т. е. бумажным квадратиком с прорезанными в нем окошечками. Образчик решетки вы видите на рис. 48. Окошечки размещены не произвольно, а в определенном порядке, который станет ясен вам из дальнейшего.

Пусть требуется послать товарищу такую записку: «*Собрание делегатов района отмените. Полиция кем-то предупреждена. Антон*».

Наложив решетку на листок бумаги, подпольщик пишет сообщение букву за буквой в окошечках решетки. Так как окошек 16, то сначала помещается только часть записки:

*Собрание делегато...*

Сняв решетку, мы увидим запись, представленную на рис. 49.

Здесь, разумеется, ничего засекреченного пока нет: каждый легко поймет, в чем дело. Но это только начало; записка в таком виде не останется. Подпольщик поворачивает решетку «по часовой стрелке» на четверть оборота, т. е. располагает ее на том же листке так, что цифра 2, бывшая раньше сбоку, теперь оказывается вверху. При новом положении решетки все раньше написанные буквы заслонены, а в окошечках появляется чистая бумага. В них пишут следующие 16 букв секретного сообщения. Если теперь убрать решетку, получим запись, показанную на рис. 50.

Такую запись не поймет не только посторонний человек, но и сам писавший, если позабудет текст своего сообщения.

Но записана пока только половина сообщения, именно: «*Собрание делегатов района отмените. П...*»

Чтобы писать дальше, надо вновь повернуть решетку на четверть оборота по часовой стрелке. Она закроет все написанное и откроет новые 16 свободных клеток. В них найдут себе место еще несколько слов, и записка приобретет вид рис. 51.

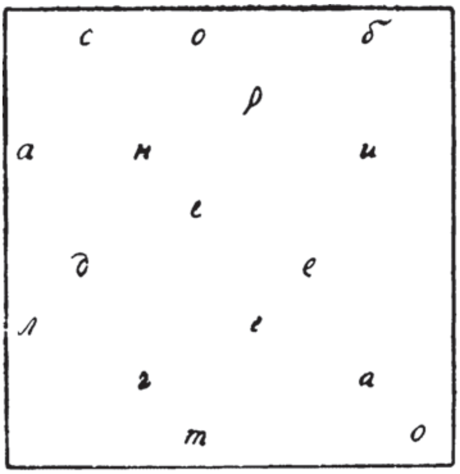


*Рис. 49*

*Рис. 50*

*Как пишут секретное письмо с помощью решетки*


*Рис. 51*


*Рис. 52*

Наконец делается последний поворот решетки, цифрой 4 вверх, и в открывшиеся 16 чистых квадратиков вписывают окончание записки. Так как остаются три неиспользованные клетки, их заполняют буквами *а*, *б*, *в*, — просто для того, чтобы в записке не оказалось пробелов. Письмо имеет вид, представленный на рис. 52.

Попробуйте в нем что-нибудь разобрать! Пусть записка попадет в руки полиции, пусть полицейские сколько угодно подозревают, что в ней скрыто важное сообщение, — догадаться о содержании записки они не смогут.

Никто из посторонних не разберет в ней ни единого слова. Прочесть ее в состоянии только адресат, имеющий в руках точно такую же решетку, как и та, которой пользовался отправитель.

Как же прочтет адресат это секретное письмо? Он наложит свою решетку на текст, обратив ее цифрой 1 вверх, и выпишет те буквы, которые появятся в окошечках. Это будут первые 16 букв сообщения. Затем повернет решетку — и перед ним предстанут следующие 16 букв. После четвертого поворота вся секретная записка будет прочтена.

Вместо квадратной решетки можно пользоваться и прямоугольной в форме почтовой карточки с широкими окошечками (рис. 53). В окошечки такой решетки вписывают не отдельные буквы, а части слов, даже целые слова, если они помещаются. Не думайте, что запись окажется тогда более разборчивой. Нисколько! Хотя отдельные слоги и слова видны, но перемешаны они в таком нелепом беспорядке, что секрет достаточно надежно сохранен. Продолговатую решетку кладут сначала одним краем вверх, потом противоположным; после этого переворачивают ее на левую сторону и снова пользуются в двух положениях. В каждом новом положении решетка закрывает все написанное раньше.

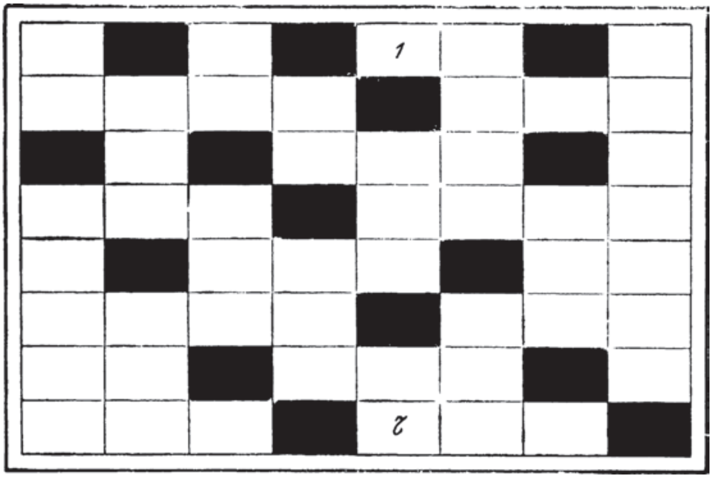



*Рис 53. Решетка в форме почтовой карточки*

Если бы возможна была только одна решетка, то способ переписки с ее помощью никуда не годился бы в смысле секретности. В руках полиции, конечно, имелась бы эта единственная решетка, и тайна немедленно раскрывалась бы. Но в том-то и дело, что число различных решеток чрезвычайно велико, и догадаться, какая именно была употреблена в дело, совершенно невозможно.

Все решетки, какие можно изготовить для 64-клеточного квадрата, отмечены на рис. 54. Вы можете выбрать для окошечек любые 16 клеток, заботясь лишь о том, чтобы в числе взятых клеток не было двух с одинаковыми номерами. Для той решетки, которой мы пользовались сейчас, взяты были следующие номера клеток:

2, 4, 5
14
9, 11, 7
16
8, 15
3, 12
10, 6
13, 1

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 13 | 9 | 5 | 1 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 14 | 10 | 6 | 2 |
| 9 | 10 | 11 | 12 | 15 | 11 | 7 | 3 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 16 | 12 | 8 | 4 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 16 | 15 | 14 | 13 |
| 3 | 7 | 11 | 15 | 12 | 11 | 10 | 9 |
| 2 | 6 | 10 | 14 | 8 | 7 | 6 | 5 |
| 1 | 5 | 9 | 13 | 4 | 3 | 2 | 1 |

*Рис. 54. Свыше 4000 миллионов секретных решеток в одном квадрате*

| | |
|---|---|
| I | II |
| III | IV |

*Рис. 55. Схема к рис. 54*

Как видите, ни один номер не повторяется.

Понять систему расположения цифр в квадрате рис. 56 нетрудно. Он делится поперечными линиями на 4 меньших квадрата, которые обозначим для удобства римскими цифрами I, II, III, IV (рис. 55). В I квадрате клетки перенумерованы в обычном порядке. Квадрат II — тот же квадрат I, только повернутый на четверть оборота вправо. Повернув его еще на четверть оборота, получаем квадрат III; при следующей четверти оборота получается квадрат IV.

Подсчитаем теперь математически, сколько может существовать разных решеток. Клетку № 1 можно взять (в качестве окошка) в 4-х местах. В каждом случае можно присоединить клетку № 2, взяв ее также в 4-х местах. Следовательно, два окошка можно наметить 4 × 4, т. е. 16 способами. Три окошка — 4 × 4 × 4 = 64 способами. Рассуждая таким образом, устанавливаем, что 16 окошек можно набрать 416 способами (произведение 16 четверок). Число это превышает 4000 миллионов. Если даже считать наш расчет преувеличенным на несколько сот миллионов (так как неудобно пользоваться решетками с примыкающими друг к другу окошечками, и эти случаи надо исключить), то все же остается несколько тысяч миллионов решеток, — целый океан, в котором нет надежды отыскать именно ту, какая требуется. Полиции не одолеть такого числового великана.

Само собою разумеется, оба участника переписки должны быть начеку, чтобы их решетка не попала в посторонние руки. Лучше всего вовсе не хранить решеток, а вырезывать их при получении письма и уничтожать тотчас по прочтении. Но как запомнить расположение окошек? Здесь снова приходит нам на помощь математика. Будем обозначать окошки цифрою 1, прочие же клетки решетки цифрою 0. Тогда первый ряд клеток решетки получит такое обозначение:

01010010

или, отбросив передний нуль, —

1010010.

Второй ряд, если отбросить в нем передние нули, обозначится так:

1000.

Прочие ряды получают следующие обозначения:

10100010
10000
1000100
10001000
100010
10001

Чтобы упростить запись этих чисел, будем считать, что они написаны не по десятичной системе, которою обычно пользуются, а по «двоичной». Это значит, что единица, стоящая справа, больше соседней не в 10 раз, а только в 2 раза. Единица в конце числа означает, как обычно, простую единицу; единица на предпоследнем месте означает двойку; на третьем с конца — четверку; на четвертом — восьмерку; на пятом — 16 и т. д. При таком понимании число 1010010, обозначающее расположение окошек первого ряда, заключает простых единиц

$$64 + 16 + 2 = 82,$$

потому что нули указывают на отсутствие единиц данного разряда.

Число 1000 (второй ряд) заменится в десятичной системе числом 8.

Остальные числа нужно будет заменить следующими:

$$\begin{aligned} 128 + 32 + 2 &= 162 \\ &\phantom{=}\ 16 \\ 64 + 4 &= \ \ 68 \\ 128 + 8 &= 136 \\ 32 + 2 &= \ \ 34 \\ 16 + 1 &= \ \ 17 \end{aligned}$$

Запомнить же числа: 82, 8, 162, 16, 68, 136, 34, 17 не так уж трудно. А зная их, всегда можно получить ту первоначальную группу чисел, из которой они получены и которые прямо указывают расположение окошек в решетке.

Как это делается, покажем на примере первого числа — 82. Разделим его на два, чтобы узнать, сколько в нем двоек; получим 41; остатка нет, — значит,

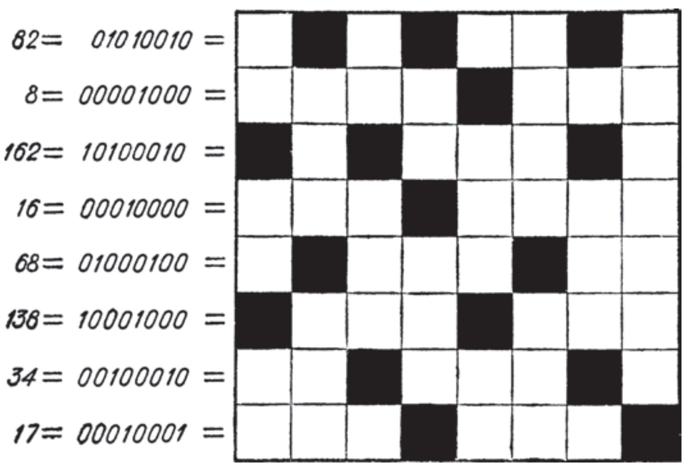



*Рис. 56. Арифметизация секретной решетки*

на последнем месте, в разряде простых единиц, должно быть 0. Полученное число двоек, 41, делим на 2, чтобы узнать, сколько в нашем числе четверок:

41 : 2 = 20, остаток 1.

Это значит, что в разряде двоек, т. е. на предпоследнем месте, имеется цифра 1.

Далее, делим 20 на 2, чтобы узнать, сколько в нашем числе восьмерок:

20 : 2 = 10.

Остатка нет, — значит, на месте четверок стоит 0.

Делим 10 на 2; получаем 5 без остатка: на месте восьмерок — 0.

От деления 5 : 2 получаем 2 и в остатке 1: в разряде 16-к цифра 1. Наконец делим 2 на 2 и узнаем, что в числе — одна 64-ка: в этом разряде должна быть 1, а в разряде

32-к — 0.

Итак, все цифры искомого числа определились:

1010010.

Так как здесь всего 7 цифр, а в каждом ряду решетки 8 клеток, то ясно, что один нуль впереди был опущен, и расположение окошек в первом ряду определяется цифрами:

01010010;

т. е. окошки имеются на 2-м, 4-м и 7-м местах.

Так же восстанавливается расположение окошек и в прочих рядах.

Существует, как было сказано, множество разных систем тайнописи. Мы остановились на решетке потому, что она близко соприкасается с математикой и лишний раз доказывает, как разнообразны те стороны жизни, куда заглядывает эта наука.

## Глава VII

## РАССКАЗЫ О ЧИСЛАХ-ВЕЛИКАНАХ

### 1. Выгодная сделка

Когда и где происходила эта история — неизвестно. Возможно, что и вовсе не происходила; даже скорее всего, что так. Но быль это или небылица, история достаточно занятна, чтобы ее послушать.

#### I

Богач-миллионер возвратился из отлучки необычайно радостный: у него была в дороге счастливая встреча, сулившая большие выгоды.

«Бывают же такие удачи, — рассказывал он домашним. — Неспроста, видно, говорят, что деньга на деньгу набегает. Вот и на мою деньгу денежка бежит. И как неожиданно! Повстречался мне в пути незнакомец, из себя невидный. Мне бы и разговаривать с ним не пристало, да он сам начал, как проведал, что у меня достаток есть. И такое к концу разговора предложил выгодное дельце, что у меня дух захватило.

— Сделаем, — говорит, — такой уговор. Я буду целый месяц приносить тебе ежедневно по сотне тысяч рублей. Не даром, разумеется, но плата пустяшная. В первый день я должен по уговору заплатить — смешно вымолвить — всего только одну копейку.

Я ушам не верил:

— Одну копейку? — переспрашиваю.

— Одну копейку, — говорит. — За вторую сотню тысяч заплатишь 2 копейки.

— Ну, — не терпится мне. — А дальше?

*Рис. 57. «Всего только одну копейку ...»*

— А дальше: за третью сотню тысяч 4 копейки, за четвертую 8, за пятую — 16. И так целый месяц, каждый день вдвое больше против предыдущего.

— И потом что? — спрашиваю.

— Все, — говорит, — больше ничего не потребую. Только крепко держать уговор: каждое утро буду носить по сотне тысяч рублей, а ты плати, что сговорено. Раньше месяца кончать не смей.

Сотни тысяч рублей за копейки отдает! Если деньги не фальшивые, то не в полном уме человек. Однако же дело выгодное, упускать не надо.

— Ладно, — говорю. — Неси деньги. Я-то свои уплачу аккуратно. Сам, смотри, не обмани: правильные деньги приноси.

— Будь покоен, — говорит; — завтра с утра жди.

Одного только боюсь: придет ли? Как бы не спохватился, что слишком невыгодное дело затеял! Ну, до завтра недолго ждать».

## II

Прошел день. Рано утром постучал богачу в окошко тот самый незнакомец, которого он встретил в дороге.

— Деньги готовь, — говорит. — Я свои принес.

*Рис. 58. «Постучал в окошко незнакомец...»*

И действительно, войдя в комнату, странный человек стал выкладывать деньги — настоящие, не фальшивые. Отсчитал ровно сто тысяч и говорит:

— Вот мое по уговору. Твой черед платить.

Богач положил на стол медную копейку и с опаской дожидался, возьмет гость монету или раздумает, деньги свои назад потребует.

Посетитель осмотрел копейку, взвесил в руке и спрятал в суму.

— Завтра в такое же время жди. Да не забудь, две копейки припаси, — сказал он и ушел.

Богач не верил удаче: сто тысяч с неба свалилось! Снова пересчитал деньги, удостоверился хорошенько, что не фальшивые: все правильно. Запрятал деньги подальше и стал ждать завтрашней уплаты.

Ночью взяло его сомнение: не разбойник ли простаком прикинулся, хочет поглядеть, куда деньги прячут, да потом и нагрянуть с шайкой лихих людей?

Запер богач двери покрепче, с вечера в окно поглядывал, прислушивался, долго заснуть не мог.

Наутро снова стук в окно: незнакомец деньги принес. Отсчитал сто тысяч, получил свои две копейки, спрятал монету в суму и ушел, бросив на прощанье:

— К завтрашнему четыре копейки, смотри, приготовь.

Снова радуется богач: вторая сотня тысяч даром досталась. А гость на грабителя не похож: по сторонам не глядит, не высматривает, свои только копейки требует. Чудак! Побольше бы таких на свете, умным людям хорошо бы жилось...

*Рис. 59. «Сто тысяч с неба свалилось!»*

Явился незнакомец и на третий день — третья сотня тысяч перешла к богачу за 4 копейки.

Еще день, и таким же манером явилась четвертая сотня тысяч — за 8 копеек.

Пришла и пятая сотня тысяч — за 16 копеек.

Потом шестая — за 32 копейки.

Спустя семь дней от начала сделки получил наш богач уже семьсот тысяч рублей, а уплатил пустяки:

$$1 \text{ коп.} + 2 \text{ коп.} + 4 \text{ коп.} + \\ + 8 \text{ коп.} + 16 \text{ коп.} + 32 \text{ коп.} + \\ + 64 \text{ коп.} = 1 \text{ р. } 27 \text{ коп.}$$

Понравилось это алчному миллионеру, и он уже стал сожалеть, что договорился всего на один только месяц. Больше трех миллионов получить не удастся. Склонить разве чудака продлить срок еще хоть на полмесяца? Боязно: как бы не сообразил, что зря деньги отдает...

А незнакомец аккуратно являлся каждое утро со своей сотней тысяч. На 8-й день получил он 1 р. 28 коп., на 9-й — 2 р. 56 коп., на 10-й — 5 р. 12 коп., на 11-й — 10 р. 24 коп., на 12-й — 20 р. 48 коп., на 13-й — 40 р. 96 коп., на 14-й — 81 р. 92 коп.

Богач охотно платил эти деньги: ведь он получил уже один миллион 400 тысяч рублей, а отдал незнакомцу всего около полутораста рублей.

Недолго, однако, длилась радость богача: скоро стал он соображать, что странный гость не простак и что сделка с ним вовсе не так выгодна, как казалось сначала. Спустя 15 дней приходилось за очередные сотни тысяч платить уже не копейки, а сотни рублей, и плата страшно быстро нарастала. В самом деле, богач уплатил во второй половине месяца:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| за 15-ую | сотню | тысяч | ..... | 163 р. | 84 коп. |
| » 16 » | » | » | ..... | 327 » | 68 » |
| » 17 » | » | » | ..... | 655 » | 36 » |
| » 18 » | » | » | ..... | 1310 » | 72 » |
| » 19 » | » | » | ..... | 2621 » | 44 » |

Впрочем, богач считал себя еще далеко не в убытке: хотя и уплатил больше пяти тысяч, зато получил 1800 тысяч.

Прибыль, однако, с каждым днем уменьшалась, притом все быстрее и быстрее.

Вот дальнейшие платежи:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| за 20-ую | сотню | тысяч | ..... | 5 242 р. | 88 коп. |
| » 21 » | » | » | ..... | 10 485 » | 76 » |
| » 22 » | » | » | ..... | 20 971 » | 52 » |
| » 23 » | » | » | ..... | 41 943 » | 04 » |
| » 24 » | » | » | ..... | 83 886 » | 08 » |
| » 25 » | » | » | ..... | 167 772 » | 16 » |
| » 26 » | » | » | ..... | 335 544 » | 32 » |
| » 27 » | » | » | ..... | 671 088 » | 64 » |

Платить приходилось уже больше, чем получать. Тут бы и остановиться, да нельзя ломать договора.

*Рис. 60. «Незнакомец перехитрил его...»*

Дальше пошло еще хуже. Слишком поздно убедился миллионер, что незнакомец жестоко перехитрил его и получит куда больше денег, чем сам уплатит...

Начиная с 28-го дня богач должен был уже платить миллионы. А последние два дня его вконец разорили. Вот эти огромные платежи:

За 28-ую сотню тысяч . . . . 1 342 177 р. 28 коп.
» 29 » » » . . . . 2 684 354 » 56 »
» 30 » » » . . . . 5 368 709 » 12 »

Когда гость ушел в последний раз, миллионер подсчитал, во что обошлись ему столь дешевые на первый взгляд три миллиона рублей. Оказалось, что уплачено было незнакомцу

10 737 418 р. 23 коп.

Без малого 11 миллионов!.. А ведь началось с одной копейки. Незнакомец мог бы приносить даже по три сотни тысяч и все-таки не прогадал бы.

### III

Прежде чем кончить с этой историей, покажу, каким способом можно ускорить подсчет убытков нашего миллионера; другими словами — как скорее всего выполнить сложение ряда чисел:

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 \text{ и т. д.}$$

Нетрудно подметить следующую особенность этих чисел:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 \\
2 &= 1 + 1 \\
4 &= (1 + 2) + 1 \\
8 &= (1 + 2 + 4) + 1 \\
16 &= (1 + 2 + 4 + 8) + 1 \\
32 &= (1 + 2 + 4 + 8 + 16) + 1, \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Мы видим, что каждое число этого ряда равно всем предыдущим, вместе взятым, плюс одна единица. Поэтому, когда нужно сложить все числа такого ряда, например от 1 до 32768, то мы прибавляем лишь к последнему числу (32768) сумму всех предыдущих, иначе сказать — прибавляем то же последнее число без единицы (32768 – 1). Получаем 65535.

Этим способом можно подсчитать убытки нашего миллионера очень быстро, как только узнаем, сколько уплатил он в последний раз. Его последний платеж был 5 368 709 р. 12 коп. Поэтому, сложив 5 368 709 р. 12 коп. и 5 368 709 р. 11 коп., получаем сразу искомый результат:

10 737 418 р. 23 коп.

## 2. Городские слухи

Удивительно, как быстро разбегаются по городу слухи! Иной раз не пройдет и двух часов со времени какого-нибудь происшествия, которое видело всего несколько человек, а новость облетела уже весь город: все о ней знают, все слыхали.

Необычайная быстрота эта кажется поразительной, прямо загадочной.

Однако если подойти к делу с подсчетом, то станет ясно, что ничего чудесного здесь нет: все объясняется свойствами чисел, а не таинственными особенностями самих слухов.

Для примера рассмотрим хотя бы такой случай.

### I

В провинциальный город с 50-тысячным населением приехал в 8 час. утра житель столицы и привез свежую, всем интересную новость. В гостинице, где приезжий остановился, он сообщил новость только трем местным жителям; эта заняло, скажем, четверть часа.

Итак в 8¼ час. утра новость была известна в городе всего только четверым: приезжему и трем местным жителям.

Узнав интересную новость, каждый из трех граждан поспешил рассказать ее 3 другим. Это потребовало, допустим, также четверти часа. Значит спустя полчаса после прибытия новости в город о ней знало уже

$$4 + (3 \times 3) = 13 \text{ человек.}$$

*Рис. 61. «Житель столицы привез интересную новость...»*

*Рис. 62. «Каждый рассказал новость трем другим»*

Каждый из 9 вновь узнавших поделился в ближайшие четверть часа с 3 другими гражданами, так что к $8\frac{3}{4}$ часам утра новость стала известна $13 + (3 \times 9) = 40$ гражданам.

Если слух распространяется по городу и далее таким же способом, т. е. каждый, узнавший про новость, успевает в ближайшие четверть часа сообщить ее 3 согражданам, то осведомление города будет происходить по следующему расписанию:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| в 9 | час. новость | узнают | $40 + (3 \times 27) =$ | 121 чел |
| в $9\frac{1}{4}$ | » | » | $121 + (3 \times 81) =$ | 364 » |
| в $9\frac{1}{2}$ | » | » | $364 + (3 \times 243) =$ | 1093 » |

Спустя полтора часа после первого появления в городе новости ее будут знать, как видим, всего около 1100 человек. Это, казалось бы, немного для населения в 50 000. Можно подумать, что новость не скоро еще станет известна всем жителям. Проследим, однако, далее за распространением слуха:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| в $9\frac{3}{4}$ | » | » | $1093 + (3 \times 729) =$ | 3280 чел |
| в 10 | » | » | $3280 + (3 \times 2187) =$ | 9841 » |


*Рис. 63. «В 10½ все жители города будут осведомлены»*

Еще спустя четверть часа будет уже осведомлено больше половины города:

$$9841 + (3 \times 6561) = 29\,524.$$

И, значит, ранее чем в половине одиннадцатого дня поголовно все жители большого города будут осведомлены о новости, которая в 8 час. утра известна была только одному человеку.

## II

Проследим теперь, как выполнен был предыдущий подсчет. Он сводился, в сущности, к тому, что мы сложили такой ряд чисел:

$$1 + 3 + (3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3 \times 3) \text{ и т. д.}$$

Нельзя ли узнать эту сумму как-нибудь короче, наподобие того, как определяли мы раньше сумму чисел ряда 1 + 2 + 4 + 8 и т. д? Это возможно, если принять в соображение следующую особенность складываемых здесь чисел:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1 \times 2 + 1 \\ 9 &= (1 + 3) \times 2 + 1 \\ 27 &= (1 + 3 + 9) \times 2 + 1 \\ 81 &= (1 + 3 + 9 + 27) \times 2 + 1 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Иначе говоря: каждое число этого ряда равно удвоенной сумме всех предыдущих чисел плюс единица.

Отсюда следует, что если нужно найти сумму всех чисел нашего ряда от 1 до какого-либо числа, то достаточно лишь прибавить к этому последнему числу его половину (предварительно откинув в последнем числе единицу). Например, сумма чисел

$$1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729$$

равна 729 + половина от 728, т. е. 729 + 364 = 1093.

## III

В нашем случае каждый житель, узнавший новость, передавал ее только трем гражданам. Но если бы жители города были еще разговорчивее и сообщали услышанную новость не 3, а, например, 5 или даже 10 другим, слух

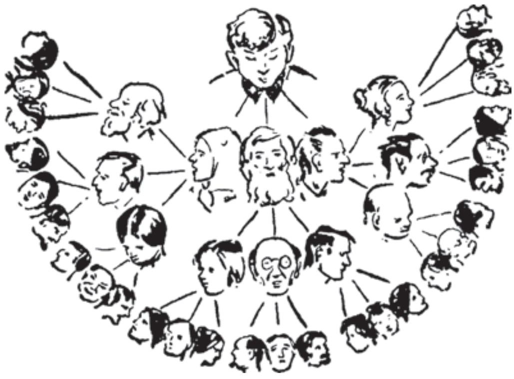


*Рис. 64. Путь распространения слуха*

распространялся бы, конечно, гораздо быстрее. При передаче, например, пятерым картина осведомления города была бы такая:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| в 8 | час | .... | 1 чел. | | |
| » 8¼ | » | .... | 1 + 5 | = | 6 чел |
| » 8½ | » | .... | 6 + (5 × 5) | = | 31 » |
| » 8¾ | » | .... | 31 + (25 × 5) | = | 156 » |
| » 9 | » | .... | 156 + (125 × 5) | = | 781 » |
| » 9¼ | » | .... | 781 + (625 × 5) | = | 3906 » |
| » 9½ | » | .... | 3906 + (3125 × 5) | = | 19 531 » |

Ранее чем в 9¾ часа утра новость будет уже известна всему 50-тысячному населению города.

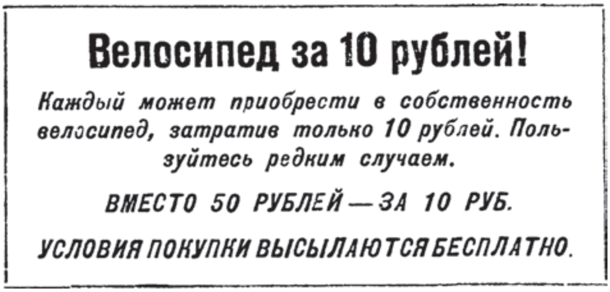
Еще быстрее распространится слух, если каждый услышавший новость передаст о ней 10 другим. Тогда получим такой любопытный, быстро возрастающий ряд чисел:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| в 8 | час ........................ | | | 1 |
| » 8¼ | » | 1 + 10 | = | 11 |
| » 8½ | » | 11 + 100 | = | 111 |
| » 8¾ | » | 111 + 1000 | = | 1 111 |
| » 9 | » | 1111 + 10 000 | = | 11 111 |

Следующее число этого ряда, очевидно, 111 111 — это показывает, что весь город узнает про новость уже в самом начале 10-го часа утра. Слух разнесется почти в один час!

### 3. Лавина дешевых велосипедов

В дореволюционные годы были у нас, — а за рубежом, вероятно, и теперь еще находятся — предприниматели, которые прибегают к довольно оригинальному способу сбывать свой товар, обычно посредственного качества. Начинали с того, что в распространенных газетах и журналах печатали рекламу такого содержания:




Немало людей, конечно, соблазнялись заманчивым объявлением и просили прислать условия необычной покупки. В ответ на запрос они получали подробный проспект, из которого узнавали следующее.

За 10 руб. высылался пока не самый велосипед, а только 4 билета, которые надо было сбыть по 10 руб. своим четверым знакомым. Собранные таким образом 40 руб. следовало отправить фирме, и тогда лишь прибывал велосипед; значит, он обходился покупателю действительно всего в 10 руб., остальные 40 руб. уплачивались ведь не из его кармана. Правда, кроме уплаты 10 руб. наличными деньгами приобретатель велосипеда имел некоторые хлопоты по продаже билетов среди знакомых, — но этот маленький труд в счет не шел.

Что же это были за билеты? Какие блага приобретал их покупатель за 10 руб.? Он получал право обменять их у фирмы на 5 таких же билетов; другими словами, он приобретал возможность собрать 50 руб. для покупки велосипеда, который ему обходился, следовательно, только в 10 руб., т. е. в стоимость билета. Новые обладатели билетов в свою очередь получали от фирмы по 5 билетов для дальнейшего распространения, и т. д.

На первый взгляд во всем этом не было обмана. Обещание рекламного объявления исполнялось: велосипед в самом деле обходился покупателям всего лишь в 10 руб. Да и фирма не оказывалась в убытке, — она получала за свой товар полную его стоимость.

А между тем вся затея — несомненное мошенничество. «Лавина», как называли эту аферу у нас, или «снежный ком», как величали ее французы, — вовлекала в убыток тех многочисленных ее участников, которым не удавалось сбыть дальше купленные ими билеты. Они-то и уплачивали фирме разницу между 50-рублевой стоимостью велосипедов и 10-рублевой платой за них. Рано ли, поздно ли, но неизбежно наступал момент, когда держатели билетов не могли найти охотников их приобрести. Что так должно непременно случиться, вы поймете, дав себе труд проследить с карандашом в руке за тем, как стремительно возрастает число людей, вовлекаемых в лавину.

Первая группа покупателей, получившая свои билеты прямо от фирмы, находит покупателей обычно без особого труда; каждый член этой группы снабжает билетами четверых новых участников.

Эти четверо должны сбыть свои билеты 4 × 5, т. е. 20 другим, убедив их в выгодности такой покупки. Допустим, что это удалось и 20 покупателей завербовано.

Лавина движется дальше. 20 новых обладателей билетов должны наделить ими 20 × 5 = 100 других.

До сих пор каждый из «родоначальников» лавины втянул в нее

$$1 + 4 + 20 + 100 = 125 \text{ человек,}$$

из которых 25 имеют по велосипеду, а 100 — только надежду его получить, уплатив за эту надежду по 10 руб.

Теперь лавина выходит уже из тесного круга знакомых между собою людей и начинает растекаться по городу, где ей становится, однако, все труднее и труднее отыскивать свежий материал. Сотня последних обладателей билетов должна снабдить такими же билетами 500 граждан, которым в свою очередь придется завербовать 2500 новых жертв. Город быстро наводняется билетами, и отыскивать охотников приобрести их становится весьма нелегким делом.

Вы видите, что число людей, втянутых в лавину, растет по тому же самому закону, с которым мы встретились, когда беседовали о распространении слухов. Вот числовая пирамида, которая в этом случае получается:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 4 \\ 20 \\ 100 \\ 500 \\ 2\,500 \\ 12\,500 \\ 62\,500 \end{array}$$

Если город велик и все его население, способное сидеть на велосипеде, составляет 62½ тысячи, то в рассматриваемый момент, т. е. на 8 «туре», лавина должна иссякнуть. Все оказались втянутыми в нее. Но обладает велосипедами только пятая часть, у остальных же ⁴⁄₅ имеются на руках билеты, которые некому сбыть.

Для города с более многочисленным населением, даже для современного столичного центра, насчитывающего миллионы жителей, момент насыщения наступит всего несколькими турами позднее, потому что числа лавины растут с неимоверной быстротой. Вот следующие ярусы нашей числовой пирамиды:

312 500
1 562 500
7 812 500
39 062 500

На 12-м туре лавина, как видите, могла бы втянуть в себя население целого государства. И 4/5 этого населения будет обмануто устроителями лавины.

Подведем итог тому, чего, собственно, достигает фирма устройством лавины. Она принуждает 4/5 населения оплачивать товар, приобретаемый остальною 1/5 частью населения; иными словами — заставляет четырех граждан благодетельствовать пятого. Совершенно безвозмездно приобретает фирма, кроме того, многочисленный штат усердных распространителей ее товара. Правильно охарактеризовал эту аферу один из наших писателей[1] как «лавину взаимного объегоривания». Числовой великан, невидимо скрывающийся за этой затеей, наказывает тех, кто не умеет воспользоваться арифметическим расчетом для ограждения собственных интересов от посягательства аферистов.

### 4. Награда

#### I

Вот что, по преданию, произошло много веков назад в древнем Риме[2].

Полководец Теренций по приказу императора совершил победоносный поход и с трофеями вернулся в Рим. Прибыв в столицу, он просил допустить его к императору.

Император ласково принял полководца, сердечно благодарил его за военные услуги империи и обещал в награду дать высокое положение в сенате.

Но Теренцию нужно было не это. Он возразил:

— Много побед одержал я, чтобы возвысить твое могущество, государь, и окружить имя твое славой. Я не страшился смерти, и будь у меня не одна, а много жизней, я все их принес бы тебе в жертву. Но я устал воевать; прошла молодость, кровь медленнее бежит в моих жилах. Наступила пора отдохнуть в доме моих предков и насладиться радостями домашней жизни.

— Что же желал бы ты от меня, Теренций? — спросил император.

— Выслушай со снисхождением, государь! За долгие годы военной жизни, изо дня в день обагряя меч свой кровью, я не успел устроить себе денежного благополучия. Я беден, государь...

— Продолжай, храбрый Теренций.

— Если хочешь даровать награду скромному слуге твоему, — продолжал ободренный полководец, — то пусть щедрость твоя поможет мне дожить

[1] И. И. Ясинский.

[2] Рассказ в вольной передаче заимствован из старинной латинской рукописи, принадлежащей одному из частных книгохранилищ Англии.

мирно в достатке годы подле домашнего очага. Я не ищу почестей и высокого положения во всемогущем сенате. Я желал бы удалиться от власти и от жизни общественной, чтобы отдохнуть на покое. Государь, дай мне денег для обеспечения остатка моей жизни.

Император — гласит предание — не отличался широкой щедростью. Он любил копить деньги для себя и скупо тратил их на других. Просьба полководца заставила его задуматься.

— Какую же сумму, Теренций, считал бы ты для себя достаточной? — спросил он.

— Миллион динариев, государь.

Снова задумался император. Полководец ждал, опустив голову. Наконец император заговорил:

— Доблестный Теренций! Ты великий воин, и славные подвиги твои заслужили щедрой награды. Я дам тебе богатство. Завтра в полдень ты услышишь здесь мое решение.

Теренций поклонился и вышел.

## II

На следующий день в назначенный час полководец явился во дворец императора.

— Привет тебе, храбрый Теренций! — сказал император.

Теренций смиренно наклонил голову.

— Я пришел, государь, чтобы выслушать твое решение. Ты милостиво обещал вознаградить меня.

Император ответил:

— Не хочу, чтобы такой благородный воитель, как ты, получил за свои подвиги жалкую награду. Выслушай же меня. В моем казначействе лежит 5 миллионов медных брассов[1]. Теперь внимай моим словам. Ты войдешь в казначейство, возьмешь одну монету в руки, вернешься сюда и положишь ее к моим ногам. На другой день вновь пойдешь в казначейство, возьмешь монету, равную 2 брассам, и положишь здесь рядом с первой. В третий день принесешь монету, стоящую 4 брасса, в четвертый — стоящую 8 брассов, в пятый — 16, и так далее, все удваивая стоимость монеты. Я прикажу ежедневно изготовлять для тебя монеты надлежащей ценности. И пока хватит у тебя сил поднимать монеты, будешь ты выносить их из моего казначейства. Никто не вправе помогать тебе; ты должен пользоваться только собственными силами. И когда заметишь, что не можешь уже больше поднять монету — остановись: уговор наш кончится, но все монеты, которые удалось тебе вынести, останутся твоими и послужат тебе наградой.

Жадно впивал Теренций каждое слово императора. Ему чудилось огромное множество монет, одна больше другой, которые вынесет он из государственного казначейства.

---

[1] Мелкая монета, пятая часть динария.

— Я доволен твоею милостью, государь, — ответил он с радостной улыбкой. — Поистине щедра награда твоя!

## III

Начались ежедневные посещения Теренцием государственного казначейства. Оно помещалось невдалеке от приемной залы императора, и первые переходы с монетами не стоили Теренцию никаких усилий.

В первый день вынес он из казначейства всего один брасс. Это небольшая монета, 21 мм в поперечнике и 5 г весом[1].

Легки были также второй, третий, четвертый, пятый и шестой переходы, когда полководец выносил монеты двойного, тройного, 8-кратного, 16-кратного и 32-кратного веса.

Седьмая монета весила на наши современные меры 320 граммов и имела в поперечнике 8½ см (точнее, 84 мм)[2].

*Рис. 65. Первая монета*

*Рис 66. Седьмая монета*

*Рис. 67. Девятая монета*

[1] Вес пятикопеечной монеты современной чеканки.

[2] Если монета по объему в 64 раза больше обычной, то она шире и толще всего в 4 раза, потому что 4 × 4 × 4 = 64. Это надо иметь в виду и в дальнейшем при расчете размеров монет, о которых говорится в рассказе.

На восьмой день Теренцию пришлось вынести из казначейства монету, соответствовавшую 128 единичным монетам. Она весила 640 г и была шириною около 10½ см.

На девятый день Теренций принес в императорскую залу монету в 256 единичных монет. Она имела 13 см в ширину и весила более 1¼ кг.

На двенадцатый день монета достигла почти 27 см в поперечнике и весила 10¼ кг.

Император, до сих пор смотревший на полководца приветливо, теперь не скрывал своего торжества. Он видел, что сделано уже 12 переходов, а вынесено из казначейства всего только 2000 с небольшим медных монеток.

Тринадцатый день доставил храброму Теренцию монету, равную 4 096 единичным монетам. Он имела около 34 см в ширину, а вес ее равнялся 20½ кг.

На четырнадцатый день Теренций вынес из казначейства тяжелую монету в 41 кг весом и около 42 см шириною.

— Не устал ли ты, мой храбрый Теренций? — спросил его император, сдерживая улыбку.

*Рис. 68. Одиннадцатая монета*

*Рис. 69. Тринадцатая монета*

*Рис. 70. Пятнадцатая монета*

— Нет, государь мой, — хмуро ответил полководец, стирая пот со лба.

Наступил пятнадцатый день. Тяжела была на этот раз ноша Теренция. Медленно брел он к императору, неся огромную монету, составленную из 16 384 единичных монет. Она достигала 53 см в ширину и весила 80 кг — вес рослого воина.

На шестнадцатый день полководец шатался под ношей, лежавшей на его спине. Это была монета, равная 32 768 единичным монетам и весившая 164 кг, поперечник ее достигал 67 см.

Полководец был обессилен и тяжело дышал. Император улыбался...

Когда Теренций явился в приемную залу императора на следующий день, он был встречен громким смехом. Он не мог уже нести свою ношу в руках, а катил ее впереди себя. Монета имела в поперечнике 84 см и весила 328 кг.

Она соответствовала весу 65 536 единичных монет.

Восемнадцатый дань был последним днем обогащения Теренция. В этот день кончились его посещения казначейства и странствования с ношей в залу императора. Ему пришлось доставить на этот раз монету, соответствовавшую 131 072 единичным монетам. Она имела более метра в поперечнике и весила 655 кг. Пользуясь своим копьем как рычагом, Теренций с величайшим напряжением сил едва вкатил ее в залу. С грохотом упала исполинская монета к ногам императора.

*Рис. 71. Шестнадцатая монета*

*Рис. 72. Семнадцатая монета*

*Рис. 73. Восемнадцатая монета*

Теренций был совершенно измучен.

— Не могу больше... Довольно, — прошептал он.

Император с трудом подавил смех удовольствия, видя полный успех своей хитрости. Он приказал казначею исчислить, сколько всего брассов вынес Теренций в приемную залу.

Казначей исполнил поручение и сказал:

— Государь, благодаря твоей щедрости, победоносный воитель Теренций получил в награду 262 143 брасса.

Итак, скупой император дал полководцу около 20-й части той суммы в миллион динариев, которую просил Теренций.

Проверим расчет казначея, а заодно и вес монет. Теренций вынес:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| в | 1-й день | .... | 1 | брасс | весом | 5 г |
| на | 2 | » .... | 2 | » | » | 10 » |
| » | 3 | » .... | 4 | » | » | 20 » |
| » | 4 | » .... | 8 | » | » | 40 » |
| » | 5 | » .... | 16 | » | » | 80 » |
| » | 6 | » .... | 32 | » | » | 160 » |
| » | 7 | » .... | 64 | » | » | 320 » |
| » | 8 | » .... | 128 | » | » | 640 » |
| » | 9 | » .... | 256 | » | » | 1 кг 280 » |
| » | 10 | » .... | 512 | » | » | 2 кг 560 » |
| » | 11 | » .... | 1 024 | » | » | 5 кг 120 » |
| » | 12 | » .... | 2 048 | » | » | 10 кг 240 » |
| » | 13 | » .... | 4 096 | » | » | 20 кг 480 » |
| » | 14 | » .... | 8 192 | » | » | 40 кг 960 » |
| » | 15 | » .... | 16 384 | » | » | 81 кг 920 » |
| » | 16 | » .... | 32 768 | » | » | 163 кг 840 » |
| » | 17 | » .... | 65 536 | » | » | 327 кг 680 » |
| » | 18 | » .... | 131 072 | » | » | 655 кг 360 » |

Мы уже знаем, как можно просто подсчитать сумму чисел таких рядов: для второго столбца она равна 262 143, — согласно правилу, указанному на с. 663.

Теренций просил у императора миллион динариев, т. е. 5 000 000 брассов. Значит, он получил меньше просимой суммы в

$$5\,000\,000 : 262\,143 = 19 \text{ раз.}$$

### 5. Легенда о шахматной доске

Шахматы — одна из самых древних игр. Она существует уже около двух тысяч лет, и неудивительно, что с нею связаны предания, правдивость которых за давностью времени невозможно проверить. Одну из подобных легенд я и хочу рассказать. Чтобы понять ее, не нужно вовсе уметь играть в шахматы: достаточно знать, что игра происходит на доске, разграфленной на 64 клетки (попеременно черные и белые).

#### I

Шахматная игра была придумана в Индии, и когда индусский царь Шерам познакомился с нею, он был восхищен ее остроумием и разнообразием возможных в ней положений. Узнав, что она изобретена одним из его подданных, царь приказал его позвать, чтобы лично наградить за удачную выдумку.

Изобретатель, его звали Сета, явился к трону повелителя. Это был скромно одетый ученый, получавший средства к жизни от своих учеников.

— Я желаю достойно вознаградить тебя, Сета, за прекрасную игру, которую ты придумал, — сказал царь.

*Рис. 74. «За вторую клетку прикажи выдать 2 зерна...»*

Мудрец поклонился.

— Я достаточно богат, чтобы исполнить самое смелое твое пожелание, — продолжал царь. — Назови награду, которая тебя удовлетворит, и ты получишь ее.

Сета молчал.

— Не робей, — ободрил его царь. — Выскажи свое желание. Я не пожалею ничего, чтобы исполнить его.

— Велика доброта твоя, повелитель. Но дай срок обдумать ответ. Завтра, по зрелом размышлении, я сообщу тебе мою просьбу.

Когда на другой день Сета снова явился к ступеням трона, он удивил царя беспримерной скромностью своей просьбы.

— Повелитель, — сказал Сета, — прикажи выдать мне за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зерно.

— Простое пшеничное зерно? — изумился царь.

— Да, повелитель. За вторую клетку прикажи выдать 2 зерна, за третью 4, за четвертую — 8, за пятую — 16, за шестую — 32...

— Довольно, — с раздражением прервал его царь. —Ты получишь свои зерна за все 64 клетки доски согласно твоему желанию: за каждую вдвое больше против предыдущей. Но знай, что просьба твоя недостойна моей щедрости. Прося такую ничтожную награду, ты непочтительно пренебрегаешь моею милостью. Поистине, как учитель, ты мог бы показать лучший пример уважения к доброте своего государя. Ступай. Слуги мои вынесут тебе мешок с твоей пшеницей.

Сета улыбнулся, покинул залу и стал дожидаться у ворот дворца.

*Рис. 75. «Сета стал дожидаться у ворот...»*

## II

За обедом царь вспомнил об изобретателе шахмат и послал узнать, унес ли уже безрассудный Сета свою жалкую награду.

— Повелитель, — был ответ, — приказание твое исполняется. Придворные математики исчисляют число следуемых зерен.

Царь нахмурился. Он не привык, чтобы повеления его исполнялись так медлительно.

*Рис. 76 «Математики трудятся без устали...»*

Вечером, отходя ко сну, царь еще раз осведомился, давно ли Сета со своим мешком пшеницы покинул ограду дворца.

— Повелитель, — ответили ему, — математики твои трудятся без устали и надеются еще до рассвета закончить подсчет.

— Почему медлят с этим делом? — гневно воскликнул царь. — Завтра, прежде чем я проснусь, все до последнего зерна должно быть выдано Сете. Я дважды не приказываю.

Утром царю доложили, что старшина придворных математиков просит выслушать важное донесение.

Царь приказал ввести его.

— Прежде чем скажешь о твоем деле, — объявил Шерам, — я желаю услышать, выдана ли наконец Сете та ничтожная награда, которую он себе назначил.

— Ради этого я и осмелился явиться перед тобой в столь ранний час, — ответил старик. — Мы добросовестно исчислили все количество зерен, которое желает получить Сета. Число это так велико...

— Как бы велико оно ни было, — надменно перебил царь, — житницы мои не оскудеют. Награда обещана и должна быть выдана...

— Не в твоей власти, повелитель, исполнять подобные желания. Во всех амбарах твоих нет такого числа зерен, какое потребовал Сета. Нет его и в житницах целого царства. Не найдется такого числа зерен и на всем пространстве Земли. И если желаешь непременно выдать обещанную награду, то прикажи превратить земные царства в пахотные поля, прикажи осушить моря и океаны, прикажи растопить льды и снега, покрывающие далекие северные пустыни. Пусть все пространство их сплошь будет засеяно пшеницей. И все то, что родится на этих полях, прикажи отдать Сете. Тогда он получит свою награду.

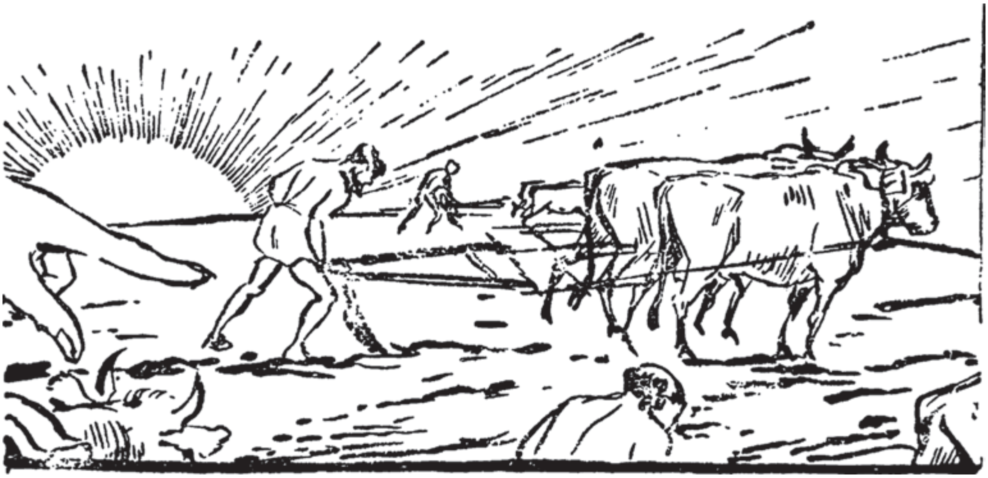


*Рис. 77. «Прикажи превратить земные царства в пахотные поля...»*

С изумлением внимал царь словам старца.

— Назови же мне это чудовищное число, — сказал он в раздумье.

— Восемнадцать квинтиллионов четыреста сорок шесть квадриллионов семьсот сорок четыре триллиона семьдесят три миллиарда семьсот девять миллионов пятьсот пятьдесят одна тысяча шестьсот пятнадцать, о повелитель!

## III

Такова легенда. Действительно ли было то, что здесь рассказано, неизвестно, — но что награда, о которой говорит предание, должна была выразиться именно таким числом, в этом вы сами можете убедиться терпеливым подсчетом. Начав с единицы, нужно сложить числа: 1, 2, 4, 8 и т. д. Результат 63-го удвоения покажет, сколько причиталось изобретателю за 64-ую клетку доски. Поступая, как объяснено на стр. 663, мы без труда найдем всю сумму следуемых зерен, если удвоим последнее число и отнимем одну единицу. Значит, подсчет сводится лишь к перемножению 64 двоек:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \text{ и т. д. } 64 \text{ раза.}$$

Для облегчения выкладок разделим эти 64 множителя на 6 групп по 10 двоек в каждой и одну последнюю группу из 4 двоек. Произведение 10 двоек, как легко убедиться, равно 1024, а 4 двоек — 16. Значит, искомый результат равен

$$1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 16.$$

Перемножив 1024 × 1024, получим

$$1\,048\,576.$$

*Рис. 78. «Амбар простирался бы дальше Солнца...»*

Теперь остается найти

$$1\,048\,576 \times 1\,048\,576 \times 1\,048\,576 \times 16,$$

отнять от результата одну единицу — и нам станет известно искомое число зерен:

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Если желаете представить себе всю огромность этого числового великана, прикиньте, какой величины амбар потребовался бы для вмещения подобного количества зерен. Известно, что кубический метр пшеницы вмещает около 15 миллионов зерен. Значит, награда шахматного изобретателя должна была бы занять объем примерно в 12 000 000 000 000 $м^3$, или 12 $км^3$. При высоте амбара 4 м и ширине 10 м длина его должна была бы простираться на 300 000 000 км, — т. е. вдвое дальше, чем от Земли до Солнца!..

Индусский царь не в состоянии был выдать подобной награды. Но он легко мог бы, будь он силен в математике, освободиться от столь обременительного долга. Для этого нужно было лишь предложить Сете самому отсчитать себе зерно за зерном всю причитавшуюся ему пшеницу.

В самом деле: если бы Сета, принявшись за счет, вел его непрерывно день и ночь, отсчитывая по зерну в секунду, он в первые сутки отсчитал бы всего 86 400 зерен. Чтобы отсчитать миллион зерен, понадобилось бы не менее

*Рис. 79. Итог 10-летнего подсчета зерен*

10 суток неустанного счета. Один кубический метр пшеницы он отсчитал бы примерно в полгода: это дало бы ему всего 5 четвертей. Считая непрерывно в течение 10 лет, он отсчитал бы себе не более 100 четвертей. Вы видите, что, посвятив счету даже весь остаток своей жизни, Сета получил бы лишь ничтожную часть потребованной им награды...

### 6. Быстрое размножение

Спелая маковая головка полна крошечных зернышек: из каждого может вырасти целое растение. Сколько же получится маков, если зернышки все до единого прорастут? Чтобы узнать это, надо сосчитать зернышки в целой головке. Скучное занятие, но результат так интересен, что стоит запастись терпением и довести счет до конца. Оказывается, одна головка мака содержит круглым числом 3000 зернышек.

*Рис. 80. Сколько получится маков, если зернышки все прорастут?*

Что отсюда следует? То, что будь вокруг нашего макового растения достаточная площадь подходящей земли, каждое упавшее зернышко дало бы росток, и будущим летом на этом месте выросло бы уже 3000 маков. Целое маковое поле от одной головки!

Посмотрим же, что будет дальше. Каждое из 3000 растений принесет не менее одной головки (чаще же несколько), содержащей 3000 зерен. Проросши, семена каждой головки дадут 3000 новых растений, и, следовательно, на второй год у нас будет уже не менее

$$3000 \times 3000 = 9\,000\,000 \text{ растений.}$$

Легко рассчитать, что на третий год число потомков нашего единственного мака будет уже достигать

$$9\,000\,000 \times 3000 = 27\,000\,000\,000.$$

А на четвертый год

$$37\,000\,000\,000 \times 3000 = 81\,000\,000\,000\,000.$$

На пятом году макам станет тесно на земном шаре, потому что число растений сделается равным

$$81\ 000\ 000\ 000\ 000 \times 3000 = 243\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000,$$

*Рис. 81. Одуванчик приносит ежегодно около 100 семянок*

поверхность же всей суши, т. е. всех материков и островов земного шара, составляет только 135 миллионов квадратных километров, —

$$135\ 000\ 000\ 000\ 000\ \text{м}^2$$

— примерно в 2000 раз менее, чем выросло бы экземпляров мака.

Вы видите, что если бы все зернышки мака прорастали, потомство одного растения могло бы уже в пять лет покрыть сплошь всю сушу земного шара густой зарослью по две тысячи растений на каждом квадратном метре. Вот какой числовой великан скрывается в крошечном маковом зернышке!

Сделав подобный же расчет не для мака, а для какого-нибудь другого растения, приносящего меньше семян, мы пришли бы к такому же результату, но только потомство его покрыло бы всю Землю не в 5 лет, а в немного больший срок. Возьмем хотя бы одуванчик, приносящий ежегодно около 100 семянок[1]. Если бы все они прорастали, мы имели бы:

| | | |
|---|---|---|
| в 1 год | 1 | растение |
| » 2 » | 100 | растений |
| » 3 » | 10 000 | » |
| » 4 » | 1 000 000 | » |
| » 5 » | 100000 000 | » |
| » 6 » | 10 000 000 000 | » |
| » 7 » | 1 000 000 000 000 | » |
| » 8 » | .100 000 000 000 000 | » |
| » 9 » | 10 000 000 000 000 000 | » |

[1] В одной головке одуванчика было насчитано даже около 200 семянок.

Это в 70 раз больше, чем имеется квадратных метров на всей суше.

Следовательно, на 9-м году материки земного шара были бы покрыты одуванчиками, по 70 на каждом квадратном метре.

Почему же в действительности не наблюдаем мы такого чудовищно быстрого размножения? Потому что огромное большинство семян погибает, не давая ростков: они или не попадают на подходящую почву и вовсе не прорастают, или, начав прорастать, заглушаются другими растениями, или же, наконец, просто истребляются животными. Но если бы этого массового уничтожения семян и ростков не было, каждое растение в короткое время покрыло бы сплошь всю нашу планету.

Это верно не только для растений, но и для животных[1]. Не будь смерти, потомство одной пары любого животного рано или поздно заполнило бы всю Землю. Полчища саранчи, сплошь покрывающие огромные пространства, могут дать нам некоторое представление о том, что было бы, если бы смерть не препятствовала размножению живых существ. В каких-нибудь два-три десятка лет материки покрылись бы непроходимыми лесами и степями, где кишели бы

*Рис 82. «Воздух сделался бы едва прозрачным от множества птиц...»*

[1] Нельзя, однако, применять сказанное без оговорок к человеку: размножение человека обусловливается не только биологическими, но и экономическими причинами.

миллионы животных, борющихся между собою за место. Океан наполнился бы рыбой до того густо, что судоходство стало бы невозможно. А воздух сделался бы едва прозрачным от множества птиц и насекомых.

Рассмотрим для примера, как быстро размножается всем известная комнатная муха. Пусть каждая муха откладывает 120 яичек, и пусть в течение лета успевает появиться 7 поколений мух, половина которых — самки. За начало первой кладки примем 15 апреля и будем считать, что муха-самка в 20 дней вырастает настолько, что сама откладывает яйца. Тогда размножение будет происходить так:

15 апреля — самка отложила 120 яиц; в начале мая — вышло 120 мух, из них 60 самок;

5 мая — каждая самка кладет 120 яиц; в середине мая — выходит 60 × 120 = = 7 200 мух; из них 3600 самок;

25 мая каждая из 3600 самок кладет по 120 яиц; в начале июня — выходит 3600 × 120 = 432 000 мух; из них 216 000 самок;

14 июня — каждая из 216 000 самок кладет по 120 яиц; в конце июня выходит 25 920 000 мух, в их числе 12 960 000 самок;

5 июля — 12 960 000 самок кладут по 120 яиц; в июле — выходит 1 555 200 000 мух; среди них 777 600 000 самок;

25 июля — выходит 93 312 000 000 мух; среди них 46 656 000 000 самок;

13 августа — выходит 5 598 720 000 000 мух; среди них 2 799 360 000 000 самок;

1 сентября — выходит 355 923 200 000 000 мух.

Чтобы яснее представить себе эту огромную массу мух, которые при беспрепятственном размножении могли бы в течение одного лета народиться


*Рис. 83. Потомство мухи за одно лето можно было бы вытянуть в линию от Земли до Урана*

от одной пары, вообразим, что они выстроены в прямую линию, одна возле другой. Так как длина мухи 5 мм, то все эти мухи вытянулись бы на 2 500 млн. км — в 18 раз больше, чем расстояние от Земли до Солнца (т. е. примерно как от Земли до далекой планеты Уран)...

В заключение приведем несколько *подлинных* случаев необыкновенно быстрого размножения животных, поставленных в благоприятные условия.

В Америке первоначально не было *воробьев*. Эта столь обычная у нас птица была ввезена в Соединенные Штаты намеренно с той целью, чтобы она уничтожала там вредных насекомых. Воробей, как известно, в изобилии поедает прожорливых гусениц и других насекомых, вредящих садам и огородам. Новая обстановка полюбилась воробьям: в Америке не оказалось хищников, истребляющих этих птиц, и воробей стал быстро размножаться. Количество вредных насекомых начало заметно уменьшаться, но вскоре воробьи так размножились, что — за недостатком животной пищи — принялись за растительную и стали опустошать посевы. Пришлось приступить к борьбе с воробьями, борьба эта обошлась американцам так дорого, что на будущее время издан был закон, запрещающий ввоз в Америку каких бы то ни было животных.

*Рис. 84. Полчища кроликов наводнили Австралию*

Второй пример. В Австралии не существовало *кроликов*, когда этот материк открыт был европейцами. Кролик ввезен туда в конце XVIII века, и так как там отсутствуют хищники, питающиеся кроликами, то размножение этих грызунов пошло необычайно быстрым темпом. Вскоре полчища кроликов наводнили всю Австралию, нанося страшный вред сельскому хозяйству и превратившись в подлинное бедствие. На борьбу с этим бичом сельского хозяйства брошены были огромные средства, и только благодаря энергичным мерам удалось справиться с бедой. Приблизительно то же самое повторилось позднее с кроликами в Калифорнии.

Третья поучительная история произошла на острове Ямайке. Здесь водились в изобилии ядовитые змеи. Чтобы от них избавиться, решено было ввезти на остров *птицу-секретаря*, яростного истребителя ядовитых змей. Число змей действительно вскоре уменьшилось, зато необычайно расплодились полевые крысы, раньше поедавшиеся змеями. Крысы приносили такой ущерб плантациям сахарного тростника, что пришлось серьезно подумать об их истреблении. Известно, что врагом крыс является индийский *мангуст*. Решено было привезти на остров 4 пары этих животных и предоставить им свободно размножаться. Мангусты хорошо приспособились к новой родине и быстро заселили весь остров. Не прошло и десяти лет, как они почти уничтожили на нем крыс. Но увы — истребив крыс, мангусты стали питаться чем попало, сделавшись всеядными животными: нападали на щенят, козлят, поросят, домашних птиц и их яйца. А размножившись еще более, принялись за плодовые сады, хлебные поля, плантации. Жители приступили к уничтожению своих недавних союзников, но им удалось лишь до некоторой степени ограничить приносимый мангустами вред.

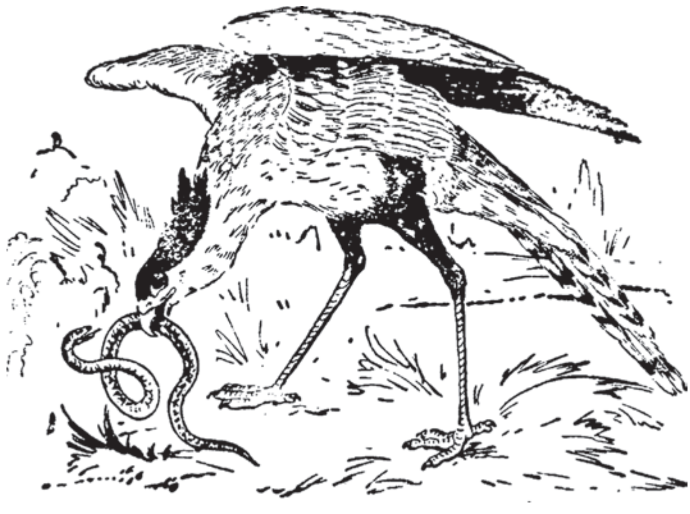


*Рис. 85. Птица-секретарь — истребитель змей*

## 7. Бесплатный обед

### I

Десять молодых людей решили отпраздновать окончание средней школы товарищеским обедом в ресторане. Когда все собрались и первое блюдо было подано, заспорили о том, как усесться вокруг стола. Одни предлагали разместиться в алфавитном порядке, другие — по возрасту, третьи — по успеваемости, четвертые — по росту и т. д. Спор затянулся, суп успел простыть, а за стол никто не садился. Примирил всех официант, обратившийся к ним с такой речью:

— Молодые друзья мои, оставьте ваши пререкания. Сядьте за стол как кому придется и выслушайте меня.

Все сели как попало. Официант продолжал:

— Пусть один из вас запишет, в каком порядке вы сейчас сидите. Завтра вы снова явитесь сюда пообедать и разместитесь уже в ином порядке. Послезавтра сядете опять по-новому и т. д., пока не перепробуете всех возможных размещений. Когда же придет черед вновь сесть так, как сидите вы здесь сегодня, тогда — обещаю торжественно — я начну ежедневно угощать вас бесплатно самыми изысканными обедами.

*Рис. 86. «— Сядьте за стол как кому придется...»*

*Рис. 87. Не пришлось дождаться бесплатного обеда*

Предложение понравилось. Решено было ежедневно собираться в этом ресторане и перепробовать все способы размещения за столом, чтобы скорее начать пользоваться бесплатными обедами.

Однако им не пришлось дождаться этого дня. И вовсе не потому, что официант не исполнил обещания, а потому что число всех возможных размещений за столом чересчур велико. Оно равняется ни мало ни много — 3 628 800. Такое число дней составляет, как нетрудно сосчитать, почти 10 000 лет!

**II**

Вам, быть может, кажется невероятным, чтобы 10 человек могли размещаться таким большим числом различных способов. Проверьте расчет сами.

Раньше всего надо научиться определять число перестановок. Для простоты начнем вычисление с небольшого числа предметов — с трех. Назовем их *А*, *Б* и *В*.

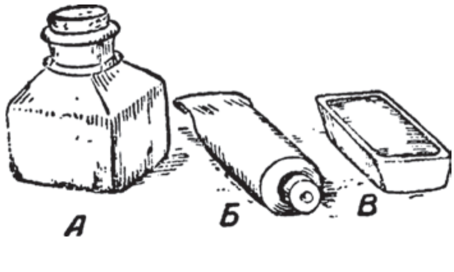



*Рис. 88*

Мы желаем узнать, сколькими способами возможно переставлять их один на место другого. Рассуждаем так. Если отложить пока в сторону вещь *В*, то остальные две можно разместить только двумя способами.


*Рис. 89. Две вещи можно разместить только двумя способами*

Теперь будем присоединять вещь *В* к каждой из этих пар. Мы можем сделать это трояко: можем

1) поместить *В позади* пары,
2) » *В впереди* пары,
3) » *В между* вещами пары.

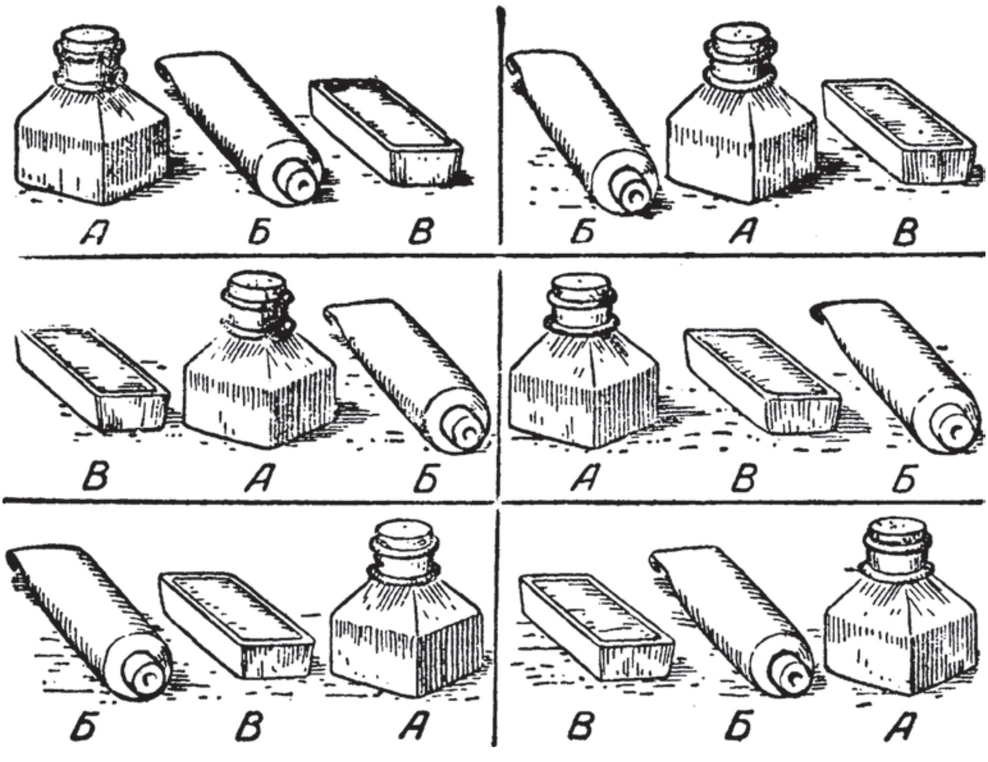



*Рис. 90. Три вещи можно разместить шестью способами*

Других положений для вещи *В*, кроме этих трех, очевидно, быть не может. А так как у нас две пары, *АБ* и *БА*, то всех способов разместить вещи наберется

$$2 \times 3 = 6.$$

Способы эти показаны на рис. 90.

Пойдем дальше — сделаем расчет для 4 вещей. Пусть у нас 4 вещи: *А*, *Б*, *В* и *Г*. Опять отложим пока в сторону одну вещь, например *Г*, а с остальными тремя сделаем все возможные перестановки. Мы знаем уже, что число этих перестановок — 6. Сколькими же способами можно присоединить четвертую вещь *Г* к каждой из 6 троек? Очевидно, четырьмя: можно

1) поместить *Г позади* тройки;
2) » *Г впереди* тройки;
3) » *Г между* 1-й и 2-й вещью;
4) » *Г между* 2-й и 3-й вещью.

Всего получим, следовательно,

$$6 \times 4 = 24 \text{ перестановки;}$$

а так как 6 = 2 × 3, а 2 = 1 × 2, то число всех перестановок можно представить в виде произведения:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

Рассуждая таким же образом и в случае 5 предметов, узнаем, что для них число перестановок равно

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

Для 6 предметов:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720 \text{ и т. д.}$$

Обратимся теперь к случаю с 10 обедающими. Число возможных здесь перестановок определится, если дать себе труд вычислить произведение

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10.$$

Тогда и получится указанное выше число

$$3\,628\,800.$$

### III

Расчет был бы сложнее, если бы среди 10 обедающих было 5 девушек и они желали бы сидеть за столом непременно так, чтобы чередоваться с юношами. Хотя число возможных перемещений здесь гораздо меньше, вычислить его несколько труднее.

Пусть сядет за стол — безразлично как — один из юношей. Остальные четверо могут разместиться, оставляя между собою пустые стулья для девушек, —

$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ различными способами. Так как всех стульев 10, то первый юноша может сесть 10 способами; значит число всех возможных размещений для молодых людей $10 \times 24 = 240$.

Сколькими же способами могут сесть на пустые стулья между юношами 5 девушек? Очевидно, $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ способами. Сочетая каждое из 240 положений юношей с каждым из 120 положений девушек, получаем число всех возможных размещений:

$$240 \times 120 = 28\,800.$$

Число это во много раз меньше предыдущего и потребовало бы всего 79 лет (без малого). Доживи молодые посетители ресторана до столетнего возраста, они могли бы дождаться бесплатного обеда, если не от самого официанта, то от его наследников.

Умея подсчитывать перестановки, мы можем определить теперь, сколько различных расположений шашек возможно в коробке игры «в 15»[1]. Другими словами, можем подсчитать число всех задач, какие способна предложить нам эта игра. Легко понять, что подсчет сводится к определению числа перестановок из 15 предметов. Мы знаем уже, что для этого нужно перемножить

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \text{ и т. д. } \ldots \times 14 \times 15.$$

Вычисление дает итог:

$$1\,307\,674\,365\,000,$$

т. е. больше триллиона.

Из этого огромного числа задач половина неразрешима. Существует, значит, свыше 600 миллиардов неразрешимых положений в этой игре. Отсюда понятна отчасти та эпидемия увлечения игрой «в 15», которая охватила людей, не подозревавших о существовании такого огромного числа неразрешимых случаев.

Заметим еще, что если бы мыслимо было ежесекундно давать шашкам новое положение, то, чтобы перепробовать все возможные расположения, потребовалось бы, — при непрерывной работе круглые сутки, — свыше 40 000 лет.

Заканчивая нашу беседу о числе перестановок, решим такую задачу из школьной жизни.

В классе 25 учеников. Сколькими способами можно рассадить их по партам?

Путь решения этой задачи — для тех, кто усвоил себе все сказанное раньше — весьма несложен: нужно перемножить 25 таких чисел:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \ldots . \times 23 \times 24 \times 25.$$

[1] При этом свободная клетка должна всегда оставаться в правом нижнем углу.

Математика указывает способы сокращать многие вычисления, — но облегчать выкладки, подобные сейчас приведенной, она не умеет. Не существует никакого иного способа выполнить точно это вычисление, как добросовестно перемножить все эти числа. Результат получается огромный, из 26 цифр — число, величину которого наше воображение не в силах себе представить.

Вот оно:

15 511 210 043 330 985 984 000 000.

Как прочесть это число?

Оно произносится так:

15 септиллионов
511 210 квинтиллионов
43 330 триллионов
985 984 миллиона[1].

Из всех чисел, какие встречались нам до сих пор, — это, конечно, самое крупное, и ему больше всех прочих принадлежит право называться «числом-великаном». Число мельчайших капель во всех океанах и морях земного шара скромно по сравнению с этим исполинским числом.

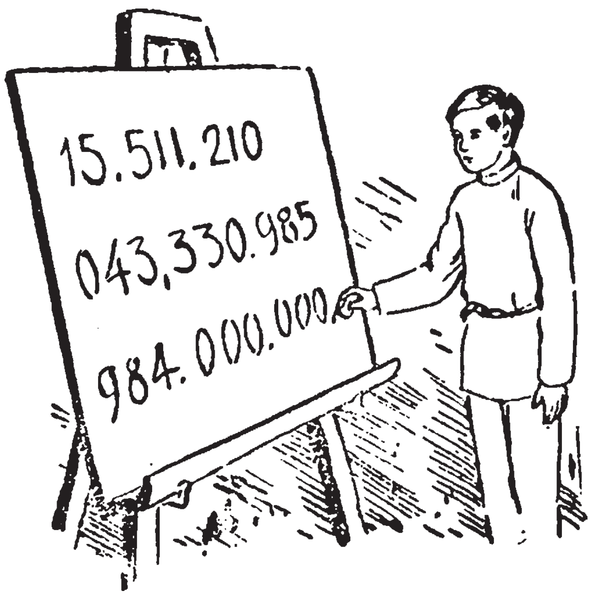



*Рис. 91. Сколькими способами можно рассадить 25 учеников*

[1] Или же 15 септиллионов 511 секстиллионов 210 квинтиллионов 43 квадриллиона 330 триллионов 985 миллиардов 984 миллиона (*примеч. ред.*).

### 8. Перекладывание монет

В детстве старший брат показал мне, помню, занимательную игру с монетами. Поставив рядом три блюдца, он положил в крайнее блюдце стопку из 5 монет: вниз рублевую, на нее — полтинник[1], выше — двугривенный, далее пятиалтынный и на самый верх — гривенник.

— Все 5 монет, — заявил он, — нужно перенести на третье блюдце, соблюдая следующие три правила. Первое правило: за один раз перекладывать только одну монету. Второе: никогда не класть большей монеты на меньшую. Третье: можно *временно* класть монеты и на среднюю тарелку, соблюдая оба правила, но к концу игры все монеты должны очутиться на третьем блюдце в первоначальном порядке. Правила, как видишь, несложные. А теперь приступай к делу.

Я принялся перекладывать. Положил гривенник на третье блюдце, пятиалтынный на среднее и запнулся. Куда положить двугривенный? Ведь он крупнее и гривенника, и пятиалтынного.

— Ну что же? — выручил меня брат. — Клади гривенник на среднее блюдце, поверх пятиалтынного. Тогда для двугривенного освободится третье блюдце.

*Рис. 92. Брат показал мне занимательную игру*

[1] Повторяя эту игру, читатель может вместо рубля взять старый медный пятак (или картонный кружок такой же величины), а вместо полтинника — пятак современной чеканки.

Я так и сделал. Но дальше — новое затруднение. Куда положить полтинник? Впрочем, я скоро догадался: перенес сначала гривенник на первое блюдце, пятиалтынный на третье и затем гривенник тоже на третье. Теперь полтинник можно положить на свободное среднее блюдце. Дальше, после длинного ряда перекладываний, мне удалось перенести также рублевую монету с первого блюдца и, наконец, собрать всю кучку монет на третьем блюдце.

— Сколько же ты проделал всех перекладываний? — спросил брат, одобрив мою работу.

— Не считал.

— Давай сосчитаем. Интересно же знать, каким наименьшим числом ходов можно достигнуть цели. Если бы стопка состояла не из 5, а только из 2 монет — пятиалтынного и гривенника, — то сколько понадобилось бы ходов?

— Три: гривенник на среднее блюдце, пятиалтынный — на третье и затем гривенник на третье блюдце.

— Правильно. Прибавим теперь еще монету — двугривенный — и сосчитаем, сколькими ходами можно перенести стопку из этих монет. Поступаем так: сначала последовательно переносим меньшие две монеты на среднее блюдце. Для этого нужно, как мы уже знаем, 3 хода. Затем перекладываем двугривенный на свободное третье блюдце — 1 ход. А тогда переносим обе монеты со среднего блюдца тоже на третье — еще 3 хода. Итого всех ходов 3 + 1 + 3 = 7.

— Для четырех монет число ходов позволь мне сосчитать самому. Сначала переношу 3 меньшие монеты на среднее блюдце — 7 ходов; потом полтинник на третье блюдце — 1 ход и затем снова три меньшие монеты на третье блюдце — еще 7 ходов. Итого 7 + 1 + 7 = 15.

— Отлично. А для пяти монет?

— 15 + 1 + 15 = 31, — сразу сообразил я.

— Ну вот ты и уловил способ вычисления. Но я покажу тебе, как можно его еще упростить. Заметь, что полученные нами числа 3, 7, 15, 31 — все представляют собой двойку, умноженную на себя один или несколько раз, но без единицы. Смотри.

И брат написал табличку:

$$3 = 2 \times 2 - 1$$
$$7 = 2 \times 2 \times 2 - 1$$
$$15 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1$$
$$31 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1.$$

— Понимаю: сколько монет перекладывается, столько раз берется двойка множителем, а затем отнимается единица. Я мог бы теперь вычислить число ходов для любой стопки монет. Например, для 7 монет:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1 = 128 - 1 = 127.$$

— Вот ты и постиг эту старинную игру. Одно только практическое правило надо тебе еще знать: если в стопке число монет нечетное, то первую монету перекладывают на третье блюдце; если четное — то на среднее блюдце.

— Ты сказал: старинная игра. Разве не сам ты ее придумал?

— Нет, я только применил ее к монетам. Игра очень древнего происхождения и зародилась, говорят, в Индии. Существует интересная легенда, связанная с этой игрой. В городе Бенаресе будто бы имеется храм, в котором индусский бог Брама при сотворении мира установил три алмазных палочки и надел на одну из них 64 золотых кружка: самый большой внизу, а каждый следующий меньше предыдущего. Жрецы храма обязаны без устали днем и ночью перекладывать эти кружки с одной палочки на другую, пользуясь третьей как вспомогательной и соблюдая правила нашей игры: переносить за один раз только один кружок и не класть большего на меньший. Легенда говорит, что когда будут перенесены все 64 кружка, наступит конец мира.

— О, значит, мир давно уже должен был погибнуть, если верить этому преданию!

— Ты, по-видимому, думаешь, что перенесение 64 кружков не должно отнять много времени?

— Конечно. Делая каждую секунду один ход, можно ведь в час успеть проделать 3600 перенесений.

— Ну и что же?

*Рис 93. «Жрецы обязаны без устали перекладывать кружки»*

— А в сутки — около ста тысяч. В десять дней — миллион ходов. Миллионом же ходов можно, я уверен, перенести хоть тысячу кружков.

— Ошибаешься. Чтобы перенести всего 64 кружка, нужно уже круглым счетом 500 миллиардов лет.

— Но почему это? Ведь число ходов равно только произведению 64 двоек без единицы, а это составляет...

— «Только» 18 квинтиллионов с лишком, если называть квинтиллионом миллион миллионов миллионов.

— Погоди, я сейчас перемножу и проверю.

— Прекрасно. А пока будешь умножать, я успею сходить по своим делам.

И брат ушел, оставив меня погруженным в выкладки. Я нашел сначала произведение 16 двоек, затем умножил этот результат — 65 536 — сам на себя, а то, что получилось, — снова на себя. Потом не забыл отнять единицу. У меня получилась такое число:

18 446 744 073 709 551 615. [1]

Брат, значит, был прав...

Вам, вероятно, интересно было бы знать, какими числами в действительности определяется возраст мира. Ученые располагают на этот счет некоторыми, — конечно, лишь приблизительными — данными:

| | | |
|---|---|---|
| Солнце существует | 10 000 000 000 000 | лет [2] |
| Земной шар | 2 000 000 000 | » |
| Жизнь на Земле | 300 000 000 | » |
| Человек | 300 000 | » |

### 9. Пари

В столовой дома отдыха зашла за обедом речь о том, как вычисляется вероятность событий. Молодой математик, оказавшийся среди обедающих, вынул монету и сказал:


*Рис. 94. «Монета может лечь на стол двояко»*

[1] Читателю уже знакомо это число: оно определяет награду, затребованную изобретателем шахматной игры.

[2] По последним данным, текущий возраст Солнца равен приблизительно 4,5 млрд лет (*примеч. ред.*).

— Кидаю на стол монету, не глядя. Какова вероятность, что она упадет гербом вверх?

— Объясните сначала, что значит «вероятность», — раздались голоса. — Не всем ясно.

— О, это очень просто! Монета может лечь на стол двояко: вот так — гербом вверх, и вот так — гербом вниз. Всех случаев здесь возможно только два. Из них для интересующего нас события благоприятен лишь один случай. Теперь находим отношение

$$\frac{\text{числа благоприятных случаев}}{\text{к числу возможных случаев}} = \frac{1}{2}.$$

Дробь ½ и выражает «вероятность» того, что монета упадет гербом вверх.

— С монетой-то просто, — вмешался кто-то. — А вы рассмотрите случай посложней, с игральной костью, например.

— Давайте рассмотрим, — согласился математик. — У нас игральная кость, кубик с цифрами на гранях. Какова вероятность, что брошенный кубик упадет определенной цифрой вверх, скажем — вскроется шестеркой? Сколько здесь всех возможных случаев? Кубик может лечь на любую из своих шести граней; значит, возможно всего 6 случаев. Из них благоприятен нам только один: когда вверху шестерка. Итак, вероятность получится от деления 1 на 6. Короче сказать, она выражается дробью ⅙.

— Неужели можно вычислить вероятность во всех случаях? — спросила одна из отдыхающих. — Возьмите такой пример. Я загадала, что первый прохожий, которого мы увидим из окна столовой, будет мужчина. Какова вероятность, что я отгадала?

— Вероятность, очевидно, равна половине, если только мы условимся и годовалого мальчика считать за мужчину. Число мужчин на свете равно числу женщин.

— А какова вероятность, что первые *двое* прохожих окажутся оба мужчины? — спросил один из отдыхающих.

— Этот расчет немногим сложнее. Перечислим, какие здесь вообще возможны случаи. Во-первых, возможно, что оба прохожих будут мужчины. Во-вторых, что сначала покажется мужчина, за ним женщина. В-третьих,

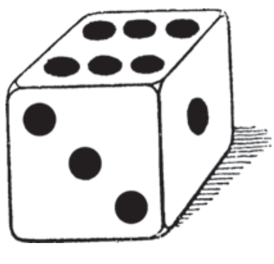


*Рис. 95. Игральная кость*

наоборот: что раньше появится женщина, потом мужчина. И, наконец, четвертый случай: оба прохожих — женщины. Итак, число всех возможных случаев — 4. Из них благоприятен, очевидно, только один случай — первый. Получаем для вероятности дробь ¼ . Вот ваша задача и решена.

— Понятно. Но можно поставить вопрос и о *трех* мужчинах: какова вероятность, что первые *трое* прохожих все окажутся мужчины?

— Что же, вычислим и это. Начнем опять с подсчета возможных случаев. Для двоих прохожих число всех случаев равно, мы уже знаем, четырем. С присоединением третьего прохожего число возможных случаев увеличивается вдвое, потому что к каждой из 4 перечисленных группировок двух прохожих может присоединиться либо мужчина, либо женщина. Итого всех случаев возможно здесь $4 \times 2 = 8$. А искомая вероятность, очевидно, равна ⅛, потому что благоприятен событию только 1 случай. Здесь легко подметить правило подсчета: в случае двух прохожих мы имели вероятность $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; в случае трех $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$; в случае четырех вероятность равна произведению четырех половинок и т. д. Вероятность все уменьшается, как видите.

— Чему же она равна, например, для десятка прохожих?

— То есть какова вероятность, что первые десять прохожих все кряду окажутся мужчинами? Вычислим, как велико произведение десяти половинок. Это $\frac{1}{1024}$ — менее одной тысячной доли. Значит, если вы бьетесь о заклад, что это случится, и ставите 1 рубль, то я могу ставить 1000 рублей за то, что этого не произойдет.

— Выгодное пари! — заявил чей-то голос. — Я бы охотно поставил рубль, чтобы получить возможность выиграть целую тысячу.

— Но имеется тысяча шансов против вашего одного, учтите и это.

— Ничего не значит. Я бы рискнул рублем против тысячи даже и за то, что сотня прохожих окажутся все подряд мужчинами.

— А вы представляете себе, как мала вероятность такого события? — спросил математик.

— Одна миллионная или что-нибудь в этом роде?

— Неизмеримо меньше! Миллионная доля получится уже для 20 прохожих. Для сотни прохожих будем иметь... Дайте-ка я прикину на бумажке... Триллионная... Квинтиллионная... Септиллионная... Ого! Нониллионная. Вероятность равна одной нониллионной.

— Нониллион? Это еще что за чудовище такое? Много больше миллиона?

— В миллиард миллиардов раз. Нониллион — единица с 30 нулями.

— Только всего?

— Вам мало 30 нулей? Вы знаете, что земной шар весит только 6 нониллионов килограммов? В океане нет и тысячной доли нониллиона мельчайших капелек.

— Внушительное число, что и говорить! Сколько же вы поставите против моей копейки?

— Ха-ха!.. Все! Все, что у меня есть.

— Все — это слишком много. Ставьте на кон ваш велосипед. Ведь не поставите?

— Почему же нет? Пожалуйста! Пусть велосипед, если желаете. Я нисколько не рискую.

— И я не рискую. Невелика сумма копейка. Зато могу выиграть велосипед, а вы почти ничего.

— Да поймите же, что вы наверняка проиграете! Велосипед никогда вам не достанется, а копейка ваша, можно сказать, уже в моем кармане.

— Что вы делаете! — удерживал математика приятель. — Из-за копейки рискуете велосипедом. Безумие!

— Напротив, — ответил математик, — безумие ставить хотя бы одну копейку при таких условиях. Верный ведь проигрыш! Уже лучше прямо выбросить копейку.

— Но один-то шанс все же имеется?

— Одна капля в целом океане. В десяти океанах! Вот ваш шанс. А за меня десять океанов против одной капельки. Мой выигрыш так же верен, как дважды два — четыре.

— Увлекаетесь, молодой человек, — раздался спокойный голос старика, все время молча слушавшего спор. — Увлекаетесь...

— Как? И вы, профессор, рассуждаете по-обывательски?

— Подумали ли вы о том, что не все случаи здесь равновозможны? Расчет вероятности правилен лишь для каких событий? Для равновозможных, не так ли? А в рассматриваемом примере... Впрочем, — сказал старик, прислушиваясь, — сама действительность, кажется, сейчас разъяснит вам вашу ошибку. Слышна военная музыка, не правда ли?

— Причем тут музыка?.. — начал было молодой математик и осекся. На лице его выразился испуг. Он сорвался с места, бросился к окну и высунул голову.

— Так и есть!—донесся его унылый возглас. — Проиграно пари! Прощай мой велосипед...

Через минуту всем стало ясно, в чем дело. Мимо окон проходил батальон красноармейской пехоты.

## 10. Числовые великаны вокруг и внутри нас

Нет надобности приискивать исключительные положения, чтобы встретиться с числовыми великанами. Они присутствуют всюду вокруг и даже внутри нас самих — надо лишь уметь рассмотреть их. Небо над головой, песок под ногами, воздух вокруг нас, кровь в нашем теле — все скрывает в себе невидимых великанов из мира чисел.

Числовые исполины небесных пространств для большинства людей не являются неожиданными. Хорошо известно, что, зайдет ли речь о числе звезд Вселенной, об их расстояниях от нас и между собою, об их размерах, весе, возрасте — во всех случаях мы неизменно встречаемся с числами, подавляющими воображение своей огромностью. Недаром выражение «астрономическое число» сделалось крылатым. Многие, однако, не знают, что даже и те небесные тела, которые астрономы часто называют «маленькими», оказываются настоящими великанами, если применить к ним привычную земную мерку. Существуют в нашей солнечной системе планеты, которые ввиду их незначительных размеров получили у астрономов наименование «малых». Среди них имеются и такие, поперечник которых равен нескольким километрам. В глазах астронома, привыкшего к исполинским масштабам, они так малы, что, говоря о них, он пренебрежительно называет их «крошечными». Но они представляют собой «крошечные» тела только рядом с другими небесными светилами, еще более огромными: на обычную же человеческую мерку они далеко не миниатюрны. Поверхность самого мелкого из них могла бы вместить все население нашего Союза. Возьмем «крошечную» планету с диаметром 3 км: такая планета недавно открыта. По правилам геометрии легко рассчитать, что поверхность такого тела заключает 28 км$^2$, или 28 000 000 м$^2$.

На 1 м$^2$ может поместиться стоя человек 6. Как видите, на 28 миллионах квадратных метров найдется место для 168 миллионов человек, т. е. для населения всего СССР.

Песок, попираемый нами, также вводит нас в мир числовых исполинов. Каждая горсть мелкого песку заключает в себе не меньше отдельных песчинок, чем жителей в целом Союзе. Недаром сложилось издавна выражение: «бесчисленны, как песок морской». Впрочем, древние недооценивали многочисленность песка, считая ее одинаковой с многочисленностью звезд. В старину не было телескопов, а простым глазом мы видим на небе всего около 3500 звезд (в одном полушарии). Песок на морском берегу в миллионы раз многочисленнее, чем звезды, доступные невооруженному зрению.

Величайший числовой гигант скрывается в том воздухе, которым мы дышим. Каждый кубический сантиметр воздуха, каждый наперсток заключает в себе 27 квинтиллионов (т. е. 27 с 18 нулями) мельчайших частиц, называемых «молекулами».

Невозможно даже представить себе, как велико это число. Если бы на свете было столько людей, для них буквально недостало бы места на нашей планете. В самом деле: поверхность земного шара, считая все его материки и океаны, равна 500 миллионам км$^2$. Раздробив в квадратные метры, получим

$$500\,000\,000\,000\,000 \text{ м}^2.$$

Поделим 27 квинтиллионов на это число, и мы получим 54 000. Это означает, что на каждый квадратный метр земной поверхности приходилось бы более 50 тысяч человек!

А знаете, какой *объем* занимало бы все это население? Так как человеческое тело в среднем вытесняет около 50 литров, т. е. занимает в объеме $\frac{1}{20}$ м$^3$, то 27 квинтиллионов человек заняли бы объем не менее 1350 миллионов км$^3$.

Сравним его с объемом всех океанов. Поверхность мирового океана равна 375 миллионам, средняя глубина — 4 км, поэтому объем океанских вод составляет

$$375\,000\,000 \times 4 = 1400 \text{ миллионов км}^3,$$

т. е. такой же примерно, как и объем 27 квинтиллионов человеческих тел. Значит, такое население могло бы доверху заполнить впадины всех океанов и морей земного шара. Между тем, объем тех 2000 миллионов (2 миллиардов) людей, которые действительно живут сейчас на земном шаре, так скромен, что если бы все человечество потонуло, например, в Ладожском озере, вода в нем поднялась бы... только на полсантиметра! Никто и не заметил бы такого ничтожного подъема уровня озера, а ведь на дне его скрывалось бы население всей нашей планеты[1].

Было упомянуто раньше, что числовые великаны скрываются и внутри человеческого тела. Покажем это на примере нашей крови. Если каплю ее рассмотреть под микроскопом, то окажется, что в ней плавает огромное множество чрезвычайно мелких телец красного цвета, которые и придают крови ее окраску. Каждое такое «красное кровяное тельце» имеет форму крошечной круглой подушечки, посредине вдавленной (рис. 96). Все они у человека примерно одинаковых размеров и имеют в поперечнике около 0,007 мм, а толщину — 0,002 мм.

Зато число их огромно. В крошечной капельке крови объемом 1 кубический миллиметр их заключается 5 миллионов. Сколько же их всего в нашем теле? В теле человека примерно в 14 раз меньше литров крови, чем килограммов в его весе. Если вы весите 40 кг, то крови в вашем теле около 3 литров, или 3000 000 $мм^3$. Так как каждый кубический миллиметр заключает 5 миллионов красных телец, то общее число их в вашей крови:

$$5\,000\,000 \times 3\,000\,000 = 15\,000\,000\,000\,000.$$

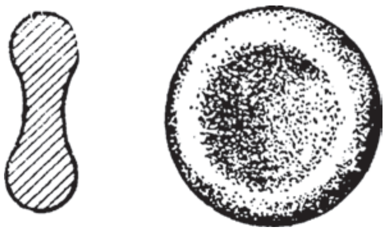


*Рис. 96. Красное кровяное тельце*

[1] Это кажется невероятным; нелишним будет подтвердить сказанное расчетом. Поверхность Ладожского озера равна 18 000 $км^2$. Объем 2000 миллионов человеческих тел занимает 100 миллионов $м^3$, или 0,1 $км^3$. Разделив 0,1 на 18 000, получаем $\frac{1}{180000}$ км или $\frac{10}{18}$ см, т. е. около полусантиметра.

15 миллионов миллионов кровяных телец! Какую длину займет эта армия кружочков, если выложить ее в ряд, один к другому? Нетрудно рассчитать, что длина такого ряда была бы 107 000 км. Более чем на сто тысяч километров растянулась бы нить из красных телец вашей крови. Ею можно было бы обмотать земной шар по экватору:

$$100\,000 : 40\,000 = 2{,}5 \text{ раза},$$

а нитью из кровяных шариков взрослого человека — три раза.

Объясним, какое значение для нашего организма имеет такое измельчение кровяных телец. Назначение этих телец — разносить кислород по всему телу. Они захватывают кислород, когда кровь проходит через легкие, и вновь выделяют его, когда кровяной поток заносит их в ткани нашего тела, в его самые удаленные от легких уголки. Сильное измельчение этих телец способствует выполнению ими этого назначения, потому что чем они мельче при огромной численности, тем больше их поверхность, а кровяное тельце может поглощать и выделять кислород только со своей поверхности. Расчет показывает, что общая поверхность их во много раз превосходит поверхность человеческого тела

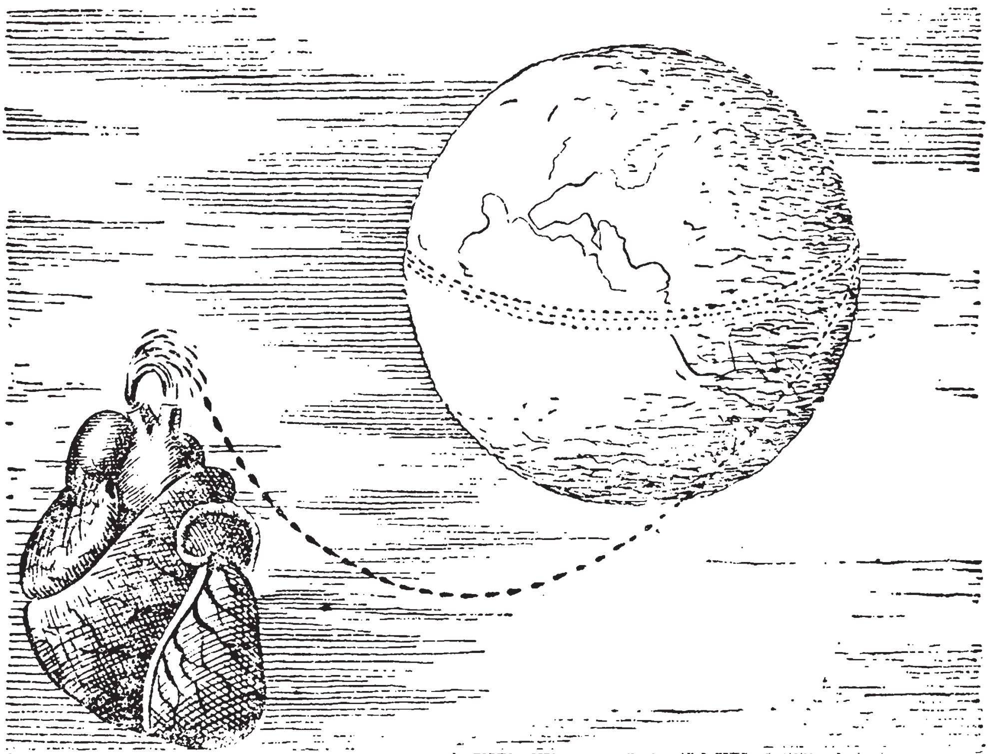
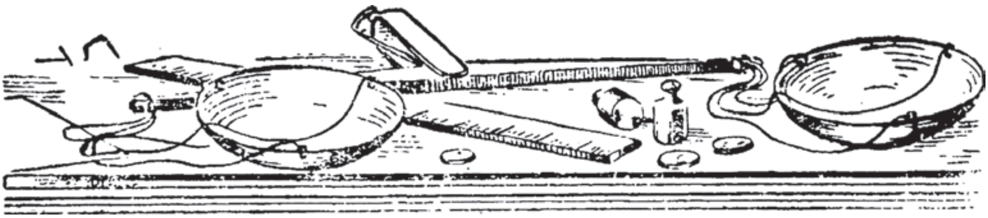


*Рис. 97. Нить из кровяных телец взрослого человека можно было бы трижды обвить вокруг земного шара*

и равна 1200 м$^2$. Такую площадь имеет большой огород в 40 м длины и 30 м ширины. Теперь вы понимаете, до какой степени важно для жизни организма то, что кровяные тельца сильно раздроблены и так многочисленны: они могут захватывать и выделять кислород на поверхности, которая в тысячу раз больше поверхности нашего тела.

Числовым великаном по справедливости следует назвать и тот внушительный итог, который получился бы, если бы вы подсчитали, сколько всякого рода пищи пропускает человек через свое тело за 70 лет средней жизни. Целый железнодорожный поезд понадобился бы для перевозки тех тонн воды, хлеба, мяса, дичи, рыбы, картофеля и других овощей, тысяч яиц, тысяч литров молока и т. д., которые человек успевает поглотить в течение своей жизни. Рис. 98 дает наглядное представление об этом неожиданно большом итоге, более чем в тысячу раз превышающем по весу человеческое тело. При виде его не веришь, что человек может справиться с таким исполином, буквально проглатывая — правда, не разом — груз длинного товарного поезда.



## Глава VIII

# БЕЗ МЕРНОЙ ЛИНЕЙКИ

Мерная линейка или лента не всегда оказывается под руками, и полезно уметь обходиться как-нибудь без них, производя хотя бы приблизительные измерения.

Мерить более или менее длинные расстояния, например во время экскурсий, проще всего шагами. Для этого нужно знать длину своего шага и уметь шаги считать. Конечно, они не всегда одинаковы: мы можем делать мелкие шаги, можем при желании шагать и широко. Но все же при обычной ходьбе мы делаем шаги приблизительно одной длины, и если знать среднюю их длину, то можно без большой ошибки измерять расстояния шагами.

Чтобы узнать длину своего среднего шага, надо измерить длину многих шагов вместе и вычислить отсюда длину одного. При этом, разумеется, нельзя уже обойтись без мерной ленты или шнура.

Вытяните ленту на ровном месте и отмерьте расстояние в 20 м. Прочертите эту линию на земле и уберите ленту. Теперь пройдите по линии обычным шагом и сосчитайте число сделанных шагов. Возможно, что шаг не уложится целое число раз на отмеренной длине. Тогда, если остаток короче половины длины шага, его можно просто откинуть; если же длиннее полушага, остаток считают за целый шаг. Разделив общую длину 20 м на число шагов, получим среднюю длину одного шага. Это число надо запомнить, чтобы, когда придется, пользоваться им для промеров.

Чтобы при счете шагов не сбиться, можно — особенно на длинных расстояниях — вести счет следующим образом. Считают шаги только до 10; досчитав до этого числа, загибают один палец левой руки. Когда все пальцы левой руки загнуты, т. е. пройдено 50 шагов, загибают один палец на правой руке. Так можно вести счет до 250, после чего начинают сызнова, запоминая, сколько раз были загнуты все пальцы правой руки. Если, например, пройдя некоторое расстояние, вы загнули все пальцы правой руки два раза и к концу пути у вас окажутся загнутыми на правой руке 3 пальца, а на левой 4, то вами сделано было шагов

$$2 \times 250 + 3 \times 50 + 4 \times 10 = 690.$$

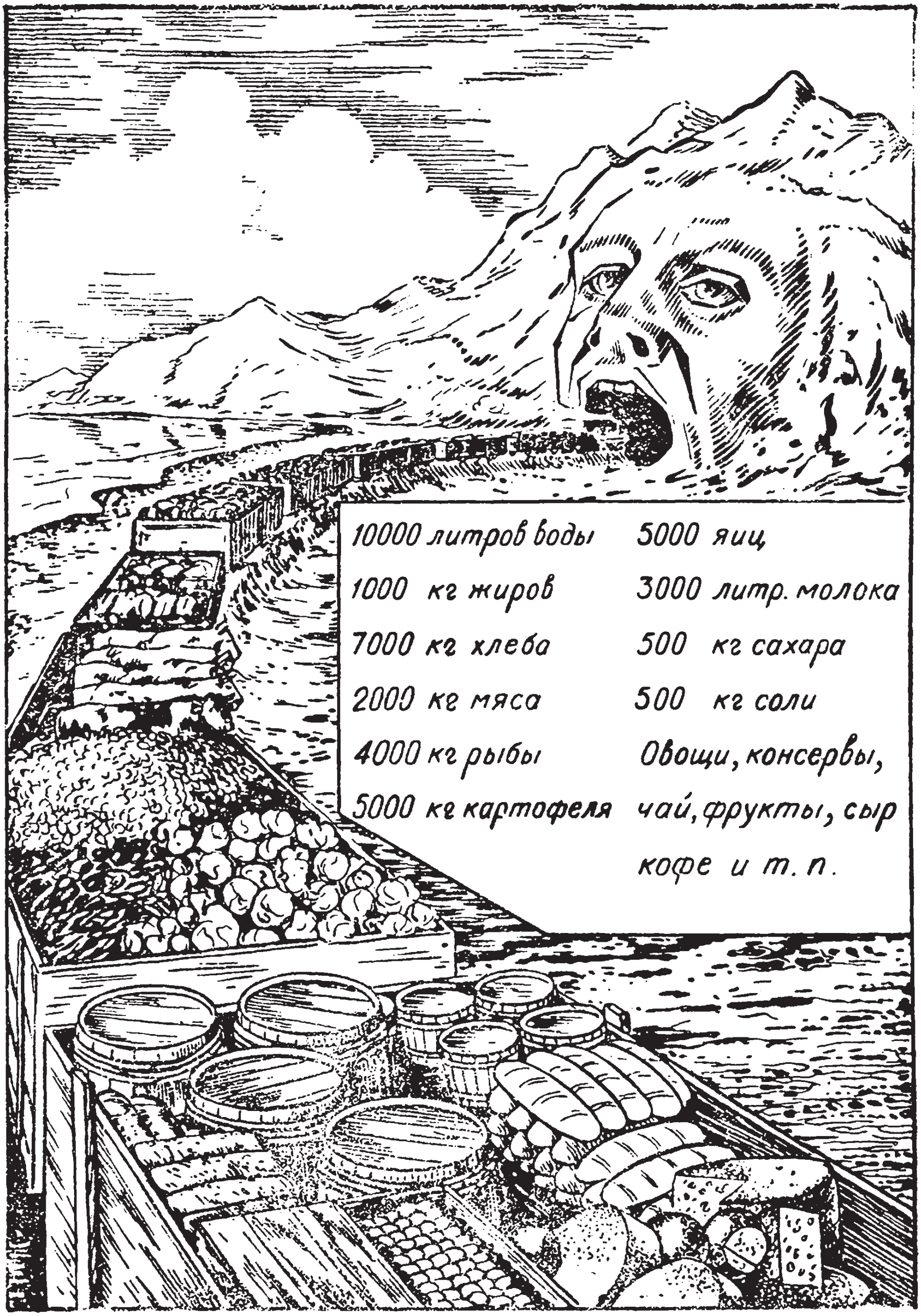



*Рис. 98. Сколько съедает человек в течение жизни*

Сюда нужно прибавить еще те несколько шагов, которые сделаны после того, как был загнут в последний раз палец левой руки.

Отметим попутно следующее старое правило: длина среднего шага взрослого человека равна половине расстояния его глаз от ступней.

Другое старинное практическое правило относится к *скорости* ходьбы: человек проходит в час столько километров, сколько шагов делает он в 3 сек. Легко показать, что правило это верно лишь для определенной длины шага, и притом для довольно большого шага. В самом деле: пусть длина шага $x$ м, а число шагов в 3 сек. равно $n$. Тогда в 3 сек. пешеход делает $nx$ м, а в час (3600 сек.) — 1200 $nx$ м, или 1,2 $nx$ км. Чтобы путь этот равнялся числу шагов, делаемых в 3 сек., должно существовать равенство:

$$1{,}2\,nx = n$$

или

$$1{,}2\,x = 1,$$

откуда

$$x = 0{,}83 \text{ м.}$$

Если верно предыдущее правило о зависимости длины шага от роста человека, то второе правило, сейчас рассматриваемое, оправдывается только для людей среднего роста — около 175 см.

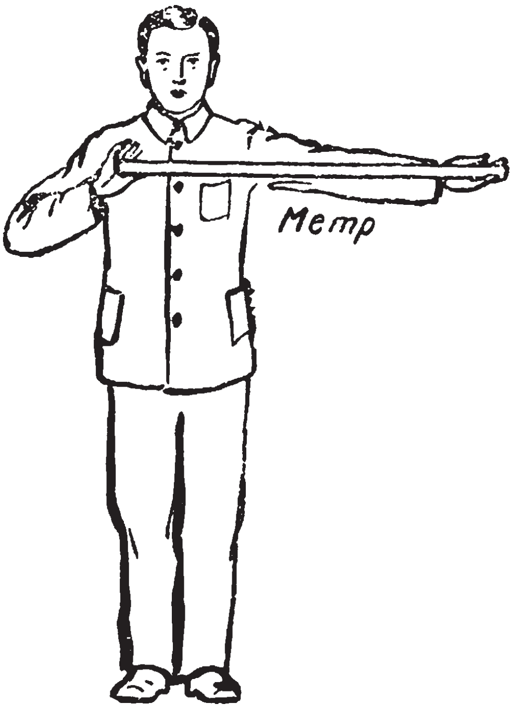



*Рис. 99. Расстояние от конца вытянутой руки до плеча другой руки равно примерно одному метру*

Для обмера предметов средней величины, не имея под рукой метровой линейки или ленты, можно поступать так. Надо натянуть веревочку или палку от конца протянутой в сторону руки до противоположного плеча (рис. 99) — это и есть у взрослого мужчины приблизительная длина метра. Другой способ получить примерную длину метра состоит в том, чтобы отложить по прямой линии 6 «четвертей», т. е. 6 расстояний между концами большого и указательного пальцев, расставленных как можно шире (рис. 100).

Последнее указание вводит нас в искусство мерить «голыми руками»: для этого необходимо лишь предварительно измерить кисть своей руки и твердо запомнить результаты промеров.

Что же надо измерить в кисти своей руки? Прежде всего ширину ладони, как показано на нашем рис. 101. У взрослого человека она равна примерно 10 см; у вас, она, быть может, меньше, и вы должны знать, на сколько именно меньше. Затем нужно измерить, как велико у вас расстояние между концами среднего и указательного пальцев, раздвинутых возможно шире (рис. 102). Далее, полезно знать длину своего указательного пальца, считая от основания большого пальца, как указано на рис. 103. И, наконец, измерьте расстояние концов большого пальца и мизинца, когда они широко расставлены, как на рис. 104.

Запомнить эти числа нетрудно, потому что первые три обыкновенно бывают одинаковы у одного и того же человека; приходится удерживать в памяти, значит, не четыре, а всего только два числа.

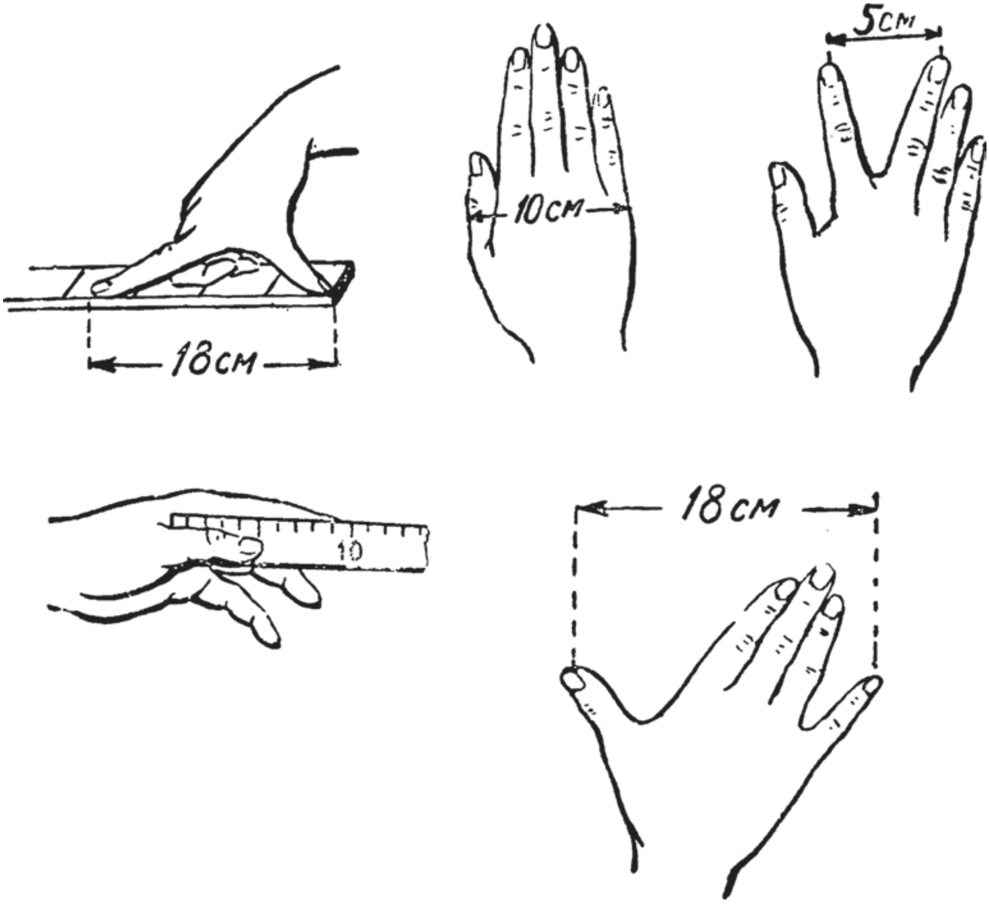



*Рис. 100, 101, 102, 103, 104. Что надо измерить на своей руке, чтобы обходиться потом без мерной ленты*

Пользуясь этим «живым масштабом», вы можете производить приблизительные измерения мелких предметов.

Хорошую службу также могут сослужить наши медные (бронзовые) монеты современной чеканки. Немногим известно, что поперечник копеечной монеты в точности равен 1½ см, а пятака — 2½ см, так что, положенные рядом, обе монеты дают 4 см (рис. 105). Значит, если у вас имеется при себе несколько медных монет, то вы сможете довольно точно наметить следующие длины:

| | |
|---|---|
| Копейка .................. | 1½ см |
| Пятак ..................... | 2½ » |
| Две копеечные монеты .... | 3 » |
| Пятак и копейка .......... | 4 » |
| Два пятака ............... | 5 » |

и т. д.


*Рис. 105. Пятак и копейка, положенные рядом, составляют 4 см*


*Рис. 106. 3-коп. и 2-коп. монеты, лежа рядом, составляют 4 см*

Отняв от ширины пятака ширину копеечной монеты, получите ровно 1 см.

Если пятака и копейки при вас не окажется, а будут только 2-копеечная и 3-копеечная монеты, то и они могут до известной степени выручить вас, если запомните твердо, что, положенные рядом, обе монеты дают 4 см (рис. 106). Согнув 4-сантиметровую бумажную полоску пополам и затем еще раз пополам, получите масштаб из 4 см.

Вы видите, что при известной подготовке и находчивости вы и без мерной линейки можете производить годные для практики измерения.

К этому полезно будет прибавить еще, что наши медные (бронзовые) монеты могут служить при нужде не только масштабом, но и удобным разновесом для отвешивания грузов. Новые, не потертые медные монеты современной чеканки весят столько граммов, сколько обозначено на них копеек: копеечная монета — 1 г, 2-копеечная — 2 г, и т. д. Вес монет, бывших в употреблении, незначительно отступает от этих норм. Так как в обиходе часто не бывает под рукой именно мелких разновесок в 1–10 г, то знание сейчас указанных соотношений может весьма пригодиться.

## Глава IX

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ

Для разрешения собранных в этой главе головоломок не требуется знания полного курса геометрии. С ними в силах справиться и тот, кто знаком лишь со скромным кругом начальных геометрических сведений. Две дюжины предлагаемых здесь задач помогут читателю удостовериться, действительно ли владеет он теми геометрическими знаниями, которые считает усвоенными. Подлинное знание геометрии состоит не только в умении перечислять свойства фигур, но и в искусстве распоряжаться ими на практике для решения реальных задач. Что проку в ружье для человека, не умеющего стрелять?

Пусть же читатель проверит, сколько метких попаданий окажется у него из 24 выстрелов по геометрическим мишеням.

### 54. Телега

Почему передняя ось телеги больше стирается и чаще загорается, чем задняя?

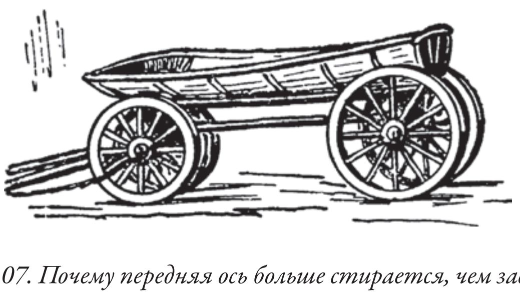


*Рис. 107. Почему передняя ось больше стирается, чем задняя?*

## 55. В увеличительное стекло

Угол в 1½° рассматривают в лупу, увеличивающую в 4 раза. Какой величины покажется угол (рис. 108)?

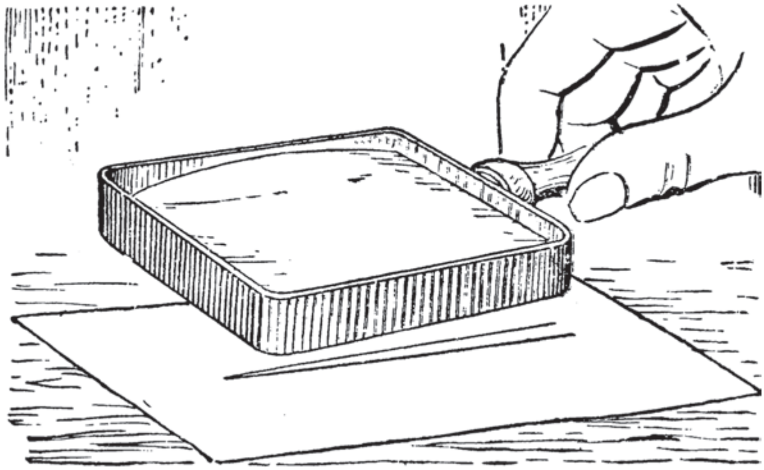


*Рис. 108*

## 56. Плотничий уровень

Вам знаком, конечно, плотничий уровень с газовым пузырьком (рис. 109), отходящим в сторону от метки, когда основание уровня имеет наклон. Чем больше этот наклон, тем больше отодвигается пузырек от средней метки. Причина движения пузырька та, что будучи легче жидкости, в которой он находится, он всплывает вверх. Но если бы трубка была прямая, пузырек при малейшем наклоне отбегал бы до самого конца трубки, т. е. до наиболее высокой ее части. Такой уровень, как легко понять, был бы на практике очень неудобен. Поэтому трубка уровня берется изогнутая, как показано на рис. 109. При горизонтальном положении основания такого уровня пузырек, занимая высшую точку трубки, находится у ее середины; если же уровень наклонен, высшей точкой трубки становится уже не ее середина, а некоторая соседняя с ней точка, и пузырек отодвигается от метки на другое место трубки[1]. Вопрос задачи состоит в том, чтобы определить, на сколько миллиметров отодвинется от метки пузырек, если уровень наклонен на полградуса, а радиус дуги изгиба трубки — 1 м.

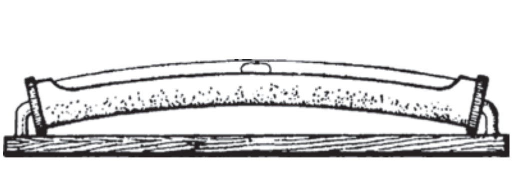


*Рис. 109. Плотничий уровень*

[1] Точнее было бы сказать: «метка отодвигается от пузырька», потому что пузырек остается на месте, а трубка с меткой скользят мимо него.

### 57. Число граней

Вот вопрос, который, без сомнения, покажется многим слишком наивным или, напротив, чересчур хитроумным:

Сколько граней у шестигранного карандаша?

Раньше чем заглянуть в ответ, внимательно вдумайтесь в задачу.

### 58. Лунный серп

*Рис. 110*

Фигуру лунного серпа (рис. 110) требуется разделить на 6 частей, проведя всего только 2 прямых линии.

Как это сделать?

### 59. Из 12 спичек

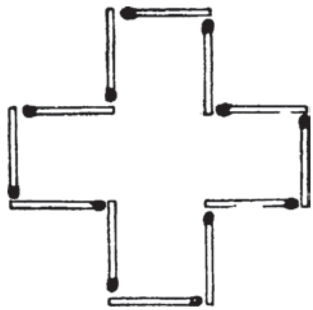


*Рис. 111*

Из 12 спичек можно составить фигуру креста (рис. 111), площадь которого равна 5 «спичечным» квадратам.

Измените расположение спичек так, чтобы контур фигуры охватывал площадь, равную только 4 «спичечным» квадратам.

Пользоваться при этом услугами измерительных приборов нельзя.

### 60. Из 8 спичек

Из 8 спичек можно составить довольно разнообразные замкнутые фигуры. Некоторые из них представлены на рис. 112; площади их, конечно, различны. Задача состоит в том, чтобы составить из 8 спичек фигуру, охватывающую наибольшую площадь.

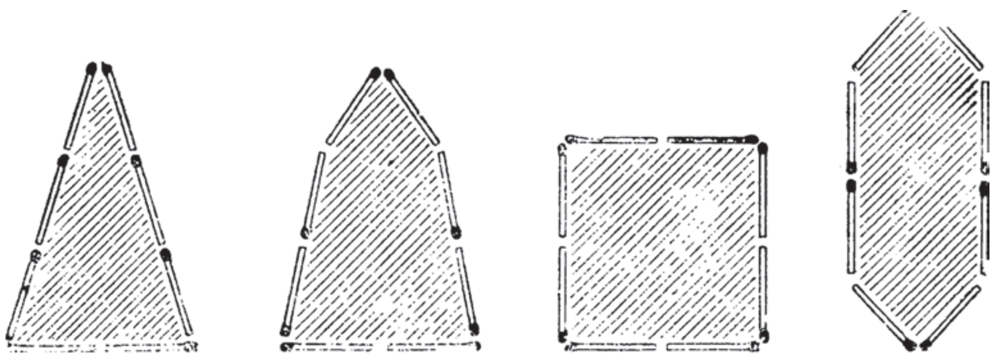


*Рис. 112. Как из 8 спичек сложить фигуру наибольшей площади?*

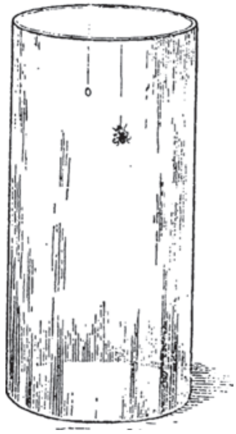


*Рис. 113. Укажите мухе путь к капле меда*

### 61. Путь мухи

На внутренней стенке стеклянной цилиндрической банки виднеется капля меда в трех сантиметрах от верхнего края сосуда. А на наружной стенке, в точке диаметрально противоположной, уселась муха (рис. 113).

Укажите мухе кратчайший путь, по которому она может добежать до медовой капли.

Высота банки 20 см; диаметр — 10 см.

Не полагайтесь на то, что муха сама отыщет кратчайший путь и тем облегчит вам решение задачи: для этого ей нужно было бы обладать геометрическими познаниями, слишком обширными для мушиной головы.

### 62. Найти затычку

Перед вами дощечка (рис. 114) с тремя отверстиями: квадратным, треугольным и круглым. Может ли существовать одна затычка такой формы, чтобы закрывать все эти разновидные отверстия?

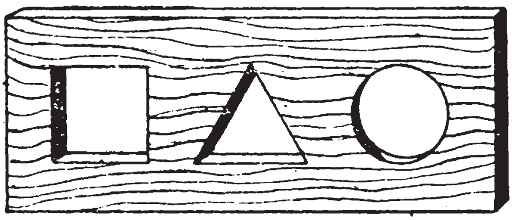


*Рис. 114. Найдите одну затычку к этим трем отверстиям*

### 63. Вторая затычка

Если вы справились с предыдущей задачей, то, быть может, вам удастся найти затычку и для таких отверстий, какие показаны на рис. 115?

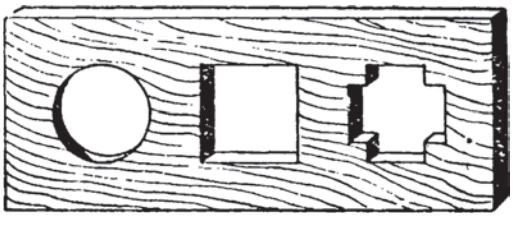


*Рис. 115. Существует ли одна затычка для этих отверстий?*

### 64. Третья затычка

Наконец, еще задача в том же роде: существует ли одна затычка для трех отверстий рис. 116?

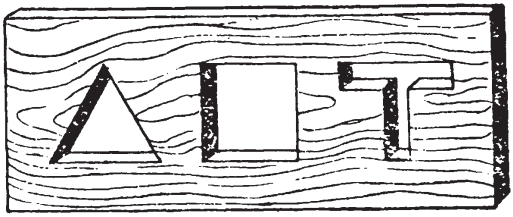


*Рис 116. Можно ли для этих трех отверстий изготовить одну затычку?*

### 65. Продеть пятак

Запаситесь двумя монетами современного чекана: 5-копеечной и 2-копеечной. На листке бумаги сделайте кружок, в точности равный окружности 2-копеечной монеты и аккуратно вырежьте его (рис. 117).

Как вы думаете: пролезет пятак через эту дыру? Здесь нет подвоха: задача подлинно геометрическая.

*Рис 117*

### 66. Высота башни

В вашем городе есть достопримечательность — высокая башня, высоты которой вы, однако, не знаете. Имеется у вас и фотографический снимок башни на почтовой карточке. Как может этот снимок помочь вам узнать высоту башни?

### 67. Подобные фигуры

Эта задача предназначается для тех, кто знает, в чем состоит геометрическое подобие. Требуется ответить на следующие два вопроса:

1. В фигуре чертежного треугольника (рис. 118) подобны ли наружный и внутренний треугольники?

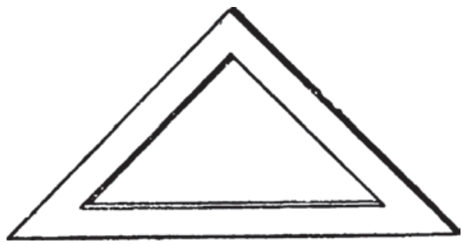


*Рис. 118. Подобны ли наружный и внутренний треугольники?*

*Рис. 119. Подобны ли наружный и внутренний четырехугольники?*

2. В фигуре рамки (рис. 119) подобны ли наружный и внутренний четырехугольники?

### 68. Тень проволоки

Как далеко в солнечный день тянется в пространстве полная тень, отбрасываемая телеграфной проволокой, диаметр которой 4 мм?

### 69. Кирпичик

Строительный кирпич весит 4 кг. Сколько весит игрушечный кирпичик из того же материала, все размеры которого в 4 раза меньше?

### 70. Великан и карлик

Во сколько примерно раз великан ростом 2 м тяжелее карлика ростом 1 м?

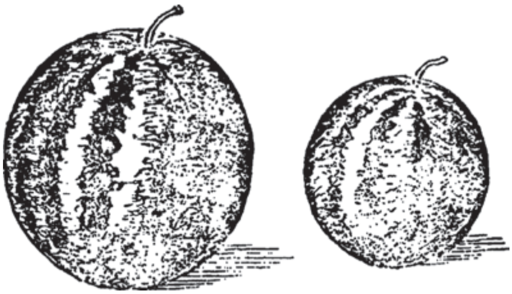


*Рис. 120*

### 71. Два арбуза

Продаются два арбуза неодинаковых размеров. Один на четвертую долю шире другого, а стоит он в 1¼ раза дороже. Какой из них выгоднее купить (рис. 120)?

### 72. Две дыни

Продаются две дыни одного сорта. Одна окружностью 60, другая — 50 см. Первая в полтора раза дороже второй. Какую дыню выгоднее купить?

### 73. Вишня

Мякоть вишни окружает косточку слоем такой же толщины, как и сама косточка. Будем считать, что и вишня и косточка имеют форму шариков. Можете ли вы сообразить в уме, во сколько раз объем сочной части вишни больше объема косточки?

### 74. Модель башни Эйфеля

Башня Эйфеля в Париже, 300 м высоты, сделана целиком из железа, которого пошло на нее около 8 000 000 кг. Я желаю заказать точную железную модель знаменитой башни, весящую всего только 1 кг.

Какой она будет высоты? Выше стакана или ниже?

### 75. Две кастрюли

Имеются две медные кастрюли одинаковой формы и со стенками одной толщины. Первая в 8 раз вместительнее второй.

Во сколько раз она тяжелее?

### 76. На морозе

На морозе стоят взрослый человек и ребенок, оба одетые одинаково.

Кому из них холоднее?

### 77. Сахар

Что тяжелее: стакан сахарного песку или такой же стакан колотого сахара?

### Решения головоломок 54–77

**54.** На первый взгляд задача эта кажется не относящейся вовсе к геометрии. Но в том-то и состоит овладение этой наукой, чтобы уметь обнаруживать геометрическую основу задачи там, где она замаскирована посторонними подробностями. Наша задача по существу безусловно геометрическая; без знания геометрии ее не решить.

Итак, почему же передняя ось телеги стирается больше задней? Всем известно, что передние колеса меньше задних. На одном и том же расстоянии малый круг оборачивается большее число раз, чем круг покрупнее: у меньшего круга и окружность меньше — оттого она укладывается в данной длине большее число раз. Теперь понятно, что при всех поездках телеги передние ее колеса делают больше оборотов, нежели задние; а большее число оборотов, конечно, сильнее стирает ось.

**55.** Если вы полагаете, что в лупу угол наш окажется величиною в $1\frac{1}{4} \times 4 = 6°$, то дали промах. Величина угла нисколько не увеличивается при рассматривании его в лупу. Правда, дуга, измеряющая угол, несомненно увеличивается, — но во столько же раз увеличивается и радиус этой дуги, так что величина центрального угла остается без изменения. Рис. 121 поясняет сказанное.

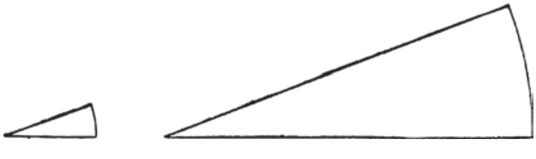


*Рис 121*

**56.** Рассмотрите рис. 122, где $MAN$ есть первоначальное положение дуги уровня, $M'BN'$ — новое ее положение, причем хорда $M'N'$ составляет с хордой $MN$ угол в ½°. Пузырек, бывший раньше в точке $A$, теперь остался

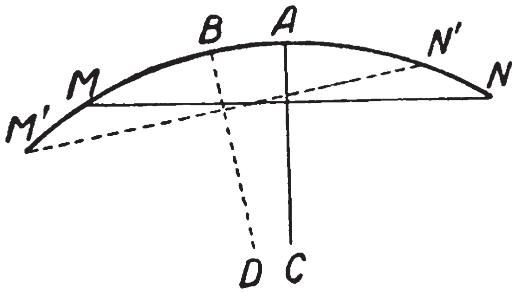



*Рис. 122*

в той же точке, но середина дуги *MN* переместилась в *B*. Требуется вычислить длину дуги *AB*, если радиус ее равен 1 м, а величина дуги в градусной мере ½° (это следует из равенства острых углов с перпендикулярными сторонами).

Вычисление несложно. Длина полной окружности радиусом в 1 м (1000 мм) равна 2 × 3,14 × 1000 = = 6280 мм. Так как в окружности 360° или 720 полуградусов, то длина одного полуградуса определяется делением

$$6280 : 720 = 8{,}7 \text{ мм}.$$

Пузырек отодвинется от метки (вернее — метка отодвинется от пузырька) примерно на 9 мм — почти на целый сантиметр. Легко видеть, что чем больше радиус кривизны трубки, тем уровень чувствительнее.

**57.** Задача вовсе не шуточная и вскрывает ошибочность обычного словоупотребления. У «шестигранного» карандаша не 6 граней, как, вероятно, полагает большинство. Всех граней у него — если он не очинен — 8: шесть боковых и еще две маленькие «торцовые» грани. Будь у него в действительности 6 граней, он имел бы совсем иную форму — бруска с четырехугольным сечением.

Привычка считать у призм только боковые грани, забывая об основаниях, очень распространена. Многие говорят: *трехгранная* призма, *четырехгранная* призма и т. д., между тем как призмы эти надо называть: треугольная, четырехугольная и т. д. — по форме основания. Трехгранной призмы, т. е. призмы о трех гранях, даже и не существует. Поэтому карандаш, о котором говорится в задаче, правильно называть не шестигранным, а шестиугольным.


*Рис. 123*

**58.** Сделать надо так, как показано на рис. 123. Получаются 6 частей, которые для наглядности пронумерованы.

**59.** Спички следует расположить, как показано на рис. 124; площадь этой фигуры равна учетверенной площади «спичечного» квадрата. Как в этом удостовериться? Дополним мысленно нашу фигуру до треугольника. Получится прямоугольный треугольник, основание которого равно 3, а высота 4 спичкам[1]. Площадь его равна половине произведения основания на высоту: $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ квадратам со стороною в одну спичку. Но наша фигура имеет, очевидно, площадь, которая меньше площади треугольника на 2 «спичечных» квадрата и равна, следовательно, 4 таким квадратам.

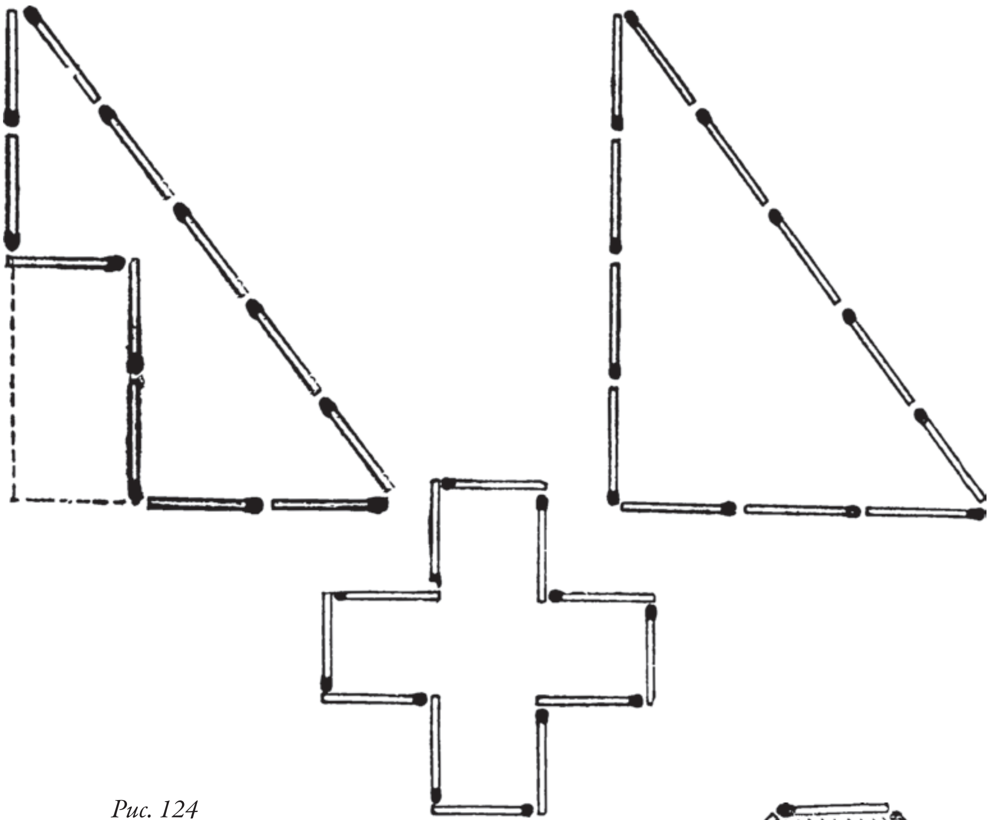


*Рис. 124*

**60.** Можно доказать, что среди всех фигур с одинаковым обводом наибольшую площадь имеет круг. Из спичек, конечно, не сложить круга; однако можно составить из 8 спичек фигуру (рис. 125), всего более приближающуюся к кругу: это — правильный восьмиугольник. Правильный восьмиугольник и есть фигура, удовлетворяющая требованию нашей задачи: она имеет наибольшую площадь.

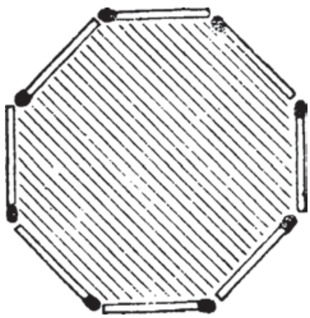


*Рис. 125*

[1] Читатели, знакомые с так называемой «Пифагоровой теоремой», поймут, почему мы с уверенностью можем утверждать, что получающийся здесь треугольник — прямоугольный: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

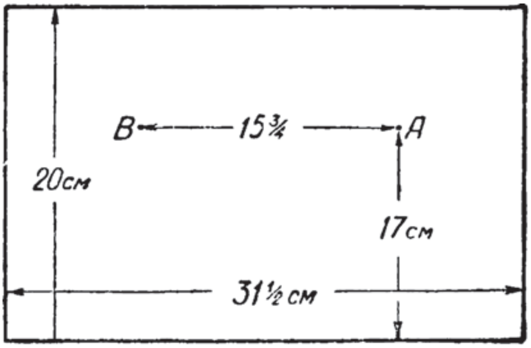



*Рис. 126*

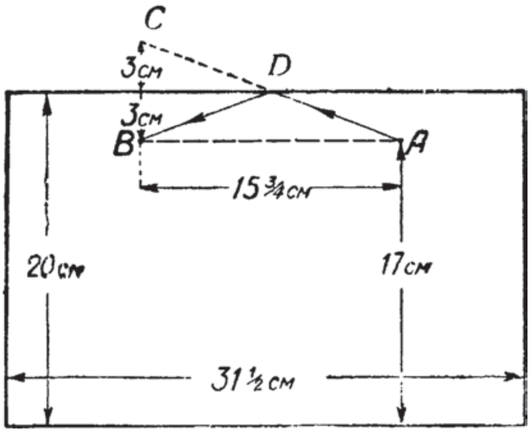



*Рис. 127*

**61.** Для решения задачи развернем боковую поверхность цилиндрической банки в плоскую фигуру: получим прямоугольник (рис. 126), высота которого 20 см, а основание равно окружности банки, т. е. $10 \times 3\frac{1}{7} = 31\frac{1}{2}$ см (без малого) Наметим на этом прямоугольнике положение мухи и медовой капли. Муха — в точке *A*, на расстоянии 7 см от основания; капля — в точке *B*, на той же высоте и в расстоянии полуокружности банки от *A*, т. е. в 15¾ см. Чтобы найти теперь точку, в которой муха должна переползти край банки, поступим следующим образом. Из точки *B* (рис. 127) проведем прямую под прямым углом к верхней стороне прямоугольника и продолжим ее на равное расстояние: получим точку *C*. Эту точку соединим прямой линией с *A*. Точка *D*, как учит геометрия, и будет та, где муха должна переползти на другую сторону банки, а путь *ADB* окажется самым коротким.

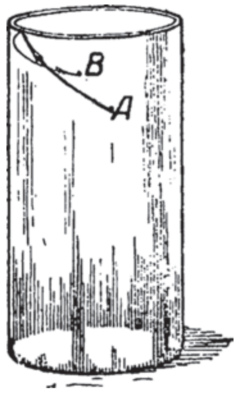



*Рис. 128. Кратчайший путь мухи*

Найдя кратчайший путь на развернутом прямоугольнике, свернем его снова в цилиндр и узнаем, как должна бежать муха, чтобы скорее добраться до капли меда (рис. 128).

Избирают ли мухи в подобных случаях такой путь — мне неизвестно. Возможно, что, руководствуясь обонянием, муха действительно пробегает по кратчайшему пути, — но маловероятно: обоняние для этого недостаточно четкое чувство.

**62.** Нужная в данном случае затычка существует. Она имеет форму, показанную на рис. 129.

Легко видеть, что одна такая затычка действительно может закрыть и квадратное, и треугольное, и круглое отверстия.

**63.** Существует затычка и для тех дыр, которые изображены на рис. 130: круглой, квадратной и крестообразной. Она представлена в трех положениях.

**64.** Существует и такая затычка: вы можете видеть ее с трех сторон на рис. 131.

(Задачи, которыми мы сейчас занимались, приходится нередко разрешать чертежникам, когда по трем «проекциям» какой-нибудь машинной части они должны установить ее форму.)

**65.** Как ни странно, но продеть пятак через такое маленькое отверстие вполне возможно. Надо только суметь взяться за это дело. Бумажку изгибают так, что круглое отверстие вытягивается в прямую щель (рис. 132): через эту щель и проходит пятак.

Геометрический расчет поможет понять этот на первый взгляд замысловатый трюк. Диаметр двухкопеечной монеты — 18 мм; окружность ее, как легко вычислить, равна 56 мм (с лишком). Длина прямой щели должна быть, очевидно, вдвое меньше окружности отверстия, и, следовательно, равна 28 мм. Между тем поперечник пятака всего 25 мм; значит, он может как раз пролезть через 28-миллиметровую щель, даже принимая в расчет его толщину (1½ мм).

**66.** Чтобы по снимку определить высоту башни в натуре, нужно прежде всего измерить возможно

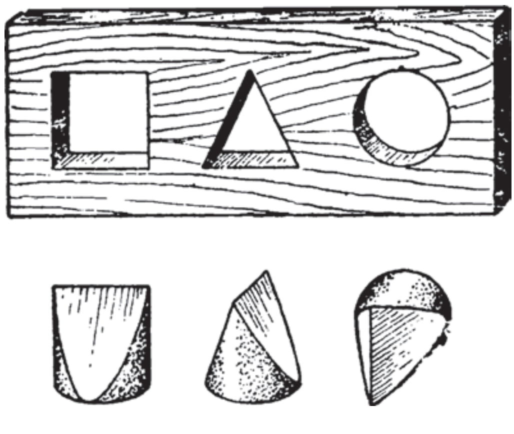


*Рис. 129*

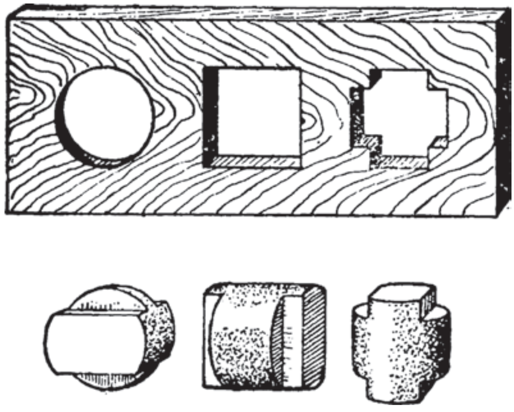


*Рис. 130*

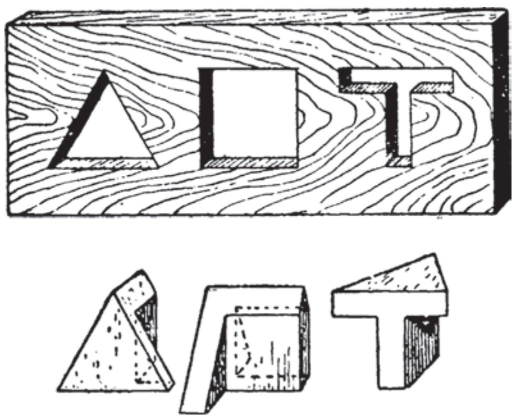


*Рис. 131*

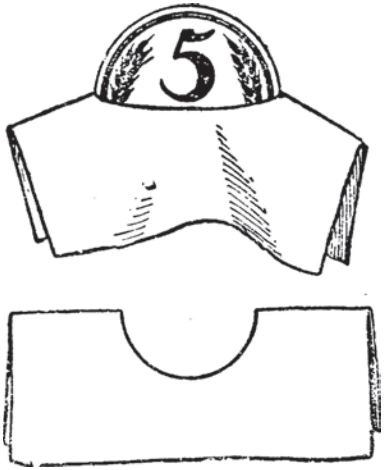



*Рис. 132*

точнее высоту башни и длину ее основания на фотографическом изображении. Предположим, высота на снимке 95 мм, а длина основания — 19 мм. Тогда вы измеряете длину основания башни в натуре; допустим, она оказалась равной 14 м.

Сделав это, вы рассуждаете так: фотография башни и ее подлинные очертания геометрически подобны друг другу. Следовательно, во сколько раз изображение высоты больше изображения основания, во столько же раз высота башни в натуре больше длины ее основания. Первое отношение равно 95 : 19, т. е. 5; отсюда заключаете, что высота башни больше длины ее основания в 5 раз и равна в натуре 14 × 5 = 70 м.

Итак, высота городской башни 70 м.

Надо заметить, однако, что для фотографического определения высоты башни пригоден не всякий снимок, а только такой, в котором пропорции не искажены, как это бывает у неопытных фотографов.

**67.** Часто на оба поставленные в задаче вопроса отвечают утвердительно. В действительности же подобны только треугольники; наружный же и внутренний четырехугольники в фигуре рамки, вообще говоря, не подобны. Для подобия треугольников достаточно равенства углов; а так как стороны внутреннего треугольника параллельны сторонам наружного, то фигуры эти подобны. Но для подобия прочих многоугольников недостаточно одного равенства углов (или — что то же самое — одной лишь параллельности сторон): необходимо еще, чтобы *стороны* многоугольников были *пропорциональны*. Для наружного и внутреннего четырехугольника в фигуре рамки это имеет место только в случае квадратов (и вообще — ромбов). Во всех же прочих случаях стороны наружного четырехугольника не пропорциональны сторонам внутреннего и, следовательно, фигуры не подобны. Отсутствие подобия становится очевидным для прямоугольных рамок с широкими планками, как на рис. 133.

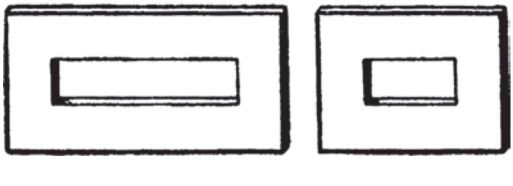


*Рис. 133*

В левой рамке наружные стороны относятся друг к другу как 2 : 1, а внутренние — как 4 : 1. В правой — наружные как 4 : 3, внутренние как 2 : 1.

**68.** Для многих будет неожиданностью, что при решении этой задачи понадобятся сведения из астрономии: о расстоянии Земли от Солнца и о величине солнечного диаметра.

Длина полной тени, отбрасываемой в пространстве проволокой, определяется геометрическим построением, показанным на рис. 134. Легко видеть, что тень во столько раз больше поперечника проволоки, во сколько раз расстояние Земли от Солнца (150 000 000 км) больше поперечника Солнца (1 400 000 км). Последнее отношение равно круглым счетом 115. Значит, длина полной тени, отбрасываемой в пространстве проволокой, равна

$$4 \times 115 = 460 \text{ мм} = 46 \text{ см}.$$

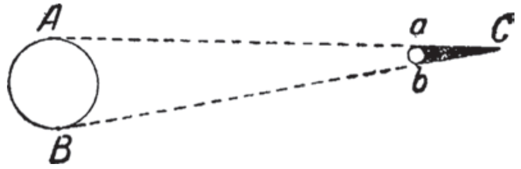



*Рис. 134*

Незначительной длиной полной тени объясняется то, что она бывает не видна на земле или на стенах домов; те слабые полоски, которые различаются при этом — не тени, а полутени.

Другой прием решения таких задач был указан при рассмотрении головоломки 8-й.

**69.** Ответ, что игрушечный кирпичик весит 1 кг, т. е. всего вчетверо меньше, — грубо ошибочен. Кирпичик ведь не только вчетверо короче настоящего, но и вчетверо у́же да еще вчетверо ниже; поэтому объем и вес его меньше в 4 × 4 × 4 = 64 раза. Правильный ответ, следовательно, таков:

Игрушечный кирпичик весит 4 000 : 64 = 62,5 г.

**70.** Вы теперь уже подготовлены к правильному решению этой задачи. Так как фигуры человеческого тела приблизительно подобны, то при вдвое большем росте человек имеет объем не вдвое, а в 8 раз больший. Значит, наш великан весит больше карлика раз в 8.

Самый высокий великан, о котором сохранились сведения, был один житель Эльзаса ростом в 275 см — на целый метр выше человека среднего роста. Самый маленький карлик имел в высоту меньше 40 см, т. е. был ниже исполина-эльзасца круглым счетом в 7 раз. Поэтому если бы на одну чашку весов поставить великана-эльзасца, то на другую надо бы для равновесия поместить 7 × 7 × 7 = 343 карлика, — целую толпу.

**71.** Объем большого арбуза превышает объем меньшего в

$$1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} = \frac{125}{64},$$

почти вдвое. Выгоднее, значит, купить крупный арбуз: он дороже только в полтора раза, а съедобного вещества в нем больше раза в два.

Почему же, однако, продавцы просят за такие арбузы обычно не вдвое, а только в полтора раза больше? Объясняется это просто тем, что продавцы в большинстве случаев не сильны в геометрии. Впрочем, не сильны в ней и покупатели, зачастую отказывающиеся из-за этого от выгодных покупок. Можно смело утверждать, что крупные арбузы выгоднее покупать, чем мелкие, потому что они расцениваются всегда ниже их истинной стоимости; но большинство покупателей об этом не подозревают.

По той же причине всегда выгоднее покупать крупные яйца, нежели мелкие, — если только их не расценивают по весу.

**72.** Окружности относятся между собой как диаметры. Если окружность одной дыни 60 см, другой 50 см, то отношение их диаметров 60 : 50 = $^6/_5$, а отношение их объемов

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{216}{125} = 1{,}73.$$

Бо́льшая дыня должна быть, если оценивать ее сообразно объему (или весу), в 1,73 раза дороже меньшей; другими словами, дороже на 73%. Просят же за нее всего на 50% больше. Ясно, что есть прямой расчет ее купить.

**73.** Из условия задачи следует, что диаметр вишни в 3 раза больше диаметра косточки. Значит, объем вишни больше объема косточки в 3 × 3 × 3, т. е. в 27 раз; на долю косточки приходится $^1/_{27}$ часть объема вишни, а на долю сочной части — остальные $^{26}/_{27}$. И, следовательно, сочная часть вишни больше косточки по объему в 26 раз.

**74.** Если модель легче натуры в 8 000 000 раз и обе сделаны из одного металла, то *объем* модели должен быть в 8 000 000 раз меньше объема натуры. Мы уже знаем, что объемы подобных тел относятся как кубы их высот. Следовательно, модель должна быть ниже натуры в 200 раз, потому что

$$200 \times 200 \times 200 = 8\,000\,000.$$

Высота подлинной башни 300 м. Отсюда высота модели должна быть равна

$$300 : 200 = 1\tfrac{1}{2} \text{ м.}$$

Модель будет почти в рост человека.

**75.** Обе кастрюли — тела, геометрически подобные. Если большая кастрюля в 8 раз вместительнее, то все ее линейные размеры в два раза больше: она вдвое выше и вдвое шире по обоим направлениям. Но раз она вдвое выше и шире, то поверхность ее больше в $2 \times 2$, т. е. в 4 раза, потому что поверхности подобных тел относятся как квадраты линейных размеров. При одинаковой толщине стенок вес кастрюли зависит от величины ее поверхности. Отсюда имеем ответ на вопрос задачи: большая кастрюля *вчетверо* тяжелее меньшей.

**76.** Эта задача, на первый взгляд вовсе не математическая, решается, в сущности, тем же геометрическим рассуждением, какое применено было в предыдущей задаче.

Прежде чем приступить к ее решению, рассмотрим сходную с ней, но несколько более простую задачу:

Два котла (или два самовара), большой и малый, одинакового материала и формы, наполнены кипятком. Какой остынет скорее?

Вещи остывают главным образом с поверхности: следовательно, остынет скорее тот котел, в котором на каждую единицу объема приходится бóльшая поверхность. Если один котел в $n$ раз выше и шире другого, то поверхность его больше в $n^2$ раз, а объем — $n^3$; на единицу поверхности в большом котле приходится в $n$ раз больший объем. Следовательно, меньший котел должен остыть раньше.

По той же причине и ребенок, стоящий на морозе, должен зябнуть больше, чем одинаково одетый взрослый: количество тепла, возникающего в каждом кубическом сантиметре тела, у обоих приблизительно одинаково, но остывающая поверхность тела, приходящаяся на каждый кубический сантиметр, у ребенка больше, чем у взрослого.

В этом нужно видеть также причину того, что пальцы рук или нос зябнут сильнее и отмораживаются чаще, чем другие части тела, поверхность которых не столь велика по сравнению с их объемом.

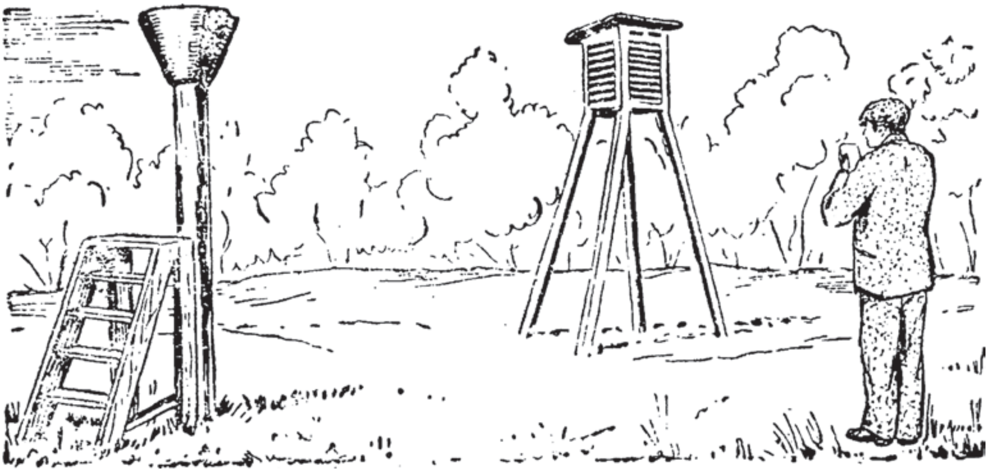
Сюда же, наконец, относится и следующая задача:

Почему лучина загорается скорее, чем толстое полено, от которого она отколота?

Так как нагревание происходит с поверхности и распространяется на весь объем тела, то следует сравнить поверхность и объем лучины (например, квадратного сечения) с поверхностью и объемом полена той же длины и того же квадратного сечения, чтобы определить, какой величины поверхность приходится на каждый кубический сантиметр древесины в обоих случаях. Если толщина полена в 10 раз больше толщины лучины, то боковая поверхность полена больше поверхности лучины тоже в 10 раз, объем же его больше объема лучины в 100 раз. Следовательно, на каждую единицу поверхности в лучине приходится вдесятеро меньший объем, чем в полене: одинаковое количество тепла нагревает в лучине вдесятеро меньше вещества, — отсюда и более раннее воспламенение лучины, чем полена, от одного и того же источника тепла. (Ввиду дурной теплопроводности дерева указанные соотношения следует рассматривать лишь как грубо приблизительные; они характеризуют лишь общий ход процесса, а не количественную сторону.)

77. При некотором усилии воображения задача эта, кажущаяся очень замысловатой, решается довольно просто. Предположим для простоты, что куски колотого сахара в поперечнике больше частичек песка в 100 раз. Представим себе теперь, что все частицы песка увеличились в поперечнике в 100 раз вместе со стаканом, в который песок насыпан. Вместимость стакана увеличится в 100 × 100 × 100, т. е. в миллион раз; во столько же раз увеличится и вес содержащегося в нем сахара. Отсыплем мысленно один нормальный стакан этого укрупненного песку, т. е. миллионную часть содержимого стакана-гиганта. Отсыпанное количество будет, конечно, весить столько, сколько весит обыкновенный стакан обыкновенного песку. Что же, однако, представляет собой отсыпанный нами укрупненный песок? Не что иное, как колотый сахар. Значит, колотого сахара в стакане заключается по весу столько же, сколько и песку.

Если бы вместо стократного увеличения мы взяли шестидесятикратное или какое-нибудь другое — дело нисколько не изменилось бы. Суть рассуждения лишь в том, что куски колотого сахара рассматриваются как тела, геометрически подобные частицам сахарного песку и притом расположенные подобным же образом. Допущение это, конечно, не строго верно, но оно достаточно близко к действительности (если только речь идет именно о колотом, а не о пиленом сахаре).



**Глава X**

# ГЕОМЕТРИЯ ДОЖДЯ И СНЕГА

## I

Принято считать Ленинград очень дождливым городом, гораздо более дождливым, чем, например, Москва. Однако ученые говорят другое: они утверждают, что в Москве дожди приносят за год больше воды, чем в Ленинграде. Откуда они это знают? Можно разве измерить, сколько воды приносит дождь?

Это кажется трудной задачей, а между тем вы можете и сами научиться производить такой учет дождя. Не думайте, что для этого понадобится собрать всю воду, которая излилась на землю дождем. Достаточно измерить только *толщину* того слоя воды, который образовался бы на земле, если бы выпавшая вода не растекалась и не впитывалась в почву. А это совсем не так трудно сделать. Ведь когда идет дождь, то падает он на всю местность равномерно: не бывает, чтобы на одну грядку он принес больше воды, чем на соседнюю.

Стоит лишь поэтому измерить толщину слоя дождевой воды на одной какой-нибудь площадке, и мы будем знать его толщину на всей площади, политой дождем.

Теперь вы, вероятно, догадались, как надо поступить, чтобы измерить толщину слоя воды, выпавшей с дождем. Нужно устроить хотя бы один небольшой участок, где бы дождевая вода не впитывалась в землю и не растекалась. Для этого годится любой открытый сосуд, например ведро. Если у вас имеется ведро с отвесными стенками (чтобы просвет его вверху и внизу был одинаков), то выставьте его в дождь на открытое место[1]. Когда дождь кончится, измерьте высоту воды, накопившейся в ведре, — и вы будете иметь все, что вам требуется для подсчетов.

Займемся подробнее нашим самодельным «дождемером». Как измерить высоту уровня воды в ведре? Вставить в него измерительную линейку? Но это удобно только в том случае, когда в ведре много воды. Если же слой ее, как обычно и бывает, не толще 2–3 см или даже миллиметров, то измерить толщину водяного слоя таким способом сколько-нибудь точно, конечно, не удастся. А здесь важен каждый миллиметр, даже каждая десятая его доля. Как же быть?

Лучше всего перелить воду в более узкий стеклянный сосуд. В таком сосуде вода будет стоять выше, а сквозь прозрачные стенки легко видеть высоту уровня. Вы понимаете, что измеренная в узком сосуде высота воды не есть толщина того водяного слоя, который нам нужно измерить. Но легко перевести одно измерение в другое. Пусть диаметр донышка узкого сосуда ровно в десять раз меньше диаметра дна нашего ведра-дождемера. Площадь донышка будет тогда меньше, чем площадь дна ведра, в 10 × 10, т. е. в 100 раз. Понятно, что вода, перелитая из ведра, должна в стеклянном сосуде стоять в 100 раз выше. Значит, если в ведре толщина слоя дождевой воды была 2 мм, то в узком сосуде та же вода установится на уровне 200 мм, т. е. 20 см.

Вы видите из этого расчета, что стеклянный сосуд по сравнению с ведром-дождемером не должен быть очень узок — иначе его пришлось бы брать чересчур высоким. Вполне достаточно, если стеклянный сосуд уже ведра раз в 5; тогда площадь его дна в 25 раз меньше площади дна ведра, и уровень перелитой воды поднимется во столько же раз. Каждому миллиметру толщины водяного слоя в ведре будет отвечать 25 мм высоты воды в узком сосуде. Хорошо поэтому наклеить на наружную стенку стеклянного сосуда бумажную полоску и на ней нанести через каждые 25 мм деления, обозначив их цифрами 1, 2, 3 и т. д. Тогда, глядя на высоту воды в узком сосуде, вы без всяких пересчетов будете прямо знать толщину водяного слоя в ведре-дождемере. Если поперечник узкого сосуда меньше поперечника ведра не в 5, а, скажем, в 4 раза, то деления надо наносить на стеклянной стенке через каждые 16 мм и т. п.

[1] Ставить надо повыше, чтобы в ведро не попали брызги воды, разбрасываемые дождем при ударе о землю.

Переливать воду в узкий измерительный сосуд из ведра через край очень неудобно. Лучше пробить в стенке ведра маленькое круглое отверстие и вставить в него стеклянную трубочку с пробочкой; через нее переливать воду гораздо удобнее.

Итак, у вас имеется уже снаряжение для измерения толщины слоя дождевой воды. Конечно, ведро и самодельный измерительный сосуд не так аккуратно учитывают дождевую воду, как настоящий дождемер и настоящий измерительный стаканчик, которыми пользуются на метеорологических станциях. Все же ваши простейшие дешевые приборы помогут вам сделать много поучительных расчетов.

К этим расчетам мы сейчас и приступим.

## II

Пусть имеется огород в 40 м длины и 24 м ширины. Шел дождь, и вы хотите узнать, сколько всего воды вылилось на огород. Как это рассчитать?

Начать надо, конечно, с определения толщины слоя дождевой воды: без этой цифры никаких расчетов сделать нельзя. Пусть самодельный ваш дождемер показал, что дождь налил водяной слой в 4 мм высоты. Сосчитаем, сколько кубических сантиметров воды стояло бы на каждом квадратном метре огорода, если бы вода не впиталась в землю. Один квадратный метр имеет 100 см в ширину и 100 см в длину; на нем стоит слой воды высотою в 4 мм, т. е. в 0,4 см. Значит, объем такого слоя воды равен

$$100 \times 100 \times 0{,}4 = 4000 \text{ см}^3.$$

Вы знаете, что 1 кубический сантиметр воды весит 1 г. Следовательно, на каждый квадратный метр огорода выпало дождевой воды 4000 г, т. е. 4 кг. Всего же в огороде квадратных метров

$$40 \times 24 = 960.$$

Значит, с дождем вылилось на него воды

$$4 \times 960 = 3840 \text{ кг},$$

без малого 4 тонны.

Для наглядности сосчитайте еще, много ли ведер воды пришлось бы вам принести на огород, чтобы дать ему поливкой столько же воды, сколько принес дождь. В обычном ведре около 12 кг воды. Следовательно, дождь пролил ведер воды

$$3840 : 12 = 320.$$

Итак, вам пришлось бы вылить на огород более 300 ведер, чтобы заменить то орошение, которое принес дождик, длившийся, быть может, каких-нибудь четверть часа.

Как выражается в числах сильный и слабый дождь? Для этого нужно определить, сколько миллиметров воды (т. е. водяного слоя) выпадает за *одну минуту* дождя — то, что называется «силою осадков». Если дождь был таков, что *ежеминутно* выпадало в среднем 2 мм, то это — ливень чрезвычайной силы. Когда же моросит осенний мелкий дождичек, то 1 мм воды накопляется за целый час или даже за еще больший срок.

Как видите, измерить, сколько воды выпадает с дождем, не только возможно, но даже и не очень сложно.

Более того: вы могли бы, если бы захотели, определить даже, сколько приблизительно отдельных капель выпадает при дожде[1]. В самом деле: при обыкновенном дожде отдельные капли весят в среднем столько, что их идет 12 штук на грамм. Значит, на каждый квадратный метр огорода выпало при том дожде, о котором раньше говорилось,

$$4000 \times 12 = 48\,000 \text{ капель.}$$

Нетрудно далее вычислить, сколько капель дождя выпало и на весь огород. Но расчет числа капель только любопытен; пользы из него извлечь нельзя. Упомянули мы о нем для того лишь, чтобы показать, какие невероятные на первый взгляд расчеты можно выполнять, если уметь за них приняться.

## III

Мы сейчас научились измерять количество воды, приносимое дождем. А как измерить воду, приносимую градом? Совершенно таким же способом. Градины попадают в ваш дождемер и там тают; образовавшуюся от града воду вы измеряете — и получаете то, что вам нужно.

Иначе измеряют воду, приносимую снегом. Здесь дождемер дал бы очень неточные показания, потому что снег, попадающий в ведро, частью выдувается оттуда ветром. Но при учете снеговой воды можно обойтись и без всякого дождемера: измеряют непосредственно толщину слоя снега, покрывающего двор, огород, поле при помощи деревянной планки (рейки). А чтобы узнать, какой толщины *водяной* слой получится от таяния этого снега, надо сделать опыт: наполнить ведро снегом той же рыхлости и, дав ему растаять, заметить, какой высоты получился слой воды. Таким образом вы определите, сколько миллиметров высоты водяного слоя получается из каждого сантиметра слоя снега. Зная это, вам нетрудно уже будет переводить толщину снежного слоя в толщину водяного.

Если будете ежедневно без пропусков измерять количество дождевой воды в течение теплого времени года и прибавите к этому еще воду, запасенную за зиму в виде снега, то узнаете, сколько всего воды выпадает за год в вашей местности. Это очень важный итог, измеряющий количество осадков в данном пункте.

---

[1] Дождь всегда выпадает каплями, — даже тогда, когда нам кажется, что он идет сплошными струями.

(«Осадками» называется вся вообще выпадающая вода, падает ли она в виде дождя, града, снега и т. п.)

Вот сколько осадков выпадает в среднем ежегодно в разных городах нашего Союза:

| | |
|---|---|
| Ленинград | 47 см |
| Вологда | 45 см |
| Архангельск | 41 см |
| Москва | 55 см |
| Кострома | 49 см |
| Казань | 44 см |
| Самара | 39 см |
| Оренбург | 43 см |
| Одесса | 40 см |
| Астрахань | 14 см |
| Кутаис | 179 см |
| Баку | 24 см |
| Свердловск | 36 см |
| Тобольск | 43 см |
| Семипалатинск | 21 см |
| Алма-Ата | 51 см |
| Ташкент | 31 см |
| Енисейск | 39 см |
| Иркутск | 44 см |

Из перечисленных мест больше всех получает с неба воды Кутаис (179 см), а меньше всех Астрахань (14 см), в 13 раз меньше, чем Кутаис. Но на земном шаре есть места, где выпадает воды гораздо больше, чем в Кутаисе. Например, одно место в Индии буквально затопляется дождевой водой: ее выпадает там в год 1260 см, т. е. 12½ м! Случилось раз, что здесь *за одни сутки* выпало больше 100 см воды. Существуют, наоборот, и такие местности, где выпадает осадков еще гораздо меньше, чем в Астрахани: так, в одной области Южной Америки, в Чили, не набирается за *целый год* и 1 см осадков.

Район, где выпадает меньше 25 см осадков в год, является засушливым. Здесь нельзя вести зернового хозяйства без искусственного орошения.

Если вы не живете ни в одном из тех городов, которые перечислены в нашей табличке, то вам придется самим взяться за измерение количества осадков в вашей местности. Терпеливо измеряя круглый год, сколько воды приносит каждый дождь или град и сколько воды запасено в снеге, вы получите представление о том, какое место по влажности занимает ваш город среди других городов Союза.

### IV

Нетрудно понять, что, измерив, сколько воды выпадает ежегодно в разных местах земного шара, можно из этих цифр узнать, какой слой воды в среднем выпадает за год на всю Землю вообще. Оказывается, что на суше (на океанах наблюдения не ведутся) среднее количество осадков за год равно 78 см. Считают, что над океаном проливается примерно столько же воды, сколько и на равный участок суши. Нетрудно вычислить, сколько воды приносится на всю нашу планету ежегодно дождем, градом, снегом и т. п. Но для этого нужно знать величину поверхности земного шара. Если вам неоткуда получить эту величину, вы можете вычислить ее сами следующим образом.

Вам известно, что метр составляет почти в точности 40-миллионную долю окружности земного шара. Другими словами, окружность Земли равна 40 000 000 м, т. е. 40 000 км. Поперечник всякого круга примерно в $3\frac{1}{7}$ раза меньше его окружности. Зная это, найдем поперечник нашей планеты:

$$40\,000 : 3\tfrac{1}{7} = 12\,700 \text{ км.}$$

Правило же вычисления поверхности всякого шара таково: надо умножить поперечник на самого себя и на $3\frac{1}{7}$:

$$12\,700 \times 12\,700 \times 3\tfrac{1}{7} = 509\,000\,000 \text{ км}^2.$$

(Начиная с четвертой цифры результата мы пишем нули, потому что надежны только первые его три цифры.)

Итак, вся поверхность земного шара равна 509 миллионам км$^2$.

Возвратимся теперь к нашей задаче. Вычислим, сколько воды выпадает на каждый квадратный километр земной поверхности. На 1 м$^2$, или на 10 000 см$^2$, выпадает

$$78 \times 10\,000 = 780\,000 \text{ см}^3.$$

В квадратном километре 1000 × 1000 = 1 000 000 м$^2$. Следовательно, на него выпадает воды:

$$780\,000\,000\,000 \text{ см}^3, \text{ или } 780\,000 \text{ м}^3.$$

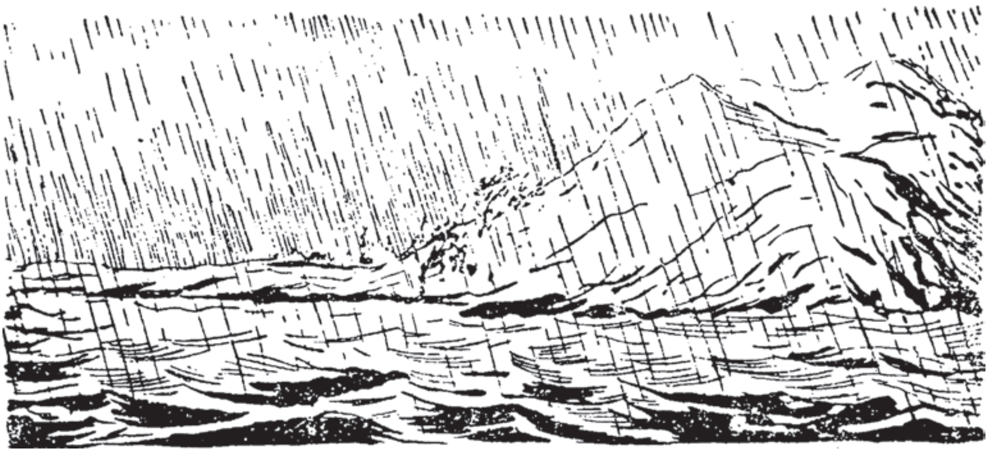
На всю же земную поверхность выпадает

$$780\,000 \times 509\,000\,000 = 397\,000\,000\,000\,000 \text{ м}^3.$$

Чтобы превратить это число кубических метров в кубические километры, нужно его разделить на 1000 × 1000 × 1000, т. е. на миллиард. Получим 397 000 км$^3$.

Итак, ежегодно из атмосферы изливается на поверхность нашей планеты круглым числом 400 000 км$^3$ воды.

На этом закончим нашу беседу о геометрии дождя и снега. Более подробно обо всем здесь рассказанном можно прочитать в книгах по метеорологии.



## Глава XI

# МАТЕМАТИКА И СКАЗАНИЕ О ПОТОПЕ

Среди баснословных преданий, собранных в Библии, имеется сказание о том, как некогда весь мир был затоплен дождем выше самых высоких гор. По словам Библии, Бог однажды «раскаялся, что создал человека на земле», и сказал:

— Истреблю с лица земли (т. е. с поверхности земного шара) человеков[1], которых я сотворил: от человеков до скотов, гадов и птиц небесных истреблю (всех).

Единственный человек, которого Бог хотел при этом пощадить, был праведник Ной. Поэтому Бог предупредил его о готовящейся гибели мира и велел построить просторный корабль (по библейскому выражению «ковчег») следующих размеров: «длина ковчега — 300 локтей, широта[2] его 50 локтей, а высота его 30 локтей». В ковчеге было три этажа. На этом корабле должны были спастись не один Ной со своим семейством и семьями своих взрослых детей, но и все породы наземных животных. Бог велел Ною взять в ковчег по одной паре всех видов таких животных вместе с запасом пищи для них на долгий срок.

Средством для истребления всего живого на суше Бог избрал наводнение от дождя. Вода должна уничтожить всех людей и все виды наземных животных. После этого от Ноя и от спасенных им животных должны появиться новый человеческий род и новый мир животных.

---

[1] Такие выражения, как «человеков» вместо «людей» и др., теперь уже не употребляются; это — старинные обороты речи, встречающиеся в русском переводе Библии.

[2] Опять старинный оборот речи: широта вместо ширина.

«Через семь дней — говорится дальше в Библии — воды потопа пришли на землю... И лился на землю дождь 40 дней и 40 ночей... И умножилась вода и подняла ковчег, и он взвился над водою... И усилилась вода на земле чрезвычайно, так что покрылись все высокие горы, какие есть под всем небом; на 15 локтей поднялась над ними вода... Истребилось всякое существо, которое было на поверхности всей земли. Остался только Ной и что было с ним в ковчеге». Вода стояла на земле — повествует библейское сказание — еще 110 суток; после этого она исчезла, и Ной со всеми спасенными животными покинул ковчег, чтобы вновь населить опустошенную Землю.

По поводу этого сказания поставим два вопроса:

1. Возможен ли был такой ливень, который покрыл весь земной шар выше самых высоких гор?

2. Мог ли Ноев ковчег вместить все виды наземных животных?

Тот и другой вопросы разрешаются при участии математики.

Откуда могла взяться вода, выпавшая с дождем потопа? Конечно, только из атмосферы. Куда же девалась она потом? Целый мировой океан воды не мог ведь всосаться в почву; покинуть нашу планету он, разумеется, тоже не мог. Единственное место, куда вся эта вода могла деться, — земная атмосфера: воды потопа могли только испариться и перейти в воздушную оболочку земли. Там вода эта должна находиться еще и сейчас. Выходит, что если бы весь водяной пар, содержащийся теперь в атмосфере, сгустился в воду, которая излилась бы на землю, то был бы снова всемирный потоп; вода покрыла бы самые высокие горы. Проверим, так ли это.

Справимся в книге по метеорологии, сколько влаги содержится в земной атмосфере. Мы узнаем, что столб воздуха, опирающийся на один квадратный метр, содержит водяного пара в среднем около 16 кг и никогда не может содержать больше 25 кг. Рассчитаем же, какой толщины получился бы водяной слой, если бы весь этот пар осел на землю дождем. 25 кг, т. е. 25 000 г воды занимают объем в 25 000 см$^3$. Таков был бы объем слоя, площадь которого — 1 м$^2$, т. е. 100 × 100, или 10 000 см$^2$. Разделив объем на площадь основания, получим толщину слоя

$$25\,000 : 10\,000 = 2{,}5 \text{ см.}$$

Выше 2,5 см потоп подняться не мог, потому что больше в атмосфере нет воды[1]. Да и такая высота воды была бы лишь в том случае, если бы выпадающий дождь совсем не всасывался в землю.

---

[1] Во многих местностях на земном шаре выпадает за один раз больше 2,5 см осадков; они получаются не только от того воздуха, который стоит над этой местностью, но и от воздуха соседних местностей, приносимого ветром. «Всемирный» же потоп по Библии происходил *одновременно* на всей земной поверхности, и одна местность не могла заимствовать влагу от другой.

Сделанный нами расчет показывает, какова могла бы быть высота воды при потопе, если бы такое бедствие действительно произошло: 2,5 см. Отсюда до вершины величайшей горы Эвереста, возвышающейся на 9 км, еще очень далеко. Высота потопа преувеличена библейским сказанием ни мало ни много — в 360 000 раз!

Итак, если бы всемирный дождевой «потоп» даже состоялся, то это был бы вовсе не потоп, а самый слабый дождик, потому что за 40 суток непрерывного падения он дал бы осадков всего 25 мм — меньше полумиллиметра в сутки. Мелкий осенний дождь, идущий сутки, дает воды в 20 раз больше.

Теперь рассмотрим второй вопрос: могли ли в Ноевом ковчеге разместиться все виды наземных животных?

Вычислим «жилую площадь» ковчега. В нем по библейскому сказанию было три этажа. Размер каждого — 300 локтей в длину и 50 локтей в ширину. «Локоть» у древних народов западной Азии был единицей меры, равнявшейся примерно 45 см, или 0,45 м. Значит, в наших мерах величина каждого этажа в ковчеге была такова:

Длина: $300 \times 0.45 = 135$ м$^2$,
Ширина: $50 \times 0,45 = 22,5$ м$^2$,
Площадь пола: $135 \times 22,5 = 3040$ м$^2$ (последнее число округлено).

Общая «жилплощадь» всех трех этажей Ноева ковчега, следовательно, равнялась:

$$3040 \times 3 = 9\,120 \text{ м}^2.$$

Достаточно ли такой площади для размещения хотя бы только всех видов *млекопитающих* животных земного шара? Число различных видов наземных млекопитающих равно около 3500. Ною приходилось отводить место не только для самого животного, но и для запаса корма для него на 150 суток, пока длился потоп. А хищное животное требовало места и для себя и для тех животных, которыми оно питалось, и еще для корма этих животных. В ковчеге же приходилось в среднем на каждую пару спасаемых животных всего лишь

$$9120 : 3500 = 2,6 \text{ м}^2.$$

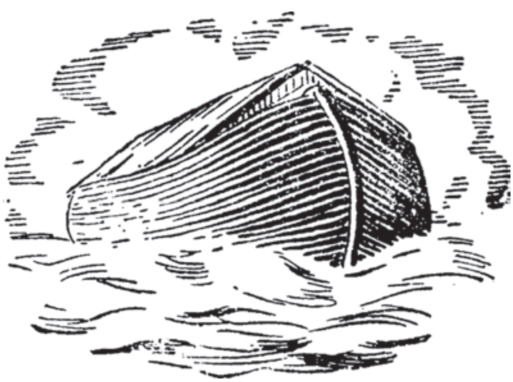
Такая «жилая норма» явно недостаточна, особенно если принять в расчет, что некоторую площадь занимала также многочисленная семья Ноя и что, кроме того, необходимо было оставить проход между клетками.

Но ведь помимо млекопитающих Ноев ковчег должен был дать приют еще многим другим видам наземных животных, не столь крупным, зато гораздо более разнообразным. Число их примерно таково:

| | |
|---|---|
| Птиц | 13 000 |
| Пресмыкающихся | 3 500 |
| Земноводных | 1 400 |
| Паукообразных | 16 000 |
| Насекомых | 360 000 |

Если одним только млекопитающим было бы тесно в ковчеге, то для этих животных и вовсе не хватило бы места. Чтобы вместить все виды наземных животных, Ноев ковчег должен был быть во много раз больше. А между тем при тех размерах, которые указаны в Библии, ковчег являлся уже очень крупным судном: его «водоизмещение», как говорят моряки, было 20 000 тонн. Совершенно неправдоподобно, чтобы в те отдаленные времена, когда техника судостроения была еще в младенческом состоянии, люди могли соорудить корабль подобных размеров. И все же он был недостаточно велик для того, чтобы исполнить назначение, приписываемое ему библейским сказанием. Ведь это должен был быть целый зоологический сад с запасом корма на 5 месяцев!

Словом, библейское сказание о всемирном потопе настолько не вяжется с простыми математическими расчетами, что трудно найти в нем даже частицу чего-либо правдоподобного. Повод к нему подало, вероятно, какое-нибудь местное наводнение; все же остальное — вымысел богатого восточного воображения.



**Глава XII**

## ТРИДЦАТЬ РАЗНЫХ ЗАДАЧ

Я надеюсь, что знакомство с этой книжкой не прошло для читателя бесследно, что оно не только развлекло его, но и принесло известную пользу, развив его сметливость, находчивость, научив более умело распоряжаться своими знаниями. Читатель, вероятно, и сам желал бы теперь испытать на чем-нибудь свою сообразительность. Для этой цели и предназначаются те три десятка разнородных задач, которые собраны здесь, в последней главе нашей книжки.

### 78. Цепь

Кузнецу принесли 5 обрывков цепи, по 3 звена в каждом обрывке, и заказали соединить их в одну цепь.

Прежде чем приняться за дело, кузнец стал думать, сколько колец понадобится для этого раскрыть и вновь заковать. Он решил, что придется раскрыть и снова заковать *четыре* кольца.

Нельзя ли, однако, выполнить работу, раскрыв и заковав меньше колец?

*Рис. 135*

### 79. Пауки и жуки

Пионер собрал в коробку пауков и жуков — всего 8 штук. Если пересчитать, сколько всех ног в коробке, то окажется 54 ноги.

Сколько же в коробке пауков и сколько жуков?

### 80. Плащ, шляпа и галоши

Некто купил плащ, шляпу и галоши и заплатил за все 140 руб. Плащ стоит на 90 руб. больше, чем шляпа, а шляпа и плащ вместе на 120 руб. больше, чем галоши. Сколько стоит каждая вещь в отдельности.

Задачу требуется решить устным счетом, без уравнений.

### 81. Куриные и утиные яйца

Корзины на рис. 136 содержат яйца; в одних корзинах куриные яйца, в других — утиные. Число их обозначено на каждой корзине. «Если я продам вот эту корзину, — размышляет продавец, — то у меня останется куриных яиц ровно вдвое больше, чем утиных».

Какую корзину имел в виду продавец?


*Рис. 136*

### 82. Перелет

Самолет покрывает расстояние от города *A* до города *B* в 1 ч. 20 мин. Однако обратный перелет он совершает в 80 мин. Как вы это объясните?

### 83. Денежные подарки

Двое отцов подарили сыновьям деньги. Один дал своему сыну 150 руб., другой своему — 100 руб. Оказалось, однако, что оба сына вместе увеличили свои капиталы только на 150 рублей. Чем это объяснить?

### 84. Две шашки

На пустую шашечную доску надо поместить две белые шашки. Сколько различных положений могут они занимать на доске?

### 85. Двумя цифрами

Какое наименьшее целое число можете вы написать двумя цифрами?

### 86. Единица

Выразите 1, употребив все десять цифр.

### 87. Пятью девятками

Выразите 10 пятью девятками. Укажите, по крайней мере, два способа.

### 88. Десятью цифрами

Выразите 100, употребив все десять цифр. Сколькими способами можете вы это сделать? Существует не меньше четырех способов.

### 89. Четырьмя способами

Четырьмя различными способами выразите 100 пятью одинаковыми цифрами.

### 90. Четырьмя единицами

Какое самое большое число можете вы написать четырьмя единицами?

### 91. Загадочное деление

В следующем примере деления все цифры заменены звездочками, кроме четырех четверок. Поставьте вместо звездочек те цифры, которые были заменены.

```
******4 | ***
***     |-----
------  | *4**
 **4*
 ****
 -----
  ****
   *4*
  -----
   ****
   ****
  -----
```

Задача эта имеет несколько различных решений.

### 92. Еще случай деления

Сделайте то же с другим примером, в котором уцелело только семь семерок:

```
**7*** **** | *** *7*
******      |--------
------      | **7**
*****7*
*******
  -------
   *7****
   *7****
  --------
   *******
   ****7**
  ---------
      ******
      ******
     -------
```

### 93. Что получится?

Сообразите в уме, на какую длину вытянется полоска, составленная из всех миллиметровых квадратиков одного квадратного метра, приложенных друг к другу вплотную.

### 94. В том же роде

Сообразите в уме, на сколько километров возвышался бы столб, составленный из всех миллиметровых кубиков одного кубометра, положенных один на другой.

### 95. Аэроплан

Аэроплан шириною 12 м был сфотографирован во время полета снизу, когда он пролетал отвесно над аппаратом. Глубина камеры 12 см. На снимке ширина аэроплана равна 8 мм.

На какой высоте летал аэроплан в момент фотографирования?

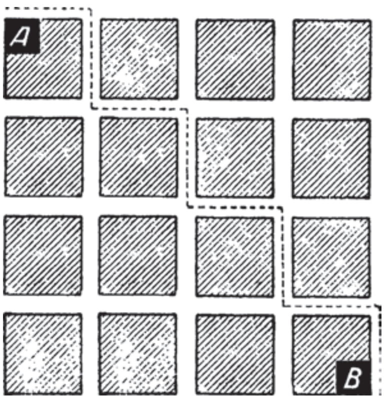



*Рис. 137*

### 96. Миллион изделий

Изделие весит 89,4 г. Сообразите в уме, сколько тонн весит миллион таких изделий.

### 97. Число путей

На рис. 137 вы видите лесную дачу, разделенную просеками на квадратные кварталы. Пунктирной линией обозначен путь по просекам от точки *A* до точки *B*. Это, конечно, не единственный путь между указанными точками по просекам. Сколько можете вы насчитать различных путей одинаковой длины?

### 98. Циферблат

Этот циферблат (рис. 138) надо разрезать на 6 частей любой формы, — так, однако, чтобы сумма чисел, имеющихся на каждом участке, была одна и та же.

Задача имеет целью испытать не столько вашу находчивость, сколько быстроту соображения.

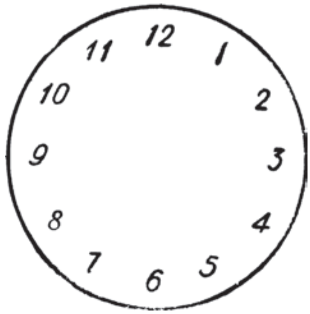



*Рис. 138*

### 99. Восьмиконечная звезда

Числа от 1 до 16 надо расставить в точках пересечения линий фигуры, изображенной на рис. 139, так, чтобы сумма чисел на стороне каждого квадрата была 34 и сумма их на вершинах каждого квадрата также составляла 34.

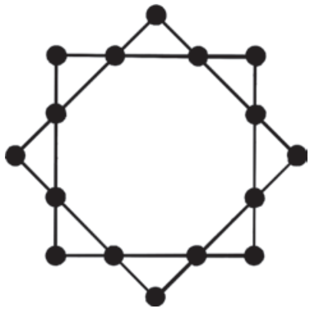


*Рис. 139*

### 100. Числовое колесо

Цифры от 1 до 9 надо разместить в фигуре на рис. 140 так, чтобы одна цифра была в центре круга, прочие — у концов каждого диаметра, и чтобы сумма трех цифр каждого ряда составляла 15.

### 101. Трехногий стол

Существует мнение, что стол о трех ногах никогда не качается, даже если ножки его и неравной длины. Верно ли это?

### 102. Какие углы?

Какие углы составляют между собой стрелки часов на рис. 141? Ответ надо дать по соображению, не пользуясь транспортиром.

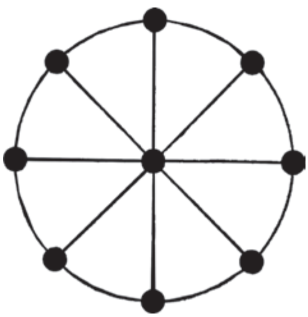


*Рис. 140*

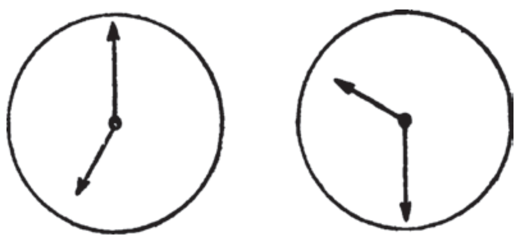


*Рис. 141 Какой величины углы между стрелками?*

### 103. По экватору

Если бы мы могли обойти земной шар по экватору, то макушка нашей головы описала бы более длинный путь, чем каждая точка наших ступней. Как велика эта разница?

### 104. В шесть рядов

Вам известен, вероятно, шуточный рассказ о том, как девять лошадей расставлены были по десяти стойлам и в каждом стойле оказалась одна лошадь. Задача, которая сейчас будет предложена, по внешности сходна с этой знаменитой шуткой, но имеет не воображаемое, а вполне реальное решение. Она состоит в следующем:

Расставить 24 человека в 6 рядов так, чтобы каждый ряд состоял из 5 человек.

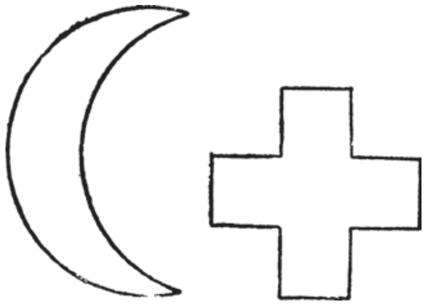


*Рис. 142*

### 105. Крест и полумесяц

На рис. 142 изображена фигура полумесяца[1], составленная двумя дугами окружностей. Требуется начертить знак Красного креста, площадь которого геометрически точно равнялась бы площади полумесяца.

### 106. Задача Бенедиктова

Многие любители русской литературы не подозревают, что поэт В. Г. Бенедиктов является автором первого на русском языке сборника математических головоломок. Сборник этот не был издан; он остался в виде рукописи и был разыскан лишь в 1924 г. Я имел возможность ознакомиться с этой рукописью и даже установил на основании одной из головоломок год, когда она была составлена: 1869 (на рукописи год не обозначен). Предлагаемая далее задача, обработанная поэтом в беллетристической форме, заимствована мною из этого сборника. Она озаглавлена «Хитрое разрешение мудреной задачи».

«Одна баба, торговавшая яйцами, имея у себя к продаже девять десятков яиц, отправила на рынок трех дочерей своих и, вверив старшей и самой смышленой из них десяток, поручила другой три десятка, а третьей полсотни. При этом она сказала им:

— Условьтесь наперед между собой насчет цены, по которой вы продавать будете, и от этого условия не отступайте; все вы крепко держитесь одной и той же цены; но я надеюсь, что старшая дочь моя по своей смышлености даже и при

[1] Строго говоря, это не полумесяц (полумесяц имеет форму полукруга), а лунный *серп*.

общем между вами условии, по какой цене продавать, сумеет выручить столько за свой десяток, сколько вторая выручит за три десятка, да научит и вторую сестру выручить за ее три десятка столько же, сколько младшая за полсотни. Пусть выручки всех троих да цены будут одинаковы. Притом я желала бы, чтобы вы продали все яйца так, чтобы пришлось круглым счетом не меньше 10 коп. за десяток, а за все 9 десятков — не меньше 90 коп., или 30 алтын».

На этом я прерываю пока рассказ Бенедиктова, чтобы предоставить читателям самостоятельно догадаться, как выполнили девушки данное им поручение.

## Решения головоломок 78–106

**78.** Можно выполнить требуемую работу, раскрыв только три звена. Для этого надо освободить звенья одного обрывка и соединить ими концы остальных четырех обрывков.

**79.** Чтобы решить эту задачу, нужно прежде всего припомнить из естественной истории, сколько ног у жуков и сколько у пауков: у жука 6 ног, у паука — 8.

Зная это, предположим, что в коробке были одни только жуки, числом 8 штук. Тогда всех ног было бы $6 \times 8 = 48$, на 6 меньше, чем указано в задаче. Заменим теперь одного жука пауком. От этого число ног увеличится на 2, потому что у паука не 6 ног, а 8.

Ясно, что если мы сделаем три таких замены, мы доведем общее число ног в коробке до требуемых 54. Но тогда из 8 жуков останется только 5, остальные будут пауки.

Итак, в коробке было 5 жуков и 3 паука.

Проверим: у 5 жуков 30 ног, у 3 пауков 24 ноги, а всего $30 + 24 = 54$, как и требует условие задачи.

Можно решить задачу и иначе. А именно: можно предположить, что в коробке были только пауки, 8 штук. Тогда всех ног оказалось бы $8 \times 8 = 64$, — на 10 больше, чем указано в условии. Заменив одного паука жуком, мы уменьшим число ног на 2. Нужно сделать 5 таких замен, чтобы свести число ног к требуемым 54. Иначе говоря, из 8 пауков надо оставить только 3, а остальных заменить жуками.

**80.** Если бы вместо плаща, шляпы и галош куплено было только две пары галош, то пришлось бы заплатить не 140 р., а настолько меньше, насколько галоши дешевле плаща с шляпой, т. е. на 120 р. Мы узнаем, следовательно, что две пары галош стоят $140 - 120 = 20$ р; отсюда стоимость одной пары — 10 р.

Теперь стало известно, что плащ и шляпа вместе стоят $140 - 10 = 130$ р., причем плащ дороже шляпы на 90 р.

Рассуждаем как прежде: вместо плаща со шляпой купим две шляпы. Мы заплатим не 130 р., а меньше на 90 р.

Значит, две шляпы стоят 130 – 90 = 40 р., откуда стоимость одной шляпы 20 р.

Итак, вот стоимость вещей: галоши — 10 р., шляпа — 20 р., плащ — 110 р.

**81.** Продавец имел в виду корзину с 29 яйцами. Куриные яйца были в корзинах с обозначениями 23, 12 и 5; утиные — в корзинах с числами 14 и 6.

Проверим. Всего куриных яиц оставалось:

$$23 + 12 + 5 = 40.$$

Утиных

$$14 + 6 = 20.$$

Куриных вдвое больше, чем утиных, как и требует условие задачи.

**82.** В этой задаче нечего объяснять: самолет совершает перелет в обоих направлениях в одинаковое время, потому что 80 мин. = 1 час. 20 мин.

Задача рассчитана на невнимательного читателя, который может подумать, что между 1 ч. 20 мин. и 80 мин. есть разница. Как ни странно, но людей, попадающихся на этот крючок, оказывается немало, притом среди привыкших делать расчеты их больше, чем среди малоопытных вычислителей. Причина кроется в привычке к десятичной системе мер и денежных единиц. Видя обозначение: «1 ч. 20 мин.» и рядом с ним «80 мин.», мы невольно оцениваем различие между ними как разницу между 1 р. 20 к. и 80 к. На эту психологическую ошибку и рассчитана задача.

**83.** Разгадка недоумения в том, что один из отцов приходился другому сыном. Всех было не четверо, а трое: дед, сын и внук. Дед дал сыну 150 р., а тот передал из них 100 р. внуку (т. е. своему сыну), увеличив собственные капиталы, следовательно, всего на 50 р.

**84.** Первую шашку можно поместить на любое из 64 полей доски, т. е. 64 способами. После того как первая поставлена, вторую шашку можно поместить на какое-либо из прочих 63 полей. Значит, к каждому из 64 положений первой шашки можно присоединить 63 положения второй шашки. Отсюда общее число различных положений двух шашек на доске

$$64 \times 63 = 4032.$$

**85.** Наименьшее целое число, какое можно написать двумя цифрами, не 11, как думают, вероятно, иные читатели, а единица, выраженная таким образом:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4} \text{ и т. д. до } \frac{9}{9}.$$

Знакомые с алгеброй прибавят к этим выражениям еще и ряд других обозначений:

$$1^0, 2^0, 3^0, 4^0 \text{ и т. д. до } 9^0,$$

потому что всякое число в нулевой степени равно единице[1].

**86.** Надо представить единицу как сумму двух дробей

$$\frac{148}{296} + \frac{35}{70} = 1.$$

Знающие алгебру могут дать еще и другие ответы:

$$123456789^0; \quad 234567^{9-8-1}$$

и т. п., так как число в нулевой степени равно единице.

**87.** Два способа таковы:

$$9\frac{99}{99} = 10;$$

$$\frac{99}{9} - \frac{9}{9} = 10.$$

Кто знает алгебру, тот может прибавить еще несколько решений, например:

$$\left(9\frac{9}{9}\right)^{\frac{9}{9}} = 10;$$

$$9 + 99^{9-9} = 10.$$

**88.** Вот 4 решения:

$$70 + 24\frac{9}{18} + 5\frac{3}{6} = 100;$$

$$80\frac{27}{54} + 19\frac{3}{6} = 100;$$

$$87 + 9\frac{4}{5} + 3\frac{12}{60} = 100;$$

$$50\frac{1}{2} + 49\frac{38}{76} = 100.$$

[1] Но неправильны были бы решения $\frac{0}{0}$ или $0^0$: эти выражения не обязательно равны единице.


*Рис. 143*

**89.** Число 100 можно выразить пятью одинаковыми цифрами, употребив в дело единицы, тройки и — всего проще — пятерки:

$$111 - 11 = 100;$$
$$33 \times 3 + \frac{3}{3} = 100;$$
$$5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5 \quad = 100;$$
$$(5 + 5 + 5 + 5) \times 5 = 100.$$

**90.** На вопрос задачи часто отвечают: 1111. Однако можно написать число во много раз большее — именно 11 в одиннадцатой степени: $11^{11}$. Если у вас есть терпение довести вычисление до конца (с помощью логарифмов можно выполнять такие расчеты гораздо скорее), вы убедитесь, что число это больше 280 миллиардов. Следовательно, оно превышает число 1111 в 250 миллионов раз.

**91.** Заданный пример деления может соответствовать четырем различным случаям, а именно:

$$1\,337\,174 : 943 = 1\,418;$$
$$1\,343\,784 : 949 = 1\,416;$$
$$1\,200\,474 : 846 = 1\,419;$$
$$1\,202\,464 : 848 = 1\,418.$$

**92.** Этот пример отвечает только одному случаю деления:

$$7\,375\,428\,413 : 125\,473 = 58\,781.$$

Обе последние, весьма нелегкие задачи были впервые опубликованы в американских изданиях «Математическая газета», 1920 г., и «Школьный мир», 1906 г.

**93.** В квадратном метре тысяча тысяч квадратных миллиметров. Каждая тысяча приложенных друг к другу миллиметровых квадратиков составляет 1 м; тысяча тысяч их составляет 1000 м, т. е. 1 км: полоска вытянется на целый километр.

**94.** Ответ поражает неожиданностью: столб возвышался бы на... 1000 км.

Сделаем устный расчет. В кубометре содержится кубических миллиметров тысяча × тысячу × тысячу.

Каждая тысяча миллиметровых кубиков, поставленных один на другой, дадут столб в 1 м. 1000 м = 1 км. А так как у нас кубиков еще в тысячу раз больше, то и составится 1000 км.

**95.** Из рис. 143 видно, что (вследствие равенства углов 1 и 2) линейные размеры предмета так относятся к соответствующим размерам изображения, как расстояние предмета от объектива относится к глубине камеры. В нашем случае, обозначив высоту аэроплана над землей в метрах через $x$, имеем пропорцию:

$$12\,000 : 8 = x : 0{,}12,$$

откуда $x = 180$ м.

**96.** Расчеты подобного рода выполняются в уме так. Надо умножить 89,4 г на миллион, т. е. на тысячу тысяч.

Умножаем в два приема: 89,4 г × 1000 = 89,4 кг, потому что килограмм в тысячу раз больше грамма. Далее:

$$89{,}4 \text{ кг} \times 1000 = 89{,}4 \text{ тонны},$$

потому что тонна в тысячу раз больше килограмма.

Итак, искомый вес — 89,4 тонны.

**97.** Всех путей по просекам от *А* до *В* можно насчитать 70. (Систематическое решение этой задачи возможно с помощью так называемого Паскалева треугольника, рассматриваемого в курсах алгебры).

**98.** Так как сумма всех чисел, обозначенная на циферблате, равна 78, то числа каждого из шести участков должны составлять вместе 78 : 6, т. е. 13. Это облегчает отыскание решения, которое показано на рис. 145.

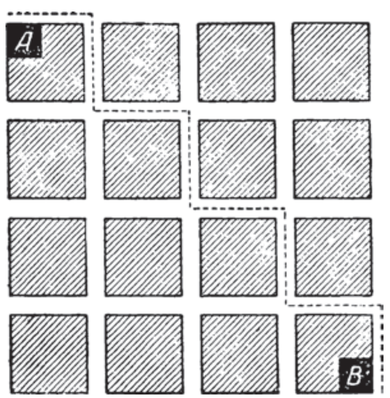



*Рис. 144*

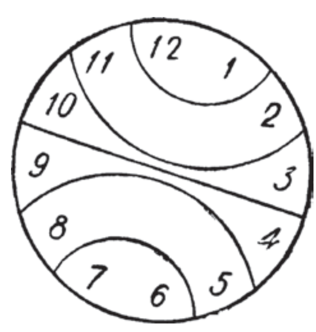



*Рис. 145*

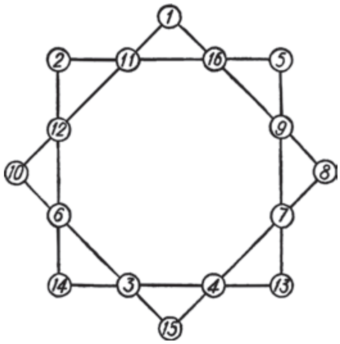



*Рис. 146*

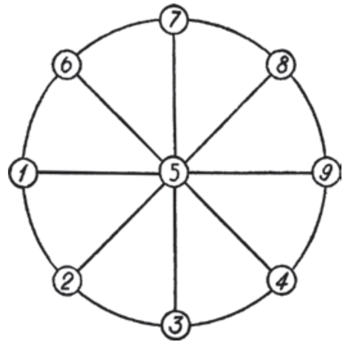



*Рис. 147*

**99–100.** Решения показаны на прилагаемых рис. 146 и 147.

**101.** Трехногий стол всегда может касаться пола концами своих трех ножек, потому что через каждые три точки пространства может проходить плоскость, и притом только одна; в этом причина того, что трехногий стол не качается. Как видите, она чисто геометрическая, а не физическая.

Вот почему так удобно пользоваться треногами для землемерных инструментов и фотографических аппаратов. Четвертая нога не сделала бы подставку устойчивее; напротив, пришлось бы тогда всякий раз заботиться о том, чтобы она не качалась.

**102.** На вопрос задачи легко ответить, если сообразить, какое время показывают стрелки. Стрелки в левом кружке (рис. 141) показывают, очевидно, 7 час. Значит, между концами этих стрелок заключена дуга в $\frac{5}{12}$ полной окружности.

В градусной мере это составляет

$$360° \times \tfrac{5}{12} = 150°.$$

Стрелки в правом кружке показывают, как нетрудно сообразить, 9 час. 30 мин. Дуга между их концами содержит $3\tfrac{1}{2}$ двенадцатых доли полной окружности, или $\frac{7}{24}$.

В градусной мере это составляет

$$360° \times \tfrac{7}{24} = 105°.$$

**103.** Принимая рост человека в 175 см и обозначив радиус Земли через $R$, имеем:

$$2 \times 3{,}14 \times (R + 175) - 2 \times 3{,}14 \times R =$$
$$= 2 \times 3{,}14 \times 175 = 1100 \text{ см},$$

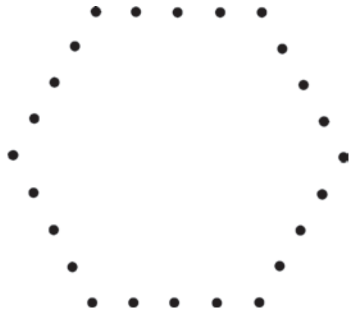


*Рис. 148*

т. е. около 11 м. Поразительно здесь то, что результат совершенно не зависит от радиуса шара и, следовательно, одинаков на исполинском Солнце и маленьком шарике.

**104.** Требованию задачи легко удовлетворить, если расставить людей в форме шестиугольника, как показано на рис. 148.

**105.** Читатели, слыхавшие о неразрешимости задачи квадратуры круга, сочтут, вероятно, и предлагаемую задачу неразрешимой строго геометрически. Раз нельзя превратить в равновеликий квадрат полный круг, то — думают многие — нельзя превратить в прямоугольную фигуру и луночку, составленную двумя дугами окружности.

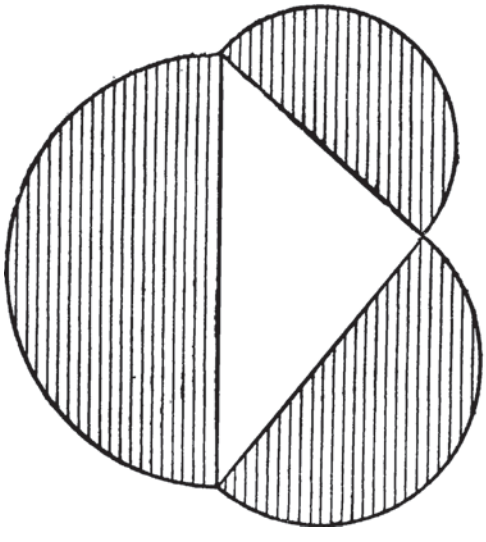


*Рис. 149. Следствие Пифагоровой теоремы*

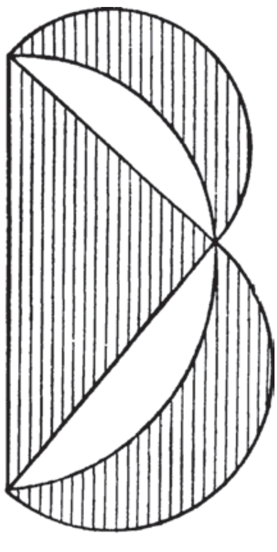


*Рис. 150. Гиппократовы луночки*

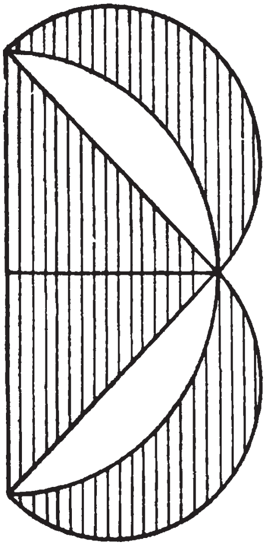


Рис. 151. *Гиппократовы луночки*

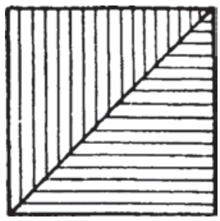


*Рис. 152. Этот квадрат равновелик луночкам рис. 151*

Между тем, задача безусловно может быть решена геометрическим построением, если воспользоваться одним любопытным следствием общеизвестной Пифагоровой теоремы. Следствие, которое я имею в виду, гласит, что сумма площадей полукругов, построенных на катетах, равна полукругу, построенному на гипотенузе (рис. 149). Перекинув большой полукруг на другую сторону (рис. 150), видим, что обе заштрихованные луночки вместе равновелики треугольнику[1]. Если треугольник взять равнобедренный, то каждая луночка в отдельности будет равновелика половине этого треугольника (рис. 151). Отсюда следует, что можно геометрически точно построить равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого равна площади серпа. А так как равнобедренный прямоугольный треугольник легко превращается в равновеликий квадрат (рис. 152), то и серп наш возможно чисто геометрическим построением заменить равновеликим квадратом.

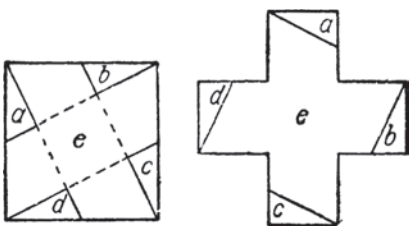



*Рис. 153. Превращение квадрата в крест*

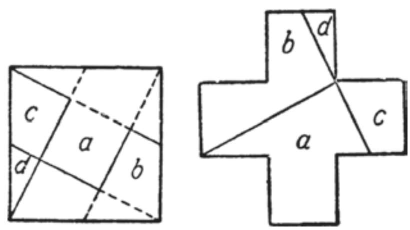



*Рис. 154. Другой способ превращения квадрата в крест*

[1] Положение это известно в геометрии под названием «теоремы о Гиппократовых луночках».

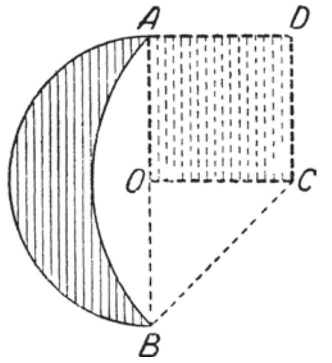



*Рис. 155*

Остается только превратить этот квадрат в равновеликую фигуру Красного креста (составленную, как известно, из 5 примкнутых друг к другу равных квадратов). Существует несколько способов выполнения такого построения; два из них показаны на рис. 153 и 154; оба построения начинают с того, что соединяют вершины квадрата с серединами противоположных сторон.

Важное замечание: превратить в равновеликий крест можно только такую фигуру серпа, которая составлена из двух дуг окружностей: наружного полукруга и внутренней четверти окружности соответственно большего радиуса[1].

Итак, вот ход построения креста, равновеликого серпу. Концы *A* и *B* серпа (рис. 155) соединяют прямой; в середине *O* этой прямой восставляют перпендикуляр и откладывают $OC = OA$. Равнобедренный треугольник *OAC* дополняют до квадрата *OADC*, который превращают в крест одним из способов, указанных на рис. 153 и 154.

**106.** Приводим окончание прерванного рассказа Бенедиктова:

«Задача была мудреная. Дочери, идучи на рынок, стали между собой совещаться, причем вторая и третья обращались к уму и совету старшей. Та, обдумав дело, сказала:

— Будем, сестры, продавать наши яйца не десятками, как это делалось у нас до сих пор, а семерками: семь яиц — семерик; на каждый семерик и цену положим одну, которой все и будем крепко держаться, как мать сказала. Чур, не спускать с положенной цены ни копейки! За первый семерик алтын, согласны?

— Дешевенько, — сказала вторая.

— Ну, — возразила старшая, — зато мы поднимем цену на те яйца, которые за продажею круглых семериков в корзинах у нас останутся. Я заранее проверила,

---

[1] Тот лунный серп, который мы видим на небе, имеет несколько иную форму: его наружная дуга — полуокружность, внутренняя же — *полуэллипс*. Художники часто изображают лунный серп неверно, составляя его из дуг окружности.

что яичных торговок, кроме нас, на рынке никого не будет. Сбивать цены некому; на оставшееся же добро, когда есть спрос, а товар на исходе, известное дело, цена возвышается. Вот мы на остальных-то яйцах и наверстаем.

— А почем будем продавать остальные? — спросила младшая.

— По 3 алтына за каждое яичко. Давай, да и только. Те, кому очень нужно, дадут.

— Дорогонько, — заметила опять средняя.

— Что ж, — подхватила старшая, — зато первые-то яйца по семеркам пойдут дешево. Одно на другое и наведет.

Согласились.

Пришли на рынок. Каждая из сестер села на своем месте отдельно и продает. Обрадовавшись дешевизне, покупщики и покупщицы бросились к младшей, у которой было полсотни яиц, и все их расхватали. Семерым она продавала по семерику и выручила 7 алтын, а одно яйцо осталось у ней в корзине. Вторая, имевшая три десятка, продала 4 покупательницам по семерику, и в корзине у ней осталось два яйца: выручила она 4 алтына. У старшей купили семерик, за который она получила один алтын; 3 яйца остались.

Вдруг явилась кухарка, посланная барыней на рынок с тем, чтобы купить непременно десяток яиц во что бы то ни стало. На короткое время к барыне в гости приехали сыновья ее, которые страшно любят яичницу. Кухарка туда-сюда по рынку мечется: яйца распроданы; всего у трех торговок, пришедших на рынок, осталось только 6 яиц: у одной — одно яйцо; у другой — 2, у третьей — 3. Давай и те сюда!

Разумеется, кухарка прежде всего кинулась к той, у которой осталось 3, а это была старшая дочь, продавшая за алтын свой единственный семерик. Кухарка спрашивает:

— Что хочешь за свои 3 яйца?

А та в ответ:

— По 3 алтына за яичко.

— Что ты? С ума сошла ! — говорит кухарка.

А та:

— Как угодно, — говорит — дешевле не отдам. Это последние.

Кухарка бросилась к той, у которой 2 яйца в корзине.

— Почем?

— По 3 алтына. Такая цена установлена. Все вышли.

— А твое яичишко сколько стоит? — спрашивает кухарка у младшей.

Та отвечает:

— 3 алтына.

Нечего делать. Пришлось купить по неслыханной цене.

— Давайте сюда все остальные яйца.

И кухарка дала старшей за ее 3 яйца — 9 алтын, что составляло с имевшимся у нее алтыном — 10; второй заплатила за ее пару яиц — 6 алтын; с вырученными за 4 семерика 4 алтынами это составило также 10 алтын. Младшая получила от кухарки за свое остальное яичко — 3 алтына и, приложив их к 7 алтынам, вырученным за проданные прежде 7 семериков, увидела у себя в выручке тоже 10 алтын.

После этого дочери возвратились домой и, отдав своей матери каждая по 10 алтын, рассказали, как они продавали и как, соблюдая относительно цены одно общее условие, достигли того, что выручки как за один десяток, так и за три десятка и за полсотни оказались одинаковыми.

Мать была очень довольна точным выполнением данного ею дочерям своим поручения и находчивостью своей старшей дочери, по совету которой оно выполнилось; а еще больше осталась довольна тем, что и общая выручка дочерей — 30 алтын, или 90 копеек — соответствовала ее желанию».

Читателя заинтересует, быть может, что представляет собою та неопубликованная рукопись В. Г. Бенедиктова, из которой заимствована сейчас приведенная задача. Труд Бенедиктова не имеет заглавия, но о характере его и о назначении подробно говорится во вступлении к сборнику.

«Арифметический расчет может быть прилагаем к разным увеселительным занятиям, играм, шуткам и т. п. Многие так называемые *фокусы* (подчеркнуто в рукописи) основываются на числовых соображениях, между прочим и производимые при посредстве обыкновенных игральных карт, где принимается в расчет или число самих карт, или число очков, представляемых теми или другими картами, или и то и другое вместе. Некоторые задачи, в решение которых должны входить самые громадные числа, представляют факты любопытные и дают понятие об этих превосходящих всякое воображение числах. Мы вводим их в эту дополнительную часть арифметики. Некоторые вопросы для разрешения их требуют особой изворотливости ума и могут быть решаемы, хотя с первого взгляда кажутся совершенно нелепыми и противоречащими здравому смыслу, как, например, приведенная здесь между прочим задача под заглавием „Хитрая продажа яиц“. Прикладная практическая часть арифметики требует иногда не только знания теоретических правил, излагаемых в чистой арифметике, но и находчивости, приобретаемой через умственное развитие при знакомстве с различными сторонами не только дел, но и безделиц, которым поэтому дать здесь место мы сочли не излишним».

В эпоху составления сборника Бенедиктова (1869 г.) на русском языке не издано было еще ни одного сочинения подобного содержания, не только оригинального, но даже и переводного. Да и на Западе имелось только два старинных французских сочинения — Баше де Мезирьяка (1612 г.) и 4-томный труд Озанама (1694 г. и ряд позднейших переизданий). По планировке и отчасти по содержанию труд Бенедиктова приближается к книге Баше.

Сочинение разбито на 20 коротких ненумерованных глав, имеющих каждая особый заголовок, в стиле труда Баше де Мезирьяка «Занимательные и приятные задачи». Первые главы носят следующие заголовки: «Так называемые магические квадраты», «Угадывание задуманного числа от 1 до 30», «Угадывание втайне распределенных сумм», «Задуманная втайне цифра, сама по себе обнаруживающаяся», «Узнавание вычеркнутой цифры» и т. п. Затем следует ряд карточных фокусов арифметического характера. После них — любопытная глава «Чародействующий полководец и арифметическая армия», умножение с помощью пальцев, представленное в форме анекдота; далее — перепечатанная мною выше задача с продажей яиц. Предпоследняя глава «Недостаток в пшеничных зернах для 64 клеток шахматной доски» рассказывает известную уже нашим читателям старинную легенду об изобретателе шахматной игры[1].

Наконец, 20 глава: «Громадное число живших на земном шаре обитателей» заключает любопытную попытку подсчитать общую численность земного населения за все время существования человечества (подробный разбор подсчета Бенедиктова сделан мною в книге «Занимательная алгебра»[2]).


[1] Обработка легенды в той беллетристической форме, в какой она дана в главе VII, принадлежит мне.

[2] См. с. 316 (*примеч. ред.*).

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### «Занимательная арифметика»

**«Занимательная геометрия»**



*Часть первая*
*Геометрия на вольном воздухе*

## «Занимательная математика»



## «Живая математика»

Яков Исидорович Перельман
ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

БИБЛИОТЕКА МИРОВОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Том 153

На основании п. 2.3 статьи 1 Федерального закона № 436-ФЗ от 29.12.2010 не требуется знак информационной продукции, так как данное издание классического произведения имеет значительную историческую, художественную и культурную ценность для общества

Верстка, обработка иллюстраций,
дополнительные комментарии
*В. Шабловского*

Дизайн обложки, подготовка к печати
*А. Яскевича*

Сдано в печать 22.03.2023
Объем 48 печ. листов
Тираж 3100 экз.
Заказ № 1633/23

Бумага
Сыктывкарская пухлая книжная кремовая офсетная 60 г/м$^2$

ООО «СЗКЭО»
Телефон в Санкт-Петербурге: +7 (812) 365-40-44
E-mail: knigi@szko.ru
Интернет-магазин: www.сзкэо.рф

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт»,
170546, Тверская область, Промышленная зона Боровлево-1,
комплекс № 3А, www.pareto-print.ru

Яков Исидорович Перельман (1882–1942) не был ни физиком, ни математиком, ни астрономом, — он окончил Лесной институт в Санкт-Петербурге (ныне СПбГЛТУ). Не был он ни литератором, ни педагогом, — но состоял в переписке с крупнейшими учеными и писателями всего мира, работал над составлением новых учебников и задачников по математике и физике, прочитал более двух тысяч популярных лекций, написал около сотни научно-популярных книг и бесчисленное множество журнальных статей. Он не сделал никаких научных открытий или изобретений, — но участвовал в разработке проекта первой советской противоградовой ракеты, стал инициатором введения в нашей стране декретного времени, одним из основоположников жанра научно-популярной литературы и автором термина «научная фантастика». Он не имел каких-либо ученых степеней и званий, — но благодарные читатели в своих письмах неизменно обращались к нему «Дорогой профессор!».

Все потому, что в своих сочинениях Яков Исидорович излагал сложные научные проблемы в собственном неповторимом стиле, с поразительными ясностью и наглядностью; в самых, казалось бы, сухих и скучных темах он умел обнаружить яркие, увлекательные черты, и они становились предельно понятными даже неподготовленному читателю. Не удивительно, что книги «народного профессора Советского Союза» выдержали десятки переизданий, были переведены на многие языки, от английского до хинди, а общий тираж их составил на данный момент десятки миллионов экземпляров.

В настоящий сборник вошли пять книг Перельмана — «Занимательная арифметика», «Занимательная алгебра», «Занимательная геометрия», «Занимательная математика» и «Живая математика». Эти сочинения приобщают к миру научных знаний, помогают привить читателю вкус к изучению точных наук, вызывают интерес к самостоятельным творческим занятиям.

При редактировании мы лишь заменили некоторые устаревшие цифры, сделали отдельные дополнения и примечания, но по возможности сохранили дух того времени, когда эти статьи создавались, — когда самолет чаще называли аэропланом, Альберт Эйнштейн был скромным служащим Бюро патентов, а английский фантаст Герберт Уэллс радовал читателей своими новыми сочинениями. Благо научное содержание статей Якова Исидоровича подобрано таким образом, что не способно устареть никогда.

Все рисунки в этих книгах выполнил (в тесном контакте с самим Перельманом) штатный художник ленинградского издательства «Время» Юрий (Георгий) Дмитриевич Скалдин (1891–1951), умевший великолепно иллюстрировать самые сложные научные явления и опыты.