区组设计

(v,b,r,k,λ) v×b关联矩阵

$r=\frac{\lambda(v-1)}{k-1}$， $b=\frac{vr}{k}=\frac{\lambda v(v-1)}{k(k-1)}$

对偶设计

(v,b,r,k,λ) →(b,v,k,r,λ1)：任意两区组交于λ个点。

对称BIBD

b=v,r=k,λ(v-1)=k(k-1)。含义：任意两区组交集大小λ。

对称BIBD的对偶设计也是对称BIBD。

射影平面（对称BIBD）

n阶：$(n^2+n+1,n+1,1)$。$r=n+1$ $b=n^2+n+1$

对任意素数幂q大于2，存在q阶射影平面。

仿射平面(n阶射影平面的剩余设计)：$(n^2,n^2+n,n+1,n,1)$

判断存在

(v,3,1)-BIBD存在充要条件： v=1，3（mod6）

Fisher： 对任意BIBD，有b≥v。$r\geq k$, $\lambda(v-1)\geq k(k-1)$。(利用MT矩阵)

必要条件： 对称BIBD，且v为偶数，k-λ必须为完全平方数。

由已知BIBD得新BIBD

相加： (v,k,λ1+λ2)

(v,b,b-r,v-k,b-2r+λ)（最后一个参数简单容斥原理）

对称导出Der： $(k, v-1, k-1, \lambda, \lambda-1)$

对称剩余Res： $(v-k, v-1, k, k-\lambda, \lambda)$

1	3	4	5	9
4	5	2	6	10
3	5	6	7	0

拉丁方

n×n阵列，n元集合X，使每行每列均含X所有元素各一次。

对称幂等充要条件： n为奇数。

相互正交拉丁方： $N(n)\leq n-1$。

正交表： OA(k,n)，n^2×k阵列，元素取自n元集合X，任意两列X×X每个序对恰好出现一行。

关系： $k-2$ $MOLS(n)\Leftrightarrow OA(k,n)$.（OA前两列固定填法11223344和12341234，后k-2列每列是一个拉丁方按行展开）

构造：

对称幂等：利用对角线等于2xmodn=i得出，行列的加法表X，(i,j)即可由加法表得到。

v=6t+3的（v,3,1):依赖于2t + 1阶的既对称又幂等的拉丁方L (l_{ij})。X= {0,1,...,2t}，点集Y= X x Z3(0,1,2)。区组有两种类型。第一种:对任意x∈X,Ax = {(x, 0),(x,1),(x,2)}.第二种:对任一x,y∈X, x≠y，任意i∈Z3,Bx,y,i= {(x,i),(y,i),(lx,y,i+ 1)}。

奇数阶正交拉丁方：

- $L_1(i,j) = i + j$, $L_2(i,j) = i - j$. (模n意义下计算).
- 包含序对(x,y)的唯一位置(i,j)可如下求解：$i + j = x, i - j = y$.
- 解得$i = (x + y)2^{-1}, j = (x - y)2^{-1}$.

差集

(v,k,λ):G是v阶有限群，|D|=k，$\Delta(D) = [x - y : x, y \in D, x \neq y]$

包含G中每个非零元恰λ次。

必要条件： λ(v − 1) = k(k − 1)。

平移： Dev(D) = $\{D + g : g \in G\}$。(G, Dev(D))是对称BIBD。

验证每个序对 $\{x, y\}$ 恰好出现于 λ 个区组中。
作为推论, D 的任何两个不同的平移交于恰好 λ 个点。

二次剩余差集： q≡ 3 (mod 4)，−1 $\in QNR(q)$，$QR(q)$是一个$\left(q, \frac{q-1}{2}, \frac{q-3}{4}\right)$差集。

阿达马矩阵

每行列相加为0。

n阶必须4倍数。

4m阶阿达马矩阵存在充要条件：(4m − 1, 2m − 1, m − 1)对称BIBD。（标准化阿达马删首行列，-1变0）

$H1 \otimes H2$是$n1n2$阶阿达马矩阵。

染色

Sn阶对称群，每个子群为置换群。

Cn为n阶循环群。Dn为2n阶二面体群。

Burside引理： $N(G, \mathcal{C}) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathcal{C}(g)|$（G中各元素不动点集合大小平均值）

n个物品在圆桌：(n-1)! n个物品串项链：(n-1)!/2 正五边形p着色：$N(G, \mathcal{C}) = \frac{1}{10}\left(p^5 + 4p + 5p^3\right)$对图形二着色（仍然从二面体群出发）

置换的轮换分解： g= $[6,8, 5, 4, 1, 3, 2, 7] \rightarrow g$ = (1635)∘(287)∘(4)（不能忽略1-轮换！）

D_{2t}:t个反射-t个2-轮换；t个反射-t-1个2-轮换+2个1-轮换。

D_{2t+1}:2t+1个反射-t个2-轮换+1个1-轮换。

$|\mathcal{C}(g)| = k^{\#(g)}$

循环指数： $P_G(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} z_1^{e_1} z_2^{e_2} \cdots z_n^{e_n}$

Polya计数： u_i为k种颜色集合，$P_G\left(u_1 + \cdots + u_k, u_1^2 + \cdots + u_k^2, \cdots, u_1^n + \cdots + u_k^n\right)$
$u_1^{p_1} u_2^{p_2} \cdots u_k^{p_k}$ 的系数第i种颜色有p_i个的等价类的数目。

方法： 先写出z_n表达式，再代入u_k求系数。

三维空间立方体： 1)恒等变换。2)以相对两面中心连线为轴旋转: 3 x 3=9. (a.90, b.180, c.270degrees)。3)以相对两棱的中点连线为轴的旋转，6. (180 degrees)。4)以相对两点的连线(体对角线)为轴的旋转，2x 4=8. (a.120,b.240 degrees)。

i个顶点不同构:

不可区分球和盒子: 挡板法先找出分配，再对对称群(n!)找每一个不动点。

第8讲

$w(G) = \alpha(G_{补})$

$w(G_{补}) = \alpha(G)$

ω(*G*)：最大团的大小（完全图）。
α(*G*)：最大独立集的大小（空图）。

χ(*G*)性质

$\chi(G) = k$

$\chi(G) \geq \omega(G)$

$\chi(G) \leq maxdeg(v) + 1(完全图和奇圈取等)$

$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$

$\chi(G) \leq 1 + max_i min\{d_i, i-1\}(d_i 按降序排列)$

Mycielski递归构造：χ(G)无穷大，*ω*(*G*)=2。

由 $G_2 = K_2$ 开始。
从 G_i 构造 G_{i+1} 的过程如下:

- $V(G_i) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$。
- 添加 n 个顶点 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, 对每个$u_p$连接 $N_{G_i}(v_p)$ 中 的所有点。
- 最后添加顶点 w, 使之与 $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ 连接。

α(*G*)上界、下界

$\alpha \leq n - \delta(\delta_{最小度})$

$\alpha \leq n - \frac{e}{\Delta}(\Delta_{为最大度})$
$\alpha(G) \geq \frac{n}{\chi(G)}$
$\alpha(G) \geq \frac{n}{1+\Delta}$
$\alpha(G) \geq \frac{n}{1+d_{average}}$
$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{1+d_v}$

Wei和Caro寻找独立集算法，每次取G中度数最小的点v放入I，在G中去掉v和它的邻居。

香农容量

*G*1 **G*2：顶点笛卡尔积，边集: 任意两个不同的点 (v_1, v_2) 与 (u_1, u_2) 相连当且仅当对 于 $i = 1, 2, v_i = u_i$ 或者 $\{v_i, u_i\} \in E_i$.

$\Theta(G) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\alpha(G * n)}$

第9讲

完美匹配

$K_{n,n}$ ： $n!$ 偶圈 C_n ： 2 K_{2n} ： $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ Petersen: 6

m(G)：最大匹配边数。

C_n、Perterson最小的极大匹配：$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$

交错路径： M内外的边交错出现。
增广路径： 交错路径且**起点终点**都未被浸润。

M是最大匹配，不存在M-增广路径。

霍尔匹配定理： 二部图中浸润 X 的最大匹配存在当且仅当对任意 $S \subseteq X$ 有 $|N(S)| \geq |S|$ 。（每个k正则二部图有完美匹配）

相异代表元： 一组x_i满足$x_i \in B_i$。

分解

将 K_n 分解为 t 份给定的图 G : 必要条件 $\binom{n}{2} = t \cdot e(G)$。
当 n 为偶数时, K_n 可分解为 $\frac{n}{2}$ 份 P_{n-1} 。
当 n 为奇数时, K_n 可分解为 $\frac{n-1}{2}$ 份 C_n 。

令 $n = 2p$，$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) = (1, 2p-2, 3, \ldots, p, \ldots, 2p-3, 2, 2p-1)$.

从每个 v_i 出发, $0 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$, 考虑路径$v_i \sim v_{i+a_1} \sim v_{i+a_1+a_2} \sim \cdots \sim v_{i+a_1+\cdots+a_{n-1}}$

其中加法按照模 $2p$ 运算。

顶点覆盖vc(G):满足每条边至少1个点落在Q中的最小Q。

$\alpha(G) + vc(G) = n(G)$

$vc\left(K_n\right) = n-1$ - $\alpha\left(K_n\right) = 1$
$vc\left(C_n\right) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ - $\alpha\left(C_n\right) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$
$vc\left(Q_n\right) = 2^{n-1}$ - $\alpha\left(Q_n\right) = 2^{n-1}$
$vc(\text{ Petersen }) = 6$ - $\alpha(\text{ Petersen }) = 4$

$vc(G) \geq m(G)$：二部图取等。

对偶定理

原规划 P对偶规划 D：令 z^* 和 w^* 为两个规划最优值

$$\begin{array}{llll}
\max & z = c^T x & \min & w = b^T y \\
\text{s.t.} & Ax \leq b & \text{s.t.} & A^T y \geq c \\
 & x \geq 0 & & y \geq 0
\end{array}$$

- (弱对偶) $z^* \leq w^*$.
- (强对偶) 如果 z^* 是有限值, 则 w^* 也是有限值, 且 $z^* = w^*$。

m(G):max z=1x,Ax≤1

vc(G):min w=1y,A_Ty≥1

上述A为关联矩阵。

通常： 点集A用邻接矩阵；边集A用关联矩阵。

第10讲

点连通度

κ(G)：最小点割集。

k-连通：κ(G)≥k。

$\kappa(G) \le \delta(G)\ \ \kappa(Peterson)=3\ \ \kappa(C_n)=2\ \ \kappa(Q_n)=n$

```
G是2-连通的。
任意3点存在连接ab回避c的路径。
任意2点ab之间存在2条无公共顶点的路径。
任意2点存在包含ab的一个圈。
```

G是k-连通图当且仅当对任意不相邻的{a, b}, a和b之间存在k条无公共顶点的路径。

边连通度

$\kappa'(G) \le \delta(G)\ \ \kappa'(Peterson)=3\ \ \kappa'(C_n)=2\ \ \kappa'(Q_n)=n$

Whitney定理： $\kappa(G) \le \kappa'(G) \le \delta(G)$

Harary图（Z_n）、凯莱图

$k=2t$, 连边 $x-y \in \{\pm1,\pm2,\ldots,\pm t\}$。

$k=2t+1$ 且 $n=2p$, 连边$x-y \in \{\pm1,\pm2,\ldots,\pm t,p\}$。
$k=2t+1$ 且 $n=2p+1$, 则 $H_{k,n}$ 在 $H_{k-1,n}$ 的基础上添加边 $\{i,i+p\}_{0\le i\le p}$. (注意此时点 p 的度数为 $k+1$.)

$\kappa\left(H_{k,n}\right)=k$, 于是 n 个点上连通度为 k 的图的最小边数为 $\left\lceil \frac{kn}{2} \right\rceil$.

凯莱图Γ(H,S)：以H为点集，连边当$x-y\in S$，凯莱图是|S|-正则图。

满连通度： d-正则，$\kappa(G)=d$。eg：$n \ge 2t+1$，$\Gamma(Zn, \{\pm1, \cdots, \pm t\})$。

第11讲

图的邻接矩阵：V×V。A^h:是x→y长度为h的游走数。

$A\mathbf{x}=\lambda_1\mathbf{x}$, $A\mathbf{y}=\lambda_2\mathbf{y}$, $\lambda_1\neq\lambda_2$，则$\mathbf{x}$和$\mathbf{y}$正交。

对于A的任意特征值λ_i，重数为m_i，A的从属于λ_i的特征子空间的维度为m_i. (代数重数=几何重数)

对于A的任意特征值λ_i，$m_i=n-rank(\lambda_i I-A)$.

特征值是特征多项式$\phi(G;\lambda)=\det(\lambda I-A)=\prod_{i=1}^n(\lambda-\lambda_i)$的根。

迹： $\sum_{i=1}^n \lambda_i = tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$

行列式： $\prod_{i=1}^n \lambda_i = (-1)^n \phi(G;0) = \det A$.

矩阵的谱指的是其所有不同的特征值$\lambda_1,\ldots,\lambda_t$及它们对应的重数$m_1,\ldots,m_t$，记作$Spec(G)=\binom{\lambda_1\ \cdots\ \lambda_t}{m_1\ \cdots\ m_t}$，其中$m_1+\cdots+m_t=n$.

$\phi(G;\lambda)=\det(\lambda I-A)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)\triangleq\sum_{i=0}^{n}c_i\lambda^{n-i}$. $c_i=(-1)^i\sum_{|S|=i}\det A(G_S)$

c1=0 c2=-e(G) c3=-2#(C3)(图中3圈个数)

等价：G是二部图 λ和-λ均是重数为m特征值 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{2t-1}=0$.

综上，如果k-正则图G的特征值为$k>\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n$，则$\overline{G}$的特征值为$n-k-1\geq-1-\lambda_n\geq\cdots\geq-1-\lambda_2\}$.

(n,k,λ,μ)-强正则图:G是k-正则图;任意两个相邻的顶点有λ 个公共邻居;任意两个不相邻的顶点有μ个公共邻居。$k(k-\lambda-1)=\mu(n-k-1)$.

一个k-正则连通图G是(n, k,λ, μ)-强正则图当且仅当G只有3个特征
值k> r> S,其中r+s=λ-μ, rs=μ-k.

强正则补图:G是(n,n-k-1,n-2-2k+μ,n- 2k +λ)-强正则图。

$C4:(4,2,0,2)$. $C5:(5,2,0,1)$.Petersen(10, 3, 0, 1).“Triangular graph” $(\binom{m}{2},2(m-2),m-2,4)$.

第12、13讲

拉姆塞数

R(2,t)=2

R(s,t) ≤ R(s-1,t)+R(s,t-1)

支配数：点集S∈V(G),任意v有v∈S或v有一个邻居∈S。

$K_n:1/K_{s,t}:2/C_n:\frac{n}{3}(\text{上取整})/Perterson:3$

局部引理：An为一族事件，依赖关系图每个顶点出度≤d，每个顶点**Pr**$(A_i)\leq p$，$ep(d+1)\leq 1$，则 $\mathbf{Pr}(\bigwedge_{i=1}^{n}\overline{A_i})>0$.