PROJET OPTIMISATION CONNEXITÉ FORTE

Maxime Vincent
le 15/05/2023

1.

$$\max \sum_{j \in \rho^+(\alpha)} \varphi_{\alpha j}$$ On maximise le flot sortant du sommet α.

$$\varphi_{ij} \leqslant M_{ij} \quad \forall (i,j) \in E^2$$ Le flot de l'arc (i,j) ne peut pas excéder la capacité de l'arête.

$$\varphi_{ij} \geqslant 0 \quad \forall (i,j) \in E^2$$ Le flot de l'arc (i,j) ne peut pas être négatif. Dans notre cas on peut même utiliser des variables binaires telles que $\varphi_{ij} \in \{0,1\}$.

$$\sum_{j \in \rho^-(i)} \varphi_{ji} = \sum_{j \in \rho^+(i)} \varphi_{ij} \quad \forall i \in E \setminus \{\alpha, \beta\}$$

Le flot entrant du sommet i doit être égal à son flot sortant de manière à former un chemin continu.

$$\sum_{i \in \rho^-(\alpha)} \varphi_{i\alpha} = 0$$ Aucun flot ne doit entrer dans la source α.

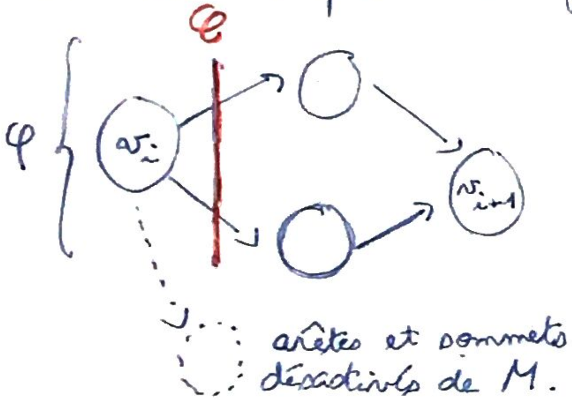
$$\sum_{j \in \rho^+(\beta)} \varphi_{\beta j} = 0$$ Aucun flot ne doit sortir de la cible β.

Voici le programme linéaire permettant de résoudre le problème du flot maximal dans un graphe G entre le sommet α et β.
E est l'ensemble des sommets de G. On représente le graphe sous la forme d'une matrice d'adjacence $M_{ij} \in \{0, 1\}$. Dans notre cas la capacité de chaque arête ne peut pas excéder 1. On pourrait évidemment généraliser le problème mais ici on utilise des variables binaires $\varphi_{ij} \in \{0, 1\}$ représentant le flot de l'arc (i, j).
On note $\rho^+(i)$ les sommets successeurs de i et $\rho^-(i)$ ses prédécesseurs.

En sortie de ce programme, le résultat de la fonction objectif renvoie le nombre de chemins arc-disjoints entre α et β.
Il sera de 0 s'il n'existe pas de chemin de α à β dans ce cas on peut directement dire que le graphe G ne respecte pas la propriété de connexité forte. C'est par exemple le cas pour G_5 car il n'existe pas de chemin de b à c.

De plus, on obtient les arêtes utilisées φ_{ij} pour maximiser le flot de α à β. Nous allons utiliser ces variables afin de déterminer les arêtes qui permettent de déconnecter le graphe.

2;3. On calcule la SEC du graphe en trouvant le flot maximal le plus petit en parcourant les couples ordonnées des n sommets. Nous avons alors à notre disposition les φ_{ij} correspondant à la solution du problème de flot maximal la plus faible notée $P(v_i, v_{i+1})$.



La coupe $\mathcal{C}$ ci-contre donne la valeur du flot maximal. Si on supprime les arêtes qui composent cette coupe on déconnecte forcément le graphe. On peut donc renvoyer simplement les arêtes sortantes de v_i notées $e^+(v_i)$ mais en se basant sur le graphe représenté par φ.