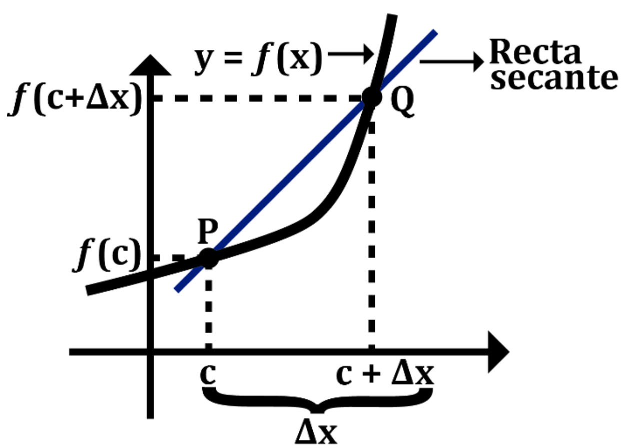
1. LA DERIVADA

La derivada de $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x}$ viene dada por $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, si éste límite existe.

Si $\boldsymbol{c}$ es un número particular del dominio de $\boldsymbol{f}$, entonces $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}$.

1.1 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN VALOR ESPECÍFICO $x = c$

Si se tiene la gráfica de la función $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, tracemos una recta que pasa por el punto $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}))$ y por el punto $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{c} + \Delta \boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c} + \Delta \boldsymbol{x}))$, tal como lo ilustramos a continuación.



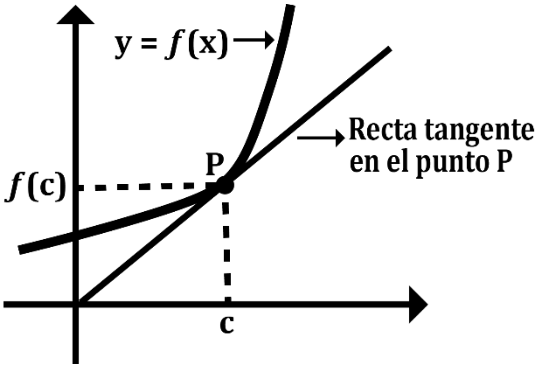
La pendiente de esta recta, llamada recta secante, se puede obtener mediante el cociente:

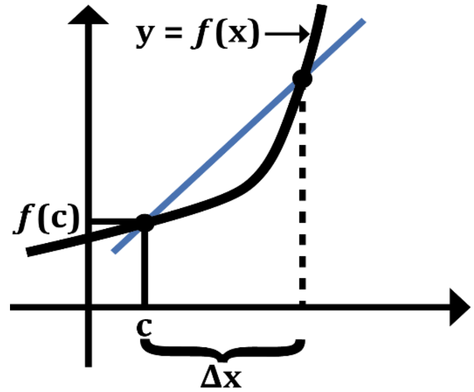
$$\boldsymbol{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

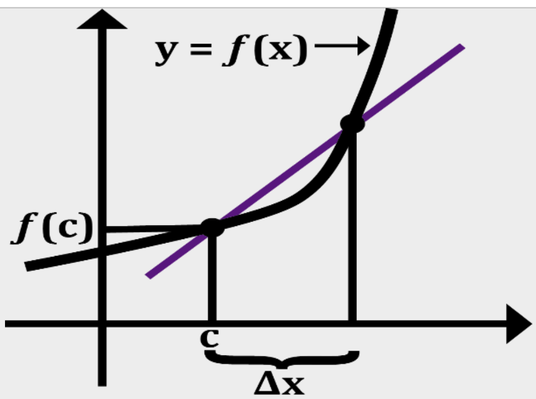
$$m_{sec} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{(c+\Delta x) - c} \qquad \left(\frac{\text{Cambio en } y}{\text{Cambio en } x}\right)$$

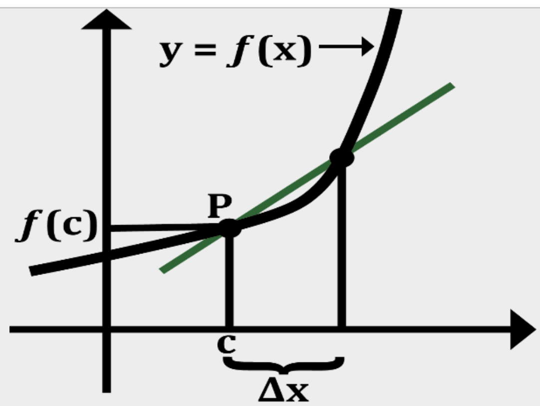
$$m_{sec} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \qquad \textit{pendiente de la recta secante}$$

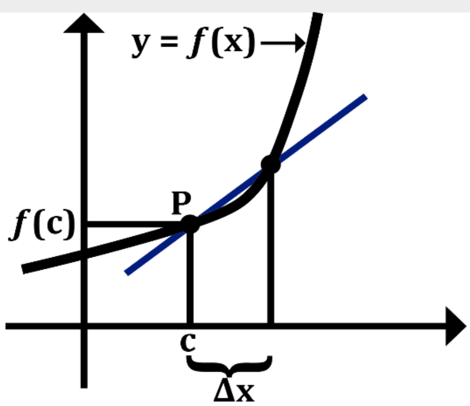
Si en la gráfica anterior mantenemos el punto $\boldsymbol{P}$ fijo y vamos acercando el punto $\boldsymbol{Q}$ hacia el punto $\boldsymbol{P}$, nos vamos cada vez aproximando a una recta tangente en el punto $\boldsymbol{P}$.











De las gráficas vemos que el valor de Δx es cada vez más pequeño a medida que nos aproximamos a la recta tangente en el punto $\boldsymbol{P(c, f(c))}$ (es decir, que cuando Δx se hace muy pequeño ($\Delta x \to \mathbf{0}$), se tiene la pendiente de la recta tangente).

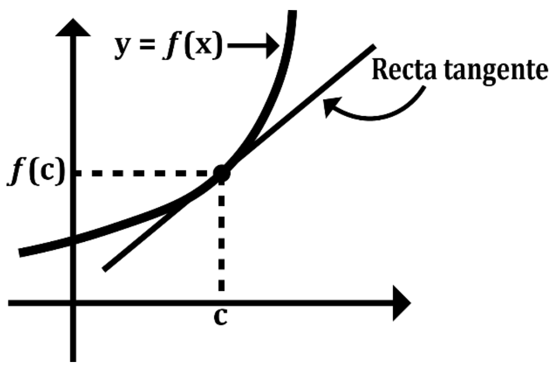
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m_{tangente}$$

Podemos observar que la pendiente de la recta tangente en el punto $\boldsymbol{P(c, f(c))}$, no es más que la derivada de la función evaluada en el valor de $\boldsymbol{x = c}$.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = m \quad \left(pendiente\ de\ la\ recta\ tangente\ en\ (c, f(c))\right)$$

Por lo tanto, la ecuación ***punto pendiente*** de la recta tangente de una función $\boldsymbol{f}$ en $\boldsymbol{x = c}$ es:

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$



Diferentes notaciones para la derivada de una función se muestran a continuación:

$$f'(x), \quad \frac{dy}{dx}, \quad y', \quad \frac{d}{dx}[f(x)], \quad \frac{df}{dx}, \quad D_x[y], \quad D_x y, \quad D_x f$$

OBSERVACIÓN*: A la derivada también se le llama razón de cambio o tasa de cambio.*

Ejercicio*:* Dada la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{x}{x+1}}$, determinar:

i) $\boldsymbol{f'}$, utilizando la definición de la derivada.

ii) $\boldsymbol{f'(1)}$.

iii) La ecuación punto pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el valor de $\boldsymbol{x = -3}$.

Solución i):

$$\boldsymbol{Por\ definici}\acute{o}\boldsymbol{n}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Efectuando la resta de fracciones del numerador.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overbrace{\frac{x+\Delta x}{x+\Delta x+1}}^{f(x+\Delta x)} - \overbrace{\frac{x}{x+1}}^{f(x)}}{\Delta x}$$

Haciendo los productos indicados.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{(x+\Delta x)(x+1) - x(x+\Delta x+1)}{(x+\Delta x+1)(x+\Delta x)}}{\Delta x}$$

Al quitar el paréntesis, cambia de signo todo lo que está dentro.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x^2+x+(\Delta x)x+\Delta x - \overbrace{(x^2+x(\Delta x)+x)}}{(x+\Delta x+1)(x+1)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x^2+x+(\Delta x)x+\Delta x - x^2 - x(\Delta x) - x}{(x+\Delta x+1)(x+1)}}{\Delta x}$$

Simplificamos. Recordemos que Δx es un número, $(\Delta x)x = x(\Delta x)$.

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{(x+\Delta x+1)(x+1)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)}}{\frac{\Delta x}{1}}$$

Efectuando el producto de los extremos entre el producto de los medios.

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x(x + \Delta x + 1)(x + 1)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x + \Delta x + 1)(x + 1)}$$

Podemos simplificar, ya que Δx tiende a cero (es un valor muy pequeñísimo, pero no es cero).

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{(x + 1)(x + 1)} = \frac{1}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}$$

Notemos que el dominio tanto de la función como el de la derivada es el mismo: "Todos los reales excepto el valor de menos uno". El valor de $x = -1$ hace cero el denominador.

OBSERVACIÓN: *En la siguiente clase veremos teoremas que podremos aplicar para determinar la derivada de funciones, sin utilizar la definición (sin utilizar límites), es decir, la derivada evaluada en uno y en menos tres.*

Solución ii)

$$f'(x) = \frac{1}{(x + 1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{(1 + 1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{1}{4}$$

Solución iii)

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

Ecuación punto pendiente de la recta tangente.
Si hacemos $x = -3$, necesitamos encontrar $f(-3)$ y $f'(-3)$.

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \rightarrow f'(-3) = \frac{1}{(-3+1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \rightarrow f(-3) = \frac{-3}{-3+1} = \frac{-3}{-2}$$

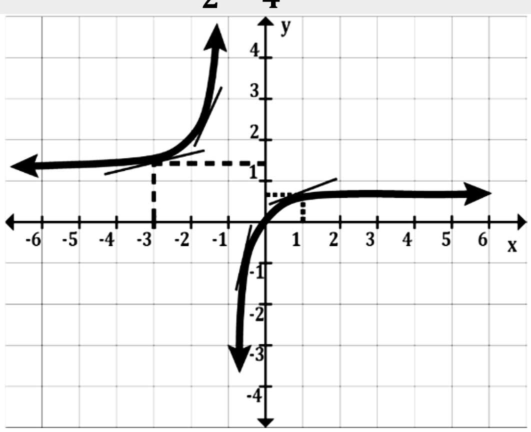
$$f(-3) = \frac{3}{2}$$

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

Ecuación punto pendiente de la recta tangente a la función en $x = -3$.

$$y - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}[x - (-3)]$$

$$y - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}(x + 3)$$



Gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

De la gráfica notamos que la asíntota vertical es $x = -1$ y la asíntota horizontal es $y = 1$. Además, si trazamos rectas tangentes en cualquier punto de la gráfica (excepto en $x = -1$) notamos que estas rectas tienen siempre pendiente positiva y es congruente con el hecho que la derivada de la función es: $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

Esta derivada recordemos que nos da la pendiente de la recta tangente en cualquier valor del dominio $f(x) = \frac{x}{x+1}$ y la derivada $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$ al evaluarla en el dominio, en este caso particular, nos da siempre un número positivo.

OBSERVACIÓN: *Si la derivada de f en $x = c$ existe, entonces se dice que f es diferenciable o derivable en $x = c$.*

1.2 DERIVADA POR LA DERECHA Y DERIVADA POR LA IZQUIERDA.

$$\boldsymbol{f'}_{+}(\boldsymbol{c}) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}+\Delta \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})}{\Delta \boldsymbol{x}} \quad y \quad \boldsymbol{f'}_{-}(\boldsymbol{c}) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}+\Delta \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c})}{\Delta \boldsymbol{x}}$$

A estos límites se les llama derivada por la derecha y derivada por la izquierda respectivamente.

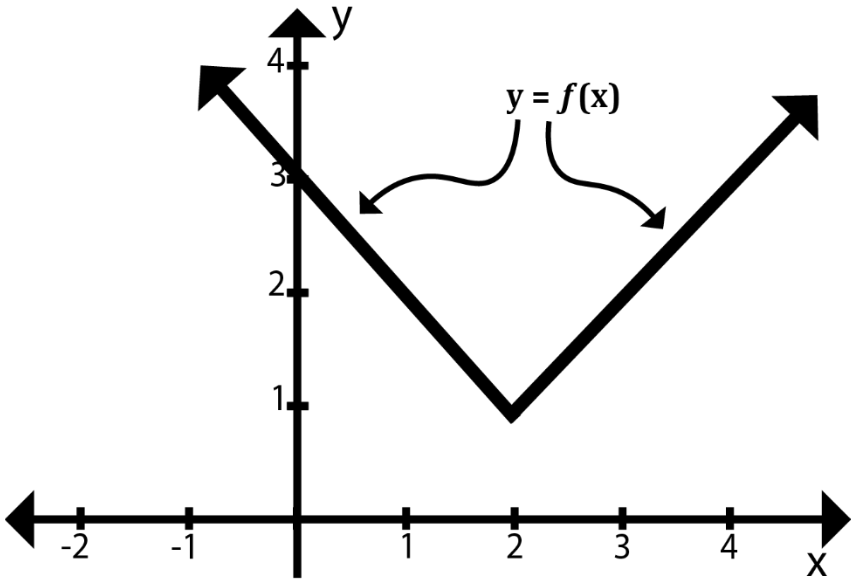
Teorema: *Derivable implica continuidad.*
Si $\boldsymbol{f}$ es derivable (diferenciable) en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, entonces $\boldsymbol{f}$ es continua en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$.
La relación entre la derivabilidad y continuidad puede resumirse como sigue:

1) *Si una función es derivable en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, entonces es continua en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, es decir, derivable implica continua.*
2) *Es posible que una función sea continua en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ sin ser derivable. En otras palabras, continua no implica derivable.*

OBSERVACIÓN: *La derivada de una función no existe en un número $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, por las mismas razones que una tangente a la gráfica no existe: En consecuencia la derivada de una función no existe cuando:*

i) *La función es discontinua en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$.*
ii) *La gráfica tiene una punta o pico en $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}))$ puesto que las derivadas laterales son diferentes en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$, es decir $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ no existe.*
iii) *En un punto $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}))$ en el que la tangente a la gráfica es vertical.*

Por ejemplo la función que se muestra en la gráfica siguiente es continua en todos los números Reales, pero no es diferenciable (derivable) en el valor de $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{2}$.


y
4
3
2
1
y = f(x)
-2
-1
1
2
3
4
x