1. DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Existen ecuaciones en dos variables en las cuales ya está despejada una variable en términos de la otra, es decir, definen la variable del primer miembro en función de la del segundo miembro.

Por ejemplo:

$$\boldsymbol{y = x^3 + 7}$$
$$\boldsymbol{y = 4x^5 - 3x^2}$$

En tales casos se dice que las ecuaciones definen **explícitamente** a "$\boldsymbol{y}$" como función de "$\boldsymbol{x}$". Esto es, las funciones están expresadas en **forma explícita**.

Sin embargo, hay ecuaciones en dos variables en las cuales una variable no está despejada en función de la otra y al tratar de hacerlo resulta que una variable no se puede poner en función de la otra o es difícil de despejar.

Por ejemplo:

$$\boldsymbol{x^2 - y^2 = 1} \qquad (\boldsymbol{1})$$
$$\boldsymbol{y^4 + y = x^3 + 7x} \qquad (\boldsymbol{2})$$

Estas ecuaciones se dice que están expresadas en **forma implícita**. Es decir, puede existir una o más funciones $\boldsymbol{f}$ tales que sí $\boldsymbol{y = f(x)}$, las ecuaciones **(1)** y **(2)** se cumplen para todos los valores de $\boldsymbol{x}$ en el dominio de $\boldsymbol{f}$. Las ecuaciones **(1)** y **(2)** definen **implícitamente** a "$\boldsymbol{y}$" como función de "$\boldsymbol{x}$". Suponiendo que esta función es derivable de $\boldsymbol{x}$, podemos determinar $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$ por el proceso denominado diferenciación implícita siguiendo los pasos que dan a continuación:

1.1 PASOS PARA DERIVAR EN FORMA IMPLÍCITA

1. Sustituir $\boldsymbol{y}$ por $\boldsymbol{f(x)}$, siendo $\boldsymbol{x}$ la variable independiente y "$\boldsymbol{y}$" la variable dependiente.
2. Derivar ambos miembros de la ecuación con respecto a $\boldsymbol{x}$. Teniendo el cuidado que cuando se derive un término en $\boldsymbol{f(x)}$, aplicar la regla de la cadena.
3. Cambiar ahora $\boldsymbol{f(x)}$ por $\boldsymbol{y}$
4. Trasladar los términos que contenga $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$ al primer miembro de la ecuación y los que no lo contengan al otro miembro.
5. Obtener factor común $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$ en el primer miembro.
6. Despejar $\boldsymbol{\frac{dy}{dx}}$.

Ejemplo: Dada la ecuación $x^2 - y^3 = x + y$ determinar $\frac{dy}{dx}$.

Solución: para $x^2 - y^3 = x + y$.

Desarrollaremos el problema utilizando los 6 pasos anteriores.

1) $x^2 - \left(f(x)\right)^3 = x + f(x)$

2) $\frac{d}{dx}\left[x^2 - \left(f(x)\right)^3\right] = \frac{d}{dx}[x + f(x)]$

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}\left(f(x)\right)^3 = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}f(x)$$

$$2x - 3\left(f(x)\right)^2 \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}f(x)$$

3) $2x - 3y^2 \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$

4) $-3y^2 \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1 - 2x$

5) $\frac{dy}{dx}[-3y^2 - 1] = 1 - 2x$

6) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{-3y^2-1}$

Ejemplo: Sabiendo que $x^3 + y^5 = 8xy$, calcular $y' = \frac{dy}{dx}$.

Solución: *para* $x^3 + y^5 = 8xy$.

1. $x^3 + \left(f(x)\right)^5 = 8xf(x)$	*Ya que se supone que* $y = f(x)$.
2. $\left[x^3 + \left(f(x)\right)^5\right]' = 8[xf(x)]'$	*Derivando con respecto a* x *en ambos lados de la ecuación.*
$[x^3]' + \left[\left(f(x)\right)^5\right]' = 8[xf(x)]'$	*Miembro izquierdo **T.7** y el derecho **T.6**.*
$3x^2 + 5\left(f(x)\right)^4 f'(x) = 8[1.f(x) + xf'(x)]$	*Regla de la cadena **(T.10)** regla del producto **(T.8)**.*
3. $3x^2 + 5y^4y' = 8[y + xy']$ $3x^2 + 5y^4y' = 8y + 8xy'$	*Regresamos a la variable "*y*" en lugar de* $f(x)$.

4. $5y^4y' - 8xy' = 8y - 3x^2$	*Trasladando los términos que tengan y' al primer miembro y los resultados al otro miembro.*
5. $y'(5y^4 - 8x) = 8y - 3x^2$	*Factorizando y'.*
6. $y' = \frac{8y-3x^2}{5y^4-8x}$	*Despejando y'.*

El ejemplo anterior lo desarrollaremos todavía en forma más simple, teniendo cuidado que cuando derivemos respecto a **"x"** la variable dependiente **"y"**, apliquemos la regla de la cadena (ya que suponemos que **"y"** es función de **"x"**).

$$x^3 + y^5 = 8xy$$

$[x^3 + y^5]' = [8xy]'$	
$(x^3)' + (y^5)' = 8[xy]'$	*Miembro izquierdo **T.7** y el derecho **T.6**.*
$3x^2 + 5y^4y' = 8[1.y + xy']$	***T.2, T.10** y Regla del producto **(T.8)**.*
$3x^2 + 5y^4y' = 8y + 8xy'$	
$5y^4y' - 8xy' = 8y - 3x^2$	
$y'(5y^4 - 8x) = 8y - 3x^2$	
$y' = \dfrac{8y - 3x^2}{5y^4 - 8x}$	

Ejemplo: obtener $\frac{dx}{dt}$, siendo $\frac{sen(t)}{x^2+t} = e^{5x}$.

Solución:

$$\frac{dx}{dt}$$

"x" variable dependiente.

"t" variable independiente.

Entonces suponemos que $\boldsymbol{x = f(t)}$.

No perder de vista que derivamos respecto a la variable independiente $\boldsymbol{t}$*.*

$$\left[\frac{sen(t)}{\left(f(t)\right)^2 + t}\right]' = \left(e^{5f(t)}\right)'$$

$$\frac{\cos(t)\left[\left(f(t)\right)^2 + t\right] - sen(t)[2f(t)f'(t) + 1]}{\left[\left(f(t)\right)^2 + t\right]^2} = 5e^{5f(t)}f'(t)$$

$$cos(t)\left[\left(f(t)\right)^2 + t\right] - sen(t)[2f(t)f'(t) + 1] = 5e^{5f(t)}f'(t)\left[\left(f(t)\right)^2 + t\right]^2$$

$$cos(t)\left[\left(f(t)\right)^2 + t\right] - 2sen(t)f(t)f'(t) + sen(t) = 5e^{5f(t)}f'(t)\left[\left(f(t)\right)^2 + t\right]^2$$

$$cos(t)(x^2 + t) - 2sen(t)xx' + sen(t) = 5e^{5x}x'(x^2 + t)^2$$

$$-2sen(t)xx' - 5e^{5x}x'(x^2 + t)^2 = -sen(t) - \cos(t)(x^2 + t)$$

$$2sen(t)xx' + 5e^{5x}x'(x^2 + t)^2 = sen(t) + \cos(t)\,(x^2 + t)$$

$$x'\left[2sen(t)x + 5e^{5x}(x^2 + t)^2\right] = sen(t) + \cos(t)\,(x^2 + t)$$

$$x' = \frac{sen(t) + cos(t)(x^2 + t)}{2sen(t)x + 5e^{5x}(x^2 + t)^2}$$

Ahora resolveremos de la forma más simple:

$$\frac{sen(t)}{x^2 + t} = e^{5x}$$

Recordemos que suponemos que $\boldsymbol{x = f(t)}$

$$\left(\frac{sen(t)}{x^2+t}\right)' = \left(e^{5x}\right)'$$

$$\frac{\cos(t)\,(x^2+t) - sen(t)(2xx'+1)}{(x^2+t)^2} = e^{5x}5x'$$

$$\cos(t)\,(x^2+t) - sen(t)(2xx'+1) = e^{5x}5x'(x^2+t)^2$$

$$\cos(t)\,(x^2+t) - sen(t)2xx' - sen(t) = 5e^{5x}x'(x^2+t)^2$$

$$-2sen(t)xx' - 5e^{5x}x'(x^2+t)^2 = sen(t) - \cos(t)\,(x^2+t)$$

$$x'\left[-2sen(t)x - 5e^{5x}(x^2+t)^2\right] = sen(t) - \cos(t)\,(x^2+t)$$

$$x' = \frac{sen(t) - \cos(t)\,(x^2+t)}{-2sen(t)x - 5e^{5x}(x^2+t)^2}$$

Ejemplo: Deducir una ecuación de la recta tangente a la curva $x^2(x^2+y^2) = y^2$ en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Recordemos que la ecuación punto pendiente de la recta tangente en el valor de $x = c$ es:

$$y - f(c) = f'(c)(x-c) \quad \textit{o también} \quad y - y(c) = y'(c)(x-c).$$

Determinemos y'. Observemos que hay que derivar implícitamente.

$$[x^2(x^2+y^2)]' = (y^2)'$$

$$2x(x^2+y^2) + x^2(2x+2yy') = 2yy'$$

$$2x(x^2+y^2) + 2x^3 + 2x^2yy' = 2yy'$$

$$2x^2yy' - 2yy' = -2x(x^2+y^2) - 2x^3$$

$$x^2yy' - yy' = -x(x^2+y^2) - x^3$$

$$y'(x^2y - y) = -x^3 - xy^2 - x^3$$

$$y' = \frac{-2x^3 - xy^2}{x^2y - y}$$

$$y' = \frac{-x(2x^2 + y^2)}{-y(1 - x^2)}$$

$$y' = \frac{x(2x^2 + y^2)}{y(1 - x^2)}$$

Notemos que la derivada está en término de **"x"** y de **"y"**, por lo tanto la pendiente de la recta tangente en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, se obtiene sustituyendo en y' estos dos valores.

$$y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left[2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]} = \frac{\left[2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]}; \qquad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$y'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\left(\frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{6}{2} = 3$$

Luego, la ecuación punto pendiente de la recta tangente en el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *es:*

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

2. DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

La derivación logarítmica es una técnica que permite encontrar la derivada de una función complicada.

Por ejemplo: derivar $y = \sqrt[3]{\frac{(x^2-1)(x+3)^5}{x^3+6}}$.

Observemos que calcular la derivada de esta función es muy difícil, aplicando los teoremas anteriores. La solución se facilita utilizando la derivación logarítmica cuyos pasos son:

1) Aplicar Logaritmo natural a ambos miembros.

2) Aplicar propiedades de los logaritmos.

3) Utilizar derivación implícita.

4) Despejar $\boldsymbol{y'}$.

5) Sustituir $\boldsymbol{y}$.

Ejemplo: Utilizar derivación logarítmica para calcular la derivada de $y = \sqrt[5]{\frac{(x+3)(x-1)^3}{x^2+2}}$.

Solución:

$$\ln y = \ln\left[\frac{(x+3)(x-1)^3}{x^2+2}\right]^{\frac{1}{5}}$$

$$\ln y = \frac{1}{5}\ln\left[\frac{(x+3)(x-1)^3}{x^2+2}\right]; \ln x^n = n\ln x$$

$$\ln y = \frac{1}{5}[\ln(x+3) + 3\ln(x-1) - \ln(x^2+2)]$$

Ahora derivemos con respecto a x.

$$(\ln y)' = \left\{\frac{1}{5}[\ln(x+3) + 3\ln(x-1) - \ln(x^2+2)]\right\}'$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{5}[\ln(x+3) + 3\ln(x-1) - \ln(x^2+2)]'$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{5}\left[\frac{(x+3)'}{x+3} + 3\ \frac{(x-1)'}{x-1} - \frac{(x^2+2)'}{x^2+2}\right]; \quad T.10, (\ln(u))' = \frac{1}{u}u' = \frac{u'}{u}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x+3} + \frac{3}{x-1} - \frac{2x}{x^2+2}\right)$$

$$y' = \frac{1}{5}y\left(\frac{1}{x+3} + \frac{3}{x-1} - \frac{2x}{x^2+2}\right)$$

$$y' = \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{(x+3)(x-1)^3}{x^2+2}}\left(\frac{1}{x+3} + \frac{3}{x-1} - \frac{2x}{x^2+2}\right)$$

Otro tipo de derivada que exige el uso de la derivación logarítmica es cuando se tiene una función elevada a otra función.

Por ejemplo:

$y = x^x$, $y = x^{sen(x)}$, $y = [\cos(x)]^x$

En estos casos no se puede utilizar la regla de las potencias, ya que el exponente no es un número.

Ejemplo: Siendo $y = x^x$, calcular y'.

Solución:

$$y = x^x$$

$$\ln(y) = x\ln(x)$$

Ya aplicamos propiedades de los logaritmos, ahora derivemos.

$$(\ln y)' = (x\ln x)'$$

$$\frac{y'}{y} = (x)'\ln x + x.(\ln x)'$$

$$\frac{y'}{y} = 1.\ln x + x.\frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \ln x + 1$$

$$y' = y\,(\ln x + 1)$$

$$y' = x^x(\ln x + 1)$$

Ejemplo: Siendo $y = x^{sen(x)}$, calcular y'.

Solución:

$$y = x^{sen(x)}$$

$$\ln y = \ln x^{sen(x)}$$

$$\ln y = sen(x)\ln x$$

$$(\ln y)' = [sen(x)\ln x]'$$

$$\frac{y'}{y} = [sen(x)]'\ln x + sen(x)[\ln(x)]'$$

$$\frac{y'}{y} = \cos(x)\ln x + sen(x).\frac{1}{x}$$

$$y' = y\left[\cos(x)\ln x + sen(x).\frac{1}{x}\right]$$

$$y' = x^{sen(x)}\left[\cos(x)\ln x + \frac{sen(x)}{x}\right]$$

3. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

La derivada de una función podemos derivarla para obtener la segunda derivada de la función. Esta a su vez se puede derivar para obtener la tercera derivada de la misma. Este proceso se puede continuar hasta obtener la n-ésima derivada de dicha función.

Las derivadas a partir de la segunda en adelante se les denominan derivadas de orden superior. A continuación se dan diferentes formas de denotar las ***n*** primeras derivadas de $y = f(x)$.

1ª Derivada: y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}[f(x)]$, $D_x y$

2ª Derivada: y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2}{dx^2}[f(x)]$, $D^2{}_x y$

3ª Derivada: y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, $\frac{d^3}{dx^3}[f(x)]$, $D^3{}_x y$

4ª Derivada: $y^{(4)}$, $f^{(4)}(x)$, $\frac{d^4y}{dx^4}$, $\frac{d^4}{dx^4}[f(x)]$, $D^4{}_x y$

n-ésima derivada: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^ny}{dx^n}$, $\frac{d^n}{dx^n}[f(x)]$, $D^n{}_x y$

Ejemplo: Sabiendo que $f(x) = x^6 - 3x^3 + 3$, calcular $f^{(4)}(x)$. Obtener además $f^{(4)}(1)$.
Solución:

$$f(x) = x^6 - 3x^3 + 3$$

$$f'(x) = 6x^5 - 9x^2 + 0$$

$$f''(x) = 30x^4 - 18x$$

$$f'''(x) = 120x^3 - 18$$

$$f^{(4)}(x) = 360x^2$$

$$f^{(4)}(1) = 360(1)^2 = 360$$

Ejemplo: Sabiendo que $y = \cos\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)$, calcular $y''(0)$.

Solución:

$$y = cos\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Aplicando la regla de la cadena.

$$y' = -sen\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)'$$

$$y' = -sen\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)(2x + 0)$$

$$y' = -2xsen\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -2\left[xsen\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)\right]'$$

Regla del múltiplo constante.

$$y'' = -2\left[sen\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right) + xcos\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)(2x)\right]$$

Teorema 8 y Teorema 10.

$$y''(0) = -2\left[sen\left(0^2 + \frac{\pi}{2}\right) + 0\cos\left(0^2 + \frac{\pi}{2}\right)\left(2(0)\right)\right]$$

$$y''(0) = -2sen\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''(0) = -2$$