1. REGLAS DE LA DERIVADA (TEOREMAS)

Hasta este momento hemos visto la definición de derivada mediante límites. Ahora utilizaremos **"Reglas de derivación"** (teoremas) que permiten calcular derivadas sin el uso directo de la definición por límites.

Teorema 1: (Derivada de una constante)
La derivada de una función constante es 0. Es decir, si "$\boldsymbol{c}$" es un número real, entonces: $\frac{d}{dx}[c] = \mathbf{0}$.

Esto es congruente con el hecho que la gráfica de una función constante es una recta horizontal y la pendiente de una recta horizontal es 0.

Ejemplo:

Función	Derivada
$y = 8$	$\frac{dy}{dx} = 0$
$f(x) = 0$	$f'(x) = 0$
$s(t) = -3$	$s'(t) = 0$
$y = \ln(2)\pi^2$	$y' = 0$

Teorema 2: (de las potencias)
Si "$\boldsymbol{n}$" es un número racional, la función $f(x) = x^n$ es derivable, por lo que $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$. Para que f sea derivable en $x = 0$, "$\boldsymbol{n}$" tiene que ser un número tal que x^{n-1} esté definido en un intervalo que contenga a $\boldsymbol{0}$.

Ejemplo:

Función	Derivada
i) $f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$

ii)	$g(x) = \sqrt[3]{x}$	$g'(x) = \dfrac{d}{dx}\left[x^{\frac{1}{3}}\right] = \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$
iii)	$y = \frac{1}{x^2}$	$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}[x^{-2}] = -2x^{-3} = -\dfrac{2}{x^3}$

OBSERVACIÓN: *En muchos problemas de derivación el primer paso es reescribir la función dada. Como en los ejemplos **ii)** e **iii)**.*

Ejemplo: **(Ecuación de una Recta Tangente)**
Hallar una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ *en* $x = -1$.

Solución: Para hallar el punto sobre la gráfica de f evaluamos la función en $x = -1$.

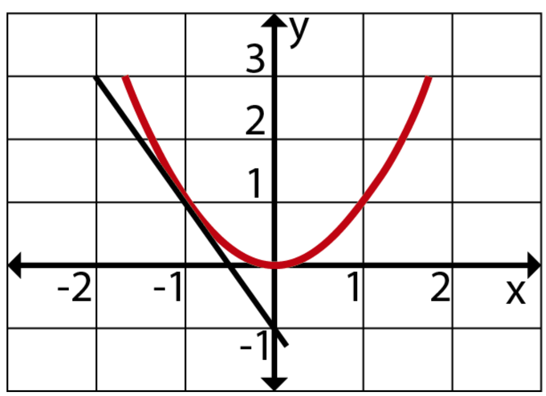
$$(-1, f(-1)) = (-1, 1)$$

Para calcular la pendiente de la gráfica en $x = -1$, evaluamos la derivada, $f'(x) = 2x$ *en* $x = -1$.

$$m = f'(-1) = 2(-1) = -2$$

Ahora, usando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, podemos escribir:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = -2[x - (-1)]$$
$$y - 1 = -2(x + 1)$$
$$y - 1 = -2x - 2$$
$$y = -2x - 1$$



"La recta tangente $y = -2x - 1$ es tangente a la gráfica de $f(x) = x^2$ en el punto $(-1, 1)$".

Los teoremas del 3 al 5, que se muestran a continuación, nos dan la pauta para derivar las funciones básicas sin tener que utilizar la definición de la derivada.

Teorema 3: Derivada de las Funciones Trigonométricas.

$$\frac{d}{dx}[sen(x)] = cos(x) \qquad \frac{d}{dx}[cos(x)] = -sen(x)$$

$$\frac{d}{dx}[tan(x)] = sec^2(x) \qquad \frac{d}{dx}[cot(x)] = -csc^2(x)$$

$$\frac{d}{dx}[sec(x)] = sec(x)\,tan(x) \qquad \frac{d}{dx}[csc(x)] = -csc(x)\,cot(x)$$

Teorema 4: Derivada de las Funciones exponenciales y logarítmicas.

$$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x\,ln(a) \qquad \frac{d}{dx}[e^x] = e^x$$

$$\frac{d}{dx}[log_a(x)] = \frac{1}{(ln(a))x} \qquad \frac{d}{dx}[ln(x)] = \frac{1}{x}$$

Teorema 5: Derivada de las Funciones Trigonométricas Inversas.

$$\frac{d}{dx}[sen^{-1}(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}[cos^{-1}(x)] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}[tan^{-1}(x)] = \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{d}{dx}[cot^{-1}(x)] = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}[sec^{-1}(x)] = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}[csc^{-1}(x)] = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Teorema 6: (múltiplo constante).

Si f es derivable y c un número real, entonces cf es también derivable, entonces $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}[f(x)]$ o más sencillo $\left(cf(x)\right)' = cf'(x)$.

Ejemplo a) Derivar $f(x) = \frac{5}{x}$.

Solución:

$$f'(x) = \left(\frac{5}{x}\right)' = \left(5\,\frac{1}{x}\right)'$$

Aplicaremos el teorema 6.

$$= 5\left(\frac{1}{x}\right)'$$

Pero $\frac{1}{x} = x^{-1}$

$$= 5(x^{-1})'$$ *Aquí aplicaremos el teorema 2*

$$= 5(-1)x^{-1-1}$$

$$= -5x^{-2}$$

Ejemplo b) Derivar $f(t) = \frac{4t^2}{5}$.

Solución:

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{4}{5}t^2\right] = \frac{4}{5}\frac{d}{dt}[t^2]$$

$$= \frac{4}{5}(2t) = \frac{8}{5}t$$

Ejemplo c) Derivar $y = 5\sqrt[3]{x}$.

Solución:

$$y = 5\sqrt[3]{x}$$ *Antes de derivar, reescribamos la expresión.*

$$y = 5x^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \left(5x^{\frac{1}{3}}\right)'$$

$$y' = 5\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'$$ *Hemos aplicado el teorema 6 (T. 6)*

$$y' = 5\left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}\right)$$ *Aplicamos el teorema 2 (T. 2)*

$$y' = \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

Ejemplo d) Derivar $y = \frac{1}{3\sqrt[5]{x^2}}$.

Solución:

$y = \frac{1}{3\sqrt[5]{x^2}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{5}}$	*Hemos reescrito la función, para poder utilizar los teoremas T.6 y T.2 respectivamente.*
$y' = \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{5}}\right)' = \frac{1}{3}\left(x^{-\frac{2}{5}}\right)'$	*Teorema 6*
$= \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{5}x^{-\frac{2}{5}-1}\right)$	*Teorema 2*
$= -\frac{2}{15}x^{-\frac{7}{5}}$	

Ejemplo e) Derivar $g(t) = -6\cos(t)$.

Solución:

$\frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt}[-6cos(t)]$	*Notemos que la variable independiente es* t.
$= -6\frac{d}{dt}[cos(t)]$	*Teorema 6.*
$= -6[-sen(t)]$	*Teorema 3. (La derivada de la función coseno es menos seno).*
$= 6sen(t)$	

Ejemplo f) Derivar $y = 5(2^x)$.

Solución:

$$y' = [5(2^x)]'$$
$$= 5(2^x)'$$

$= 5[2^x \ln(2)]$ *Hemos aplicado el T.4, con $a = 2$.*

$= 5\ln(2)2^x$ *Reescribiendo el resultado.*

Teorema 7: Las Reglas de la suma y la diferencia.

La derivada de una suma (o de la diferencia) de dos funciones derivables es la suma (o diferencia) de sus derivadas.

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$$

Este teorema se puede extender a más de dos funciones. Así, por ejemplo:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x) - h(x)] = f'(x) + g'(x) - h'(x)$$

Ejemplo a) Derivar la función $f(x) = x^3 - 4x + 5$.
Solución:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x^3 - 4x + 5]$$

$$= \frac{d}{dx}[x^3] + \frac{d}{dx}[-4x] + \frac{d}{dx}[5]$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

Ejemplo b) Derivar la función $g(x) = -\frac{x^4}{2} + 3x^3 - 2x$.
Solución:

$$g'(x) = -2x^3 + 9x^2 - 2$$

Ejemplo c) Derivar la función $h(x) = 3^x + 5\cot(x)$.
Solución:

$$h'(x) = 3^x \ln(3) + 5[-csc^2(x)]$$

$$h'(x) = 3^x \ln(3) - 5\csc^2(x)$$

Ejemplo d) Derivar la función $l(x) = \tan^{-1}(x) - 4\tan(x)$.
Solución:

$$l'(x) = [\tan^{-1}(x) - 4\tan(x)]'$$

$$= [tan^{-1}(x)]' - [4tan(x)]' \qquad \textit{Teorema 7}$$

$$= [tan^{-1}(x)]' - 4[tan(x)]' \qquad \textit{Teorema 6}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - 4\sec^2(x) \qquad \textit{Teoremas 5 y 3 respectivamente.}$$

Ejemplo e) Derivar la función $m(x) = 5\ln(x) - \sqrt{x}$.
Resolver el ejemplo e)

Ejemplo f) Derivar la función $n(x) = 3x^2 - 2\log(x) + 4\sec(x)$.
Resolver el ejemplo f)

Teorema 8: La Regla del Producto
El producto de dos funciones derivables f, g es derivable. Su derivada es la derivada de la primera función por la segunda más la primera por la derivada de la segunda.

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Se puede extender el teorema a más de dos funciones:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Ejemplo: Hallar la derivada de $h(x) = \overbrace{(3x - 2x^2)}^{\textit{Primera función}} \; \overbrace{(5 + 4x)}^{\textit{Segunda función}}$.

Solución:

$$h'(x) = \underbrace{\frac{d}{dx}[3x - 2x^2]}_{\text{Derivada de la Primera}} \quad \underbrace{(5 + 4x)}_{\text{Segunda}} \quad + \quad \underbrace{(3x - 2x^2)}_{\text{Primera}} \quad \underbrace{\frac{d}{dx}[5 + 4x]}_{\text{Derivada de la segunda}}$$

$$= (3 - 4x)(5 + 4x) + (3x - 2x^2)(4)$$
$$= (15 - 8x - 16x^2) + (12x - 8x^2)$$
$$= -24x^2 + 4x + 15$$

Ejemplo: Hallar $f'(x)$ para $f(x) = (2x^4 - 3x + 5)\sec(x)$.

Solución:

$$f'(x) = [(2x^4 - 3x + 5)\sec(x)]'$$

$$= (2x^4 - 3x + 5)'\sec(x) + (2x^4 - 3x + 5)[\sec(x)]' \qquad \textbf{T.8}$$

$$= (8x^3 - 3)\sec(x) + (2x^4 - 3x + 5)\sec(x)\tan(x) \qquad \textbf{T.7} \quad \textbf{y} \quad \textbf{T.5}$$

Ejemplo: Hallar $f'(x)$ para $f(x) = 3^x\cos(x)$.
Solución:

$$f(x) = 3^x\cos(x)$$

*Aplicaremos la regla del producto de funciones **(T.8).***

$$f'(x) = (3^x)'\cos(x) + 3^x[\cos(x)]'$$

$$= 3^x\ln(3)\cos(x) + 3^x[-sen(x)]$$

*Hemos utilizado **T.4** y **T.3**, respectivamente.*

$$f'(x) = 3^x\ln(x)\cos(x) - 3^x sen(x)$$

Ejemplo: Hallar $f'(x)$ para $f(x) = e^2x^3sen^{-1}(x)$.

Solución:

Como e^2 es una constante, podemos aplicar la regla del múltiplo constante al derivar.

$$f(x) = e^2x^3sen^{-1}(x)$$

$$f'(x) = [e^2x^3sen^{-1}(x)]'$$

$$= e^2[x^3sen^{-1}(x)]'$$ *Ahora aplicamos la regla del producto* ***T.8.***

$$= e^2[(x^3)'sen^{-1}(x) + x^3sen^{-1}(x)']$$

$$= e^2\left[3x^2sen^{-1}(x) + x^3\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$ *Ahora obtengamos factor común* x^2.

$$f'(x) = e^2x^2\left[3sen^{-1}(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

OBSERVACIÓN: *Para derivar* $f(x) = e^2x^3sen^{-1}(x)$ *podemos, aunque no es necesario, utilizar la extensión de teorema de la regla del producto, así:*

$$f'(x) = [e^2x^3sen^{-1}(x)]'$$

$$= (e^2)'x^3sen^{-1}(x) + e^2(x^3)'sen^{-1}(x) + e^2x^3[sen^{-1}(x)]'$$

$$= (e^2)'x^3sen^{-1}(x) + e^2(3x^2)sen^{-1}(x) + e^2x^3\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$ $(e^2)' = 0$, *puesto que es constante.*

$$= 0 + e^2(3x^2)sen^{-1}(x) + e^2x^3\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= e^2x^2\left[3sen^{-1}(x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$ *Factor común.*

Ejercicio: Hallar $f'(x)$ para $f(x) = x^4\csc(x)e^x$.

Teorema 9: La Regla del Cociente.
El cociente $\frac{f}{g}$ de dos funciones derivables f y g es derivable en todos los valores de x en los que $g(x) \neq 0$.

La derivada del cociente es igual la derivada de la función del numerador multiplicada por la función del denominador (sin derivar) menos la función del numerador por la derivada de la función del denominador, todo ello dividido por el cuadrado de la función del denominador, es decir:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \qquad g(x) \neq 0.$$

Ejemplo: Siendo $y = \frac{5x-2}{x^2+1}$, obtener y'.
Solución:

$$y' = \frac{(5x-2)'(x^2+1) - (5x-2)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(5)(x^2+1) - (5x-2)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(5x^2+5) - (10x^2-4x)}{(x^2+1)^2}$$

$$y' = \frac{-5x^2+4x+5}{(x^2+1)^2}$$

Ejemplo: Hallar la derivada de $y = \frac{3-\left(\frac{1}{x}\right)}{x+5}$.
Solución:

$$y = \frac{\frac{(3x-1)}{x}}{x+5} = \frac{3x-1}{x(x+5)} = \frac{3x-1}{x^2+5x}$$

Reescribiendo antes de derivar.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3)(x^2+5x) - (3x-1)(2x+5)}{(x^2+5x)^2}$$

$$= \frac{(3x^2 + 15x) - (6x^2 + 13x - 5)}{(x^2 + 5x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2 + 2x + 5}{(x^2 + 5x)^2}$$

Abusando un poco del lenguaje matemático, los teoremas 1, 2, 6, 7, 8, 9 los podemos expresar de una forma simple así:

1) $(c)' = 0$, c $constante.$
2) $(x^n)' = nx^{n-1}$.
3) $(cf)' = cf'$.
4) $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
5) $(fg)' = f'g + fg'$.
6) $\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Hemos notado que todos estos teoremas se pueden combinar, es decir que se puede aplicar en un solo problema varios de éstos.

Por ejemplo:

$$\left(\frac{f-g}{h}\right)' = \frac{(f-g)'\,h - (f-g)h'}{h^2}$$ *Hemos aplicado el teorema 9.*

$$= \frac{(f' - g')h - (f-g)h'}{h^2}$$ *Teorema 7.* (1)

Otra forma para este caso particular, como el denominador es un solo elemento.

$$\frac{f-g}{h} = \frac{f}{h} - \frac{g}{h}$$

$$\left(\frac{f-g}{h}\right)' = \left(\frac{f}{h}-\frac{g}{h}\right)'$$

$$= \left(\frac{f}{h}\right)' - \left(\frac{g}{h}\right)'$$ *Teorema 7.*

$$= \frac{f'h-fh'}{h^2} - \frac{g'h-gh'}{h^2}$$ *Teorema 9 en ambos términos* (2).

Veamos si las expresiones **(1)** y **(2)** son equivalentes:

$$\frac{f'h-fh'}{h^2} - \frac{g'h-gh'}{h^2}$$ *Agrupemos de otra forma.*

$$= \frac{f'h-fh'(g'h-gh')}{h^2}$$

$$= \frac{f'h-fh'-g'h+gh'}{h^2}$$

$$= \frac{f'h-g'h-fh'+gh'}{h^2}$$

$$= \frac{(f'h-g'h)-(fh'-gh')}{h^2}$$ *Factor común* h *y* h'*, respectivamente.*

$$= \frac{(f'-g')h-(f-g)h'}{h^2}$$ *Luego, las expresiones* ***(1)*** *y* ***(2)*** *son equivalentes.*

Ejemplo: Determinar la derivada de $y = \frac{\ln(x)+2x^3}{2+3\cos(x)}$.

Solución:

$$y = \frac{\ln(x)+2x^3}{2+3\cos(x)}$$

$$y' = \frac{[\ln(x)+2x^3]'[2+3\cos(x)] - [\ln(x)+2x^3][2+3\cos(x)]'}{[2+3\cos(x)]^2}; \qquad T.9$$

$$y' = \frac{[(\ln(x))'+(2x^3)'][2+3\cos(x)] - [\ln(x)+2x^3][(2)'+(3\cos(x))']}{[2+3\cos(x)]^2}; \qquad T.7$$

$$y' = \frac{\left(\frac{1}{x} + 6x^2\right)[2 + 3\cos(x)] - [\ln(x) + 2x^3]\big[0 + 3\big(-sen(x)\big)\big]}{[2 + 3\cos(x)]^2}$$

$$y' = \frac{\left(\frac{1}{x} + 6x^2\right)[2 + 3\cos(x)] - [\ln(x) + 2x^3][-3sen(x)]}{[2 + 3\cos(x)]^2}$$

$$y' = \frac{\left(\frac{1}{x} + 6x^2\right)[2 + 3\cos(x)] + 3sen(x)[\ln(x) + 2x^3]}{[2 + 3\cos(x)]^2}$$

2. REGLA DE LA CADENA

Hasta el momento hemos aprendido a derivar las funciones básicas como por ejemplo:
$y = sen(x)$, $y = \ln(x)$, $y = x^5$, $y = \tan^{-1}(x)$, $etc.$
Con el teorema 10 derivaremos funciones como:
$y = sen(7x)$, $y = \ln(x^2 + 1)$, $y = (x^3 + 3x + 1)^5$, $y = \tan^{-1}\left(\frac{x}{5}\right)$, $etc.$
Está regla se utiliza para evaluar la derivada de una función compuesta y se enuncia en el siguiente teorema:

> **Teorema 10: (regla de la cadena)**
> Si $Y = F(u)$ es una función derivable de u y $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$ o bien $D_xF(u) = F'(u)D_xu.$

Otra forma $Y = F\big(g(x)\big)$ entonces
$$y' = \big[F\big(g(x)\big)\big]'$$
$$y' = F'\big(g(x)\big)g'(x)$$

Para utilizar el teorema 10, hacemos u a la expresión que nos convierta la nueva función en una función básica y así aplicar los teoremas vistos anteriormente.

Por ejemplo, para derivar $y = sen(7x)$, que ya no es una función básica, hacemos $u = 7x$, entonces se tiene que $y = sen(u)$; ésta es una función básica, solamente que en una nueva variable u luego $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$; $\left(\frac{dy}{du} = \frac{d\big(sen(u)\big)}{du} = \cos(u), \quad \frac{du}{dx} = \frac{d(7x)}{dx} = 7\right)$

$$\frac{dy}{dx} = [\cos(7x)](7) = 7\cos(7x)$$

$\boldsymbol{y' = 7\,cos(7x)}$

Otra forma más práctica para aplicar la regla de la cadena es la siguiente:
Siendo $\boldsymbol{y = sen(7x)}$, determinar $\boldsymbol{y'}$.

$$\boldsymbol{y = sen\overbrace{(7x)}^{u}}$$

Mentalmente llamamos $\boldsymbol{u}$ a la expresión que nos convierte en una función básica, entonces decimos la derivada del seno de $\boldsymbol{u}$ es coseno de $\boldsymbol{u}$ por la derivada de la expresión que llamamos $\boldsymbol{u}$.

$$\boldsymbol{y' = \cos(7x)\,(7x)'}$$

$$\boldsymbol{y' = \cos(7x)\,(7)}$$

$$\boldsymbol{y' = 7\cos(7x)}$$

Ejemplo: Hallar la derivada de $\boldsymbol{y = (x^4 + 7)^5}$.
Solución:

$$\boldsymbol{y = (\overbrace{x^4 + 7}^{u})^5}$$

Es como tener $\boldsymbol{u^5}$, $\boldsymbol{\left(u^5\right)' = 5u^4u'}$.

$$\boldsymbol{y' = 5(x^4 + 7)^4(x^4 + 7)'}$$

$$\boldsymbol{y' = 5(x^4 + 7)^4(4x^3)}$$

$$\boldsymbol{y' = 20x^3(x^4 + 7)^4}$$

Ejemplo: Si $y = \sqrt{x^2+5x-2}$, calcular $\frac{dy}{dx}$.

Solución:

Reescribiendo la expresión dada se tiene $y = (x^2+5x-2)^{\frac{1}{2}}$.

$$y = (\overbrace{x^2+5x-2}^{u})^{\frac{1}{2}}$$

$\left(u^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u'$ *Regla de las potencias* ***(T.2).***

$$y' = \frac{1}{2}(x^2+5x-2)^{\frac{1}{2}-1}(x^2+5x-2)'$$ *Regla de las potencias (T.2).*

$$y' = \frac{1}{2}(x^2+5x-2)^{-\frac{1}{2}}(2x+5)$$

Ejemplos: Derivar $f(x) = \frac{2}{(7x^2-6)^3}$

Solución: Como el numerador es constante resulta más fácil aplicar la regla de las potencias que la del cociente. Reescribiendo la función se tiene:

$$f(x) = \frac{2}{(7x-6)^3} = 2(7x-6)^{-3}$$

$$f'(x) = [2(7x-6)^{-3}]'$$

$$f'(x) = 2[(\underbrace{7x-6}_{u})^{-3}]'; \quad T.6$$

$$f'(x) = 2[-3(7x-6)^{-3-1}(7x-6)']$$

$$f'(x) = 2[-3(7x-6)^{-4}(7-0)]$$

$$f'(x) = 2[-3(7x-6)^{-4}(7)]$$

$$f'(x) = -42(7x-6)^{-4}$$

Ejemplo 23: Derivar $\boldsymbol{f(x) = \tan^{-1}(3x)}$.

Solución:

$$f(x) = \tan^{-1}\underbrace{(3x)}_{u}, \qquad [tan^{-1}(u)]' = \frac{1}{1+u^2}.u'$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+(3x)^2}(3x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+9x^2}(3)$$

$$f'(x) = \frac{3}{1+9x^2}$$

Ejemplo 24: Determine la derivada de $\boldsymbol{y = 8sen^3(7x^2+6x-3)}$.

Solución:

$$y = 8sen^3(7x^2+6x-3) \text{ reescribiendo } \quad y = 8[sen(7x^2+6x-3)]^3$$

¿A qué expresión le llamaremos **u** de tal manera que se convierta en una función básica? Tenemos dos posibilidades, la primera llamando u al polinomio (el ángulo de la función seno):

$$y = 8[sen\underbrace{(7x^2+6x-3)}_{u}]^3$$

$$y = 8\,[sen(u)]^3$$

En este caso el resultado no es una función básica, ya que es una combinación de dos funciones básicas una potencia y una trigonométrica. La otra posibilidad es llamarle **"u"** a toda la expresión dentro del corchete, así:

$$y = 8[\underbrace{sen(7x^2+6x-3)}_{u}]^3$$

$$y = 8\,u^3$$

En este caso si obtenemos una función básica y podemos aplicar la regla del múltiplo constante y la regla de las potencias inmediatamente (T. 2).

$$y = 8[sen(7x^2 + 6x - 3)]^3$$

$$y' = 8(3)[sen(7x^2 + 6x - 3)]^2\,[sen(7x^2 + 6x - 3)]'$$

Ahora para derivar la parte derecha aplicamos de nuevo la regla de la cadena y para ello llamaremos **"u"** a la función polinómica.

$$y' = 8(3)[sen(7x^2 + 6x - 3)]^2 \cos(7x^2 + 6x - 3)\,(7x^2 + 6x - 3)'$$

$$y' = 8(3)[sen(7x^2 + 6x - 3)]^2 \cos(7x^2 + 6x - 3)(14x + 6)$$

$$y' = 24[sen(7x^2 + 6x - 3)]^2 \cos(7x^2 + 6x - 3)\,(14x + 6)$$

Ejemplo: encuentre la derivada de $y = \sqrt[3]{cos(7x^2)}$**.**

Solución:

Reescribiendo la expresión $y = \sqrt[3]{\cos(7x^2)} = [\cos(7x^2)]^{\frac{1}{3}}$

$$y = [\underbrace{\cos(7x^2)}_{u}]^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{1}{3}[\cos(7x^2)]^{\frac{1}{3}}[\underbrace{\cos(7x^2)}_{w}]'$$

$$y' = -\frac{1}{3}[\cos(7x^2)]^{-\frac{2}{3}}\, sen(7x^2)(7x^2)'$$

$$y' = -\frac{1}{3}[\cos(7x^2)]^{-\frac{2}{3}}\, sen(7x^2)14x$$

$$y' = -\frac{14}{3}x[\cos(7x^2)]^{-\frac{2}{3}}\, sen(7x^2)$$

Ejemplo: Encuentre la derivada de $\boldsymbol{y = \tan(5x)\cos(x^3 + x)}$.

Solución:

En este ejemplo, no podemos emplear en primera instancia la regla de la cadena, ya que no hay manera de llamarle **"u"** a ninguna expresión y que se convertirla toda la función en una función básica. Pero notemos que tenemos un producto de dos funciones. Podemos entonces aplicar el teorema 8 (regla del producto).

$$y = \underbrace{\tan(5x)}_{1^{a}\ func.\ f} \quad \underbrace{\cos(x^3 + x)}_{2^{a}\ func.\ g} \qquad (fg)' = f'g + fg'; \qquad T.8$$

$$y' = [tan(\underbrace{5x}_{u})]'\ cos(x^3 + x) + tan(5x)[cos(\underbrace{x^3 + x}_{w})]'$$

Ahora sí, haciendo $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{5x}$ convertimos en $\boldsymbol{\tan(u)}$ que es una función básica y haciendo $\boldsymbol{w}$ a $\boldsymbol{x^3 + x}$ convertimos en $\boldsymbol{\cos(w)}$ que es otra función básica. Entonces, por ejemplo, la derivada de $\boldsymbol{\tan(5x)}$ es $\boldsymbol{\sec^2(5x)}$ multiplicado por la derivada de la expresión que nombramos como "$\boldsymbol{u}$" $\boldsymbol{(u = 5x)}$.

$$y' = \sec^2(5x)(5x)'\cos(x^3 + x) + \tan(5x)[-sen(x^3 + x)](x^3 + x)'$$

$$y' = \sec^2(5x)(5)\cos(x^3 + x) - \tan(5x)sen(x^3 + x)\,(3x^2 + 1)$$

$$y' = 5\sec^2(5x)\cos(x^3 + x) + (3x^2 + 1)\tan(5x)\ sen(x^3 + x)$$

Ejemplo: Calcule la derivada de $\boldsymbol{y = e^{sen(3x^2)}}$.

Solución:

En este caso, para convertir la expresión en una función básica o simple o no compuesta llamaremos **"u"** a $\boldsymbol{sen(3x^2)}$.

$$y' = \left[e^{\overbrace{sen(3x^2)}^{u}}\right]'$$

Aplicando T.10: La derivada de $\boldsymbol{e^u}$***,*** *es el mismo* $\boldsymbol{e^u}$ *por la derivada de* $\boldsymbol{u}$*.*

$$y' = e^{sen(3x^2)}[Sen(3x^2)]'$$

$$y' = e^{sen(3x^2)}Cos(3x^2)(6x)$$

$$y' = 6xCos(3x^2)e^{sen(3x^2)}$$

Ejemplo: Calcule la derivada de $\boldsymbol{y = e^{\ln(x) sen(x)}}$

Solución:

Para convertir la función $\boldsymbol{y = e^{\overbrace{\ln(x) sen(x)}^{u}}}$ en una función básica haremos $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{\ln(x)\, sen(x)}$. Entonces, la derivada de $\boldsymbol{e^u}$**,** es el mismo $\boldsymbol{e^u}$ multiplicada por la derivada de $\boldsymbol{u}$**.**

Para derivar la parte derecha aplicamos T.8.

$$y' = e^{\ln(x) sen(x)}[\ln(x)\, sen(x)]'$$

$$y' = e^{\ln(x) sen(x)}\left[\ln(x)'\, sen(x) + \ln(x)\left(sen(x)\right)'\right]$$

$$y' = e^{\ln(x) sen(x)}\left[\frac{1}{x} sen(x) + \ln(x)\cos(x)\right]$$