1. Построить матрицу поворота на угол φ вокруг точки $A = (a,\ b)^T$ на плоскости.

$$\text{Пусть хотим повернуть } (x,\ y,\ w)^T.$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \ - \ \text{перенос в систему координат, где } (a,\ b)^T \ - \ \text{центр}$$

$$B = \begin{pmatrix} cos\ \varphi & sin\ \varphi & 0 \\ -sin\ \varphi & cos\ \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \ \text{поворот вокруг нового центра на угол } \varphi$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{обратный перенос в исходную систему координат}$$

$$\text{Итого}: \ A^{-1} \cdot B \cdot A \ - \ \text{искомая матрица переноса}$$

$$P.\,S. \ \text{На направления перенос не оказывает влияния, существенным}$$
$$\text{будет только умножение на } B.$$

2. Построить матрицу поворота на угол φ вокруг прямой L в 3D-пространстве, проходящей через точку $A = (a,\ b,\ c)^T$ и имеющей направляющий вектор $(l,\ m,\ n)^T$ с модулем, равным единице.

$$\text{Пусть хотим повернуть } (x,\ y,\ z,\ w)^T.$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} - \text{перенос в систему координат, где } (a,\ b,\ c)^T \ - \ \text{центр}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + m^2}} & \dfrac{m}{\sqrt{n^2 + m^2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{-m}{\sqrt{n^2 + m^2}} & \dfrac{n}{\sqrt{n^2 + m^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{поворот, такой что прямая } L$$

$$\text{переходит в плоскость } XZ \ \left(\text{в } \widetilde{L}\right)$$

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{n^2+m^2} & 0 & l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -l & 0 & \sqrt{n^2+m^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{ поворот, такой что } \widetilde{L} \text{ переходит в ось } Z$$

$$D = \begin{pmatrix} cos\ \varphi & sin\ \varphi & 0 & 0 \\ -sin\ \varphi & cos\ \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{ поворот на угол } \varphi \text{ вокруг оси } Z$$

Остается сделать обратные преобразования:

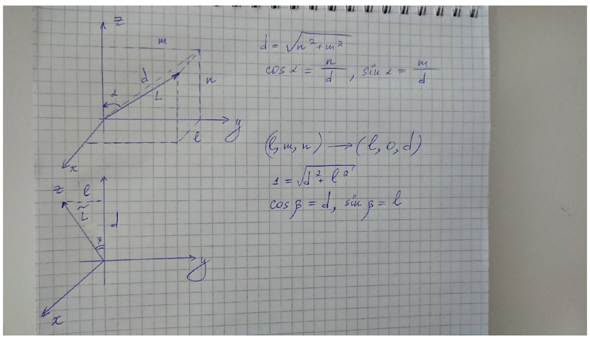
$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{n^2+m^2} & 0 & -l & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ l & 0 & \sqrt{n^2+m^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}} & \frac{-m}{\sqrt{n^2+m^2}} & 0 \\ 0 & \frac{m}{\sqrt{n^2+m^2}} & \frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Итого: } A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot C^{-1} \cdot D \cdot C \cdot B \cdot A \ - \text{ искомое}$$

Прикрепим поясняющие рисунки к решению:



3. Пусть первый поворот совершается вокруг оси x на угол $\frac{\pi}{2}$, а второй - вокруг оси y на тот же угол. Найдите результирующий поворот.

Пусть направляющие векторы осей есть $x = (1, 0, 0)^T,\ y = (0, 1, 0)^T,\ z = (0, 0, 1)^T$

$$\text{Поворот вокруг оси } x \text{ равен } \alpha = \frac{\pi}{2},\ \text{вокруг оси } y \text{ равен } \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ось и угол результирующего поворота обозначим } l \text{ и } \gamma \text{ соответственно.}$$

$$cos\frac{\gamma}{2} + l \cdot sin\frac{\gamma}{2} = \left(cos\frac{\alpha}{2} + x \cdot sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(cos\frac{\beta}{2} + y \cdot sin\frac{\beta}{2}\right)$$

$$cos\frac{\gamma}{2} = cos\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2} - (x, y) \cdot sin\frac{\alpha}{2} \cdot sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \gamma = \pm\frac{2\pi}{3}.\ \text{Знак не принциален, пусть будет положительный.}$$

$$l \cdot sin\frac{\gamma}{2} = x \cdot sin\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2} + y \cdot sin\frac{\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha}{2} + [x,\ y] \cdot sin\frac{\alpha}{2} \cdot sin\frac{\beta}{2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow l = \frac{\left(x \cdot sin\frac{\alpha}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2} + y \cdot sin\frac{\beta}{2} \cdot cos\frac{\alpha}{2} + z \cdot sin\frac{\alpha}{2} \cdot sin\frac{\beta}{2}\right)}{sin\frac{\gamma}{2}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T$$

$$\text{Итого}:\ \text{поворот вокруг } \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T \text{ на } \frac{2\pi}{3}.$$