Proiect

Faza 1 (Optimizarea filtrelor FIR cu fază liniară)

Considerați problema de proiectare a unui FTJ cu răspunsul dorit (5.1), în care ω_p și ω_s au valori fixate. (Alegeți, de exemplu, $\omega_p = 0.3\pi$ și $\omega_s = 0.4\pi$.)

a. Utilizând funcția **firls**, proiectați filtre FIR optime, în sens CMMP, cu ordine M de la 10 la 100 și observați diferențele dintre caracteristicile lor de frecvență. Convingeți-vă că faza este liniară, atât din răspunsul în frecvență, cât și din valorile coeficienților filtrelor. (Atât aici cât și în restul proiectului, folosiți funcția **freqz** pentru afișarea caracteristicilor în frecvență și **stem** pentru afișarea secvenței pondere. Se recomandă ca rezoluția reprezentării în frecvență să fie de cel puțin o sută de linii spectrale.)

b. Utilizând funcția **remez** sau **firpm**, proiectați filtre FIR optime în sensul normei infinit, cu ordine M de la 10 la 100 și observați diferențele dintre ele. (Pentru acest tip de filtre, observați înălțimea egală a lobilor din benzile de trecere, respectiv stopare.)

c. Pentru M fixat (cel puțin egal cu 20, dar nu mai mare de 100), trasați pe același grafic răspunsurile în frecvență a două filtre optime, în sens CMMP, respectiv normă infinit. Care este atenuarea minimă a fiecăruia, în banda de stopare ?

d. Introduceți o funcție de ponderare, cum ar fi, de exemplu, următoarea :

$$w(\omega) = \begin{cases} 1 & , \ \omega \in [0, \omega_p] \\ 5 & , \ \omega \in [\omega_s, \pi] \end{cases} \quad . \tag{5.22}$$

Pentru o singură valoare a ordinului M, reproiectați filtre optime în sens CMMP, respectiv al normei infinit, folosind ponderile (5.22). Comparați-le cu cele de la punctele **a**, respectiv **b**. Pentru fiecare dintre filtre, ce raport este între dispersia erorii din banda de stopare și cea a erorii din banda de trecere ?

e. Proiectați FTS și FTB, de ordin $M = 20$, cu specificații potrivite scopului propus. Pentru aceasta, se pot utiliza două abordări. Prima constă în adaptarea corespunzătoare a argumentelor de intrare pentru funcțiile **firls** și **remez** sau **firpm**. În a doua abordare, se consideră că oricare dintre aceste funcții poate proiecta numai FTJ, iar celelalte două filtre, FTS și FTB trebuie obținute prin diferențe de tipul : „FTS=1–FTJ", „FTB=FTJ–FTJ". Trasați răspunsurile în frecvență ale filtrelor proiectate, folosind ambele abordări, pentru a vă convinge de validitatea rezultatelor obținute. Analizați dacă există diferențe între rezultatele celor două abordări ? (Puteți calcula separat distanța euclidiană dintre secvențele pondere și cea dintre răspunsurile în frecvență.)

Faza 2 (Proiectarea în sens CMMP a filtrelor FIR cu răspuns ideal complex, fără restricții de fază)

Funcția MATLAB **firls_FTJ_c.m** încărcată pe platforma Moodle (`https://acs.curs.pub.ro`) implementează Algoritmul de proiectare în sens CMMP a unui FTJ de tip FIR, fără restricții de fază, conform descrierii din suportul teoretic al acestei secțiuni. Utilizatorul trebuie să precizeze ordinul filtrului M și următorul răspuns dorit (cu valori complexe) :

$$D_c(\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega K} & , \ |\omega| \leq \omega_p \\ 0 & , \ \omega_s < |\omega| \leq \pi \end{cases} . \tag{5.23}$$

Pulsațiile ω_p și ω_s, precum și întârzierea de grup K, sunt date de proiectare. Reamintim că întârzierea de grup (*group delay*) este derivata cu semn schimbat a fazei răspunsului în frecvență al unui filtru. Mai precis :

$$grd\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right] = -\frac{d}{d\omega} arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right], \forall\omega \in \mathbb{R}. \tag{5.24}$$

Evident, filtrele cu fază liniară au întârziere de grup constantă.

Pentru înțelegerea programului, precizăm următoarea egalitate (pe care cititorul o poate verifica singur) :

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} cos(n\omega)d\omega = \omega_2 Sc(n\omega_2) - \omega_1 Sc(n\omega_1). \tag{5.25}$$

Prin Sc s-a notat funcția sinus cardinal (atenuat) (adică $sin(x)/x$). (Semnalăm că funcția MATLAB **sinc** are o definiție diferită de cea matematică : $sin(\pi x)/(\pi x)$.)
Așa cum s-a menționat, matricea **R**, definită în (5.19), moștenește structura Toeplitz simetrică a matricei $\mathbf{C}(\omega)$ definite în (5.14). Ținând cont de forma lui Ω_{ps} (ca reuniune de două intervale închise) și de egalitatea (5.25), rezultă că elementele lui **R** au forma următoare :

$$\omega_p Sc\left[(m-n)\omega_p\right] - \omega_s Sc\left[(m-n)\omega_s\right] + \pi\delta_0[m-n], \tag{5.26}$$

unde $m \in \overline{1, M}$ este indicele de linie, iar $n \in \overline{1, M}$ este indicele de coloană. (Oricum, datorită simetriei, semnificațiile celor doi indici se pot inversa.)
Similar, se obține vectorul **r** definit tot în (5.19), ținând seama de expresia (5.23) a răspunsului dorit D_c și de faptul că banda de stopare nu contribuie, de fapt, la calculul integralei.

a. Folosind funcția **firls_FTJ_c.m**, proiectați mai multe FTJ cu parametrii ω_p și ω_s preluați de la faza anterioară. Alegeți $M = 20$ și mai multe valori pentru întârzierea de grup K, astfel încât să se verifice inegalitățile $M/4 \leq K \leq 3M/4$. Trasați răspunsurile în frecvență ale filtrelor obținute și secvențele pondere aferente. Observați că fazele sunt neliniare și secvențele pondere nu mai sunt simetrice, mai puțin în cazul $K = M/2 = 10$. Apelați funcția **grpdelay** pentru a vedea deviația de la liniaritate.

b. Modificați funcția **firls_FTJ_c.m** prin adăugarea unui nou argument de ieșire, **pr**, care returnează performanța relativă a filtrului proiectat (în procente). Aceasta se poate evalua astfel :

$$pr\left(\hat{\mathbf{h}}\right) = 100\frac{\mathbf{V}_{id} - \mathbf{r}^{\mathbf{T}}\hat{\mathbf{h}}}{\mathbf{V}_{id}}[\%] \tag{5.27}$$

Unde :

$$\mathbf{V}_{id} = \int\limits_{\omega\in\Omega_{ps}} \left|H_{id}\left(e^{j\omega}\right)\right|^2 d\omega = \int\limits_0^{\omega_p} d\omega = \omega_p \tag{5.28}$$

Proiectați mai multe FTJ optime cu ajutorul noii funcții **firls_FTJ_c.m**, alegând diferite valori ale ordinului M (între 10 și 100, nu neapărat pare) și stabilind întotdeauna întârzierea de grup la mijlocul suportului secvenței pondere ($K = M/2$, chiar dacă ea nu rezultă a fi un număr întreg). Afișați răspunsurile în frecvență și secvențele pondere ale filtrelor proiectate, cu indicarea performanței relative pe primul grafic. Efectuați o comparație riguroasă între aceste filtre, cu referire la performanța relativă.

c. Modificați funcția **firls_FTJ_c.m** astfel încât să se poată proiecta și FTS sau FTB. (Adaptați calculul performanței relative pentru fiecare dintre cele două tipuri de filtre.) Denumiți noile funcții prin **firls_FTS_c.m**, respectiv **firls_FTB_c.m**. Comparați rezultatele obținute cu cele de la punctul **e.** al fazei precedente.

Faza 3 <opțională> (Proiectarea filtrelor FIR optimale, utilizând MCMMP și o mulțime finită de pulsații predefinite)

În *PPFO_2CW* (6.7), optimizarea se realizează pe întreaga mulțime de pulsații Ω_{ps}. Alternativ, problema poate fi tratată aproximativ, în sensul că mulțimea continuă de pulsații Ω_{ps} se înlocuiește cu o grilă discretă de pulsații $\Omega_{ps}^N \subset \Omega_{ps}$, având $N \in \mathbb{N}^*$ elemente, $\{\omega_n\}_{n \in \overline{0,N-1}}$. De regulă, N se alege de valoare superioară ordinului filtrului, M. Atunci, se poate formula următoarea problemă de proiectare în puncte discrete (*PPFO_2CD*) :

Plecând de la un răspuns dorit D_c, cunoscut în mulțimea discretă finită de pulsații $\Omega_{ps}^N = \{\omega_n\}_{n \in \overline{0,N-1}}$, se cere să se proiecteze un filtru al cărui răspuns în frecvență este cel mai aproape de răspunsul D_c, în sensul normei euclidiene discrete. Mai precis, filtrul este soluția problemei de optimizare :

$$\min_h \sum_{n=0}^{N-1} \left| D_c(\omega_n) - H(\omega_n) \right|^2 . \tag{5.29}$$

Implementați o rutină ce rezolvă problema de optimizare *PFO_2CD* prin MCMMP. Apoi, rezolvați *PPFO_2CD* alegând diferite valori ale parametrilor M, K și N, pentru $\omega_n = n\pi/N$, $\forall n \in \overline{0, N-1}$. Comparați filtrele obținute cu cele proiectate în fazele anterioare ale proiectului.