Dynamic Memory Allocation

杨天祺

目 录

1 摘要

由于内存资源有限，但是内核和各个进程都需要使用内存空间，因此内核需要对内存申请进行管理，有效地分配内存空间。

但是内存分配算法需要考虑的因素比较多，例如算法本身的效率，产生内碎片和外碎片的多少等。但就算不考虑这么多，这个问题也是极其困难的。例如即使我们只考虑最小化一个进程运行的峰值利用率，并且在离线情况下，求解最优的策略也被证明是 NP-Hard 的 [5]。但是在离线情况下，有一些近似算法可以达到较好的复杂度，例如存在一个 $2+\epsilon$ 近似比的多项式算法 [4]，可以较快的得到一个近似解。

在离线情况下就是 NP-Complete 的，因此在在线的情况下就更加难以处理。一般现在动态内存分配采用贪心思想（例如最先匹配算法），或是一些启发式的方法（例如 slab 算法 [1]）等。

本文前面部分分析了离线情况下最优算法，再对动情况的一些启发式算法做了一些讨论。

2 离线问题

我们先考虑对于单个程序的离线的情况。这个时候我们提前知道整个内存分配申请序列，要求一个为每一个申请分配的方案，使得某个条件最优化。目前已有研究表明，在最小化申请的堆大小的情况下的求最优解是 NP-Hard 的 [5]，但是这篇论文中的证明较为复杂。我们在这里提出一个更为简单的证明。

2.1 优化目标

这里我们考虑的是最小化峰值利用率 [2]。即若我们假定 n 个分配和释放请求按照顺序处理，在处理完第 i 个情况之后，它的有效载荷 (payload) 是 P_i，即当前被分配的所有块的大小和为 P_i，而此时堆的大小是 H_i。则第 i 个时刻的峰值利用率 U_i 定义为

$$U_i = \frac{\max_{j\le i} P_j}{H_i}$$

我们分配器的目标就是最小化 U_n。

而一般我们假设 H_i 是单调不减的，而由于每个时刻我们 P_i 都是确定且已知的，因此 $\max\limits_{i\le n} P_i$ 也是已知的。因此我们最小化 U_n，等于最小化 H_n。

2.2 模型表述

这个时候我们问题可以被形式化地表述成：

> 假定有 m 个单位空间的内存（代表一个大小为 m 的堆）。给定 n 个内存分配的申请，第 i 个申请有一个申请大小 $size_i$，以及存在的时间区间 $[tl_i, tr_i]$。要为每个内存分配请求分配空间中一个连续的区

> 间 $[l_i, r_i]$，区间长度为 $size_i$，即满足 $r_i - l_i + 1 = size_i$。要求不存在两个分配 i 和 j 满足 $[tl_i, tr_i]$ 和 $[tl_j, tr_j]$ 相交且 $[l_i, r_i]$ 和 $[l_j, r_j]$ 相交。
>
> 求最小的 m 使得存在一个可行的 $[l_i, r_i]$ 序列满足上述条件。

当然，我们可以二分答案 m，变成判断对于一个给定的 m，是否存在一个可行的 $[l_i, r_i]$ 序列满足上述条件。

2.3 内存分配图

我们将每个内存分配请求放到一个二维平面中，这个二维平面中横坐标是时间，纵坐标是 $1 \sim m$ 号内存。那么每个内存分配请求就是一个以 $[tl_i, tr_i]$ 为横坐标区间，$[l_i, r_i]$ 为纵坐标区间的矩形。我们将其称为对应的分配方案的内存分配图。而内存分配不能冲突的限制就等价与 n 个内存分配请求对应的矩形不相交。而对于每个矩形，$[tl_i, tr_i]$ 是请求的性质，是固定的，而你要求的就是一个可行的 $[l_i, r_i]$ 序列。

例如图 1 则为一个可能的内存分配图，这里有 3 个内存分配需求，分别是时刻 $1 \sim 5$ 的一个大小为 3 的申请，时刻 $3 \sim 9$ 的一个大小为 1 的申请，时刻 $6 \sim 11$ 的一个大小为 3 的申请。这里将第 1 个申请分配到 $3 \sim 5$ 号内存区域，第 2 个分配到第 1 号，第 3 个分配到第 $2 \sim 4$ 号。此时 $m = 5$。当然这不是这个问题的最优答案，因为第 1 个请求我们可以放在 $2 \sim 4$ 的位置，这样 m 就为 4。

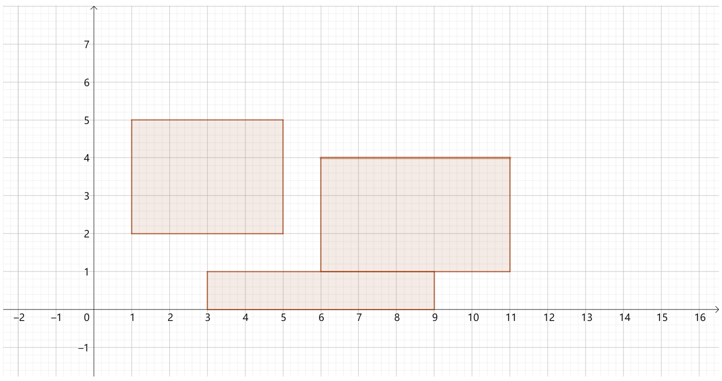

Figure 1: 内存分配图示例

因此经过这个转化后，问题变成了如下形式：

> 在二维平面上，给定 n 个矩形，问是否存在一种将所有矩形都上下平移的方案，使得所有矩形的纵坐标都在 $0 \sim m$ 之间，且各个矩形不相交。

这里上下平移即为选定一个合适的纵坐标起始位置 l_i。

2.4 最优算法

那么最小化峰值利用率就是要求出最小的 m，使得存在一个可行的内存分配图。

定理 **2.1.** 求可行的最小峰值利用率问题是 *NP-Complete* 的。

Proof: 我们尝试将问题规约到 Partition Problem，而 Partition Problem 是 Karp 在 1972 年证明的 21 个 NP-Complete 问题之一 [3]。

我们考虑下面这个内存分配图（若有边横坐标相同重合表示它们的先后顺序不影响）：

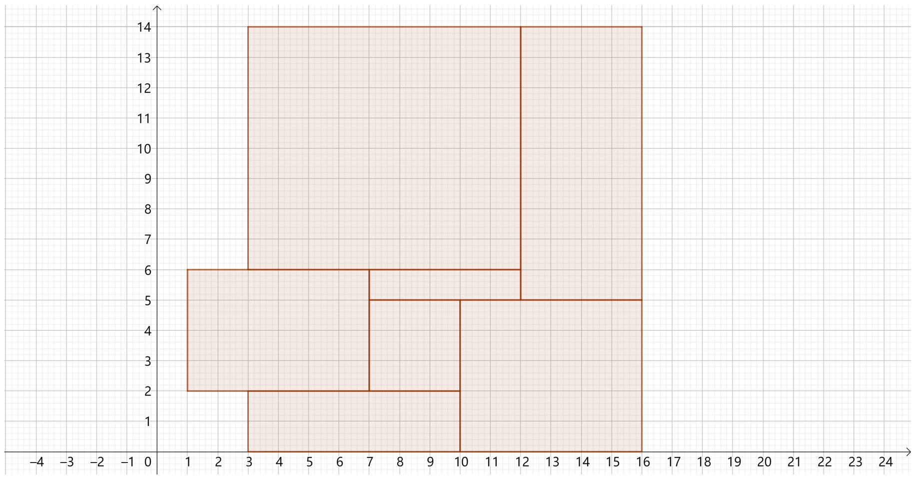

Figure 2: 构造内存分配图

对于这个内存申请序列而言，可以证明这是唯一的可行的 $m = 14$ 的分配方案（除去和它对称的一个）。证明可以通过程序搜索实现。搜索实现可以见 `tools/opt.cpp`。我们称这张图和其对应的申请序列为 锁。

同样可以证明如果把每次申请的内存需求都乘上一个固定的值 k，那么也仅存在唯一的 $m = 14k$ 的方案，即为将所有矩形纵坐标都乘 k 对应的图。我们称乘 k 之后的结果为 $k-$ 锁。

那么我们考虑对于一个 Partition Problem，给定一个 n 个元素的集合 S，S 中所有元素的和为 $2K$，则我们在 $k-$ 锁的基础上添加如下一些存在时间在 $[tl_i, tr_i] = [1, 2]$ 的内存申请：

1. 一个大小为 $6K$ 的申请
2. 对于集合 S 中的每个元素 a，添加一个大小为 $2a$ 的申请

则由于 $6K$ 的申请必须被放在图 2 中最左边的矩形的上面，因此除掉 $6K$ 的申请，剩下的部分被图 2 中最左边的矩形分为上下各 $2K$ 大小的两个部分。因此此时我们的问题和将剩下 S 中的每个元素分到上面或下面部分等价。我们要

从 S 中选出一个子集，将它们分到下面，剩下的分到上面，而两边选出的集合的和应当都恰好是 K。这与 Partition Problem 等价。

因此我们证明了任何 Partition Problem 都可以用多项式时间转化成我们当前的问题，因此这个问题是 NP-Complete 的。

References

[1] Jeff Bonwick et al. The slab allocator: An object-caching kernel memory allocator. In USENIX summer, volume 16. Boston, MA, USA, 1994.

[2] Randal E. Bryant and David R. O'Hallaron. Computer Systems: A Programmer's Perspective Plus MasteringEngineering with Pearson eText – Access Card Package. Pearson, 3rd edition, 2015.

[3] Richard M Karp. Reducibility among combinatorial problems. In Complexity of computer computations, pages 85–103. Springer, 1972.

[4] Tobias Mömke and Andreas Wiese. A $(2+\epsilon)$ -approximation algorithm for the storage allocation problem. 2015.

[5] J. M. Robson. Storage allocation is np-hard. Information Processing Letters, 11(3):119–125, 1980.