

页面置换算法调研报告

ljt12138

2019 年 4 月 13 日

1 概述

在页式虚拟存储计算机中，内存被看作是磁盘的缓存，操作系统通过将常用的虚拟内存页放入物理内存页帧中，将不常用虚拟内存页放入磁盘中来提供更大、更自动化的虚拟存储。页面置换算法在上世纪曾是很热门的研究方向，Belady的 [1]中根据使用以往信息的多少对算法大致归类，并给出了离线下的最优算法；理论上，对于页面置换问题竞争性分析的研究有许多成果，Fiat等人的 [2]对于更一般的 k -server问题证明了随机标记法的竞争比，并分析了随机算法竞争比的下界。todo

确定性页面置换算法的竞争比不会小于 k ，通过在算法中引入随机因素，可以期望将竞争比降低至 $\log k$ 。可以证明，随机页面置换算法期望竞争比的下界是 $\log k$ 。

2 竞争性分析

2.1 离线算法和竞争比

页面置换问题可以被这样描述：给定一台支持 h 个逻辑页面、拥有 k 个页面大小物理内存的机器，选择每次的置换页面使得总的置换次数最少。

页面置换算法可以分为离线算法（off-line）和在线算法（on-line）。离线算法是指整个访存序列已经预先给定，而在线算法是指访存序列是动态给出的。很显然，真实情景下的页面置换算法必须是在线的。

Belady在其 [1]中最早给出了称为MIN算法的最优离线算法。另一种简单的算法FIF（Further-in-future），通过总是换出下一次访问最晚的页面，算法可以做到最小化缺页次数 [6]。

虽然最优算法需要使用未来的信息，在实践中不可能实现，但其可以作为分析在线算法的一个标准。一个很显然的事实是，直接使用缺页数评价在线算法应对所有输入的能力是愚蠢的——如果连最优算法都无法给出令我们满意的命中率，那么在线算法也不可能做到更优。因此，我们选择使用在线算法缺页次数和最优算法缺页次数的比来评价在线算法的优劣。设一个算法 A 在访存序列 S 上的缺页次数为 $Miss(A, S)$ ，如果对于任意访存序列 S ，都有：

$$Miss(A, S) \leq f(k, h) \times OPT(S) + O(1)$$

我们可以称，算法 A 是 $f(k, h)$ -Competitive的， $f(k, h)$ 可以称为算法 A 的竞争比。

竞争比给在线算法的优劣提供了基本的评价标准。竞争比低的算法不一定总是提供更好的性能，但从某种程度上讲，其在最差情况下的性能是值得信赖的；反过来，竞争比高的算法虽然在某些情况下运行良好，但需要警惕可能出现的性能退化。当确实需要使用高近似比的算法时，最好提供一个“备选方案”。

2.2 确定性在线算法竞争比的下界

定理 2.1 任何确定性在线算法 C 的竞争比至少是 k 。

证明 2.1 考虑仅有 $k + 1$ 个逻辑页面的长度为 l 的访存序列，每次访问的页面恰好是 C 上一次换出的页面，那么每一次访问都会发生缺页；在最优算法中，每次缺页发生之后，下一次发生缺页至少是在 k 次之后（因为换出的是下一次访问最晚的页面），因而总的缺页次数不会超过 $k + l/k$ 。有：

$$Miss(C, S) \geq k \times OPT(S) + O(1)$$

我们用一个例子来解释竞争比的价值。LRU算法通常被认为是性能最好的页面置换算法之一，但一个简单的情景就会导致其严重退化。设逻辑页面数为 $k + 1$ ，物理页面数为 k 。

$$\begin{aligned} &1, 2, 3, \dots, k, k + 1 \\ &1, 2, 3, \dots, k, k + 1 \\ &\dots \end{aligned} \tag{1}$$

对于LRU算法而言，由于总是换出最近访问最早的页面，每次缺页都会恰好把下一次要访问的换出，因而每一次都会发生缺页。然而最优情况下每 k 次访问只会发生一次缺页。因此，许多系统中会使用其他算法作为LRU退化时的备选方案。

2.3 标记算法

标记算法（Marking Algorithm）是一类置换算法的总称。假设每个在内存中的页面都有一个标记位，初始时所有页面都是未标记的。未标记的页面会在访问时被标记，当所有页面都被标记时，将所有页面重新设为已标记。标记算法是那些只会将未标记的页面置换出去的算法。

许多根据访问排序的页面置换算法都是标记算法，例如最近未使用算法（NRU）与最近最久未使用算法（LRU）。

引理 2.1 LRU是标记算法。

证明 2.2 考虑使用反证法。如果LRU不是标记算法，那么在某个时刻其换出了一个未标记的页 p ，并且存在一个标记的页 q 没有被换出。因此上一次执行将所有页取消标记后， q 被访问了至少一次， p 没有被访问过，因而 q 上一次访问比 p 要近。根据LRU算法的定义， p 不会被置换出，矛盾。

定理 2.2 任何标记算法都是 k -Competitive的。

证明 2.3 将序列按顺序划分为 t 个段 b_1, b_2, \dots, b_t ，每个段 b_i 中仅包含至多 k 种不同的页面，且 b_1 尽可能长，在此前提下 b_2 尽可能长，以此类推。即：对于一个以 s_i 开头的段 b_i ， b_{i+1} 的开头 s_j 是最小的 j ，满足 $\{s_i, s_i+1, \dots, s_j\}$ 包含 $k+1$ 个不同的位置。我们称这是访存序列的分割。

用归纳法可以证明，在每一段末尾，标记算法总会使得所有段被标记。那么在下一段开头所有段都被清除标记，且这些未标记的段要么被重新访问，要么被换出，这一段内的换出次数不会超过 k 。那么总的换出次数不超过 $t \times k$ 。

接下来我们说明最优算法至少会发生 t 次缺页。考虑每一个段开头的页面 p_1, p_2, \dots, p_t 。如果 p_i 没有发生缺页，说明 p_i 在内存中。根据划分段的定义，上一次 p_i 被引用一定不在 b_{i-i} 中，因而 b_{i-1} 可以使用的内存页面只有 $k-1$ 个。那么除掉 p_{i-1} 发生的缺页，根据鸽巢原理，还会至少发生一次

缺页。所以总的缺页次数至少是 t 。由于：

$$Miss(Marking, S) \leq t \times k \leq k \times OPT(S)$$

任何标记算法都是 k -Competitive的。

一些确定性算法的竞争比结论如下 [8]。

- LRU算法是 k -Competitive的；这是上面结论的平凡推论。
- FIFO, Clock算法是 k -Competitive的；他们都是所谓Conservative algorithms [9]。
- LIFO, LFU算法不是Competitive的，即算法缺页次数和最优解的缺页次数之比可以无限大 [10]。

2.4 随机性的引入

在线算法应对输入的过程可以看成是一个双人零和博弈。算法是“Defender”，为了让代价最小化；输入是“Hacker”，为了让代价最大化。由于面对的是“充满恶意的”输入序列，确定性算法的竞争比并不是很理想。一种自然的想法就是在决策中引入随机性。

使用类似之前的方法，我们定义随机算法 R 是 $f(h, k)$ -Competitive的，如果：

$$\mathbb{E}[Miss(R, S)] \leq f(h, k) \times OPT(S) + O(1)$$

2.5 随机置换算法

随机置换算法（下面称为RAND）是最简单的随机置换策略：在需要换出页面时，始终从驻留在内存中的页面里等概率地选择一个进行换出。IBM的OS/390操作系统中曾使用随机置换算法作为LRU的补充，当LRU性能退化时使用RAND代替 [9]。

2.6 随机标记算法

一种有效的随机置换算法被称为随机标记算法（Random Marking），下文中我们简称其为RM。其思路类似于一般的标记算法，但每次需要换出时会从所有未被标记的页面中随机选出一个换出。Fiat首先

证明了RM是 $2H_k$ -Competitive的 [2], 其中 H_k 是调和级数前 k 项的和, $H_k = \log k + O(1)$ 。

定理 2.3 随机标记算法是 $2H_k$ -Competitive的。

证明 2.4 考虑访存序列的分割 b_1, b_2, \dots, b_t , 考虑一个段 b_i 中的元素。我们称一个页面是**新的**, 如果它在 b_{i-1} 中没有被引用, 在 b_i 中还没有被引用; 称一个页面是**旧的**, 如果它在 b_{i-1} 中被引用过, 在 b_i 中还没有被引用。不妨设 b_i 中对新页面的引用有 l_i 次, 对旧页面的引用有 $k - l_i$ 次。

我们首先证明, 最优算法在 b_i 执行的开销至少是 $\sum l_i/2$ 。假设第 b_i 中对新页面的引用发生了 p_i 次缺页, 那么在 b_{i-1} 中另外的 $l_i - p_i$ 个页面都始终在内存中没有被换出, 因而在 b_{i-1} 中可用的页面只有 $k - (l_i - p_i)$ 个, 至少发生了 $l_i - p_i$ 次缺页。考虑将这两者相加得到:

$$\sum_i p_i + (l_i - p_i) = \sum_i l_i$$

一次缺页至多会被当前段计算一次, 被下一段计算一次, 因此总的缺页次数不会小于上面结果的一半, 即 $\sum l_i/2$ 。

接下来我们说明RM算法在段 b_i 的缺页次数不会超过 $l_i H_k$, 从而总的缺页次数不会超过 $H_k \sum l_i$ 。其中 H_k 是调和级数前 k 项的和。对于任何标记算法, 在一个段开始时, 内存中总是存放上一个段的所有内容。因此, 每一个新页面的引用都会导致缺页, 我们只需要关心旧页面产生的缺页次数, 即由于被 b_i 中导致的缺页换出的旧页面。很明显, 最差情况下所有新页面的引用都在旧页面的引用之前。

如果一个页面 P 将页面 Q 换出, 我们连接一条从 P 到 Q 的有向边, 那么只有引用时入度为1的点会发生缺页。设旧页面依次是 $O_0, O_1, \dots, O_{k-l_i+1}$ 。当处理 O_j 时, 发生缺页且可能换出 O_j 的, 就是那些入度为1, 出度为0的点, 而这样的点恰好有 l_i 个。这 l_i 个点会在还未被换出的 $k - j$ 个旧页面中等概率取出恰好 l_i 个, 那么 O_j 被取出的概率就是 $l_i/(k - j)$ 。所有旧页面的期望缺页次数就是:

$$\sum_{0 \leq j < k-l_i} \frac{l_i}{k-j} = l_i \sum_{l_i < j \leq k} \frac{1}{j} = l_i (H_k - H_j)$$

再加上新页面发生的缺页, RM总的开销不会超过:

$$Miss(RM, S) \leq 2H_k \times OPT(S)$$

2.7 随机策略竞争比的下界

2.7.1 极大极小原理

证明一个问题随机算法竞争比下界的重要工具是极大极小原理 (Minimax Principle)。我们可以将随机算法看成在一个确定性算法集合 \mathcal{A} 中以某种分布选出一个算法，设随机变量 A 为分布 p 下选出的算法；输入集合是 \mathcal{X} ，随机变量 X 为分布 q 下选出的输入， $c(a, x)$ 为算法 a 在输入 x 下的开销，那么：

$$\max_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[c(A, x)] \geq \min_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[c(a, X)]$$

证明 2.5

$$\begin{aligned} & \max_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[c(A, x)] \\ &= \sum_x q(x) \max_{x \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[c(A, x)] \\ &\geq \sum_x q(x) \mathbb{E}[c(A, x)] \\ &= \sum_x q(x) \sum_a p(a) c(a, x) \\ &= \sum_x q(x) \mathbb{E}[c(A, x)] \\ &\geq \sum_x q(x) \min_{a \in \mathcal{A}} c(a, x) \\ &= \min_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[c(a, X)] \end{aligned} \tag{2}$$

定理指出，随机算法 A 在最差输入下的开销，至少是某种分布的随机输入下最好程序的开销。那么我们要证明随机算法开销的下界，便可以构造某种概率分布，并证明最优的确定性算法的开销不小于随机算法的开销。利用这个极大极小原理可以证明下面这个定理 [5]。

定理 2.4 页面置换问题不存在 c -Competitive 的随机化算法，对于任何 $c < \lceil \log(k+1) \rceil / 2$ 。

证明 2.6 考虑构造一个逻辑页面个数为 $k+1$ 访存序列。首先依次访问所有的位置。接下来我们按段生成一个无限长的序列，每一段都以所有页面被访问结束。不妨将 $1, 2, \dots, k+1$ 摆放成一个环。在每一段中，我们总是不断地从当前位置出发，等概率地选择两条路径中的一条，到达未访问过位置的中间点。

在每一次游走中，对于任何一个确定性算法，都会以 $1/2$ 的概率产生一次缺页，因此每一段中期望产生缺页的次数为 $\lceil \log(k+1) \rceil / 2$ ；由于每一段中最后访问的页面只会被访问一次，最优算法会在上一次缺页，即上一段的末尾将这个页面换出，从而在每一段只会产生一次缺页。那么任何确定性算法的近似比都至少是 $\lceil \log(k+1) \rceil / 2$ ，根据极大极小原理，页面置换问题不存在小于这个近似比的随机算法。

因此我们可以认为，在竞争比的意义下，RM几乎已经是最优的算法了。使用RM可以保证在被某些访存序列的“恶意攻击”时，页面换入换出的次数不会超过最优算法的 $2 \log k$ 倍；与之相比，任何确定性算法至多只能做到不超过 k 倍。

2.8 LRU退化的情景

由于希望使用RM或RAND作为LRU退化时的候选，我们关注LRU退化的情景下各个算法的性能。实验的算法包括LRU、FIFO、Clock、RM和RAND。

Algorithm	n=129	n=130	n=150
LRU	126.046	64	6.76754
FIFO	126.046	64	6.76754
Clock	1.96935	64	6.76754
RM	5.35882	4.93054	3.18855
RAND	1.98533	1.96655	1.89022

在第一个实验中，我们假定进程拥有的物理页面数为128，程序需要使用的页面数为129，且循环的访问所有页面。可以发现FIFO和LRU的竞争比都达到了 k ，而RAND、RM和Clock保持了比较良好的性能。

在第二个实验中，逻辑页面数变为了130。注意到Clock并没有像上面一样保持良好的性能，发生了严重的退化。但RM和RAND仍然保持着不错的性能。

在第三个实验中，逻辑页面数变为了150。和预期相符，RM和RAND仍然具有良好的性能。随着访问页面数量的增长，LRU的竞争比逐渐下降到了正常水平。

3 页面置换与局部性

在基于竞争性分析的页面置换算法研究中，访存序列被视为是“攻击者”，作为“防御者”的算法不得不考虑任何可能的访存序列。然而真实应用的访存序列既不会总是“针对”某种策略，也不是随机的。与之相反，程序访问内存具有所谓局部性（Locality）的特征。

内存访问的局部性主要可以分为两种。一是时间局部性，即一个被访问的地址很可能在近期再次被访问；二是空间局部性，即一个被访问的地址附近的地址很可能在近期被访问。将页面分页管理已经天然的利用了程序的空间局部性，那么能否良好利用程序的时间局部性便决定了页面置换算法的优劣。

对程序行为的刻画有着许多不同的模型，这里我们主要关注其中的两个。

- 基于工作集（Working Set）的模型 [4]。模型认为，程序在一段时间内总是会频繁地访问一些内存页面，这些内存页面被称为当前的工作集。工作集模型允许我们通过调整常驻集的大小来适应工作集，通过和进程调度子系统的整合，可以给并发环境下的程序提供更好的内存性能。
- 基于访问图（Access Graph）的模型 [5]。模型认为，程序一段连续的访存行为应当是访问图上一个连续的路径。在很多情况下，程序的访存依赖于程序中的数据结构，访存行为有时是和数据结构保持一致的。当数据结构是树甚至一般图时，通常的局部性消失了，取而代之的是基于数据结构的访存模式。

3.1 工作集模型

参考文献

- [1] Belady, L. A . A study of replacement algorithms for a virtual-storage computer[J]. IBM Systems Journal, 1966, 5(2):78-101.
- [2] Fiat A , Karp R M , Luby M , et al. Competitive paging algorithms[J]. Journal of Algorithms, 1991, 12(4):685-699.

- [3] Sleator D D , Tarjan R E . Amortized efficiency of list update and paging rules[J]. Communications of the Acm, 1985, 28(2):202-208.
- [4] Denning P J. Working Sets Past and Present[J]. IEEE Transactions on Software Engineering, 1980, 6(1): 64-84.
- [5] Borodin A, Raghavan P, Irani S, et al. Competitive paging with locality of reference[J]. symposium on the theory of computing, 1991, 50(2): 249-259.
- [6] <https://piazza.com/class/i5j09fns17k5x0?cid=1296>
- [7] <https://riptutorial.com/algorithm/topic/8022/online-algorithms>
- [8] <https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-854j-advanced-algorithms-fall-2005/lecture-notes/n23online.pdf>
- [9] https://en.wikipedia.org/wiki/Page_replacement_algorithm
- [10] <https://riptutorial.com/algorithm/example/25916/paging-online-caching->