



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет цифровых трансформаций

## Data envelopment analysis

По дисциплине:

*Технологии поддержки принятия решений на финансовых рынках*

Студента группы J42113  
Осадчего Дмитрий

✓ **Целью** работы является рассмотрение метода оценки эффективности DEA

## Постановка задачи

Разработка на языке программирования высокого уровня программы для ЭВМ, которая решает задачу вычисления относительной эффективности по методу DEA.

- DEA (от английского Data Envelopment Analysis) - техника измерения относительной эффективности многопродуктовых производственных единиц, базирующаяся на линейном программировании.
- Примеры однородных множеств, к которым применяется техника DEA: муниципалитеты, школы, больницы, магазины, отделения банков, относящиеся к определённому региону.

Обычно, эффективность представляют как отношение затраченных ресурсов (входов) к полученному продукту (выходам):

$$Efficiency = \frac{Output}{Input}$$

- При DEA анализе каждому входу и выходу присваивается коэффициент, определяющий влияние на эффективность.

$$E_k(U, V) = \frac{\sum_{i=1}^m u_i y_{ik}}{\sum_{j=1}^n v_j x_{jk}}$$

где  $n$  – число входов,  $m$  – число выходов,  $k$  – номер объекта,  $X_k$  – вектор входов,  $Y_k$  – вектор выходов,  $V$  – вектор весов входов,  $U$  – вектор весов выходов.

При ограничениях:

$$E_s(U, V) = \frac{\sum_{i=1}^m u_i y_{is}}{\sum_{j=1}^n v_j x_{js}} \leq 1, \quad s = 1, \dots, l,$$
$$u_i \geq \epsilon, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$v_j \geq \epsilon, \quad j = 1, \dots, n.$$

Целевая функция - значение эффективности производственной единицы  $k$ .

- Существование допустимых решений следует из свойств эффективности.
- Конечность оптимального решения следует из ограниченности целевой функции.
- В правой части ограничений на эффективность могла бы стоять любая положительная константа.
- Ограничения на значения весов ( $\geq \epsilon$ ) гарантируют, что будут учтены все входы и выходы

Однако в таком виде задача является нелинейной и необходимо произвести линеаризацию:

Целевая функция:  $\max \sum_{i=1}^m u_i y_{ik}$

$$E_k(U, V) = \frac{\sum_{i=1}^m u_i y_{ik}}{\sum_{k=1}^n v_j x_{jk}}$$

фиксируем знаменатель и максимизируем числитель

При ограничениях:  $\sum_{j=1}^n v_j x_{jk} = 1,$

$$\sum_{i=1}^m u_i y_{il} - \sum_{j=1}^n v_j x_{jl} \leq 0,$$
$$l = 1, \dots, p,$$
$$u_i \geq \epsilon, \quad i = 1, \dots, m,$$
$$v_j \geq \epsilon, \quad j = 1, \dots, n.$$
$$E_s(U, V) = \frac{\sum_{i=1}^m u_i y_{is}}{\sum_{j=1}^n v_j x_{js}} \leq 1$$

заменяем деление на разность

В таком формате коэффициенты в целевой функции будут характеризовать значимость выходов для объекта. Возможно решение двойственной к этой задачи. Тогда коэффициенты будут отражать значимость ресурсов.

# Пример расчета

Рассмотрим пример расчета эффективности магазинов, характеристики которых заданы в таблице.

Магазины	Ассортимент товара	Внешняя реклама	Внутренняя реклама	Коммуникабельность	Наличие автопарковки	Ассортимент конкурента 1	Ассортимент конкурента 2	Посещаемость в день (тыс. чел.-к)	Торговая площадь (тыс. кв. м)	Выручка за день (тыс. долларов)
1	3	1	1	4	2	5	4	23.0	2.00	27.6
2	4	2	3	5	2	3	3	21.0	2.25	25.2
3	5	1	5	5	2	4	0	13.5	1.10	13.2
4	4	4	3	5	1	4	5	14.0	2.50	12.8
5	4	4	3	4	2	3	3	35.0	3.50	40.0

Выделим входы и выходы. К входам отнесем ассортимент, внешнюю и внутреннюю рекламу, коммуникабельность, наличие парковки и торговую площадь. Ассортименты конкурентов рассматривать не будем, так как это относится к внешним параметрам (существуют отдельные методики их учета). В качестве выходов будем использовать посещаемость и выручку.

После решения линейаризованных ЗЛП получим таблицу с оценками эффективности магазинов. Например магазин 1 является самым эффективным, а магазин 4 наименее эффективным.

	assort	vneshe_rek	vnut_rek	komm	park	pos	plosch	vyr	efficiency
Mag									
1	1e-05	0.71397	0.00399696	1e-05	1e-05	1e-05	0.140971	0.0673491	1.85907
2	1e-05	0.128335	1e-05	1e-05	1e-05	1e-05	0.330306	0.0285804	0.720435
3	1e-05	0.260955	1e-05	1e-05	1e-05	0.0697473	0.671704	1e-05	0.941721
4	0.180247	1e-05	1e-05	1e-05	0.060106	0.0317152	0.0875142	1e-05	0.444141
5	0.180968	1e-05	1e-05	1e-05	1e-05	0.0196198	0.0788569	0.00803135	1.00795



Также при низкой размерности задач, возможно графическое отображение метода.

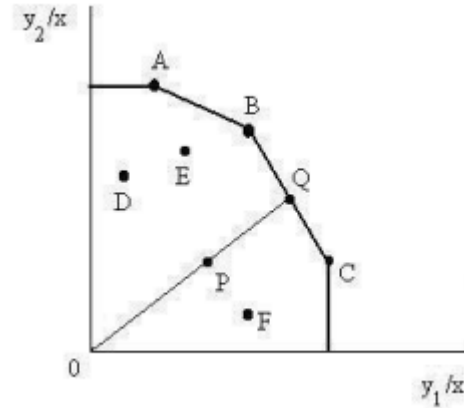
Рассмотрим пример когда в производстве участвует один входной фактор  $x$  и производится два вида выпуска  $y_1$  и  $y_2$ .

На рисунке каждой точке соответствует один оцениваемый объект. Точки соединенные линией представляют собой границу эффективности (при расчете через ЗЛП их эффективность равнялась бы 1)

Точки находящиеся на границе, считаются эффективными, ниже границе – неэффективные.

Если точку  $P$  спроецировать на границу эффективности (получим точку  $Q$ ), то показатель эффективности точки  $P$  можно определить как отношение длин отрезков:

$$E = \frac{OP}{OQ}$$



- ✓ Был рассмотрен метод расчета относительной эффективности среди множества одинаковых объектов.



# Спасибо за внимание!

Осадчий Дмитрий, группа J42113

IT'sMO<sub>re</sub> than a  
UNIVERSITY