23.10.24

VAM → Bc.1. → LA1

SALA MON ONDŘ.
SAL0110@VSB.CZ

D.Ú. z předmětu Lineár. algebra 1

VERZE č. 2

Př. 1.) Najít vš. řešení soustavy lin. rovnic.

a) 4

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 2x_4 &= -3 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 &= 5 \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 12x_4 &= -3 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 7x_4 &= 3 \end{aligned}$$

a) Tento systém lineár. rnic lze určit maticí soustavy $A = [a_{ij}]$ a vektorem pravých stran $b = [b_1, \dots, b_4]$

Zapsáno jako tzv. maticová rovnice:

$$A^{4,4} x = b$$

(Kde x je vektor neznámých.)

b) V druhém kroku přidám vektor b (jako poslední sloupec) k matici soustavy

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -5 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 12 & -3 \\ 2 & -2 & -1 & -7 & 3 \end{array}\right]$$

c) Soustavu řeším Gaussovou eliminační metodou: tj. skrze tzv. elementární řádkové operace převedu rozšířenou matici $[A \mid b]$ na tzv. schodovou matici. (Z ní už je pak řešení soustavy lehké.)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -5 & 5 \\ -2 & 3 & 2 & 12 & -3 \\ 2 & -2 & -1 & -7 & 3 \end{array}\right] \underset{\text{4. řádek + 1. řád.}}{\overset{1}{\sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 2 & 12 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -5 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right] \overset{3.ř. - 1.ř.}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 2 & 12 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & -2 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right]$$

2. 3. řádek + 1. řád.

~~3. řádek + 1. ř.~~

1. 2.ř. + 1.ř.

2. 4.ř. − $(\frac{1}{2} \cdot 3.ř.)$

3. 3.ř. $\cdot (-\frac{1}{2})$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 2 & 12 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{2.ř + (\frac{1}{2}) \cdot 1.ř}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 2 & 12 & -3 \\ 0 & \frac{5}{2} & 3 & 13 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{1.ř \cdot (-\frac{1}{2})}{\sim}$$

2. 2.ř. $\cdot \frac{2}{5}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & -6 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{26}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{3.\check{r}-2.\check{r}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & -6 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{26}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \; 3.\check{r}\cdot(-5)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & -1 & -6 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{26}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1. \\ 2.\check{r}-\left(\frac{6}{5}\right)\cdot 3.\check{r} \\ 2. \\ 1.\check{r}+3.\check{r} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & -5 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \; 1.\check{r}+\left(\frac{3}{2}\right)\cdot 2.\check{r}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)=1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ tato poslední matice je rozšířenou maticí soustavy:

$$x_1 + 0 + 0 + x_4 = 1$$
$$x_2 + 0 + 4x_4 = -1$$
$$x_3 + x_4 = 1$$
$$0 = 0$$

$\Rightarrow$ vzhledem k nekonečně mnoha řešením mohu položit parametr t ($t \in$ libovolné $\mathbb{R}$) ve tvaru $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ve tvaru $\Rightarrow$

- $x_4 = t$; odtud:
- $x_3 + t = 1$
  $x_3 = 1 - t$
- $x_2 + 4t = -1$
  $x_2 = -1 - 4t$
- $x_1 + t = 1$
  $x_1 = 1 - t$

„Zkouška" – položím za $t = -1$ (např.), odtud:

$x_4 = -1$

$x_3 = 1-(-1) = 2$

$x_2 = -1 - 4\cdot(-1) = 3$

$x_1 = 1-(-1) = 2$

Tato x dosadím do původní soustavy rovnic:

$-2\cdot 2 + 3 + 2\cdot(-1) = -3 \Rightarrow -1-2 = -3$ ✓

$3\cdot 2 - 2\cdot 3 - 5\cdot(-1) = 5 \Rightarrow 0+5 = 5$ ✓

$-2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 2\cdot 2 + (-12) = -3 \Rightarrow 9-12 = -3$ ✓

$2\cdot 2 - 2\cdot 3 - 2 - 7\cdot(-1) = 3 \Rightarrow -4+7 = 3$ ✓

✓

SALAMON O.
SAL0110

D.Ú - LA1 (verze 2)

Př. 2 Vypočtěte hodnotu výrazu $A^{-1}\cdot(Au+Bv)$, kde

$$A=\begin{bmatrix}2&-2&1\\1&-1&1\\-5&6&-4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2&0&2\\-1&2&0\\3&3&2\end{bmatrix},\ u=\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix},\ v=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

- „Bokem" si nejprve najít inverzní matici (A^{-1}) k matici A :)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&-2&1&1&0&0\\1&-1&1&0&1&0\\-5&6&-4&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{-r2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&-1&0\\1&-1&1&0&1&0\\-5&6&-4&0&0&1\end{array}\right]\begin{matrix}\\-r1\\+5\cdot r1\end{matrix}\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&-1&0\\0&0&1&-1&2&0\\0&1&-4&5&-5&1\end{array}\right]\begin{matrix}\\+r2\\-r3\end{matrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&-1&0\\0&1&-4&5&-5&1\\0&0&1&-1&2&0\end{array}\right]\begin{matrix}\\+4r3\\\\\end{matrix}\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&-1&0\\0&1&0&1&3&1\\0&0&1&-1&2&0\end{array}\right]\begin{matrix}+r2\\\\\\\end{matrix}\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&2&1\\0&1&0&1&3&1\\0&0&1&-1&2&0\end{array}\right]$$

- Zkouška dle $A^{-1}\cdot A=I$:)

$$\begin{bmatrix}2&2&1\\1&3&1\\-1&2&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&-2&1\\1&-1&1\\-5&6&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(4-4+1)&(-4-2+6)&(2+2-4)\\(2+3-5)&(-2-3+6)&(1+3-4)\\(-2+2+0)&(+2-2+0)&(-1+2+0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$ Zkouška OK

- Spočítám tak, aby co nejméně operací :)

$$A^{-1}\cdot((Au)+(Bv))=A^{-1}\cdot\left(\left(\begin{bmatrix}2&-2&1\\1&-1&1\\-5&6&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}2&0&2\\-1&2&0\\3&3&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\right)\right)=$$

$$=A^{-1}\cdot\left(\begin{bmatrix}(6-4+2)\\(3-2+2)\\(-15+12-8)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(4+0+2)\\(-2+0+0)\\(6+0+2)\end{bmatrix}\right)=A^{-1}\cdot\left(\begin{bmatrix}4\\3\\-11\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\-2\\8\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&3&1\\-1&2&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}10\\1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(20+2-3)\\(10+3-3)\\(-10+2+0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19\\10\\-8\end{bmatrix}$$

Hodnotou výrazu $A^{-1}\cdot(Au+Bv)$ je sl. vektor $\begin{bmatrix}19\\10\\-8\end{bmatrix}$.

Př. 3. (zřídka) Rozh. zda jsou zadané množiny U a V vekt. podpr. vekt. prostoru R^3, kde:

[SACAMOUZA]

a) $U = \{[x, y, z] \in R^3 : x + y + 2z = 0 \wedge x + y - 1 = 0\}$

- vš. prvky množ. U musí splňovat podmínky první i druhou ⇒ tzn. složky vektoru u musí být řešením 2 rovnic ⇒

$$x + y + 2z = 0$$
$$x + y = 1$$

- což vede na matici soustavy rovnic:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right] \; -r_1$$

$z = -\frac{1}{2}$

⇒ odtud ⇒

$-2z = 1$

(u3) $\boxed{z = -\frac{1}{2}}$

$x + y + 2 \cdot -\frac{1}{2} = 0$

$x + y - 1 = 0$

$x + y = 1$

- za x položím parametr t ($t \in R$):

(u1) $\boxed{x = t}$

tzn.: $\boxed{y = 1 - t}$ (u2)

$t + 1 - t - 1 = 0$

$t + 1 - t + 0 = 1$

$t + 1 - t = 1$

$t + 1 - t = 1$

$0 = 0$

Vektor řešení lze zapsat ve tvaru

$$u = [u_1, u_2, u_3] = [\underbrace{t}_{u_1}, \underbrace{(1-t)}_{u_2}, \underbrace{-\tfrac{1}{2}}_{u_3}] = R$$
$$v = [v_1, v_2, v_3] = [\underbrace{t}_{v_1}, \underbrace{(1-t)}_{v_2}, \underbrace{-\tfrac{1}{2}}_{v_3}]$$

$= t \cdot [1 ; \frac{1}{t} - 1 ; -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t}]$, $t \in R$

Odtud $U = \{t \cdot [1, \frac{1}{t} - 1, -\frac{1}{2}], \forall t \in R$ (t ≠ 0) $\} = \langle [1, \frac{1}{t} - 1, -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t}] \rangle$

Jsou vektorové prostory ???

NEDSPÍŠE ŠPATNĚ

23.7.25
LA1, VAM přb.

D.Ú. 2 LA1 (verze 2)

SALAMON O.
SAL0119

Př. 4 Lineární zobrazení $\mathcal{A}: \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}^2$ ($\mathcal{P}_3 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$) je definováno obrazy za bázi:

$$\mathcal{A}(-2x^2 + x + 2) = [1, 1]$$
$$\mathcal{A}(-2x^2 + 0 + 1) = [-1, -2]$$
$$\mathcal{A}(-x^2 + x + 1) = [-2, -5]$$

Najděte vš. vzory vektoru $[1, 3]$.

- do sloupců matice soustavy dáme obrazy báze:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & 3 \end{array}\right] \begin{matrix} \downarrow r1 \\ \downarrow r2 \end{matrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-r2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right] + r2 \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

řešení soustavy:

$$\alpha_1 + \alpha_3 = -1$$
$$\alpha_2 + 3\alpha_3 = -2$$

$$\alpha_3 = t$$

$$\alpha_2 + 3t = -2$$
$$\alpha_2 = -2 - 3t$$

$$\alpha_1 + \alpha_3 = -1$$
$$\alpha_1 + t = -1$$
$$\alpha_1 = -1 - t$$

$$\text{tzn.} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= -1 - t \\ \alpha_2 &= -2 - 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ \alpha_3 &= t \end{aligned}$$

- Hledané vzory vektorů, např. x, budou s dejaou lineární kombinací v rámci vzorů (zde polynomů 2. st.) / tzn.:

$$x = (-1-t)\cdot\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix} + (-2+3t)\cdot\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-1\\+1\\1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}(2+2t)\\(-1-t)\\(-2-2t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(+4-6t)\\0\\(-2+3t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-t\\t\\t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6-5t\\-1\\-2+t\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{[6-5t, -1, -2+t], \ t \in \mathbb{R}}}$$

15.1.25

D.Ú. – LAT (Verze 2)

SALAMON
SAL0110

Př. 6 Najděte vš. řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} -2x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 &= 4 \\ -2x_1 \quad + x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

- soustava $Ax = b$ s regulární čtverc. maticí A řádu $n = 4$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A(x)} \left| \underbrace{\begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ -4 \end{matrix}}_{b} \right]$$

- Cramerovy vzorce obecně:

$$x_i = \frac{\det A_i^b}{\det A}, \quad i = 1, \dots n$$

- počítám tedy determinanty matice soustavy a všechny 4 čitatele Cramerových vzorců:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +\check{r}_2 \\ \\ +\check{r}_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot\left(\frac{1}{2}\right) \\ -\check{r}_1 \\ \cdot\left(\frac{1}{2}\right) \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\check{r}_1} \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +\frac{1}{2}\cdot\check{r}_2 \\ +\frac{1}{2}\cdot\check{r}_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot (2) \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow (1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- z hodnot na diagonále (+ násobek celé matice) získám determinant:

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\underline{\det A = -1}$$

- „KONTROLA" – výpočet jinou metodou:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\det A = 0 \cdot 2 \cdot 0 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) \cdot 1 \cdot (-2) + 0 + (-1) \cdot 1 \cdot (-1) - 1 - (-2) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-1) - 0 - 1^3 \cdot (-2) - (-1) \cdot 2^3 = \cancel{0} - \cancel{8} + 0 + 1 - 4 - 0 + 2 + \cancel{8} = 3 - 4 = \underline{-1}$$

• $\det A_1^b \ldots ?$

$$A_1^b = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ +r_1 \\ \\ +r_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +4\cdot r_1 \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -\left(\frac{1}{9}\right)\cdot r_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -9 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +\left(\frac{1}{3}\right)\cdot r_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\det A_1^b = (-1)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{-1}}$$

• $\det A_2^b \ldots ?$

$$A_2^b = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot r_3 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +r_3 \end{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} -\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\rightarrow -\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +\left(\frac{1}{2}\right)\cdot r_3 \\ \\ \end{matrix} \rightarrow + \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\det A_2^b = (+1)\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot\left(\frac{1}{4}\right) = \underline{\underline{1}}$$

• $\det A_3^b \ldots ?$

$$A_3^b = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ +r_3 \end{matrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(2)\cdot r_1 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)\cdot r_2 \end{matrix} \rightarrow -\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\left(\frac{5}{2}\right)\cdot r_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \rightarrow -\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -\left(\frac{1}{5}\right)\cdot r_3 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\det A_3^b = (-1)\cdot 1\cdot(-2)\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5} = 2\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{1}}$$

• $\det A_4^b \ldots ?$

$\Downarrow$

$$A_4^b = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\check{r}_1 \leftrightarrow \check{r}_4} - \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ -2\cdot\check{r}_2 \\ \\ \end{matrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -(\frac{1}{2})\cdot\check{r}_1 \\ \\ -(\frac{2}{5})\cdot\check{r}_3 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{+(\frac{5}{2})\cdot\check{r}_2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-(\frac{2}{5})\cdot\check{r}_3]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det A_4^b = -(-1)\cdot 2\cdot 2\cdot \frac{1}{4}\cdot(-1) = \underline{\underline{-1}}$$

- odtud mohu dosadit do Cramer-vzorců, a ~~vy~~ tedy vypočítat $x_1, \dots, x_4$

$$\underline{\underline{x_1}} = \frac{\det A_1^b}{\det A} = \frac{-1}{-1} = \underline{\underline{1}} \qquad \underline{\underline{x_2}} = \frac{\det A_2^b}{\det A} = \frac{1}{-1} = \underline{\underline{-1}}$$

$$\underline{\underline{x_3}} = \frac{1}{-1} = \underline{\underline{-1}} \qquad x_4 = \frac{-1}{-1} = \underline{\underline{1}}$$

- řešení soustavy:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= -1 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}}$$