Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 2

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned}
-2x_1 + x_2 + 2x_4 &= -3, \\
3x_1 - 2x_2 - 5x_4 &= 5, \\
-2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 12x_4 &= -3, \\
2x_1 - 2x_2 - x_3 - 7x_4 &= 3.
\end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu $A^{-1}(Au + Bv)$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -5 & 6 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny U a V vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, kde

$$\begin{aligned}
U &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ x + y + 2z = 0 \wedge x + y - 1 = 0\}, \\
V &= \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ x + y + z = 0 \wedge 2x + y - z = 0\}.
\end{aligned}$$

4. Lineární zobrazení $\mathcal{A} :\ \mathcal{P}_3 \mapsto \mathbb{R}^2$ ($\mathcal{P}_3 = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \colon\ a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$) je definováno obrazy báze

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(-2x^2 + x + 2) &= [1, 1], \\
\mathcal{A}(-2x^2 + 1) &= [-1, -2], \\
\mathcal{A}(-x^2 + x + 1) &= [-2, -5].
\end{aligned}$$

Nalezněte všechny vzory vektoru $[1, 3]$.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 0, 0]\,, \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 0]\,, \quad \mathbf{f}_3 = [0, 0, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned}
-2x_2 + 2x_3 - x_4 &= -1, \\
x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 &= 2, \\
2x_1 - x_2 + x_4 &= 4, \\
-2x_1 + x_3 - x_4 &= -4.
\end{aligned}$$