Domácí úkol z předmětu Lineární algebra - verze 4

1. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 20, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 &= 26, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 28, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 26. \end{aligned}$$

2. Vypočtěte hodnotu výrazu $A\left(A^{-1}u + Bu\right)$, kde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3. Rozhodněte, zda jsou zadané množiny U a V vektorové podprostory vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, kde

$$U = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ x = y\},$$
$$V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}.$$

4. Lineární zobrazení $\mathcal{A} : \ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ je definováno obrazy báze

$$\mathcal{A}([1, 1, 0]) = [1, 0, 1],$$
$$\mathcal{A}([0, 1, 1]) = [1, 1, 1],$$
$$\mathcal{A}([0, 0, 1]) = [1, 0, 0].$$

Nalezněte obraz vektoru $[1, 2, 3]$.

5. Pomocí Gramova-Schmidtova ortonormalizačního procesu utvořte z vektorů

$$\mathbf{f}_1 = [1, 1, 1] \,, \quad \mathbf{f}_2 = [0, 1, 1] \,, \quad \mathbf{f}_3 = [1, 0, 1]$$

ortonormální bázi vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

6. Najděte všechna řešení soustavy lineárních rovnic užitím Cramerova pravidla:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 &= 4, \\ 3x_1 + x_4 &= 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 8, \\ x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$