Notes on Algebra

参考书籍：

- 代数学引论, 聂灵沼等
- Basic category theory, Leinster
- 抽象代数 I - 代数学基础, 孟骥道等
- 抽象代数 II - 结合代数, 孟骥道等
- 抽象代数 III - 交换代数, 孟骥道等
- 群与代数表示论, 冯克勤等
- 代数基础：模、范畴、同调代数与层, 陈志杰

Contents

第 1 章　范畴论

1　范畴和函子

1.1　范畴

Def 1: 范畴

范畴 $\mathscr{C}$ 包括：

1. 对象 $ob(\mathscr{C})$
2. 一族态射的集合 $Mor(\mathscr{C}) = \{\hom_{\mathscr{C}}(A, B) \mid A, B \in ob(\mathscr{C})\}$

其中态射的合成满足结合律 (associative), 且存在单位态射。

Remark: 结合律的要求是自然地, 这样多个态射的 composition 和顺序无关, 是唯一的。

例子：

1. 离散范畴：
$$\hom(A, A) = \{Id_A\},\ \hom(A, B) = \varnothing$$
也就是只有单位态射, 即 objects 之间 (内) 没有任何关联。
2. 小范畴 (Small category)：$ob(\mathscr{C})$ 是一个集合。
3. 1-object 范畴 **1**：只有一个 object 但是 $\hom(\cdot, \cdot)$ 要比 $\{Id_A\}$ 丰富, 所有 morphism 其实构成一个幺半群 (monoid) $G = \hom(\cdot, \cdot)$.

† 对象的同构

同构态射： $f : A \to B$, 存在 $f^{-1} = g : B \to A$, 使得合成满足 $fg = 1_A$, $gf = 1_B$.

范畴中的对象通过态射关联, 对象的同构是指态射是 isomorphism, 记 $A \cong B$.

† 构造范畴

1. 对偶范畴 $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$：
$$\mathrm{ob}(\mathscr{C}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{ob}(\mathscr{C})$$
$$Mor(\mathscr{C}^{op}) = \{f^* : B \to A \mid f \in \hom_{\mathscr{C}}(A, B)\}$$
2. 切片范畴 $\mathscr{C}/B$：
$$\mathrm{ob}(\mathscr{C}/B) = \{(A, f) \mid f : A \to B\}$$
$$Mor(\mathscr{C}/B) = \{h \in \hom(A_1, A_2) \mid f_1 = f_2 h\}$$

其中：

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f_1"'] & A_2 \arrow[d, "f_2"] \\
& B
\end{tikzcd}
$$

3. 积范畴 $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$：

$$\mathrm{ob}(\mathscr{C} \times \mathscr{D}) = \{(A, B) \mid A \in \mathrm{ob}(\mathscr{C}), B \in \mathrm{ob}(\mathscr{D})\}$$
$$(f, g) \in Mor(\mathscr{C} \times \mathscr{D}) \text{ 满足} (f, g) \circ (f', g') = (f \circ f', g \circ g')$$

† 范畴的子结构

设 $\mathscr{C}_0$ 为 $\mathscr{C}$ 的子范畴, 则：

$$ob(\mathscr{C}_0) \subseteq ob(\mathscr{C})$$
$$\hom_{\mathscr{C}_0}(A, B) \subseteq \hom_{\mathscr{C}}(A, B)$$

若 $\hom_{\mathscr{C}_0}(A, B) = \hom_{\mathscr{C}}(A, B)$, 则称 $\mathscr{S}$ 为一个满子范畴。

1.2 函子

函子作为范畴间的 map, 包括两部分：对象 $\to$ 对象, 态射 $\to$ 态射

Def 2: (共变) 函子

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "F"] & C \arrow[d, "F"] \\
F(A) \arrow[r, "F(f)"] & F(B) \arrow[r, "F(g)"] & F(C)
\end{tikzcd}
$$

即 $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$。

反变函子:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "G"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "G"] & C \arrow[d, "G"] \\
G(A) & G(B) \arrow[l, "G(f)"] & G(C) \arrow[l, "G(g)"]
\end{tikzcd}
$$

即 $G(g \circ f) = G(f) \circ G(g) \in \hom(G(C), G(A))$。

一些函子例子：

1. 忘却函子 (forgetful functor)：去掉一部分结构 (代数、拓扑、几何)

$$U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$$
$$U : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$$

2. 自由函子 (free functor)：添加新的结构 (代数、拓扑、几何)

$$F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Mod}_R$$
$$F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vec}_K$$

3. hom 函子：

$$\hom : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \times \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$$

是一个从乘积范畴到 Set 范畴的函子, 可以构造共变和反变的 hom 函子.

Covariant hom functor: $\hom(A, -) : \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$.

对于 $\mathscr{C}$ 中的 morphism $f : B \to C$,

$$\hom(A, f) : \hom(A, B) \to \hom(A, C)$$
$$g \to f \circ g$$

也就是交换图：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\hom(A,f)(g)"'] & B \arrow[d, "f"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Contravariant hom functor: $\hom(-, A) : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$

对于 $\mathscr{C}$ 中的 morphism $f : B \to C$,

$$\hom(f, A) : \hom(C, A) \to \hom(B, A)$$
$$g \to g \circ f$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & A \\ C \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

† 函子的单/满

函子包括两部分, 对象间的 map 和 hom set 之间的 map, 由于范畴论不深入到 objects 的内部, 所以函子的单/满从后者定义。

1. **Faithful:** 是指集合间的 map $F : \hom(A, B) \to \hom(F(A), F(B))$ 是单射, 也就是说 $\forall g \in \hom(F(A), F(B))$, 最多只有一个 $f \in \hom(A, B)$ 使得 $g = F(f)$.
2. **Full:** 是指集合间的 map $F : \hom(A, B) \to \hom(F(A), F(B))$ 是满射, 也就是说 $\forall g \in \hom(F(A), F(B))$, 最少有一个 $f \in \hom(A, B)$ 使得 $g = F(f)$.

1.3 Natural transformation

范畴的起源, 本意是构造关于 map 的 map 的 map, 或者说“functor category”, 自然变换是函子之间的 map, 也就是 functor category 中的 morphism。

Def 3: 自然变换

给定范畴和两个共变/反变函子 $\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightrightarrows}} \mathscr{D}$. $\alpha : F \Rightarrow G$ “自然得” 把 F 变为 G, 要连接函子对 objects 的作用 $\alpha_A : F(A) \to G(A)$, 还要连接函子对 morphism 的作用 $F(f), G(f)$。natural 就是要求交换图：

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\alpha_B"] & G(B)
\end{tikzcd}$$

也就是 $G(f) \circ \alpha_A = \alpha_B \circ F(f)$

自然同构 (natural isomorphism): 若 $\alpha_A \in Mor(\mathscr{D})$ 都是 objects 之间的 isomorphism.

自然变换作为 map 是可以进行合成运算的：

1. 垂直合成 (Vertical composition)：

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathscr{C} \arrow[r, bend left=60, "F"{name=U}] \arrow[r, "G"{name=M, description}] \arrow[r, bend right=60, "H"'{name=L}] & \mathscr{D} \arrow[Rightarrow, from=U, to=M, "\alpha"'] \arrow[Rightarrow, from=M, to=L, "\beta"']
\end{tikzcd}
\Longrightarrow
\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathscr{C} \arrow[r, bend left=60, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=60, "H"'{name=L}] & \mathscr{D} \arrow[Rightarrow, from=U, to=L, "\beta\circ\alpha"']
\end{tikzcd}$$

根据交换图

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "F(f)"] & G(A) \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "G(f)"] & H(A) \arrow[d, "H(f)"] \\
F(B) \arrow[r, "\alpha_B"] & G(B) \arrow[r, "\beta_B"] & H(B)
\end{tikzcd}$$

要求 $H(f) \circ \beta_A \circ \alpha_A = \beta_B \circ \alpha_B \circ F(f)$, 也就是说自然变换的垂直合成为

$$(\beta \circ \alpha)_A = \beta_A \circ \alpha_A$$

2. 水平合成 (Horizontal composition):

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathscr{C} \arrow[r, bend left=60, "F"{name=U1}] \arrow[r, bend right=60, "G"'{name=L1}] & \mathscr{D} \arrow[r, bend left=60, "F'"{name=U2}] \arrow[r, bend right=60, "G'"'{name=L2}] \arrow[Rightarrow, from=U1, to=L1, "\alpha"] & \mathscr{E} \arrow[Rightarrow, from=U2, to=L2, "\beta"]
\end{tikzcd}
\Longrightarrow
\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathscr{C} \arrow[r, bend left=60, "F'\circ F"{name=U}] \arrow[r, bend right=60, "G'\circ G"'{name=L}] & \mathscr{E} \arrow[Rightarrow, from=U, to=L, "\beta*\alpha"]
\end{tikzcd}$$

根据 α 和 β 的交换图

$$\begin{aligned}
\beta_{G(A)} :& F'G(A) \to G'G(A) \\
\alpha_A : F(A) \to G(A) \Longrightarrow& F'(\alpha_A) : F'F(A) \to F'G(A)
\end{aligned}$$

因此 $\beta_{G(A)} \circ F'(\alpha_A) : F'F(A) \to F'G(A) \to G'G(A)$.

另外

$$\begin{aligned} \beta_{F(A)} :& F'F(A) \to G'F(A) \\ \alpha_A : F(A) \to G(A) \Longrightarrow G'(\alpha_A) :& G'F(A) \to G'G(A) \end{aligned}$$

可得自然变换

$$(\beta * \alpha)_A = \beta_{G(A)} \circ F'(\alpha_A) = G'(\alpha_A) \circ \beta_{F(A)}$$

有了自然变换的合成，自然变换也可以作为 morphism 处理。给定 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$，可以构造**functor-范畴 $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$:**

$$\begin{cases} ob([\mathscr{A}, \mathscr{B}]) \text{是函子} F : \mathscr{A} \to \mathscr{B} \\ Mor([\mathscr{A}, \mathscr{B}]) \text{是自然映射} \alpha : F \Rightarrow G \end{cases}$$

自然同构 $\eta : F \iff G$ 就是 functor-范畴$[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$ 中的 isomorphism，即函子间的等价关系.

† 范畴的 isomrphism 和 equivalence

Cat 范畴: $ob(\mathbf{Cat}) = \{\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, ...\}$, $Mor(\mathbf{Cat}) = \{\text{函子}\}$

范畴 $\mathscr{C}$ 本身是 **Cat** 范畴的对象，因此可以定义两个范畴的 isomorphism $\mathscr{C} \cong \mathscr{D}$ 就是存在函子 $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}, G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$，使得 $F \circ G = Id_{\mathscr{D}}$, $G \circ F = Id_{\mathscr{C}}$，构成 **Cat** 的等价分类.

考虑到自然同构构成函子的等价关系，可以构造一种更松的等价分类：范畴的 equivalence. $\mathscr{C} \simeq \mathscr{D}$ 是指存在函子 $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}, G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ 和自然同构

$$\alpha : F \circ G \Rightarrow Id_{\mathscr{D}} \quad \beta : G \circ F \Rightarrow Id_{\mathscr{C}}$$

1.4 Universal property

首先声明范畴中可能存在的两个特殊对象:

1. **initial(始对象/ 泛对象):** $|\hom(I, -)| = 1$.
2. **terminal(终对象 / 余泛对象):** $|\hom(-, T)| = 1$.

例如，对于 **Set** 范畴，空集 $\varnothing$ 是始对象，单元素集 $\{x\}$ 是终对象。

Theorem 1

(余) 泛对象在同构意义下是唯一的。

Proof.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "1_A"'] & A' \arrow[r, "g"] & A \end{tikzcd}$$

满足 $g \circ f = 1_A$, $f \circ g = 1_{A'}$。 □

Def 4: 万有性质

Universal property 是指根据某种性质从范畴 $\mathscr{A}$ 构造新的范畴 $\mathscr{D}$, 使 $\mathscr{A}$ 中的对象 A 对应于范畴 $\mathscr{D}$ 的一个 initial/terminal 对象. A 称为万有对象.

† Set 范畴

因为大多数范畴都是 Concrete 范畴，即在 **Set** 中对象 S 上附加代数、拓扑等结构形成的，例如群范畴 **Grp**、环范畴 **Ring**、模范畴 **Mod**、向量空间范畴 **Vect**、拓扑空间范畴 **Top**。有必要先引入 **Set** 中的一些概念：

1. **积:** $A \times B$
2. **和:** $A + B$，又称为不交并

$$A + B = \{x \in A\text{或者}x \in B\}$$

3. **函数集:**

$$A^B = \hom(B, A)$$

函数 $f \in A^B$ 可以理解为按指标集 B 指派 A 中元素，也就是积 $\prod\limits_{b \in B} A$。

4. **幂集:** $\mathcal{P}(A)$
设 $\mathbf{2} = \{+1, -1\}$ 是包含两个元素的集合，S 是 A 的子集, 定义 A 的特征函数 $\chi_S : A \to \mathbf{2}$

$$\chi_S(a) = \begin{cases} +1, & a \in S \\ -1, & a \notin S \end{cases}$$

子集 S 等于 1 的原象 $S = \chi_S^{-1}(1)$，也就是说建立了子集 S 和特征函数 χ_S 的一一对应。因此我们可定义 A 的所有子集构成的集合 $\mathcal{P}(A)$ 到 $\hom(A, \mathbf{2}) = \mathbf{2}^A$ 的同构, 这就是为什么通常把幂集记为 $\mathcal{P}(A) = \mathbf{2}^A$。

5. **Equalizer:** f和g 的等化子是使得 $f|_S = g|_S$ 的子集 $S \subset X$.
在范畴论的视角下, 子集 S 等价于广义元素 $i : S \to X$，因此 equalizer 就是使得 $S \xrightarrow{i} X \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} Y$ 满足 $f \circ i = g \circ i$ 的态射 $i : S \to X$.
equalizer 又叫 difference kernel(差核), 因为等化子 $S = \ker(s - t)$.

6. **商:** （quotient of A by $\sim$）$A/\sim$
7. **选择公理:**
首先定义范畴中**截面**（**Section**）的概念，范畴 $\mathscr{C}$ 中态射 $f : A \to B$ 的截面是态射 $i : B \to A$，使得 $f \circ i = \mathbf{1}_B$，又称为 f 的右逆。在 **Set** 范畴中，若 f 有截面 i，则 f 是一个满射，这是因为 i 其实是定义在 f 给出的 A 的等价类上，

$$A \xrightarrow{f} B \cong A/\sim$$

而选择公理是说：**每个满射必有截面**。也就是对于满射可以构造右逆.

2 伴随 (Adjunct)

Motivation：给定范畴 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 间的函子 $F:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 和 $G:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$，自然要考虑是不是某种程度上两个函子“等价”/“对偶”，这里无法直接用自然同构的概念。可以考虑两个 functor 对 objects 和 morphism 的变换是不是有某种对偶性质; 或者像考虑同伦等价一样考虑 $F\circ G, G\circ F$ 和恒等函子是否自然同构。

† 函子视角描述伴随性质

对于任意对象 $A\in\mathscr{A}$和$B\in\mathscr{B}$，有 $F:A\to F(A), G:B\to G(B)$. 某种程度上，两个函子的对偶体现在集合 $\hom_{\mathscr{A}}(A,G(B))$ 和 $\hom_{\mathscr{B}}(F(A),B)$ 的同构，也就是 $\forall f\in\hom_{\mathscr{A}}(A,G(B))$

$$f:A\to G(B)$$

有 $\hom_{\mathscr{B}}(F(A),B)$ 中与 f 一一对应的 $\bar{f}:F(A)\to B$。

另外考虑函子对 morphism 的作用，任意态射 $\varphi:A_0\to A$，有自然的态射合成 $f\circ\varphi\in\hom_{\mathscr{A}}(A_0,G(B))$

$$A_0\xrightarrow{\varphi}A\xrightarrow{f}G(B)$$

所以自然要求 $\hom_{\mathscr{B}}(F(A_0),B)$ 中应该有与 $f\circ\varphi$ 一一对应的态射 $\overline{f\circ\varphi}$ 而 $F:\varphi\to F(\varphi)$ 自然给出 $\mathscr{B}$ 中的态射 $F(A_0)\xrightarrow{F(\varphi)}F(A)\xrightarrow{\bar{f}}B$，因此自然的认为

$$\overline{f\circ\varphi}=\bar{f}\circ F(\varphi)$$

类似的，$\psi:B\to B_0$，有 $\overline{f\circ G(\psi)}=\psi\circ\bar{f}$.

Def 5: 伴随函子

$F:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 是 $G:\mathscr{B}\to\mathscr{A}$ 的左伴随，如果集合 $\hom_{\mathscr{A}}(A,G(B))\cong\hom_{\mathscr{B}}(F(A),B)$，并且满足

$$\overline{G(\psi)\circ f\circ\varphi}=\psi\circ\bar{f}\circ F(\varphi)$$

记作 $F\dashv G$.

一对重要的伴随函子的例子是：

Theorem 2

自由函子 $F:\mathbf{Set}\to Mod_R$ 是忘记函子 $U:Mod_R\to\mathbf{Set}$ 的左伴随。

Proof. S 作为 $F(S)$ 的生成元，$\mathbf{Set}$ 的态射 $f:S\to U(A)$ 可以唯一的决定一个 homomorphism $\bar{f}:F(S)\to A$。任意给 Mod_R 的 homomorphism $\bar{f}:F(S)\to A$，限制在底集合上可以唯一的确定 $\bar{\bar{f}}:UF(S)\to U(A)$，可以验证 $\bar{\bar{f}}=f$. □

由于同构关系的传递性, 伴随关系是可以结合的, 也就是

$$\mathscr{A} \underset{G}{\overset{F}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathscr{A}' \underset{G'}{\overset{F'}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathscr{A}'' \text{ 等价于 } \mathscr{A} \underset{G'\circ G}{\overset{F'\circ F}{\underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}}}} \mathscr{A}''$$

† Unit 和 Counit

注意到 $G \circ F : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ 和 $F \circ G : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$. 若 $F \dashv G$, 由伴随的定义, 对任意 $A \in \mathscr{A}$ 有

$$\mathbf{1}_{F(A)} : F(A) \to F(A) \text{ 一一对应于 } \eta_A = \bar{\mathbf{1}}_{F(A)} : A \to GF(A)$$

对任意 $f : A' \to A$, 伴随会给出

$$A' \xrightarrow{f} A \xrightarrow{\eta_A} GF(A) \quad \text{一一对应于} \quad F(A') \xrightarrow{F(f)} F(A) \xrightarrow{\bar{\eta}_A} F(A)$$

也就是 $\overline{f \circ \eta_A} = \bar{\eta}_A \circ F(f) = F(f)$. 另外伴随还告诉我们

$$A' \xrightarrow{\eta_{A'}} GF(A') \xrightarrow{GF(f)} GF(A) \quad \text{一一对应于} \quad F(A') \xrightarrow{\bar{\eta}_{A'}=\mathbf{1}_{F(A')}} F(A') \xrightarrow{F(f)} F(A)$$

也就是说 $\overline{GF(f) \circ \eta_{A'}} = F(f) \circ \bar{\eta}_{A'} = F(f)$. 于是有交换图

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\eta_{A'}"] \arrow[d, "f"] & GF(A') \arrow[d, "GF(f)"] \\
A \arrow[r, "\eta_A"] & GF(A)
\end{tikzcd}$$

这样, 两个伴随的函子自然的给出一个 natural transformation $\eta : \mathbf{1}_{\mathscr{A}} \Rightarrow G \circ F$, 称为**伴随的 unit**. 类似的有另外一个自然变换 $\varepsilon : F \circ G \Rightarrow \mathbf{1}_{\mathscr{B}}$, 称为**伴随的 counit**.

Theorem 3: Triangle identity

已知伴随对 $F \dashv G$ 的 unit $\eta : 1_{\mathscr{A}} \Rightarrow G \circ F$ 和 counit $\varepsilon : 1_{\mathscr{B}} \Rightarrow F \circ G \Rightarrow 1_{\mathcal{B}}$, 在 functor 范畴中有交换图, 称为三角恒等式:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, Rightarrow, "F\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{Id}_F"'] & FGF \arrow[d, Rightarrow, "\varepsilon F"] \\
& F
\end{tikzcd}
\quad \text{和} \quad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, Rightarrow, "G\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{Id}_G"'] & GFG \arrow[d, Rightarrow, "G\varepsilon"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

Proof. $F\eta : F \Rightarrow F(GF)$, $\varepsilon F : (FG)F \Rightarrow F$ □

知道伴随函子关于 $Id_{F(A)}, Id_{G(B)}$ 的 transpose(转置)$\overline{Id}_{F(A)}, \overline{Id}_{G(B)}$, 可以立马求出 unit 和 counit:

$$\eta_A = \overline{Id}_{F(A)},\ \varepsilon_B = \overline{Id}_{G(B)}$$

反之, 知道 (co)unit η 和 ε, 可以立马写下任意 morphism $f : A \to G(B)$ 的 transpose

$$\overline{f} = \varepsilon_B \circ F(f)$$

也就是说伴随和 (co)unit 的概念是等价的.

† Comma 范畴视角理解伴随

Def 6: Comma 范畴

给定两个有相同 codomain 的函子 $P:\mathscr{A}\to\mathscr{C}$ 和 $Q:\mathscr{B}\to\mathscr{C}$. 构造 comma 范畴 $(P\Rightarrow Q)$

1. $ob(P\Rightarrow Q)=\{(A,B,h)\}$, 其中 $h:P(A)\to Q(B)$
2. $Mor(P\Rightarrow Q)=\{(f:A\to A',g:B\to B')\}$, 且满足如下交换图:

$$\begin{tikzcd} P(A) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "P(f)"] & Q(B) \arrow[d, "Q(g)"] \\ P(A') \arrow[r, "h'"] & Q(B') \end{tikzcd}$$

某种程度上, comma 范畴关心的是两个 codomain 相同的函子的关系, 并不关心 domains 和 codomain 具体是哪个范畴. 两个 functors 对 objects 的作用, 通过 codomain 中的态射 $h:P(A)\to Q(B)$ 联系; functors 对 morphism 的作用通过两个 codomain 中的态射 h 和 h' 很自然的联系在一起.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "P"] \arrow[d, "f"] & P(A) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "P(f)"] & Q(B) \arrow[d, "Q(g)"] & B \arrow[l, "Q"'] \arrow[d, "g"] \\ A' \arrow[r, "P"] & P(A') \arrow[r, "h'"] & Q(B') & B \arrow[l, "Q"'] \end{tikzcd}$$

Comma 范畴 $(P\Rightarrow Q)$ 与函子 P,Q 的 domains 之间有标准函子

$$\begin{tikzcd} (P\Rightarrow Q) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"] & \mathscr{B} \arrow[d, "Q"] \\ \mathscr{A} \arrow[r, "P"] & \mathscr{C} \end{tikzcd}$$

$\pi_1(A,B,h)=A$, $\pi_1(f,g)=f$.

另外合成的两个函子 $(P\Rightarrow Q)\underset{P\circ\pi_1}{\overset{Q\circ\pi_2}{\rightrightarrows}}\mathscr{C}$ 之间可以构造标准自然变换 $\alpha:P\circ\pi_1\Rightarrow Q\circ\pi_2$, 只需取 $\alpha_{(A,B,h)}=h$

$$\begin{tikzcd} (A,B,h) \arrow[d, "(f,g)"] \\ (A',B',h') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P(A) \arrow[r, "\alpha=h"] \arrow[d, "P(f)"] & Q(B) \arrow[d, "Q(g)"] \\ P(A') \arrow[r, "\alpha'=h'"] & Q(B') \end{tikzcd}$$

一个 comma 范畴的特例: 切片范畴是一个 Commma 范畴.

Proof. 只需将 "slice category" $\mathscr{A}/A$ 中的 A 看作函子

$$A:\mathbf{1}\longrightarrow\mathscr{A}$$

则 $\mathscr{A}/A$ 中的 object (X,h) 可以看成 (X,A,h) 即 comma 范畴 $(1_{\mathscr{A}} \Rightarrow A)$ 中的 object.

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{1} \arrow[d, "A"] \\ \mathscr{A} \arrow[r, "1_{\mathscr{A}}"] & \mathscr{A} \end{tikzcd}$$

□

† 乘积范畴视角理解伴随

积范畴 $\mathscr{C}^{op} \times \mathscr{D}$ 中的态射为 $(f,g):(C',D) \to (C,D')$。定义 hom 函子 $\mathrm{hom}:\mathscr{C}\times\mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ 为:

$$(C,D) \to \mathrm{hom}(C,D) \in \mathbf{Set}$$
$$(f,g) \to \mathrm{hom}(f,g) = \{\varphi\} : \mathrm{hom}(C,D) \to \mathrm{hom}(C',D') \text{ 其中} \varphi \to g\circ\varphi\circ f$$

$$\begin{tikzcd} (C,D) \arrow[d, "(f,g)"] & \mathrm{hom}(C,D) \arrow[d, "\mathrm{hom}(f,g)"] \\ (C',D') & \mathrm{hom}(C',D') \end{tikzcd}$$

给定函子 $\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$, 则有两个 Hom 函子 $\mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(-,G(-)):\mathscr{C}\times\mathscr{D} \to \mathrm{Set}$ 和 $\mathrm{hom}_{\mathscr{D}}(F(-),-):\mathscr{C}\times\mathscr{D} \to \mathrm{Set}$。若存在自然同构 $\alpha:\mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(-,G(-)) \to \mathrm{hom}_{\mathscr{D}}(F(-),-)$, 则 $G(F)$ 是右 (左) 伴随函子 (right (left) adjoint functor)。实际上, $\alpha_{C,D}$ 是集合之间的可逆映射 $\alpha_{C,D}:\mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(C,G(D)) \cong \mathrm{hom}_{\mathscr{D}}(F(C),D)$。

Theorem 4

$G:\mathscr{D}\to\mathscr{C}$ 有左伴随函子当且仅当 $\mathrm{hom}_{\mathscr{C}}(C,G(-))$ 是可表的。

Proof. 考虑函子 $\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$ 。(证明过程图片中未详细展开, 通常会从伴随的定义出发, 利用可表性的性质构造出伴随所需的自然同构, 反之亦然。) □

3 可表 (Representable)

Motivation: (Small) 范畴里天然地有集合 $\mathrm{hom}(A,B)$，固定一个对象 A, 集合 $\mathrm{hom}(A,B)$ 本身视为对象 A 上的所有箭头（关系）, 而 $\mathrm{hom}(A,-):B\to\mathrm{hom}(A,B)$ 引入了共变 hom 函子:

$$H^A = \mathrm{hom}(A,-):\mathscr{A}\to\mathbf{Set}$$

hom 函子对态射 $f:B\to B'$ 的作用记为 $f_* = H^A(f):\mathrm{hom}(A,B)\to\mathrm{hom}(A,B')$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "f_*(\psi)"'] & B \arrow[d, "f"] \\ & B' \end{tikzcd}$$

函子范畴 $[\mathscr{A}, \mathbf{Set}]$ 中的对象 $F : \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$ 称为 **Presheaf**. 可以看到 H^A 本身就是一个 presheaf, 现在考虑与 H^A 自然同构的函子, 引入定义:

Def 7: 可表 (representable)

自然同构于 H^A 的共变函子 $F : \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$ 是可表的，称 (A, α) 是 F 的表示.

$$\begin{tikzcd}
F(B) \arrow[r, "\alpha_B"] \arrow[d, "F(f)"] & \hom(A, B) \arrow[d, "f_*"] \\
F(B') \arrow[r, "\alpha_{B'}"'] & \hom(A, B')
\end{tikzcd}$$

类似的, 对于反变 set-value 函子 $F : \mathscr{A}^{op} \to \mathbf{Set}$, 对应的表示是与反变 hom 函子 $H_A = \hom(-, A)$ 的自然同构。

一些可表函子的例子:

由于 $H^1 : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ ，将 set $\{1\}$ 映为 B 的 element, 也即是 $H'(B) \cong B = \mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}$ 。因此 $\mathrm{Id}_{\mathbf{Set}}(B)$ 是可表的, representation 为 H^1.

类似的忘却函子 $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ 也是可表的, 表示为 $H^1 : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, 这里利用 $H^1(B) \cong B = U(B)$.

Theorem 5

已知伴随函子对 $F \dashv G$ ，可以构造可表函子

$$\hom_{\mathscr{A}}(A, G(-)) = H^A \circ G : \ \mathscr{B} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

representation 为 $F(A)$.

Proof. 伴随函子表明 $\hom_{\mathscr{A}}(A, G(-)) \cong \hom_{\mathscr{B}}(F(A), -) = H_{\mathscr{B}}^{F(A)}$, 对任意态射 $g : B \to B'$, 自然同构由伴随函子的性质直接给出:

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathscr{A}}(A, G(B)) \arrow[r] \arrow[d, "(G(g))_*"] & \hom_{\mathscr{B}}(F(A), B) \arrow[d, "g_*"] \\
\hom_{\mathscr{A}}(A, G(B')) \arrow[r] & \hom_{\mathscr{B}}(F(A), B')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
f \arrow[r] \arrow[d, "(G(g))_*"] & \overline{f} \arrow[d, "g_*"] \\
G(g) \circ f \arrow[r] & g \circ \overline{f} = \overline{G(g) \circ f}
\end{tikzcd}$$

□

Theorem 6

有左伴随的函子 $G : \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$ 是可表的。

Proof. 作为集合, $G(B) \cong \mathbf{Set}(1, G(B))$, 因此函子 $G \cong \mathbf{Set}(1, G(-))$, 也就是 $\mathscr{A} \xrightarrow{G} \mathbf{Set} \xrightarrow{H^1} \mathbf{Set}$. 由于 G 有左伴随, 由前定理立马知道 $H^1 \circ G = \mathbf{Set}(1, G(B))$ 是可表的, 由自然同构的传递性也可推出 G 也是可表的。 □

3.1 Yoneda 引理

† Yoneda 嵌入

$\mathscr{A}$ 中对象 A 对应一个函子范畴 $[\mathscr{A}, \mathbf{Set}]$ 中的对象 H_A, 这给出一个**共变**的 functor

$$H_\bullet : \mathscr{A} \to [\mathscr{A}, \mathbf{Set}]$$
$$A \longmapsto H_A$$

$H_\bullet$ 对态射 $f : A \to A'$ 的作用 $f^* = H_f : \hom(-, A) \Rightarrow \hom(-, A')$ 是一个自然变换, 具体的:

$$(H_f)_B = H^B(f) : \hom(B, A') \to \hom(B, A)$$

因此函子 $H_\bullet$ 称为 $\mathscr{A}$ 到 $[\mathscr{A}, \mathbf{Set}]$ 的**Yoneda 嵌入**.

Lemma 1

$H_\bullet$ 是 $\mathcal{A}$ 中等价类上的单射。

Proof. □

考虑函子 $- \times \mathscr{A} : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$ 和 $[\mathscr{A}, -] : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Cat}$, 可以证明他们是相伴的, 因此有集合的等价关系:

$$\hom_{\mathbf{Cat}}(\mathscr{B} \times \mathscr{A}, \mathscr{C}) \cong \hom_{\mathbf{Cat}}([\mathscr{A}, \mathscr{C}], \mathscr{B})$$

取 $\mathscr{C} = \mathbf{Set}$，$\mathscr{B} = \mathscr{A}^{op}$，也就是 $\hom(\mathscr{A}^{op} \times \mathscr{A}, \mathbf{Set}) \cong \hom([\mathscr{A}, \mathbf{Set}], \mathscr{A}^{op})$, 可以发现函子 $H_\bullet \in \hom(\mathscr{A}^{op}, [\mathscr{A}, \mathbf{Set}])$ 与 $\hom(\mathscr{A}^{op} \times \mathscr{A}, \mathbf{Set})$ 中的函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}} : \mathscr{A}^{op} \times \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$ 是一一对应的。

Lemma 2: Yoneda

对预层 $F : \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$, 自然变换构成的 hom set 有如下同构关系:

$$\hom_{[\mathscr{A}, \mathbf{Set}]}(H_A, F) \cong F(A)$$

xxxxxxxxxxxxx

1. 给定集合 X, 以及具体范畴 $\mathscr{C}$ 中 X 上的自由对象 $i : X \to V$。考虑函子 $F : A \to \hom_{\mathscr{C}}(X, A)$ 以及 $\hom_{\mathscr{C}}(V, -) : A \to \hom_{\mathscr{C}}(V, A)$。因为 X 上的自由性, 对于任意 $f \in \hom_{\mathscr{C}}(X, A)$, 存在唯一的 $\overline{f} \in \hom_{\mathscr{C}}(V, A)$ 使得 $f = \overline{f} \circ i$。存在自然变换 α_A :

$\hom_{\mathscr{C}}(V,A) \to \hom_{\mathscr{C}}(X,A)$, 对于态射 $A \xrightarrow{\varphi} B$:

$$
\begin{array}{ccccc}
A & \quad & \hom_{\mathscr{C}}(V,A) & \xrightarrow{\alpha_A} & \hom_{\mathscr{C}}(X,A) \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle\hom_{\mathscr{C}}(V,\varphi)} & & \downarrow{\scriptstyle\hom_{\mathscr{C}}(X,\varphi)} \\
B & & \hom_{\mathscr{C}}(V,B) & \xrightarrow{\alpha_B} & \hom_{\mathscr{C}}(X,B)
\end{array}
$$

其中 $\hom_{\mathscr{C}}(V,\varphi) : \overline{f} \to \varphi \circ \overline{f}$, $\hom_{\mathscr{C}}(X,\varphi) : f \to \varphi \circ f$, 且 $\varphi \circ \alpha_A(\overline{f}) = \varphi \circ \overline{f} \circ i = \alpha_B(\varphi \circ \overline{f})$, 所以 α_A 是自然同构。原因在于:

- f 是 $\overline{f}$ 在 X 上的限制;
- 对于自由对象 $i : X \to V$, $\overline{f}$ 由 f 唯一确定。

2. 考虑 $C \xrightarrow{F} \hom_{\mathscr{M}}(A \times B, C)$ 以及典范双线性映射 $i : A \times B \to A \otimes_R B$。定义 $\alpha_C : \hom_{\mathscr{M}}(A \otimes_R B, C) \to \hom_{\mathscr{M}}(A \times B, C)$ 为 $h \mapsto h \circ i$。α 是自然同构, 即 $\alpha : \hom_{\mathscr{M}}(A \otimes_R B, -) \to F$, 所以 F 由 $(A \otimes_R B, \alpha)$ 表示。

- 表示 (如果存在) 是唯一的。
- Hom 函子 h_A 属于 $\mathscr{F}$, 实际上由函子 $h : \mathscr{C} \to \mathscr{F}$ 给出。集合 $\hom_{\mathscr{F}}(h_A, h_B)$ 和 $\hom_{\mathscr{C}}(B, A)$ 是等价的。
  1. 对于任意 $\alpha : h_A \Rightarrow h_B \in \hom_{\mathscr{F}}(h_A, h_B)$, 作为自然变换, $\alpha_A(1_A) \in \hom_{\mathscr{C}}(B, A)$。因此, $\Psi : \alpha \to \alpha_A(1_A)$ 是 $\hom_{\mathscr{F}}(h_A, h_B)$ 和 $\hom_{\mathscr{C}}(B, A)$ 之间的映射。
  2. Ψ 是可逆的。对于任意 $f \in \hom_{\mathscr{C}}(B, A)$, 对于任意给定的 C, 令 $\beta_C : \hom_{\mathscr{C}}(A, C) \to \hom_{\mathscr{C}}(B, C)$ 为 $g \mapsto g \circ f$, 则 $\beta : h_A \Rightarrow h_B$ 是自然变换, 即 $\Psi^{-1} : f \to \beta \in \hom_{\mathscr{F}}(h_A, h_B)$。验证:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g \in h_A"] \arrow[d, "f"'] & * \\
B \arrow[ur, "g \circ f \in h_B"'] &
\end{tikzcd}
$$

     $f \to \beta \to \beta_A(1_A) = f$, 其中 $\beta_A : \hom_{\mathscr{C}}(A, A) \to \hom_{\mathscr{C}}(B, A)$ 且 $\beta_A(1_A) = 1_A \circ f = f$。

remark 若 F 由自然同构 $\phi : h_A \xrightarrow{\sim} F$, $\psi : h_B \xrightarrow{\sim} F$ 表示, 则存在同构 $\pi : h_A \to h_B$ 与 f 相关。

4 极限

先引入几个概念:

1. 广义元素: 取一个抽象的指标集 S, 对指标集的分配是一个 map

$$g : S \to A$$

   称为 A 中形状为 S 的广义元素.
   由于广义元素 $g \in \hom(S, A)$, 这么看的话 hom 函子 $H^S : \mathscr{A} \to \mathbf{Set}$ 把每个对象 A 变为 A 中形状为 S 的广义元素的集合. 由于 H^S 的函子性, 会通过 $H^S(f)$ 把 A 中形状为 S 的广义元素变为 B 中形状为 S 的广义元素, 其中 $f : A \to B$.

2. **Diagram:** 当考虑 **Cat** 范畴中的广义元素时, map 就是函子, 抽象指标集 $\mathbf{I}$ 取为小范畴, 也就是 $\mathbf{I} = ob(\mathbf{I}) = \{i\}$.

$$D : \mathbf{I} \to \mathscr{A}$$

称为 $\mathscr{A}$ 中形状为 $\mathbf{I}$ 的图 D. $D(i)$ 称为图 D 的顶点, $D(\alpha)$ 称为图 D 的边.
图 D 是 **Cat** 范畴中对象 $\mathscr{A}$ 的 $\mathbf{I}$ - 元素, 可以把 D 视为 $\mathscr{A}$ 的 small 子范畴, 类比为 $\mathscr{A}$ 中 $\mathbf{I}$ - 对象.

3. **Cone:** 图 $D : \mathbf{I} \to \mathscr{A}$ 上的 cone 由 $\mathscr{A}$ 中的对象 A(cone 的顶点) 和态射构成, 记为

$$\left(A \xrightarrow{f_i} D(i) \right)_{i \in \mathbf{I}}$$

其中 $\{f_i\}$ 与小范畴 $\mathbf{I}$ 内的态射 $\alpha : i \to j$ 相容.

$$\begin{tikzcd} & D(i) \arrow[dd, "D(\alpha)"] \\ A \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & \\ & D(j) \end{tikzcd}$$

Def 8: 极限

图 $D : \mathbf{I} \to \mathscr{A}$ 的极限 $L = \varprojlim D$ 是一个 cone $\left(L \xrightarrow{p_i} D(i) \right)_{i \in \mathbf{I}}$, 满足对于 D 的任意 cone $\left(A \xrightarrow{f_i} D(i) \right)_{i \in \mathbf{I}}$, 存在唯一的 $\bar{f} : A \to L$ 使得

$$p_i \circ \bar{f} = f_i, \ \forall i \in \mathbf{I}$$

也就是说 $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\{f_i\}"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & \{D(i)\} \\ L \arrow[ur, "\{p_i\}"'] & \end{tikzcd}$ 交换, p_i 称为投影 (projection).

类似, 定义对偶的概念

1. **cocone:** $\left(D(i) \xrightarrow{f_i} A \right)_{i \in \mathbf{I}}$

2. **余极限 (colimit):** $K = \varinjlim D$, 使得 $\begin{tikzcd} \{D(i)\} \arrow[r, "\{f_i\}"] \arrow[dr, "\{\iota_i\}"'] & A \\ & K \arrow[u, "\bar{f}"'] \end{tikzcd}$ 交换, 也就是 $\bar{f} \circ \iota_i = f_i$.

† 极限的泛性质

对于图 $D : \mathbf{I} \to \mathscr{A}$, 可以构造 cone 的范畴 **Cone**(D)

- 对象为 $(A, \{f_i\})$, 其中 $A \in \mathscr{A}$, $f_i \in \hom(A, D(i))$
- 态射为 $f : A \to A'$, 其中 $f_i' \circ f = f_i$

按照极限的定义, **Cone**(D) 中任意 cone 和极限 $L = \varprojlim D$ 之间的 hom-set 的大小为

$$|\hom(-,(L,\{p_i\}))| = |\hom(-,L)| = |\{\bar{f}\}| = 1$$

因此极限是终对象. 类似的, 余极限是某个范畴中的始对象, 由于泛对象的唯一性, 立马得到:

Theorem 7

(余) 极限在同构意义下是唯一的。

† 极限的存在性

由于终对象不一定存在, 所以极限不一定存在. 首先引入两个存在性的概念:

1. **$\mathscr{A}$ 中形状为 $\mathbf{I}$ 的极限存在:** 指对于任意的图 $D:\mathbf{I}\to\mathscr{A}$, 极限 $\varprojlim D$ 都存在.
2. **$\mathscr{A}$ 中极限存在:** 指对于任意的小范畴 $\mathbf{I}$, $\mathscr{A}$ 中形状为 $\mathbf{I}$ 的极限都存在.

Def 9: 完备范畴

如果范畴 $\mathscr{A}$ 上任意指标集的任意图的极限都存在, 也就是 $\mathscr{A}$ 中极限存在, 则称 $\mathscr{A}$ 是完备范畴.

类似, 对于 colimit 可以定义余完备范畴的概念.

Theorem 8

完备范畴 $\iff$ products 和 equalizers 存在.

Proof. 只需证明用 products 和 equalizers 可以构造任意图 $D:\mathbf{I}\to\mathscr{A}$ 的极限:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[d, "\exists!\bar{f}"] \arrow[ddl, "f_i"'] \arrow[ddr, "f_j"] & \\
 & \varprojlim D \arrow[dl, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] & \\
D(i) \arrow[rr, "D(\alpha)"] & & D(j)
\end{tikzcd}$$

products 存在性给出积和投影态射

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_{k\in\mathbf{I}} D(k) \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\pi_j"] & \\
D(i) & & D(j)
\end{tikzcd}$$

现在取子范畴 $\mathbf{I}$ 中所有 codomain 的积 $\prod_{\exists\ \beta:m\to l} D(l)$ 以及投影态射 $p_\alpha : \prod_{\exists\ \beta:m\to l} D(l) \to D(j)$.

现在有两族 $\prod\limits_{k\in\mathbf{I}} D(k)$ 到 $\{D(j)\}$ 的态射 $\{g_j = D(\alpha)\circ\pi_i\}$ 和 $\{h_j = \pi_j\}$, 也就是两个 cone, 利用积 $\prod\limits_{\exists\ \alpha:m\to l} D(l)$ 的泛性质知道存在两个态射

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{k\in\mathbf{I}} D(k) \arrow[r, "\exists!\ \bar{g}"] \arrow[dr, "g_j"'] & \prod\limits_{\exists\ \beta:m\to l} D(l) \arrow[d, "p_\beta"] \\ & D(j) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \prod\limits_{k\in\mathbf{I}} D(k) \arrow[r, "\exists!\ \bar{h}"] \arrow[dr, "h_j"'] & \prod\limits_{\exists\ \beta:m\to l} D(l) \arrow[d, "p_\beta"] \\ & D(j) \end{tikzcd}$$

取 $\prod\limits_{k\in\mathbf{I}} D(k) \underset{\bar{h}}{\overset{\bar{g}}{\rightrightarrows}} \prod\limits_{\exists\ \beta:m\to l} D(l)$ 的 equalizer

$$E \xrightarrow{e} \prod_{k\in\mathbf{I}} D(k) \underset{\bar{h}}{\overset{\bar{g}}{\rightrightarrows}} \prod_{\exists\ \beta:m\to l} D(l)$$

其中 e 满足 $\bar{g}\circ e = \bar{h}\circ e$, 所以 D 的极限取为 $(E, \{\pi_i\circ e\})$, 可以验证

$$D(\alpha)\circ\pi_i\circ e = g_j\circ e = p_\beta\circ\bar{g}\circ e = p_\beta\circ\bar{h}\circ e = h_j\circ e = \pi_j\circ e$$

也就是下图交换

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "e"] & \\ & \prod\limits_{k\in I} D(k) \arrow[dl, "\pi_i"] \arrow[dr, "\pi_j"] & \\ D(i) \arrow[rr, "D(u)"'] & & D(j) \end{tikzcd}$$

利用 equalizer 的泛性质可以证明 $(\varprojlim D = E, \{\pi_i\circ e\})$ 的泛性质. □

实际上, 常用的 concrete 范畴均是完备范畴, 例如 **Set**, **Grp** , **Vect**, **Top**.

† 函子对 limit 的作用

由于极限本质是一个终对象, 考虑在函子 $F:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 作用下是否还是 codomain 中的极限.

$\mathscr{A}$ 中形状为 $\mathbf{I}$ 的图 $D:\mathbf{I}\to\mathscr{A}$ 自然诱导出 $\mathscr{B}$ 中形状为 $\mathbf{I}$ 的图 $F\circ D:\mathbf{I}\to\mathscr{B}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{I} \arrow[r, "D"] \arrow[dr, "F\circ D"'] & \mathscr{A} \arrow[d, "F"] \\ & \mathscr{B} \end{tikzcd}$$

函子 F 把 $\mathscr{A}$ 中的 cone $\left(A \xrightarrow{f_i} D(i)\right)_{i\in\mathbf{I}}$ 变为 $\mathscr{B}$ 中的 cone $\left(F(A) \xrightarrow{F(f_i)} F(D(i))\right)_{i\in\mathbf{I}}$

Def 10: 保持极限的函子 F

如果 F 把所有 $\mathscr{A}$ 中的极限 $L = \varprojlim D$ 变为 $\mathscr{B}$ 中的极限 $F(L) = \varprojlim(F \circ D)$, 则称 F 保持极限.

Theorem 9

hom 函子保持极限.

Proof. 内容... □

4.1 一些常见的极限和余极限

范畴 $\mathscr{A}$ 中对象 A 可以视为空的图 $\varnothing \to \mathscr{A}$, 这就说明范畴中的很多结构可以用 cone 来表示, 在这种描述下一些概念本质上就是极限/余极限.

† Product and Sum

范畴 $\mathscr{A}$ 中对象 X, Y 的积是具有泛性质的 (P, π_1, π_2)

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

满足对任意 (A, f_1, f_2), 存在一个唯一的态射 $\overline{f} : A \to P$，使下图交换

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "\overline{f}"] \arrow[ddl, "f_1"'] \arrow[ddr, "f_2"] & \\ & P \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

从极限的角度，积就是形为$\boxed{\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots}$的图的极限. 作为 $\mathbf{Cone}(\mathrm{D})$ 的终对象，$\mathbf{Cone}(\mathrm{D})$ 其实是切片范畴 $\mathscr{A}/\{X, Y\}$

$$\mathrm{ob}(\mathscr{A}) = \{(A, f_1, f_2) \mid f_1 : A \to X, f_2 : A \to Y\}$$

$$\mathrm{mor}(\mathscr{A}) = \{(A, f_1, f_2) \xrightarrow{f} (B, g_1, g_2), f : A \to B\}$$

由积的定义知

$$\left|\hom_{\mathscr{A}/\{X,Y\}}((A, f_1, f_2), (P, \pi_1, \pi_2))\right| = 1$$

实际上，任何 element 可以记为 (x, y) 形式的对象都是积，例如直和为

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \{x + y \mid x \in A, y \in B\} \\ &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \end{aligned}$$

张量积 (直积) 为

$$
\begin{aligned}
A \otimes B &= \{x \cdot y \mid x \in A, y \in B\} \\
&= \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}
\end{aligned}
$$

类似的，Sum 是 $\mathscr{A}$ 中形为$\boxed{\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots}$的图的余极限 $\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "\iota_1"'] & & Y \arrow[dl, "\iota_2"] \\ & S & \end{tikzcd}$ ，也就是，存在唯一的 $\overline{f}: S \to A$ 使得下图交换

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\iota_1"] \arrow[ddr, "f_1"'] & & Y \arrow[dl, "\iota_2"'] \arrow[ddl, "f_2"] \\
& S \arrow[d, "\bar{f}"] & \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

也就是余切片范畴 $\{X, Y\}/\mathscr{A}$ 中的 initial，记为 $X + Y$ 或 $X \amalg Y$。

† Equalizer and Co-equalizer

fork: $\quad A \xrightarrow{f} X \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} Y$ 满足 $s \circ f = t \circ f$.

co-fork: $\quad X \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{g} B$ 满足 $g \circ u = g \circ v$.

类似于 **Set** 范畴中的定义，态射 s, t 的 equalizer 是 (E, i)，使得

$$
E \xrightarrow{i} X \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} Y
$$

是一个 fork，并且有泛性质，也就是对任意 fork $A \xrightarrow{j} X \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} Y$ ，有唯一的 $\bar{f}: A \to E$ 给出交换图

$$
\begin{tikzcd}
& E \arrow[d, "i"] \\
A \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[r, "j"] & X
\end{tikzcd}
$$

等化子本质是形为 $\bullet \rightrightarrows \bullet$ 的图的极限，是范畴 $\mathscr{A}/\{\ X \rightrightarrows Y\ \}$ 中的终对象。

† Pull-back and Push-out

态射 s, t 有相同的 codomain，它们的 pull - back 是有相同的 domain P 的态射 p_1 和 p_2，使下图交换。

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \arrow[d, "s"] \\
Y \arrow[r, "t"] & Z
\end{tikzcd}
$$

且有泛性质，即存在唯一的 $\bar{f}: A \to P$ 给出交换图

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "\bar{f}"] \arrow[dd, "f_2"'] & & X \arrow[dd, "s"] \\
& P \arrow[ur, "p_1"] \arrow[dl, "p_2"] & \\
Y \arrow[rr, "t"] & & Z
\end{tikzcd}
$$

从 limit 的角度，拉回是图 $\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$ 的极限.

拉回又称为**纤维积**，这时因为当 Z 是 terminal 时，$s: X \to Z$ 等价于 $s^{-1}(Z) \subset X$, 也就是 Z 的纤维, 因此对象 P 是纤维 $s^{-1}(Z)$ 和 $t^{-1}(Z)$ 的积, 可以记为

$$P = \{(x, y) \in X \times Y \mid s(x) = t(y)\}$$

† Mono(单) and Epi(满)

motivation: 范畴论不会深入到对象的内部, 但是元素 $a \in X$ 等价于态射 $i: \mathbf{1} \to A$, 因此我们讨论态射的单或满是基于广义元素.

Def 11: monomorphism

满足 cofork $S \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y \iff s = t$ 的 $f: X \to Y$ 称为单态射, 又称为左可约的.

$s = t \Rightarrow f \circ s = f \circ t$ 是自然的. 单态射就是说 cofork $f \circ s = f \circ t \Rightarrow s = t$, 这句话从广义元素的视角看是说两个广义元素的映射相等 $f \circ s = f \circ t$, 当且仅当广义元素相等 $s = t$, 也就是 f 对于广义元素是 injection.

单态射给出极限的一个重要性质:

Theorem 10

极限 $(L, \{f_i\})$ 中态射 $\{f_i\}$ 都是单态射.

Proof. 任意 cofork $A \overset{s}{\underset{t}{\rightrightarrows}} L \xrightarrow{f_i} D(i)$ ，记 $f = f_i \circ s = f_i \circ t: A \to D(i)$, 根据极限的泛性质可知存在唯一的 $f: A \to L$ 使下图交换

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\exists! \bar{f}"] \arrow[dr, "f"'] & L \arrow[d, "f_i"] \\
& D(i)
\end{tikzcd}
$$

也就是说 $s = t = \bar{f}$, 因此 f_i 是单态射. □

特别的, equalizer 作为极限, 态射 $e: E \to X$ 称为**正则 (regular) 单态射**.

对偶的, 满态射 (Epimorphism) $f: X \to Y$ 的定义为:

$$\text{cofork} \quad X \xrightarrow{f} Y \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} B \iff u = v$$

所有余极限 $(R, \{g_i\})$ 中 g_i 都是满态射:

$$\begin{tikzcd} D(i) \arrow[r, "g_i"] \arrow[dr, "g"'] & R \arrow[d, shift left, "u=v=\bar{g}"] \arrow[d, shift right] \\ & B \end{tikzcd}$$

co-equalizer 称为正则满态射.

5 Abel 范畴

5.1 加法范畴

Motivation: 范畴论不考虑对象的元素之间的运算, 但是可以考虑 hom-set 内元素的运算. 群,R-模的态射天然的有代数运算 (加法, 数乘等), 范畴里面的态射目前只有复合操作, 考虑给它另外加上相容的代数运算, 最简单的就是群的代数结构.

Def 12: Preadditive 范畴

Preadditive 范畴 $\mathscr{A}$ 是在范畴的基础上赋予 hom-set 一个与态射复合相容的运算, 记为加法. 具体的:

1. $\hom(A, B)$ 是 Abel 群, 有零态射 0_{AB}.
2. 态射复合满足双线性

$$\begin{aligned} \hom(A, B) \times \hom(B, C) &\longrightarrow \hom(A, C) \\ (g_1 + g_2)(f_1 + f_2) &\longmapsto g_1 f_1 + g_1 f_2 + g_2 f_1 + g_2 f_2 \end{aligned}$$

这个加法运算给 Preadditive 范畴带来很多特殊的东西:

1. 零态射的加法 $0_{AB} + f = f$ 导致 0_{AB} 与任何态射复合都是零态射.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "0_{AB}"] \arrow[dr, "0_{AC}"'] & B \arrow[d, "f"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "0_{AB}"] & B \\ C \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "0_{CB}"'] & \end{tikzcd}$$

Proof.

$$f \circ g = f \circ (0 + g) = f \circ 0 + f \circ g \Longrightarrow f \circ 0 = 0$$

□

2. **利用零态射定义态射的 kernel:** $\ker(f) = i$, 其中 (K, i) 是如下 equalizer

$$K \xrightarrow{i} A \underset{0_{AB}}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

也就是说 $f \circ i = 0_{AB} \circ i = 0_{KB}$.
更一般地，在 Preadditive 范畴中任何 equalizer $E \xrightarrow{i} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$ 都给出一个 kernel $\ker(f - g) = i$.
对偶地定义余核 $\operatorname{coker}(f) = (c : B \to C)$

$$A \underset{0_{AB}}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{c} C$$

3. Preadditive 范畴中 **initial = terminal**, 称为零对象 Z.
Proof. Z 是 initial 则 $\hom(Z, Z) = 1_Z = 0_{ZZ}$. 任意态射 $f : B \to Z$ 有

$$f = 1_Z \circ f = 0_{ZZ} \circ f = 0_{BZ}$$

也就是说 $\hom(B, Z) = \{0_{BZ}\}$ 只有一个态射,Z 也是 terminal. □

4. Preadditive 范畴中 **product = co-product**, 称为双积 $A \bigoplus B$.
Proof. $(A \times B, \pi_1, \pi_2)$ 是积, 考虑如下两个 cones: $(A, 1_A, 0_{AB})$ 和 $(B, 1_B, 0_{BA})$, 由泛性质应该有唯一的态射 $p_1 : A \to A \times B$ 和 $p_2 : B \to A \times B$ 使下图交换

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dl, "0_{BA}"'] \arrow[d, "p_2"] \arrow[dr, "1_B"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\
 & A \arrow[ul, "1_A"] \arrow[u, "p_1"'] \arrow[ur, "0_{AB}"'] &
\end{tikzcd}$$

交换图给出如下信息:

$$0_{BA} = \pi_1 \circ p_2, 1_B = \pi_2 \circ p_2, 0_{AB} = \pi_2 \circ p_1, 1_A = \pi_1 \circ p_1$$

考虑 $p_1\pi_1 + p_2\pi_2 : A \times B \to A \times B$, 左乘 $\pi_1 + \pi_2$ 可以得到

$$(\pi_1 + \pi_2)(p_1\pi_1 + p_2\pi_2) = \pi_1(p_1\pi_1 + p_2\pi_2) + \pi_2(p_1\pi_1 + p_2\pi_2) = \pi_1 + \pi_2$$

由积的泛性质可知 $p_1\pi_1 + p_2\pi_2 = 1_{A\times B}$. 下面证明 $(A \times B, p_1, p_2)$ 是余积:
任意 cocone $(C, f_1 : A \to C, f_2 : B \to C\ )$, 观察到 $h = f_1\pi_1 + f_2\pi_2 : A \times B \to C$ 正好使得下图交换:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[d, "p_2"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A \times B \arrow[r, "h"] & C \\
A \arrow[u, "p_1"] \arrow[ur, "f_1"'] &
\end{tikzcd}$$

也就是 $h \circ p_i = f_i$, 可以证明 h 的唯一性, 因此证明了 $A \times B$ 也是余积. □

Def 13: 加法 (Additive) 范畴

有**零对象**和**双积**的 Preadditive 范畴称为加法范畴.

现有有了零对象, 零态射, 双积等概念, 现在看看加法范畴中 hom-set 上的群加法到底是什么.

定义加法范畴 $\mathscr{A}$ 上的 biproduct 函子 $\bigoplus : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$

$$(\ A_1 \xrightarrow{f} A_2, \ B_1 \xrightarrow{g} B_2 \ ) \longmapsto (\ A_1 \bigoplus B_1 \xrightarrow{f \bigoplus g} A_2 \bigoplus B_2 \ )$$

其中 $f \bigoplus g$ 使得下图交换:

..

hom-set 中的加法可以表示为:

$$f + g = c(f \bigoplus g)d$$

Def 14: 加性函子

保持加法范畴上态射加法的函子 T:

$$T(f + g) = T(f) + T(g)$$

关于加性函子的一些 facts:

1. $T(0_{AB}) = 0_{T(A)T(B)}$
2. **加性函子保持双积**.

5.2 Abel 范畴

Def 15: Abel 范畴

(余) 极限完备的加法范畴, 且 单射$f \iff f = \ker(g)$, 满射$f \iff f = \operatorname{coker}(g)$

ker 和 coker 作为 equalizer 和 co-equalizer 自然是单的/满的.

Theorem 11

1. f是单态射 $\iff f = \ker(\operatorname{coker}(f)) \iff \ker(f) = 0$
2. g是满态射 $\iff g = \operatorname{coker}(\ker(g)) \iff \operatorname{coker}(g) = 0$

Proof. $f = \ker(\operatorname{coker}(f))$ 作为 equalizer 自然是单态射.

反之, $f : X \to Y$ 是 Abel 范畴中的单态射, 则由定义存在 $g : Y \to C$ 使得 $f = \ker(g)$, 即如下 equalizer

$$X \xrightarrow{f} Y \underset{0}{\overset{g}{\rightrightarrows}} C \qquad gf = 0$$

Abel 范畴中 f 存在余核 $r=\mathrm{coker}(f):Y\to D$, 即如下 co-equalizer

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & Y \arrow[r, "r"] & D \end{tikzcd} \qquad rf=0$$

由 $gf=0$ 可知 (C,g) 是 $X \overset{f}{\underset{0}{\rightrightarrows}} Y$ 上的 co-cone, 自然有如下泛性质

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "0"'] & Y \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "g"'] & D \arrow[d, "\exists ! h"] \\ & & C \end{tikzcd} \qquad g=hr$$

验证 $f:X\to Y$ 是 $Y \overset{r}{\underset{0}{\rightrightarrows}} D$ 的 equalizer. 对任意 cone

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f'"] & Y \arrow[r, shift left, "r"] \arrow[r, shift right, "0"'] & D \end{tikzcd} \qquad rf'=0$$

由于 $gf'=hrf'=g0=0$, 所以 $f':A\to Y$ 也是 $Y \overset{g}{\underset{0}{\rightrightarrows}} C$ 的 cone, 有如下泛性质

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "0"'] & C \\ A \arrow[u, "\exists ! t"] \arrow[ur, "f'"'] & & D \end{tikzcd} \qquad f'=ft$$

说明 $X \xrightarrow{f} Y \overset{r}{\underset{0}{\rightrightarrows}} D$ 是 equalizer, 也就是 $f=\ker(r)=\ker(\mathrm{coker}(f))$. □

Theorem 12

Abel 范畴中态射 $f:X\to Y$ 可以唯一的分解为 $f=me$, 其中 m 是单态射,e 是满态射.

Proof. 因为 Abel 范畴中存在零对象 Z, 所以 □

在 Abel 范畴里面可以定义态射的像和余像概念:

† 正合列

Theorem 13: 5 lemma

内容...

Theorem 14: Snake lemma

内容...

阿贝尔范畴是范畴论中的一个重要概念，它结合了加法范畴和核与余核的良好性质，在同调代数、代数几何等领域有着广泛的应用。

Def 16

一个范畴 $\mathcal{A}$ 称为阿贝尔范畴，如果它满足以下条件：

1. $\mathcal{A}$ 是加法范畴，即：
   (a) 对于任意两个对象 $A, B \in \mathcal{A}$，$\mathrm{Hom}(A, B)$ 是一个阿贝尔群。
   (b) 范畴 $\mathcal{A}$ 有零对象。
   (c) 范畴 $\mathcal{A}$ 有有限积和有限余积。
2. 对于 $\mathcal{A}$ 中的任意态射 $f : A \to B$，f 有核和余核。
3. 对于 $\mathcal{A}$ 中的任意态射 $f : A \to B$，典范态射 $\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f)) \to \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$ 是同构。

Theorem 15

在阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 中，有以下性质：

1. 每个单态射都是某个态射的核，每个满态射都是某个态射的余核。
2. 有限积和有限余积是同构的。

1. 阿贝尔群范畴 Ab 是阿贝尔范畴。
2. 环 R 上的左 R-模范畴 Mod_R 是阿贝尔范畴。

† 同调代数中的应用

阿贝尔范畴是同调代数的基础，在阿贝尔范畴中可以定义链复形、同调群等概念。

设 $\mathcal{A}$ 是阿贝尔范畴，一个链复形 $C_\bullet$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一系列对象 C_n 和态射 $d_n : C_n \to C_{n-1}$，满足 $d_{n-1} \circ d_n = 0$ 对所有 n 成立。

同调群 $H_n(C_\bullet)$ 定义为 $H_n(C_\bullet) = \mathrm{Ker}(d_n)/\mathrm{Im}(d_{n+1})$。

6 Sheaf 和层范畴

层（Sheaf）是代数几何、拓扑学等领域中的重要概念，它提供了一种在拓扑空间上局部定义数据并将其黏合为全局数据的方法。层范畴则是研究层之间态射的范畴，具有丰富的结构和性质。

层的定义

设 X 是一个拓扑空间。

Def 17: 预层（Presheaf）

一个取值在范畴 $\mathcal{C}$ 中的预层 $\mathcal{F}$ 是一个从 X 的开集范畴 $\mathcal{O}(X)$（其对象为 X 的开集，态射为开集的包含关系）到范畴 $\mathcal{C}$ 的反变函子。具体来说：

1. 对于 X 的每个开集 U，指定一个 $\mathcal{C}$ 中的对象 $\mathcal{F}(U)$。
2. 对于 X 中任意两个开集 $V \subseteq U$，指定一个 $\mathcal{C}$ 中的态射 $\mathrm{res}_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$，称为限制态射，满足：
   (a) $\mathrm{res}_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$ 对任意开集 U 成立。
   (b) 若 $W \subseteq V \subseteq U$，则 $\mathrm{res}_{V,W} \circ \mathrm{res}_{U,V} = \mathrm{res}_{U,W}$。

Def 18: 层（Sheaf）

一个预层 $\mathcal{F}$ 称为层，如果对于 X 的任意开集 U 以及 U 的任意开覆盖 $\{U_i\}_{i \in I}$，满足以下两个条件：

1. （S1）（局部相等性）] 若 $s, t \in \mathcal{F}(U)$ 使得 $\mathrm{res}_{U,U_i}(s) = \mathrm{res}_{U,U_i}(t)$ 对所有 $i \in I$ 成立，则 $s = t$。
2. （S2）（局部黏合性）] 若对于每个 $i \in I$ 有 $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$，并且对于任意 $i, j \in I$ 有 $\mathrm{res}_{U_i, U_i \cap U_j}(s_i) = \mathrm{res}_{U_j, U_i \cap U_j}(s_j)$，则存在 $s \in \mathcal{F}(U)$ 使得 $\mathrm{res}_{U,U_i}(s) = s_i$ 对所有 $i \in I$ 成立。

层范畴

Def 19: 层的态射

设 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 是拓扑空间 X 上取值在范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个层。一个层的态射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 是一个自然变换，即对于 X 的每个开集 U，有一个 $\mathcal{C}$ 中的态射 $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$，使得对于任意 $V \subseteq U$，以下图表交换：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\mathrm{res}_{U,V}"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\mathrm{res}_{U,V}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Def 20: 层范畴

拓扑空间 X 上取值在范畴 $\mathcal{C}$ 中的所有层以及它们之间的态射构成一个范畴，称为层范畴，记为 $\mathrm{Sh}(X, \mathcal{C})$。当 $\mathcal{C}$ 为阿贝尔群范畴 Ab 时，简记为 $\mathrm{Sh}(X)$。

层范畴的基本性质

Theorem 16

层范畴 $\mathrm{Sh}(X, \mathcal{C})$ 具有以下性质：

1. 若 $\mathcal{C}$ 是具有有限极限和有限余极限的范畴，则 $\mathrm{Sh}(X, \mathcal{C})$ 也具有有限极限和有限余极限。
2. 若 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔范畴，则 $\mathrm{Sh}(X, \mathcal{C})$ 也是阿贝尔范畴。

（1） 设 X 是拓扑空间，$\mathcal{C} = \mathrm{Set}$（集合范畴）。对于 X 的每个开集 U，定义 $\mathcal{F}(U)$ 为 U 上的连续实值函数全体。限制态射 $\mathrm{res}_{U,V}$ 为函数的限制。则 $\mathcal{F}$ 是 X 上的一个层。

（2） 设 X 是拓扑空间，A 是一个阿贝尔群。对于 X 的每个开集 U，定义 $\underline{A}(U) = A$，若 $V \subseteq U$，则 $\mathrm{res}_{U,V} = \mathrm{id}_A$。这个预层称为常预层。一般来说，常预层不是层，但可以通过一个称为"层化"的过程得到一个与之相关的层，称为常层。

第 2 章　群

1　群的范畴

在集合范畴的基础上附加一个代数运算 $\sigma: A\times A\longrightarrow A$, 算是最基本的代数结构.

(注) 数乘 $F\times A\longrightarrow A$, 内积 $A\times A\longrightarrow\mathbb{R}$ 不是上述意义下的代数运算.

1.1　群的相关概念

Def 21: 群

单位元, 逆元, 结合性, (封闭性)

1. 群的阶：$\operatorname{ord} G=|G|$
2. 可消去：$ab=ac\Rightarrow b=c$

† 群的子代数结构

1. 单位元、逆元均继承自群, 有唯一性

$$1_H\in H\subseteq G\Rightarrow 1_H=1_G$$
$$a_H^{-1}\in H\Rightarrow a_H^{-1}=a_G^{-1}$$

2. 子结构判据: 验证运算在子集中的封闭性

$$ab^{-1}\in H,\forall a,b\in H$$

3. 子结构构造方法
   (a) $H_1\cap H_2$ 依旧是子群. 但子群的乘法 $H_1H_2=\{h_1h_2\mid h_i\in H_i\}$ 不一定是子群
   (b) **集合 S 生成子群**

$$\langle S\rangle=\bigcap\{H\mid H<G \text{ 且} S\subseteq H\}$$

   $\langle S\rangle$ 是包含 S 的最小子群, 实际上 $\langle S\rangle$ 可以表达为

$$\langle S\rangle=\{a_1^{\pm1}a_2^{\pm1}\cdots a_k^{\pm1}\mid a_i\in S,k\in\mathbb{N}\}$$

   若 $\langle S\rangle=G$, 称 G 为 (有限) 生成群 $\Rightarrow$ 生成组 $S\subseteq G$ 不一定是唯一的.

† 商结构

陪集 (Coset): 集合 $aH=\{ah\mid h\in H<G\}$

我们不区分左陪集合右陪集, 因为他们是同构的.

1. aH 构成子群 $(e \in aH) \iff a, a^{-1} \in H$
2. $aH = bH \iff a^{-1}b \in H$
3. $f : aH \longrightarrow H$, $f(ah) = a$ 是一一对应关系, 故从集合角度 $|H| = |aH|$

陪集 $\{aH\}$ 构成 G 上的划分, 也就是划分为不交并, 因此陪集是群上的一种等价关系.

商集: 等价类集合, 记为 $G/H = \{\overline{a} = aH \mid a \in G\}$

Theorem 17: Lagrange 定理

对有限群 G, $|G/H| = |G|/|H|$

利用陪集性质, 有如下 facts:

1. 群元素 g 的阶 $ord\ g = \min\limits_{n}\{g^n = e\} = |\langle g\rangle|$. 由 Lagrange 定理知道群元素的阶一定是 $|G|$ 的因子.
2. *Fermat Theorem*: 对素数 p, a 与 p 互质, 则 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.
   $|\mathbb{Z}_p^*| = p-1$ 且 $\overline{a} \in \mathbb{Z}_p^*$ 则 $(\overline{a})^{p-1} = \overline{1}$ 成立, $\overline{a} < p$ 故 $a^{p-1} = (\overline{a} + mp)^{p-1} = \overline{a}^{p-1} + F(p)$
   $a^{p-1} \pmod p = \overline{a}^{p-1} \pmod p = 1$

† 正规子群与商群

子群的乘法 H_1H_2 不一定是子群, 增加一些交换性, 可使 H_1H_2 依然构成子群.

正规子群: 子群 N 对 $\forall a \in G$, $aN = Na$ 时, 称 $N \lhd G$.

1. 正规性判据
   (a) $aHa^{-1} = H$ 对 $\forall a \in G$ (by defination)
   (b) $aha^{-1} \in H$ 对 $\forall a \in G$, $h \in H$ 成立
2. 正规子群和子群的积还是子群. **特:** 两个正规子群 N_1N_2 还是正规子群.
   Proof. $n_1h_1, n_2h_2 \in NH$, $\quad n_1h_1(n_2h_2)^{-1} = n_1h_1h_2^{-1}n_2^{-1} = n_1n_2^{-1}h_1'h_2' \in NH$ □

两个重要的正规子群:

1. **中心化子**$C(G)$
   a 的中心化子: $C(a) = \{g \mid ag = ga\}$
   群的中心 $C(G) = \bigcap\limits_{a} C(a) = \{g \in G \mid gx = xg, \forall x \in G\}$ 是 G 的正规子群
2. **导群** $G^{(1)} = G' = [G, G]$
   a和b 的换位子: $[a, b] = (ba)^{-1}ab = a^{-1}b^{-1}ab$
   换位子群 (导群) $G^{(1)} = \langle\{a^{-1}b^{-1}ab \mid a, b \in G\}\rangle$ 是 G 的正规子群.
   Proof. 对于换位子, 两个重要的性质:

$$[a, b]^{-1} = [b, a]$$
$$\phi([a, b]) = [\phi(a), \phi(b)]$$

因此对任意 $h \in G$ 有 $h[a,b]h^{-1} = [hah^{-1}, hbh^{-1}] \in G^{(1)}$ 且

$$h[a_1,b_1][a_2,b_2]h^{-1} = [ha_1h^{-1}, hb_1h^{-1}][ha_2h^{-1}, hb_2h^{-1}] \in G^{(1)}$$

□

正规子群的"交换性"可以给商集乘法 $\longrightarrow$ 群

商群: 正规子群 N 的商集关于乘法 $(aN)(bN) = abN$ 构成商群.

1. G/N 的运算由代表元 a, b 的运算决定, 可见 G/N 保持 G 的结构 (但结构更"粗")
2. $|G/H| = 2$ 时 H 是正规子群

   Proof.

$$a \in H, aH = Ha = H$$
$$a \notin H, G = H \cup aH = H \cup Ha \Rightarrow aH = Ha = G - H$$

□

1.2 群同态

集合上有代数结构时, morphism 要保代数运算, 例如群同态 $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$.

群同态 $\phi : G \longrightarrow G'$ 的一些 facts:

1. $\phi(e) = e'$, $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$
2. ord $\phi(a)$ 是 ord a 的因子
3. 子群的像和原像依然是子群

$$\phi(H) < G', \ \phi^{-1}(H') < G$$

   特: $\{e\}$ 是 G' 的 trivial 子群, $\ker\phi = \phi^{-1}(e)$ 自然也是 G 的子群, 且是正规子群, 有 $\phi(a\ker(\phi)) = \{\phi(a)\}$, $\phi^{-1}(\phi(a)) = a\ker(\phi)$

有一些重要且基本的群同态:

1. (左/右) 平移

$$\begin{aligned} L_a : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto ag \end{aligned}$$

2. 共轭变换

$$\begin{aligned} C_a : G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto a^{-1}ga \end{aligned}$$

3. 自然同态: $N \lhd G$ 是正规子群

$$\begin{aligned} \pi : G &\longrightarrow G/N \\ a &\longmapsto \bar{a} \end{aligned}$$

Theorem 18: 群同态基本定理 I

任意群同态 $\phi: G \to G'$, 给出商群 $G/\ker(\phi)$ 到 G' 的同态

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}: G/\ker(\phi) &\longrightarrow \phi(G)\\ \bar{a} &\longmapsto \phi(a)\end{aligned}$$

满足 $\phi = \tilde{\phi}\pi$. 当 ϕ 是满射时 $G' = \mathrm{Im}(\phi)$, 此时 $\tilde{\phi}$ 是同构, 有 $G/\ker(\phi) \cong \mathrm{Im}(\phi)$.

回忆子群的像与原像都还是子群, 但是对于 $H < G$, 一般只能得出 $H \subset \pi^{-1}(\pi(H))$. 考虑 $N = \ker(\phi) \subset H$ 的条件, 对于 $x \in \pi^{-1}(\pi(H))$, x 一定在 H 的某个元素的等价类之内, 也就是 $x \in hN \subset H$, 因此得出 $H = \pi^{-1}(\pi(H))$. 这给出了商群 G/N 中子群和 G 中子群的一一对应.

取 G/N 的正规子群 $\bar{H}$ 继续做商, 由前面的讨论可知对应于 G 中正规子群 $H \supset N$, 并给出如下复合映射

$$G \xrightarrow{\pi} G/N \xrightarrow{\tilde{\pi}} (G/N)/\bar{H}$$

复合映射的核为 $\ker(\tilde{\pi}\cdot\pi) = H$, 由群同态基本定理 I 可以得出如下交换图和群同构

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\bar{\pi}"] & G/N \arrow[r, "\tilde{\pi}"] & (G/N)/\bar{H} \\ G/\ker(\tilde{\pi}\cdot\pi) \arrow[urr, "\cong"'] & & \end{tikzcd}$$

推论 1: 群同态基本定理 II

对于正规子群 $N \lhd H \lhd G$, 由定义知 $\bar{H} = H/N$, 上图中 $G/\ker(\tilde{\pi}\cdot\pi) = G/H$, $(G/N)/\bar{H} = (G/N)/(H/N)$, 因此有如下同构

$$G/H \cong (G/N)/(H/N) = \bar{G}/\bar{H}$$

如果取一般的子群 H, 我们知道 $H \cap N$ 和 HN 也是正规子群, 并且 $(H \cap N) \lhd N \lhd HN$. 应用两次群同态基本定理立马有如下推论:

推论 2: 群同态基本定理 III

任给 $N \lhd G$ 和 $H < G$, 则 $HN/N \cong H/(H \cap N)$

Proof. $H \cap N \lhd N \lhd NH < G$ 和 $\pi: G \longrightarrow G/N$

$$\begin{cases}\pi(H) \cong H/N \equiv H/(H\cap N)\\ \pi(HN) \cong HN/N = H/N = \pi(H)\end{cases} \Rightarrow HN/N = H/(H\cap N)$$

□

从群同构可以推出一个有用的定理, 这样我们可以不用研究抽象的群, 转而研究与其同构的简单群.

Theorem 19: Cayley 定理

任一群都同构于某一个变换群.

Proof. 集合 X 上的对称群：$S_X = \{\sigma \mid \sigma : X \longrightarrow X$ 可逆(否则不能构成群)$\}$, 对称群的子群为“变换群”。

任一群上有自然的可逆变换 - 左平移 L_a, $G_l = \{L_a \mid a \in G\}$ 构成一个变换群 $G_l < S_G$, 称为 G 的左正则表示. 可证 $G \cong G_l$. □

† Abel 化

群同态保持交换性. 考虑满同态 $\phi : G \to H$, 当 G 是 Abel 群时, H 一定也是 Abel 群. 但是已知 H 是 Abel 群时 $\phi(x)\phi(y) = \phi(y)\phi(x)$, 只能推出 $xyx^{-1}y^{-1} \in \ker(\phi)$ 不能推出 G 是 Abel 群.

记集合 $S = \{xyx^{-1}y^{-1} \mid \ \forall x, y \in G\} \subset \ker(\phi)$, 导群 $G^{(1)} = \langle S \rangle$ 是包含 S 的最小正规子群, 则在 H 中有自然同态 $p : H \to H/\phi(G^{(1)})$, 这里 $H/\phi(G^{(1)})$ 也是 Abel 群.

有如下复合同态 $\sigma = p \cdot \phi : G \to H/\phi(G^{(1)})$, 显然是个满同态, 且

$$\ker(\sigma) = \{x \mid \phi(x)\phi(G^{(1)}) = \overline{e'} = \phi(G^{(1)})\} = G^{(1)}$$

根据同态基本定理立马有 $G/G^{(1)} \cong H/\phi(G^{(1)})$. 也就是如下的 Abel 化定理:

Theorem 20: Abelization

$G/G^{(1)}$ 是 Abelian 群

Proof. 可以脱离同态, 直接验证其交换性. 由于 $xyx^{-1}y^{-1} \in G^{(1)}$, 所以

$$xG^{(1)}yG^{(1)}x^{-1}G^{(1)}y^{-1}G^{(1)} = xyx^{-1}y^{-1}G^{(1)} = G^{(1)}$$

也就是 $\bar{x}\bar{y}\bar{x}^{-1}\bar{y}^{-1} = \bar{e} \Rightarrow \bar{x}\bar{y} = \bar{y}\bar{x}$ □

2 群直和

† 群直和

外直和: (群范畴里的 product, 是一种合成, 已知 G_1, G_2)

$$G_1 \times G_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_i \in G_i\}$$

在乘法 $(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$ 下构成的群.

外直和的一些 facts：

1. 单位元 (e_1, e_2), 逆元 (a_1^{-1}, a_2^{-1})
2. G_1 & G_2 are abelian $\iff$ $G_1 \times G_2$ is abelian
3. $G_1 \times G_2 \cong G_2 \times G_1$
4. $\overline{G}_1 = \{(a, e_2) \mid a \in G_1\} = G_1 \times \{e_2\}$ 和 $\overline{G}_2 = \{e_1\} \times G_2$ 是 $G_1 \times G_2$ 的正规子群, 且 $\overline{G}_i \cong G_i$

内直和: (群范畴里的 co-product, 一种分解, 已知 G)

把 G 表示为两个正规子群的乘法

$$G = N_1 N_2 = \{nm \mid n \in N_1, m \in N_2\}$$

其中 $N_1 \cap N_2 = \{e\}$ 且表示 $g = nm$ 是唯一的, 此时称 G 可分解.

Theorem 21

群的内外直和在同构意义下等价.

Proof. 对于外直和 $G_1 \times G_2$, $\overline{G_1} \cap \overline{G_2} = (e_1, e_2) = I$, $G_1 \times G_2$ 中元素均可**唯一**表示为 $(a_1, a_2) = (a_1, e_2) \cdot (e_1, a_2)$, 也就是内直和 $G = \overline{G}_1 \overline{G}_2$. □

† 群扩张

Def 22: B 过 A 的扩张

群 G, A, B, 正规子群 $N \lhd G$, 如果 $A \cong N$, $B \cong G/N$, 则称 G 是 B 过 A 的扩张, 实际上

$$G \cong A \times B$$

有 Extension 的定义, 内直和实际是两个正规子群的扩张

$$0 \to N_1 \to G \to N_2 \cong G/N_1 \to 0$$

Theorem 22

G 是 B 过 A 的扩张 $\iff$ $0 \to A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} B \to 0$

这里 $i : N \to G$ 是自然嵌入,π 是自然同态.

等价扩张: B 过 A 的两个扩张 G' 和 G, $G' \cong G$ 时称为等价的.

用正合列的语言就是有同构 $f : G \longrightarrow G'$ 使下图交换

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_A"] & G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r] \arrow[d, "1_B"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i'"] & G' \arrow[r, "\pi'"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

例如: $\mathbb{Z}$ 是 $2\mathbb{Z}$ 的扩张. $2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}_2$, 过 $\mathbb{Z}_2$.

3 单群, 可解群与幂零群

3.1 单群

单群 (Simple): 只有 trivial 的正规子群.

类似于单模/不可约模, 素理想, 素域, 是群分解中的 building - block. 由群扩张, 可以把 G 分解为更简单的 $N \triangleleft G$ 和 G/N , 对单群而言无法用群扩张简化处理.

Theorem 23:

交换单群 $\Longleftrightarrow$ 素数阶循环群.

Proof. Abelian 群的子群都是正规的, 故 $\forall a \in G$, $\langle a\rangle \triangleleft G$, 但 G 是单群 $\Rightarrow \langle a\rangle = \langle e\rangle$ 或 G , 故 $G = \langle a\rangle$ 且只有 $|G| = p$ 时循环群 G 才没有其他循环子群. □

Fact: A_n, $n \geq 5$ 是 non - abelian 单群.

推论 3

单群 G 的导群是确定的, $G^{(1)}$ 作为正规子群只能是 trivial 的. 如果 G 是交换单群 $\langle p\rangle$, 则 $G^{(1)} = \{e\}$, 而对于非交换单群 $G^{(1)} = G$.

3.2 可解群与幂零群

首先引入几个群列工具:

1. **正规列:** $G \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots$, 其中 G_i 是 G 的正规子群.
2. **次正规列:** $G = G_0 > G_1 > G_2 > \cdots$, 其中 $G_i \triangleleft G_{i-1}$, 注意$G_i$ 不一定是 G 的正规子群.
3. **导出列:** $G \triangleright G^{(1)} \triangleright G^{(2)} \triangleright \cdots$, 其中 $G^{(k)} = (G^{(k-1)})^{(1)} = [G^{(k-1)}, G^{(k-1)}]$

群列中商群 G_i/G_{i+1} 称为**因子群**, 因子群中 non-trivial 的个数 k 称为 (次) 正规列的长度. 导出列是一个特殊的正规列, 其因子群全部是 Abel 群.

† 可解群

可解的概念源自于 Galois 对多项式方程根式可解的工作

Def 23: 可解群

若 G 的导出列 是有限的 $G \triangleright G^{(1)} \triangleright G^{(2)} \triangleright \cdots \triangleright G^{(k)} = \{e\}$, 则 G 是可解的.

1. 对 Abel 群, $G^{(1)} = \{e\}$, 故 Abel 群是可解群.
2. 可解群有 Abel 子群, 是部分可交换的群. $G^{(k)} = \{e\}$ 可知 $G^{(k-1)}$ 是 G 的 Abel 子群.
3. 非交换单群都不是可解群 $G = G^{(1)} = G^{(2)} = \cdots$

Theorem 24

G 是可解群 $\iff$ G 有有限次正规列 $G = G_0 > G_1 > G_2 > \cdots > G_k = \{e\}$, 且 G_i/G_{i+1} 是 Abel 群.

Proof. G_0/G_1 是 Abel 群, 则显然已商掉了 $G^{(1)}$, 故 $G^{(1)} < G_1$. 类似的 $G^{(2)} < G_2, \cdots, G^{(k)} < G_k = \{e\}$, 故 G 可解. □

对于有限群的可解性, 有特殊的结论, 首先引入极大正规子群的工具:

由群同态基本定理, G/N 中子群 $\bar{H}$ 的原像 $\pi^{-1}(\bar{H})$ 是 G 中包含 N 的正规子群. 因此如果 G/N 是单群, 就是说 $\bar{H}$ 只能取 $\{e\}$ 或者 G/N, 对应 G 中包含 N 的正规子群只有 N 和 G. 这引出如下概念:

极大正规子群 M: $M \lhd G$ 且不存在 non-trivial 的 $H_1 \lhd G$ 使 $M \lhd H_1 \lhd G$.

如果 G/N 不是单群, 则 N 不是极大正规子群, 一定可以插入某个正规子群 H

$$N \lhd H \lhd G$$

对于有限可解群, 它的正规列一定可以进行有限次上述插入操作, 最后得到如下正规列

$$G = H_0 \rhd H_1 \rhd \cdots \rhd H_t = \{e\}$$

这里 H_i/H_{i+1} 不仅是 Abel 群, 还是单群, 也就是 $H_i/H_{i+1} = \langle p_i \rangle$. 由 Lagrange 定理, 群的阶数为 $|G| = p_0 p_1 \cdots p_{t-1}$

† 幂零群...

前面提到 G 的换位子群 $G^{(1)} = [G, G]$, 更一般的有子群H 和 K 的换位子群:

$$[H, K] = \{[h, k] \mid h \in H, k \in K\}$$

降中心列: $P_0 = G, P_1 = [G, G]$, $P_2 = [P_1, G]$, $\cdots$, $P_k = [P_{k-1}, G]$

Def 24: nilpotent

幂零群是降中心列有限的群.

3.3 Jordan - Hölder 定理

合成列: 如果次正规列的因子群 G_i/G_{i-1} 全部是单群, 则该次正规列称为合成列.

1. 任一群都有次正规列. 单群有唯一的次正规列 $G > \{e\}$, 非单群的次正规列有多个, 例如 $G > \{e\}$ 和 $G > N > \{e\}$
2. 可以验证单群的次正规列是合成列, 但是一般的群不一定有合成列.

但是限制在有限群, 合成列可以很好的确定.

首先说明合成列的存在性: 由于有限群必然有次正规列 $G > \{e\}$, 利用极大正规子群的性质一定可以做有限次插入后得到合成列

$$G = H_0 \rhd H_1 \rhd \cdots \rhd H_t = \{e\},\ \ H_i/H_{i+1} = \langle p_i \rangle$$

Theorem 25: Jordan - Hölder 定理

有限群 G 的任意两个约化合成群列都等长, 且因子群对应同构

$$G_i/G_{i+1} \cong H_i/H_{i+1}$$

Proof. 这跟质因数分解 $|G| = p_1p_2\cdots p_t$ 的唯一性有关, $|H_i/H_{i+1}| = |G_i/G_{i+1}| = p_i$ 是确定的. □

4 群作用

Action: 群在集合上的作用 $\sigma : G \times S \longrightarrow S$ 满足

$$e \circ x = x$$
$$(g_1g_2) \circ x = g_1 \circ (g_2 \circ x) \quad (\text{连续作用})$$

1. 给定群元 g, 则给出一个集合上的函数 $\sigma_g : X \longrightarrow X$, 可以证明 σ_g 是可逆映射且 $\sigma_g^{-1} = \sigma_{g^{-1}}$, 因此 $\sigma_g \in S_X$.
   Proof. $\sigma_g \cdot \sigma_{g^{-1}}(x) = \sigma_g(g^{-1}x) = gg^{-1}x = x$ □
   可知群作用给出一个到对称群的群同态
   $$\sigma : G \longrightarrow S_X$$
   $$g \longmapsto \sigma_g$$
   反之一个 $G \longrightarrow S_X$ 的同态也唯一对应一个群作用.
2. Faithful：群同态 $\sigma : G \longrightarrow S_X$ 是单射.
3. 等价作用: 因为群论是从对称群发展起来的, 并不关心作用的集合元素是什么, 若 G 作用在 X 和 X' 上, 如 $|X| = |X'|$ 且可逆映射 $\varphi : X \longrightarrow X'$ 与群作用可交换
   $$\varphi \circ g = g \circ \varphi$$
   则称两个作用等价.
4. 特当 X 是线性空间时 $S_X = GL(n, k)$. 此时同态 σ 是群的线性表示 $\sigma : G \longrightarrow GL(n, k)$

x 的轨道: $O_x = \{gx \mid g \in G\} \subset X$

1. O_x 是群作用下 X 的等价划分 $X = \bigsqcup_x O_x$

2. 若 $O_x = \{x\}$, 即对 $\forall g \in G$ 都有 $gx = x$, 称 x 为不动元.
3. 若 $X = O_x$ 只有一个等价类, 则 X 称为 G 的**齐性空间**, 也称群 G 在 X 上的作用是传递的.

x 的迷向子群: $S_x = \{g \mid g \circ x = x\} < G$, 也称 x 的稳定子群.

Theorem 26

对于有限群, 轨道大小 $|O_x| = |G/S_x|$.

Proof. G 对 x 的作用可以用 S_x 做等价划分, gS_x 内所有元素都把 x 送到同一个点, 因此在 G 作用下点数为 $|G/S_x|$. □

此结论在 *Lie* 群作用时很有用, 例如: $X = \mathbb{R}^n$, $G = SO(n)$, $x = (1, 0, \cdots, 0)$

$$\begin{cases} O_x = \{y \mid |y| = 1\} = S^{n-1} \\ S_x = \{\text{diag}(1, B) \mid B \in SO(n-1)\} \end{cases}$$

可得 $S^{n-1} \cong SO(n)/SO(n-1)$

Theorem 27: Burnside 定理

有限群 G 作用在有限集 X 上的轨道数 $n = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|F_g|$, 其中 $F_g = \{x \mid g(x) = x\}$ 是 g 的不动点集, i. e. σ_g 作用上去 trivial 的点的集合.

4.1 Sylow 定理...

Motivation: 是否 $|G|$ 的任意因子 $n \mid |G|$, 都有子群 $|H| = n$? 答案是否定的, 这里利用 Sylow p 子群和群作用解决这个问题.

p 群: $G = p^k$

关于 p 群有下面几个重要性质:

1. p 群作用在有限集 X 上, 若 $|X| = n$ 与 p 互素, 则 X 中一定有不动点.
2.
3.

$|O_{x_1}|, \cdots, |O_{x_m}|$ 均为 p^k 的因子 $p^l (l \geq 1)$ 或 1

$$n = |X| = \sum_{i=1}^{m} |O_{x_i}| = \sum_{i=1}^{m} p^{l_i}$$

由 $(n, p) = 1$ 可知 X 有 $|O_{x_i}| = 1 \Rightarrow$ 不动元 x_i

Theorem 28: Sylow I

素数 p 有 $p^k \mid n$, 则 G 有 p^k 阶子群.

5 幺半群与自由群

5.1 幺半群

半群 (Semigroup): 结合律 $\Rightarrow$ **幺半群 (Monoid):** 单位元 + 结合律

1. 子幺半群和幺半群同态的定义与群一致.
2. Cayley Theorem 一样适用, 其中变换幺半群是指 $M(X) = \{\sigma \mid \sigma : X \longrightarrow X\}$(所有映射, 不要求可逆)

† 商结构

总的来说, 商集是通过等价关系进行划分, 商结构是使得等价划分与代数运算相容的特殊等价关系, 称为**同余关系**. 同余关系将原结构划分为等价类（如陪集），并在这些类上自然诱导出与原结构一致的运算，从而形成商结构。群中的正规子群, 环中的理想本质上都是同余关系, 并且正好也是子结构.

而对于半群, 缺少可逆性导致没有正规子群的概念, 可以从同余关系构造商群. 幺半群上等价关系 $\sim$ 的商集为 $M/\sim$, 为了使商集元素之间也有乘法, 自然想到令

$$\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$$

这便是半群上的**同余关系:** 满足 $a \sim b$, $c \sim d$ 时 $ac \sim bd$ 的等价关系 $\sim$.

可以验证任一幺半群同态 $\varphi : S \longrightarrow S'$ 会给出一同余关系

$$a \sim b \iff \varphi(a) = \varphi(b)$$

利用同余关系可得商幺半群$S/\sim = \{\bar{a} \mid \bar{a} \in S\}$ 和自然同态 $\pi : S \longrightarrow S/\sim$, 其中 $\pi(e) = \bar{e}$.

5.2 自由群

群范畴作为结构范畴可以从集合范畴经自由函子生成, 下面讨论集合如何" 自由的" 生成群.

自由幺半群: $i : X \longrightarrow F(X) = \{x_1x_2 \cdots x_n \mid x_i \in X n \in \mathbb{N}\}$, 其中乘法和单位元分别为

$$(x_1 \cdots x_n)(y_1 \cdots y_m) = x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m \quad e = \phi$$

约化 (reduction): $\cdots a_{n-1}\underline{a_n a_n^{-1}}a_{n+1} \cdots = \cdots a_{n-1}a_{n+1} \cdots$, 使群元的表示是唯一的.

规定逆元的形式：取与 X 同构的不交集合 $X' = \{x'\}$, 规定生成元的逆为 $x_i^{-1} = x_i'$.

自由群: $X^* = X\coprod X'$ 生成的自由幺半群约化后构成群 F_X, 其中

$$e = \phi, x^{-1} = (a_1a_2\cdots a_n)^{-1} = a_n^{-1}\cdots a_1^{-1}$$

自由群作为自由对象, 具有泛性质: 任意集合 X 到集合 $U(G) = G$ 的映射 f, 可以唯一的确定 F_X 到 G 的群同态 $\bar{f}$, 使得 $f(x) = \bar{f}(x)$.

Theorem 29

任意群 G 都存在自由群 F_X 与之同态, 且有自由群的商群 $F_X/\ker(\bar{f})$ 与之同构.

Proof. 这是因为任给集合 X 到 G 的 map 都唯一确定群同态 $\bar{f}: F_X = F(X) \longrightarrow G$, 更进一步考虑取集合 $X = G$, $f = Id_X$, 可知 $\bar{f}$ 是满同态, 由同态基本定理可得 $G \cong F_X/\ker(\bar{f})$ □

† 群关系

如果取 X 为 G 的生成元集合, 也就是说 $G = \langle X\rangle$, 则 $\ker(\bar{f})$ 给出生成元 $(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ 之间满足的等式

$$\bar{f}(w) = x_1x_2\cdots x_n = e$$

$R = \{w_1 = e, w_2 = e, \cdots\}$ 为生成元 $(x_1, x_2, x_3, \cdots)$ 之间的**关系/表现** (Presentation), 重新把群 G 记为 $G = \langle S \mid R\rangle$.

例如：二面体群 D_n 由翻转操作 a 和旋转 $2\pi/n$ 操作 b 生成, 且满足 $a^2 = e$, $b^n = e$, $(ab)^2 = e$, 因此二面体群可以表示为

$$D_n = \langle a, b \mid a^2, b^n, (ab)^2\rangle$$

6 群实例

† 有限阶对称群

当 $|X| = n$ 时, $S_n = S_X$ 称为 n 次**对称群**, 其元素称为 n 元**置换**, 有如下性质:

1. 有限集的可逆映射最多有 $n!$ 种, 故 $|S_n| = n!$。
2. 一个特殊的可逆映射：m 轮换, 设 $\alpha_{i_1} \to \alpha_{i_2} \to \cdots \to \alpha_{i_m}$, 记为 $\sigma(\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_m})$。不相交轮换可在 X 上独立作用, 所以可对易。当 $m = 2$ 时, 记为对换 (α_1, α_2)。例如 $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, 2)(2, 3)$, 可见 m 轮换可分解成 $m-1$ 个相交"对换"。
3. 有限集可逆映射 (置换) 可唯一分解为轮换的乘积。在排序后总是分成不相交的段, 也就是轮换, 分解在对易的意义下是唯一的, 自然也可更进一步分解为相交对换。
4. 分解为对换的个数和奇偶性守恒。奇/偶置换各占一半, 偶置换集合 A_n 是 S_n 的子群 (因为偶 Œ 偶 偶), A_n 也称为 n 次交错群, $|A_n| = n!/2$。
5. S_n 是有限生成的, $S = \{(1, 2), (1, 3), \cdots, (1, n)\}$, $S_n = \langle S\rangle$。由于 $(i, j) = (1, i)(1, j)(1, i)$, 可见 S 是一个生成集。

† 循环群

† 自同构群

群范畴本身是个加性范畴, 群同态的集合上也有代数运算. 实际上, 群 G 的自同构在乘法 $\varphi\circ\phi(x)=\varphi(\phi(x))$ 下构成群, 称为**自同构群**$Aut(G)$.

1. 显然 $Aut(G)<S_G$, 即 $Aut(G)$ 是 G 上变换群。
2. **内自同构群**$Inn(G)$:
   一个特殊的自同构——共轭, $\sigma_a(x)=axa^{-1}$, $Inn(G)=\{\sigma_a\mid a\in G\}$ 是 $Aut(G)$ 的正规子群。
   对于 $T\in Aut(G),\sigma_a\in Inn(G)$, 有 $T\sigma_aT^{-1}(x)=T\sigma_a(T^{-1}(x))=T(a)T(T^{-1}(x))T(a^{-1})=T(a)xT(a^{-1})=\sigma_{T(a)}\in Inn(G)$。定义 $f:G\to Aut(G)$, $f(a)=\sigma_a$ 是一个同态, 且 $\ker(f)=C(G)$(G 的中心)。因为 $\sigma_a(x)=I(x)=x=axa^{-1}$ 意味着 $a\in C(G)$, 所以 $G/C(G)\cong In(G)$, 可表示为 $G\xrightarrow{f}In(G)\lhd Aut(G)$ 且 $G/C(G)\cong Inn(G)$。
3. 外自同构:
   商群 $Aut(G)/Inn(G)$ 称为“外自同构群”。

Theorem 30

当 $C(G)=\{e\}$ 时, $G\cong Inn(G)\lhd Aut(G)$, 此时有 $C(Aut(G))=\{Id_G\}$。

Remark: 某些情况下可以确定 $Aut(G)$ 的中心。若 $T\in C(Aut(G))$, 则 $T\sigma_a=\sigma_aT$ 对 $\forall a\in G$ 均成立, 即 $T\sigma_aT^{-1}=\sigma_{T(a)}=\sigma_a$, 故 $T(a)=a,\forall a\in G$, 所以 $T=I$, 即 $C(Aut(G))=\{Id_G\}$。

1. 若 $|\langle a\rangle|=\infty$, a 是生成元。若 $\sigma(a)=a$, 则 $\sigma=I$; 若 $\sigma(a)=a^{-1}$, 则 $\sigma^2=I$, 所以 $Aut(\langle a\rangle)=\{I,\sigma\}\cong\mathbb{Z}_2$。
2. 若 $|\langle a\rangle|=n$

第 3 章　环

1　环的范畴

1.1　环的相关概念

Def 25: Ring

$(R,+)$ 是 Abel 群, $(R,\cdot)$ 是半群 (可结合), 且乘法兼容加法, 即分配律

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$$

1. 环范畴为赋予了两个代数运算的结构范畴, 其中零元、负元是对加法而言; 单位元是对乘法而言, 一般默认乘法是幺半群, 乘法的所有可逆元记为环 R 的**单位群** $U(R)$.
2. $0a=a0=0$
3. $0\neq 1$ 且不可逆
4. **零因子**: $a,b\neq 0$ 但 $ab=0$, 则 a,b 为左 (右) 零因子. 无零因子时, 乘法可消去。

根据乘法的附件条件, 环可以分为不同的类型:

- **整环**: 无零因子, 交换, 幺元
  例如: 高斯环 $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi\mid a,b\in\mathbb{Z}\}$, 只有 4 个可逆元 $\{1,-1,i,-i\}$。
- **域**: $(R/\{0\},\cdot)$ 是 Abel 群
  例如: 有限域 $\mathbb{Z}_p=\{0,1,\cdots,p-1\}$
- **体** (domain): $(R/\{0\},\cdot)$ 是群
  例如: 四元数体 $H=\{a+bi+cj+dk\mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$, H 同构于 $\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}\mid \alpha,\beta\in\mathbb{C}\right\}$, 可以验证非零元素均可逆

$$\det\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha}\end{pmatrix}=|\alpha|^2+|\beta|^2>0$$

其他一些特别的环:

1. **群环 (Group ring)**

$$k[G]=\left\{\sum_{i=1}^{n}k_ig_i\mid n\in\mathbb{N}\right\}$$

加法: $\sum\limits_{i=1}^{n}k_ig_i+\sum\limits_{j=1}^{m}k_j'g_j'=\sum\limits_{l=1}^{s}(k_l+k_l')g_l$($n$ 取大些使 k_i/k_i' 中有不少 0)。

乘法: $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}k_ig_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{m}k_jg_j\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}k_ik_jg_ig_j$。一般取 k 是交换环, 以便 $kg=gk$。

2. 群自同态环：Abel 群 M 上的全部自同态构成环 End$M$

$$(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x),\ (\varphi\cdot\psi)(x)=\varphi(\psi(x))$$

对无限循环群 $M=\langle a\rangle, \sigma\in EndM$ 只需考虑 $\sigma(a)=na\triangleq\sigma_n(a), \sigma_{n+m}(a)=(n+m)a=(\sigma_n+\sigma_m)(a), \sigma_{kn}(a)=k\sigma_n(a)$, 故 $EndM$ 环同构于 $\mathbb{Z}$。对有限循环群, $EndM_n\cong\mathbb{Z}_n$。

† 子环

若 $S\subseteq R$ 也构成环, 则称 S 是 R 的子环。

1. 判据：加法成群, 乘法封闭
$$a-b, a\cdot b\in S$$
2. 0 作为 $(R,+)$ 的 identity 会被子环继承, 但 $(R,\cdot)$ 的幺元 1 不一定被子环继承, 此时乘法构成半群。
3. 子环 S_1,S_2 的交 $S_1\cap S_2$ 是子环, 但 $S_1+S_2=\{r_1+r_2\mid r_i\in S_i\}$ 不一定是子环, 因为乘法不一定封闭, $(r_1+r_2)(s_1+s_2)=r_1s_1+r_2s_2+r_1s_2+r_2s_1$ 的后两项不一定在 S_1+S_2 中。

1.2 环同态

环同态保持两个代数运算, 假设幺环上环同态均有 $\sigma(1)=1'$。

1. 环同态首先是加法群同态, 故 $\sigma(0)=0', \sigma(-a)=-\sigma(a)$。
2. $\mathrm{Im}\,\sigma=\sigma(R)$ 是 R' 的子环。
3. 环同态的核 $\underline{\ker(\sigma)=\{a\in R\mid\sigma(a)=0\}}$ 是 R 的子环.

† 理想与商环

注意子环 $\ker(\sigma)$ 的特殊性, $a\in\ker(\sigma)$ 对任意 $r\in R$ 都有 $\sigma(ra)=\sigma(r)\sigma(a)=\sigma(r)0=0=\sigma(ar)\Rightarrow ra,ar\in\ker(\sigma)$. 具有这种特殊性质的子环称为理想, 理想一定是某个同态的核.

Def 26: (双边) 理想

子环 $I<R$ 满足 $\forall s\in I, r\in R$, 有 $rs,sr\in I$, 记为 $I\lhd R$

1. $aI\subset I,\ \forall\ a\in R$
2. 理想对乘法的吸收性使得 $I+S$ 是子环.
$$(r_1+s_1)\cdot(r_2+s_2)=(r_1r_2+r_1s_2+r_2s_1)+s_1s_2\in I+S$$
3. $I_1\cap I_2$, I_1+I_2 都还是理想.

4. S **生成的理想**是含 S 的最小理想

$$(S) = \bigcap_{S \subset I_\alpha \lhd R} I_\alpha$$

特别的, 一个生成元的理想称为主理想, 有显式的表达

$$(a) = \{na + xa + ay + xay \mid n \in \mathbb{Z}, x, y \in R\}$$

重要主理想: $(1) = R$. 有限生成理想 可以表达为主理想的和

$$(a_1, \cdots, a_n) = (a_1) + \cdots + (a_n)$$

这是因为 $(a_1)+\cdots+(a_n)$ 是理想且包含 $\{a_1, \cdots, a_n\}$, 因此 $(a_1, \cdots, a_n) \subset (a_1)+\cdots+(a_n)$. 另外 $(a_1, \cdots, a_n)$ 是包含 a_i 的理想, 因此 $(a_i) \subset (a_1, \cdots, a_n)$

环的**商集** $R/S = \{\bar{r} = r + S\}$, 由于环中加法的交换性, 在加法 $\bar{r} + \bar{s} = (r+s) + S$ 下 R/S 构成商群. 但是对于乘法 $\bar{r} \cdot \bar{s} = rs + rS + Ss + S$, 不一定满足封闭性, 也就是 $rs + rS + sS + S \notin R/S$.

但是对于双边理想 I, 商集 $R/I = \{\bar{r} = r + I\}$ 的乘法封闭, 构成**商环**R/I

$$(r_1 + I)(r_2 + I) = r_1 r_2 + r_1 I + I r_2 + I = r_1 r_2 + I$$

类似的有环同态基本定理

Theorem 31

有如下环同构 $R/\ker(\sigma) \cong \mathrm{Im}(\sigma)$

† 反同构

反同构: $\sigma(ab) = \sigma(b)\sigma(a)$

环同构的 motivation 来自结合代数, 类似于矩阵转置, 有如下一些 facts:

1. 对交换环, 反同构也是同构。
2. R 上的自同构和反自同构的集合构成群 G
   $\sigma \circ \sigma'(ab) = \sigma(\sigma'(ab)) = \sigma(\sigma'(b) \cdot \sigma'(a)) \in \alpha - Aut(R)$; $\sigma' \circ \varphi'(ab) = \sigma'(\varphi'(a) \cdot \varphi'(b)) \in Aut(R)$。可见 $Aut(R)$ 是 G 的子群, 但反自同构不成子群。

2 环的直和

- 外直和: $R = R_1 \times R_2 = \{(r_1, r_2)\}$, 其中 $(r_1, r_2)(r_1', r_2') = (r_1 r_1', r_2 r_2')$。
- 内直和: $R = S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2\}$, 其中 $S_1 \cap S_2 = \{0\}$ 乘法为 $(s_1 + s_2)(s_1' + s_2') = s_1 s_1' + s_2 s_2'$

† 理想的积

环的直和结论与群的直和平行, 但是环有两个代数运算, 子环之间还可以有乘法运算, 下面讨论直和与理想的积之间的关系.

理想 I_1 和 I_2 的积: $I_1I_2 = \left\{\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \mid a_i \in I_1, b_i \in I_2, n \in \mathbb{N}\right\} \subset I_1, I_2$

1. 理想的积还是 R 的理想

$$a_1a_2 - b_1b_2 \in I_1I_2,\ (a_1a_2)r = a_1(a_2r) \in I_1I_2$$

2. 理想的积与和运算相容

$$I_1(I_2 + I_3) = I_1I_2 + I_1I_3$$

互素: 如果 $I_1 + I_2 = R$, 则 I_1, I_2 互素。互素的理想有两个重要性质:

1. 对交换环, $I_1 + I_2 = R$, 则必有 $I_1I_2 = I_1 \cap I_2$

   Proof. 由吸收性 $I_1I_2 \subseteq I_1,\ I_2, \Rightarrow I_1 \cdot I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$; 对 $c \in I_1 \cap I_2$, 由互素知 $1 = r_1 + r_2$, $c = cr_1 + cr_2 = r_1c + cr_2, \Rightarrow r_1c,\ cr_2 \in I_1 \cdot I_2$, 可见 $I_1 \cap I_2 \subseteq I_1 \cdot I_2$。 □

2. $I_1 + I_3 = R,\ I_2 + I_3 = R$ 可以推出 $I_1I_2 + I_3 = R$

   Proof. $1 = r_1 + r_3 = r_2 + r_3',\ c = c(r_1 + r_3)(r_2 + r_3') = cr_1r_2 + c(r_1r_3' + r_3r_2 + r_3r_3')$, $\Rightarrow I_1I_2 + I_3 = R$。 □

Theorem 32

若 $I_1 + I_2 = R$, 则 $R/(I_1 \cap I_2) \cong R/I_1 \times R/I_2$

Proof. 商环的自然同态为 $\sigma_i : R \to R/I_i$, 取

$$\begin{aligned} \sigma : &R \to R/I_1 \times R/I_2 \\ &r \longmapsto (\sigma_1(r), \sigma_2(r)) \end{aligned}$$

利用 $I_1 + I_2 = R$ 可以证明 σ 是环同态, $\ker(\sigma) = \sigma^{-1}(0,0) = I_1 \cap I_2$, 由环同态基本定理立马有 $R/(I_1 \cap I_2) \cong R/I_1 \times R/I_2$ □

当 $I_1 + I_2 = R,\ I_1 \cap I_2 = \{0\}$ 时, 内直和 $R = I_1 + I_2 = R/(I_1 \cap I_2)$ 同构与 $R/I_1 \times R/I_2$, 后者是外直和。

3 素理想和极大理想

在**交换幺环**中, 引入两个特殊的理想

- **素理想 P:** $ab \in P$ 时必有 $a \in P$ 或 $b \in P$
- **极大理想 M:** 不存在 $I \lhd R$ 使 $M \lhd I \lhd R$。

对于素理想和极大理想, 他们的商环非常特别:

1. 整环 $\iff$ $\{0\}$ 是素理想

   Proof. 对整环 $ab = 0$ 必有 $a = 0$ 或 $b = 0$, by definition $\{0\}$ 是素理想；反之 $\{0\}$ 是素理想也知 R 无零因子, 是整环。 □

2. 域 $\iff$ $\{0\}$ 是极大理想

   Proof. 任一非 0 理想, $r \in I \Rightarrow r^{-1}r = 1 \in I \Rightarrow I = R$, 故 R 只有 trivial 的理想, 因此 $\{0\}$ 是极大理想；反之, $\{0\}$ 是极大理想则 $\forall a \neq 0$, 主理想 $(a) = \{xa \mid x \in R\} \supset \{0\} \Rightarrow (a) = R$, 故 $1 \in (a)$, 即存在 $b \in R$ 使 $ba = 1$, 也就是任意非零元都是可逆的。 □

3. I 是极大/素理想 $\iff$ R/I 是域/整环。

   Proof. 由环同态基本定理知道 R 中理想 $I \supset \ker(\sigma)$ 和 $R/\ker(\sigma)$ 中理想 $\pi(I)$ 是一一对应的, I 是极大/素理想则立马知道 $\pi(I) = \{\bar{0}\}$ 是 $R/\ker(\sigma)$ 中的极大/素理想, 因此 R/I 是域/整环. □

Theorem 33

I 是极大理想, 则 R/I 是域, 域是整环, 故 I 是素理想.

† 诣零根...

诣零根: $r(R)$ 是 R 的全部素理想的交集, 还是 R 的理想.

$$r(R) = \{a \mid \exists\ m \text{ 使} a^m = 0\}$$

$r(R)$ 是 R 的所有幂零元

4 局部化

4.1 整环的分式域

Motivation: 域相比于环更好处理, 整环无零因子性质可以进一步变为可逆性, 或者说把整环 R 嵌入 (同构意义下) 到某个域 F 中.

- **存在性:**

  令 $T = R\times R\backslash\{0\}$, 取等价关系 $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$, 则 $F = T/\sim = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in R, b \in R \setminus \{0\}\right\}$ 构成一个域, 其中关于加法和乘法运算:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}, -(\frac{a}{b}) = \frac{-a}{b}, 0 = \frac{0}{b}$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, (\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}, 1 = \frac{a}{a}$$
$$\frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \cdot \frac{cf+ed}{df} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$$

  $R \cong R' = \left\{\frac{r}{1} \mid r \in R\right\}$ 是 F 的子环。

- **唯一性:**
  F 是最小的域 $\iff$ F 可嵌入到任一包含 R 的域中
  Proof. 若 R 通过单同态 $\xi: R \to F'$ 嵌入到域 F', 可以得到 F 到 F' 的单同态 $\psi: F \to F'$

$$\psi(\frac{r_1}{r_2}) = \xi(r_1)\xi(r_2)^{-1}$$

  且 ψ 是单同态

$$\ker(\psi) = \left\{\frac{r_1}{r_2} \mid \frac{\xi(r_1)}{\xi(r_2)} = 0\right\} = \left\{\frac{r_1}{r_2} \mid \xi(r_1) = 0\right\} = \{0\}$$

  若取 F' 为 R 的另一个商域, 则 ψ 还是一个满同态, 也就是商域在同构意义下唯一.

$$\frac{r_1'}{r_2'} = \frac{\xi(r_1)}{\xi(r_2)} = \psi(\frac{r_1}{r_2})$$

□

4.2 分式环

分式域把所有非零元素 $R^* = R - \{0\}$ 变为可逆元素, 一般的交换环可能有零因子, 不能嵌入域中, 只能把 R 的部分元素变为可逆的。引入两个概念

1. **乘性子集:** S 对于乘法封闭, 对于乘法是子幺半群, 即 $\forall s_1, s_2 \in S$, 有 $s_1 \cdot s_2 \in S$
2. **S 的零化子:** $N = \{a \mid a \in R, s \in S \text{ 使得} as = 0\}$ 是 S 的所有零因子
   由 $(a_1 - a_2)s_1s_2 = (a_1s_1)s_2 - s_1(a_2s_2) = 0 \Rightarrow a_1 - a_2 \in N$ 和 $x \in R, xas = 0 \Rightarrow xa \in N$ 可知零化子 N 构成 R 的一个理想.

可以想到在扩环 R' 中商掉 N 后 S 在 R'/N 中将没有零因子, 也就是变为可逆元, 因此定义 R 关于 S 的分式环

Def 27: 关于 S 的分式环

交换幺环 $S^{-1}R$ 使得环 R 可以**嵌入**到 $S^{-1}R$ 中, 且 S 中的元素嵌入后为可逆的.

$$S^{-1}R \cong \left\{\frac{a}{s} \mid a \in R, s \in S\right\}$$

Proof. $0 \in S$ 时 $N = R$, 故一般取 S 不包含 0。

1. **存在性**:
   在 $R \times S$ 中定义同余关系 $\frac{a}{s} \sim \frac{a'}{s'} \Leftrightarrow as' - a's \in N$, 则 $S^{-1}R = (R \times S)/\sim = \left\{\frac{a}{s}\right\}$ 构成一个环, 其中加法和乘法类似于分式域的定义.
   R 通过如下单同态嵌入到 $S^{-1}R$ 中

$$\begin{aligned} \sigma : R &\longrightarrow S^{-1}R \\ r &\longmapsto \frac{rs}{s} \end{aligned}$$

$R \cong \sigma(R) < S^{-1}R$ 视为 $S^{-1}R$ 的子环。同态核 $\ker(\sigma) = \{r \in R \mid \frac{rs}{s} = 0' = \frac{0}{s}\} = \{r \in R \mid rs = 0\} = N$.

可以验证嵌入后 S 中元素的可逆性:

$$\frac{s's}{s} \cdot \frac{s}{s's} = \frac{s's}{s} \cdot \frac{s}{s''} = 1$$

2. **唯一性**:

□

分式环的局部化体现在 xxx, 一个重要的例子是:

$S = \mathbb{Z} - (p)$

5 多项式环

为了方便, 取交换幺环.

取 $\overline{R}$ 的子环 R 和元素 $u \in \overline{R}$, 则 **u 在 R 上生成的子环:**

$$R[u] = \{a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n \mid a_i \in R, n \in \mathbb{N}\}$$

1. 作为积 $R[u] = R(u)$, $R[u]$ 是同时含 u 和 R 的最小子环。
2. **u 是 R 上代数元:** 如果有不全为 0 的 $a_0, \cdots, a_n$ 使 $a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n = 0$。
3. **x 是 R 上的超越元/不定元:** $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0 \iff a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$
   此时 $R[x]$ 称 R 上的**一元多项式环**, 一元多项式环中两个多项式只能按系数相比较, 否则 x 是代数元, $f(x)$ 会被 reduce. 可见 $R[x]$ 中元素本质由系数 $\{a_i\}$ 确定.

Theorem 34

R 上一元多项式环 $R[x]$ 存在且唯一。

Proof.

- **存在性**

  构造超越元即可证明存在性, 定义 R 上形式幂级数环:

  $$R[[x]] = \{(a_0, a_1, ..., a_n, \cdots) \mid a_i \in R\}$$

  其中 $(a_n)(b_n) = (\sum_{i+j=n} a_i b_j)$。

  在同构意义下 R 是 $R[[x]]$ 的子环 $R_0 = \{(a, 0, \cdots) \mid a \in R\} \cong R$, 且 $R[[x]]$ 中元素 $x = (0, 1, 0, 0, \cdots)$ 是 R 上的不定元, 由于

  $$x^n = (\underbrace{0, \cdots, 0}_{n-1}, 1, 0, \cdots)$$

  $R[[x]]$ 中任意形式幂级数可以唯一的表示为 $(a_0, a_1, ..., a_n, \cdots) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, 因此 $R[x] = R[[x]]$ 是一元多项式环。

- **唯一性**
  任意 $u \in \overline{R}$, 自然的有环同态 (满射)

$$\begin{aligned}\sigma : & R[x] \longrightarrow R[u] \\ & a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n \mapsto a_0 + a_1 u^1 + \cdots + a_n u^n\end{aligned}$$

  由同态基本定理知道 $R[u] \cong R[x]/I$.
  若有其他一元多项式环 $R[y]$, 则 $I = \ker\sigma = \{f(x) \mid \sigma(f(x)) = f(y) = 0\}$, 由于 x 是不定元, 可知 $I = 0 \Rightarrow R[x] \cong R[y]$。

可以看到这里同态核 $I = \ker(\sigma) = \{f(u) = 0\}$ 即包含了 R 上所有的代数元和代数关系. □

† n 元多项式环

从一元多项式环定义 **n 元多项式环**:

$$R[x_1, \cdots, x_n] = R[x_1, \cdots, x_{n-1}][x_n] = \{f(x_1, \cdots, x_n) = \sum a_{i_1 \cdots i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \mid a_{i_1 \cdots i_n} \in R\}$$

从 n 元多项式环定义<u>R 上</u> 的**有限生成环**:

$$R[u_1, \cdots, u_n] = \{f(u_1, \cdots, u_n) \mid f(x_1, \cdots, x_n) \in R[x_1, \cdots, x_n]\}$$

环同态 $\sigma : R[x_1, \cdots, x_n] \longrightarrow R[u_1, \cdots, u_n]$ 的核反映 R 上所有 n 元代数关系 $f(u_1, \cdots, u_n) = 0$

$$I = \{f(x_1, \cdots, x_n) \mid f(u_1, \cdots, u_n) = 0\}$$

如果 $I = (0)$, 也就是说 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是 n 元多项式环中的 0, 立马得到 $f(u_1, \cdots, u_n) = 0 \iff$ 所有系数$a_i = 0$, 此时称 $u_1, \cdots, u_n$ 为 R 上**代数无关**的.(注意不是线性无关, 这里是通过多项式.)

5.1 整环上的 $R[x]$

整环 R 无零因子使得多项式有特殊性质, 引入多项式次数的概念

多项式的次数: $\deg(f(x)) = \deg(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0) = n$

规定 $\deg(0) = -\infty$, 有 $\deg(f(x)g(x)) = \deg(a_n b_m x^{n+m} + \cdots + a_0 b_0) \leq \deg(f(x)) + \deg(g(x))$.
可以看到, 当 R 是整环时, 一元多项式环 $R[x]$ 中首项系数 $a_n b_m \neq 0; a_n, b_m \neq 0$, 这时有

$$\deg(f(x)g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$$

Theorem 35: 整环上的多项式环

整环 R 上的多项式环 $R[x]$ 是整环, 且单位群相等.

Proof. 对于 $f, g \neq 0$, 因为无零因子所以 $\deg(fg) \neq -\infty$. 对于 $R[x]$ 中的可逆元 $fg = 1$, 根据 $\deg(fg) = \deg(1) = 0 \Rightarrow \deg(f) = \deg(g) = 0$, 也就是说可逆元 $f, g \in R$. □

Theorem 36

整环上 $f(x) \in R[x]$, $\deg f(x) = n$ 在 R 内最多有 n 个根。

$f(x)$ 可以看成 R 的分式域 F 上的多项式, 自然最多有 n 个根。**fact** 对整环 R, $R^* = R \setminus \{0\}$ 的有限子群都是循环群。

5.2 域上的 $F[x]$

Fact 1 $F[x]$ 是 PID(主理想整环)。

设 $N \lhd F[x]$ 中次数最低的 $f(x) \neq 0$, 显然 $(f(x)) \subset N$。$\forall g(x) \in N$ 有 $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$, 要求 $\deg(r(x)) < \deg(f(x))$, 但 $r(x) = g(x) - q(x)f(x) \in N$, 由于 $f(x)$ 次数最低, 故 $r(x) = 0$, $\Rightarrow g(x) = q(x)f(x) \in (f(x)) \Rightarrow N \subset (f(x))$, 即 N 是主理想 $(f(x))$。

Fact: $f(x)$ 不唯一, 一般取首 1 的 $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}$。

域 F 上的代数元 u, $F[u] \cong F[x]/N$, 由于 $F[x]$ 是 PID, 可唯一确定首 1 的极小多项式 $f(x) = 0$, $N = (f(x))$。

Theorem 37

$(f(x))$ 是 $F[x]$ 的极大理想。

若 $(f(x)) \subset N = (g(x)) \subset F[x]$, $g(x) \mid f(x)$ 且 $f(x)$ 是极小多项式, $\Rightarrow g(x) \sim f(x)$ 或 $g(x) \sim 1$, $\Rightarrow N = (f(x))$ 或 $N = F[x]$, 故 $(f(x))$ 是极大理想。因此可得整环 $F[x]$ 商 $F[x]/(f(x)) \cong F[u]$ 是域。

6 环上的因式分解/整除

6.1 整环上的整除概念

- b 整除 a: $a = bx \Leftrightarrow b \mid a$, 此时 b 是 a 的因子, a 是 b 的倍数。1 的因子构成群 $U = \{b \mid \exists x \in R \text{ 使} bx = xb = 1\}$, 即 R 上的所有可逆元。
- 相伴：R 上等价关系 $a \sim b \Leftrightarrow a \mid b$ 且 $b \mid a$, 等价类 $\bar{a} = Ua$。
- 不可约元：若 $b \mid a$ 时, $b \sim a$ 或 $b \sim 1$, 称 a 不可约, 即 a 的因子只有单位元和它自己所在的等价类。
- 素元：若 $a \mid bc \Rightarrow a \mid b$ 或 $a \mid c$, 称 a 为素元。

† 理想升链和因子降链

- 理想升链 $\{N_i\}$: 理想 $N_i \lhd R$, $N_1 \subset N_2 \subset N_3 \subset \cdots$
- 理想升链条件：每个理想升链都有限, 即 $N_m = N_{m+1} = \cdots$。
- 因子降链 $\{a_i\}$: 整环中元素 $a_{i+1} \mid a_i$。

- 因子链条件：每个因子降链有限，即 $a_m \sim a_{m+1} \sim \cdots$。

在一般整环上，有如下 facts：

1. $a \mid b \Leftrightarrow (b) \subset (a)$。推导过程：$a \mid b \Rightarrow b = ac \in (a) \Rightarrow (b) \subset (a)$；$(b) \subset (a) \Rightarrow b \in (a)$，即 $\exists c$ 使 $ac = b \Rightarrow a \mid b$。
2. 素元 $\Rightarrow$ 不可约元。证明：若素元 a 可约，则 $a = bc \Rightarrow a \mid bc$，由于 a 是素元，所以 $a \mid b$ 或 $a \mid c$，进而 $a \sim b$ 或 $a \sim c$，这表明 a 不可约。
3. a 是素元 $\Leftrightarrow (a)$ 是非零素理想。关系链：极大理想 $\subset$ 素理想 $=$ 素元 $\subset$ 不可约元。

6.2 主理想整环

Def 28: PID

所有理想都是主理想 (a) 的整环称为主理想整环。

在 PID 上：

1. a 是不可约元 $\Rightarrow (a)$ 是极大理想。证明：在 PID 上 $N = (b)$，由于 a 不可约，若 $(a) \subset (b)$ 则 $b \mid a$，进而 $b \sim a$ 或 $b \sim 1$，所以 $(b) = (a)$ 或 $(b) = R$，即 (a) 是极大的。
2. 不可约元 $=$ 素元。
3. 非零素理想是极大理想。结论：在 PID 上，素元 $=$ 不可约元 $=$ 素理想 $=$ 极大理想。

Theorem 38

PID 上理想链条件和因子链条件成立。

在 PID 中 $N_i = (a_i)$，$N_i \supset N_{i+1}$ 等价于 $a_{i+1} \mid a_i$，故理想链条件等价于因子链条件。取 $N = \bigcup\limits_i (a_i)$，$N$ 也是理想 $\Rightarrow N = (a) = (a_{n+1}) = (a_{n+2}) = \cdots$。

6.3 Euclidean 整环

Def 29

存在函数 $d : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$，使任意 $a, b \in R$，$b \neq 0$，有 $q, r \in R$ 满足 $a = qb + r$，其中 $r = 0$ 或 $r \neq 0$ 但 $d(r) < d(b)$，则 R 称 Euclid 整环，即 Euclidean 整环上有带余整除。

1. Euclidean 环是 PID。证明：对于 Euclidean 环上的 non - trivial 理想 N，任取 b 使 $d(b)$ 在 N 上最小，则 N 中任一元素 a 可由带余除表示为 $a = qb + r$。若 $r = 0 \Rightarrow b \mid a \Rightarrow a \in (b) \Rightarrow N \subset (b)$，即 $N = (b)$ 是一个主理想。

6.4 唯一因子分解整环 (UFD)

Def 30

在相伴意义下整环 R 中的任一非零元可以唯一分解成有限个不可约元素的乘积, 即 $a = p_1p_2\cdots p_r$, 则 R 称 UFD 或 Gaussian 整环。

1. UFD$\Rightarrow$ 因子链条件。
2. 因子链条件 + 不可约元为素元 $\Rightarrow$UFD。由于以上条件在 PID 中成立, 故 $PID \subset UFD$。

6.5 标准分解

标准分解式为 $a = u\prod\limits_{i\in S} p_i^{r_i}$, 其中 S 是 R 中所有不可约元的等价类, $u \in$ 单位群 (e 的等价类)。

1. $a \mid b \Leftrightarrow r_i \leq s_i$。
2. 令 $e_i = \min(r_i, s_i)$, 则 $d = u\prod\limits_{i\in S} p_i^{e_i}$ 是 a 和 b 的最大公因子; 令 $m_i = \max(r_i, s_i)$, 则 $g = u\prod\limits_{i\in S} p_i^{m_i}$ 是 a 和 b 的最小公倍数。

Theorem 39

若 UFD 中不可约元 (p) 是主理想, 则此时 UFD 是 PID。

关系链: Euclidean $\subset$ PID $\subset$ UFD。

7 Hilbert 基定理

Def 31

满足理想升链条件的交换环称为 Noether 环。

第 4 章　模

1　R - 模范畴

1.1　R - 模

Def 32

幺环 R 作用在 Abelian 群 $(M,+)$ 上, 称 M 是 (左)$R-$ 模。

一般取交换幺环, 不再区分左模和右模。

1. 自然要求数乘 $R\times M\to M$ 兼容环 R 和群 M 的运算: $(r_1+r_2)x=r_1x+r_2x$, $(r_1r_2)x=r_1(r_2x)$, $r(x_1+x_2)=rx_1+rx_2$, $1x=x$。
2. 类似于群作用, R-模也对应一个环同态

$$\begin{aligned}\sigma: &R\to End_M\\ &a\to\sigma_a\end{aligned}$$

其中 End_M 是 Abelian 群自同态环, $\sigma_a:x\to ax$ 是群自同态, 且 $\sigma_a+\sigma_b=\sigma_{a+b}$, $\sigma_a\cdot\sigma_b=\sigma_{ab}$。

† 子结构

R 作用在子集 N 上也是 R-模, 判别依据:

- N 必是 M 的正规子群。
- R 作用在 N 上要封闭 (数乘封闭), 即 $rn\in N$。

† 由已知模构造新模的方法

1. R-子模 N_1,N_2 的交 $N_1\cap N_2$ 还是 $R-$ 子模, 因为 $N_i\lhd M$。
2. 子模的和 $N_1+N_2=\{a_1x_1+a_2x_2\mid x_i\in N_i,a_i\in R\}$ 也是子模。
3. 由集合生成: 生成元组 S, $M=\left\{\sum\limits_{x\in S,\ \text{有限和}} r_x\cdot x\mid r_x\in R\right\}$(群加, 数乘, 类似线性和)。当 S 是模 M 的子集时, S 生成 M 的子模 (S) 是含 S 的最小子模。
4. 商模: 任给 R-子模 N, $\overline{M}=M/N$ 是 Abel 群, 取数乘 $a\overline{g}=\overline{ag}$, 则 M/N 也构成 R-模。

1.2 R - 模同态

注意, R - 模范畴是 Abel 范畴, hom-set 上有代数运算, 也构成 R - 模 $R-$ 同态 $\sigma : M \to M'$ 满足 $\sigma(ax+y) = a\sigma(x) + \sigma(y)$, 其中 $a \in R$, $x, y \in M$。

Theorem 40: 同态分解定理

设 R 同态 $f : M \to M'$ 和 $g : M \to N$, 若 g 是满射且 $\ker(g) \subset \ker(f)$, 则存在唯一的 R 同态 $h : N \to M'$ 使 $f = gh$(将 f 推至 M)。g 满射保证 h 有定义, $\ker(g) \subset \ker(f)$ 保证 h 良定义, 即若 $m_1, m_2 \in M$ 使 $g(m_1) = n$, 则 $g(m_1 - m_2) = 0 \Rightarrow m_1 - m_2 \in \ker(g) \subset \ker(f) \Rightarrow f(m_1) = f(m_2) = h(n)$。

† R 同态基本定理

结果类似于群同态基本定理, 可由同态分解直接得到。给定 R 同态 $\sigma : M \to M'$, 可得 R 同态 $\varphi : M/\ker\sigma \to M'$, 更进一步, 有 R 同构 $\tilde{\varphi} : M/\ker\sigma \to \sigma(M)$。

† R 自同态模

类似于群自同态环, 所有 R 同态构成 R 模。$\mathrm{End}_R(M)$ 是 Abelian 群 (环), 定义数乘 $(r, \varphi) \to r\varphi : x \to r\varphi(x)$, 可见 $r\varphi \in \mathrm{End}_R(M)$, 所以 $\mathrm{End}_R(M)$ 是 R 模。

† R 同态观点看零化子

R 模 R 和 Rx 有 R 同态 $\gamma_x : R \to Rx$, $a \to ax$, $\mathrm{ann}(x)$ 对应于 γ_x 的 kernel。则由同态基本定理:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\gamma_x"] \arrow[d] & Rx \\ R/\mathrm{ann}(x) & \end{tikzcd}$$

由于 γ_x 是满射, 有 $R/\mathrm{ann}(x) \cong Rx$(循环模结构定理)。

† R/ann(M) 模

商环 $R/\mathrm{ann}(M)$ 作用在 Abelian 群 M 上, 取数乘 $(R/\mathrm{ann}(M)) \times M \to M$, $\bar{a} \cdot x = ax$。

1. 若 $a \in \mathrm{ann}(M)$, $\bar{a}x = 0 = \bar{0}x$。
2. 若 $a \notin \mathrm{ann}(M)$, $\bar{a}x = ax$。

故 M 也可看成 $R/\mathrm{ann}(M)$ 模。

1.3 正合 (exact)

复形 $M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2$ 满足 $\ker(g) = \mathrm{Im}(f)$ 称 f 和 g 在 M 上正合。

1. $f: M \to N$ 是同构等价于 $0 \to M \xrightarrow{f} N \to 0$ 是正合列。$\ker f = \mathrm{Im}0 = \{0\} \Leftrightarrow f$ 是单同态 (monic), $\mathrm{Im} f = \ker 0 = N \Leftrightarrow f$ 是满同态 (epic)。
2. 短正合列 $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$。$\ker f = \mathrm{Im}0 = \{0\} \Rightarrow f$ 是单同态 $\Rightarrow K \cong f(K) \lhd M$, $\mathrm{Im} g = \ker 0 = N \Rightarrow g$ 是满同态。而 $K = \mathrm{Im} f = \ker g \lhd M$, 由同态基本定理 $N \cong M/\ker g = M/\mathrm{Im} f \cong M/K \Rightarrow M = K \times N$, 称 N 通过 K 扩张成 M。
3. 正合列的同态 (链映射)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(i) 若 α 和 γ 是单同态, $\gamma g = g'\beta$, $\beta f = f'\alpha$。若 $m \in \ker(\beta)$ 即 $\beta(m) = 0$, 则 $\gamma g(m) = g'\beta(m) = 0$, 由 γ 是单同态 $\Rightarrow g(m) = 0 \Rightarrow m \in \ker g = \mathrm{Im} f \Rightarrow \exists x \in K$ 使 $f(x) = m$。对 x, $f'\alpha(x) = \beta f(x) = \beta(m) = 0$, 故 $\alpha(x) \in \ker(f') = \{0\}$, 由于 α 是单射 $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow m = f(0) = 0$。

2. 类似地, 若 α, γ 是满同态, 则 β 是满同态。设 $m' \in M'$, 因为 γ 满射, g' 满射, 对于 m', 有 $m' \xrightarrow{g'} g'(m') \xrightarrow{\gamma^{-1}} n \xrightarrow{g^{-1}} m$, $m \xrightarrow{\beta} \beta(m)$, 由交换性 $g'\beta(m) = \gamma g(m) = \gamma(n) = g'(m')$, 则 $g'(\beta(m) - m') = 0 \Rightarrow m' - \beta(m) \in \ker(g') = \mathrm{Im}(f')$, 所以 $\exists u' \in K'$ 使 $f'(u') = m' - \beta(m)$, 又因为 α 满射, $\exists u \in K$ 使得 $f'(\alpha(u)) = m' - \beta(m)$, 且 $\beta(f(u)) - \beta(m) = \beta(f(u) - m)$, 由交换性 $\beta f(u) = f'\alpha(u) = m' - \beta(m)$, 所以 $\beta(f(u) - m) = m'$, 这表明 β 是满射。当 α, β, γ 都是同构时, 称两短正合列同构。

† Snake lemma

给定两个短正合列:

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N'
\end{tikzcd}$$

两正合列的同态可以导出长正合列: $\ker\alpha \to \ker\beta \to \ker\gamma \xrightarrow{\delta} \mathrm{coker}\alpha \to \mathrm{coker}\beta \to \mathrm{coker}\gamma$, 其中 $f: M \to M'$ 的余核为 $\mathrm{coker} f = M'/\mathrm{Im} f$, 且 $\beta \circ f = f' \circ \alpha$, $\gamma \circ g = g' \circ \beta$。

2 模直和/直积

2.1 (外) 直和

与群类似, 由卡氏积构造新 $R-$ 模: $M_1 \oplus M_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in M_i\}$, 其中数乘 $r(x_1, x_2) = (rx_1, rx_2)$。

1. 外直和给出的典范嵌入和典范投影: $\iota_1 : M_1 \to M_1 \oplus M_2$, $x \to (x, 0)$; $\iota_2 : M_2 \to M_1 \oplus M_2$, $x \to (0, x)$; $\pi_1 : M_1 \oplus M_2 \to M_1$, $(x_1, x_2) \to x_1$; $\pi_2 : M_1 \oplus M_2 \to M_2$, $(x_1, x_2) \to x_2$。有

分裂短正合列：

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\iota_1} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\pi_2} M_2 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{\iota_2} M_1 \oplus M_2 \xrightarrow{\pi_1} M_1 \longrightarrow 0$$

即同构意义下 M_1 和 M_2 是 $M_1 \oplus M_2$ 的子模, $M_1 \oplus M_2$ 实际是 M_1 和 M_2 的扩张。

2. 内直和 (分解)：$M = M_1 + M_2$ 且 $M_1 \cap M_2 = 0$。在同构意义下 $M_1 + M_2 \cong M_1 \oplus M_2$, $i : M_1 + M_2 \to M_1 \oplus M_2$, $x_1 + x_2 \to (x_1, x_2)$。
3. 直和项：$M = M_1 + M_2$ 时 M_1 和 M_2 互为直和补。

tips 内、外直和是同构的;由 categories theory, 直和与直积是对偶 concepts, 直积给出 canonical projection, 直和给出 canonical embedding。

3 自由模

对于生成模 $M = (S) = \left\{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid n \in \mathbb{N}, r_i \in R, x_i \in S\right\}$(存在但不唯一)。若有生成元集 S 是 R 线性无关的, 则 S 称基, M 称自由模。例如：循环 R 模 Rx 的生成元 x 线性无关, 是一个自由模。

自由模的表示唯一。若 S 是基, 则 $\forall m \in M$, $m = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i = \sum_{j=1}^{m} \overline{r}_j \overline{x}_j$, 则 $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i - \sum_{j=1}^{m} \overline{r}_j \overline{x}_j = 0 \Rightarrow r_j = 0$ 或 $r_i = \overline{r}_j$ 。

Theorem 41

V 是自由模 $\Leftrightarrow V$ 是循环子模的内直和 $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$, 其中 $V_i \cong R$。

$i : X \to V$ 是自由 object, $V_x = Rx$, $x \in X$ 是循环子模且 $V_x \cong R$。由于 X 是 R 线性无关的基 $\Rightarrow V_x \cap V_y = 0$, 否则 $y = \frac{r_1}{r_2} x$ 。故 $V = \bigoplus_{x \in X} V_x$。反之, $V_i = Rx_i \Rightarrow X = \{x_i\}$ 构成 X 的基 $\Rightarrow V$ 是自由模, 其中 $\sum_i r_i x_i = 0 \Rightarrow$ 在内直和中 $r_i x_i = 0, \forall i$, 即 $r_i = 0$, X 线性无关。R 线性扩张映射：任一基 X 上的映射 $f : X \to X$ 可唯一确定自由模 V 上的 R 同态 $\overline{f} : V \to M$, 其中 $\overline{f}(x) = \sum_i r_i f(x_i)$ 。

Theorem 42

R 模是自由模的商。M 总有生成元集, 任取一生成元集 X, 则有自由模 $V = \bigoplus_{x \in X} Rx$, 由 inclusion $i : X \to V$ 可确定 R 同态 $\sigma : V \to M$ 。

易看出 σ 是满同态, 则由同态基本定理 $M \cong V / \ker \sigma$ 。

† 秩

对交换环 R 上的有限生成自由模, 秩 $\mathrm{rank} M = |X|$ 是常数。

Proof. 设 M 的任一生成元组 S 和理想 $I \lhd R$, $N = IS = \left\{\sum_i a_i x_i \mid a_i \in I, x_i \in S\right\}$ 构成 M 的 $R-$ 子模。考虑 S 为基, $S = \{x_1, \cdots, x_n\} \Rightarrow N = Ix_1 + \cdots + Ix_n$, 则有商模 M/N(是 $R/I-$ 模), 可以看出 M/N 有一基 $\{\overline{x}_i = x_i + N\}$, 故 M/N 也是自由模。当 I 是 R 的极大理想时, $\overline{R} = R/I$ 是域, 也就是说 M/N 是线性空间 $\Rightarrow$ 维数固定 $\Rightarrow |X|$ 固定。 □

例如：循环 R 模是秩为 1 的自由模, 任一有限生成自由模 $M \cong \bigoplus_i^n Rx_i \cong R^{(n)}$, 其中 $R^{(n)} = \{(x_i) \mid x_i \in R\}$, 基为 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, $e_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$(1 在第 i 位)。

对自由 R 模, 利用基的线性扩张, 可实现模同态映射的 pull - back & push - forward。

Theorem 43

模同态 $\sigma : M \to N$ 是满射, 自由模 $F = \langle\{u_1, \cdots, u_n\}\rangle$, 任一模同态 $\varphi : F \to N$ 均可提升为 $\psi : F \to M$, 其中 $\varphi = \sigma \circ \psi$。

$$
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & N \\
M \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}
$$

σ 是满射, $\varphi(u_i)$ 有原像 $y_i \in M$ 使 $\sigma(y_i) = \varphi(u_i)$, 令 $\psi(u_i) = y_i$, 则 $\sigma \circ \psi(u_i) = \varphi(u_i)$ 。

Theorem 44

若 $\sigma : M \to N$ 是满 R 同态, N 是自由模, 则 M 可以内直和分解为 $M = \ker(\sigma) \oplus L$。

考虑 $N \xrightarrow{1_N} N$, 其中 1_N 是自同构, 因为 σ 满射且 $\sigma \circ \psi = 1_N$(ψ 存在性后续说明)$\Rightarrow \psi$ 是单射, $\psi(u_i) \neq 0$, $\mathrm{Im}\psi = \left\{\sum_i r_i \psi(u_i)\right\}$, $\ker(\sigma) = \{x \in M \mid \sigma(x) = 0\}$ 。

4 投射模与内射模

Theorem 45

R-模范畴上的 hom 函子保持正合性。

Proof. 给定 R-模的正合列

$$\cdots \longrightarrow M_{k-1} \xrightarrow{\phi_{k-1}} M_k \xrightarrow{\phi_k} M_{k+1} \longrightarrow \cdots$$

其中 $\mathrm{Im}\, \phi_{k-1} = \ker \phi_k$.

函子 $\mathrm{hom}(N, -) : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Set}$ 给出如下映射

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{hom}(N, M_{k-1}) \xrightarrow{\bar{\phi}_{k-1}} \mathrm{hom}(N, M_k) \xrightarrow{\bar{\phi}_k} \mathrm{hom}(N, M_{k+1}) \longrightarrow \cdots$$

其中 $\bar{\phi}_k(f) = \phi_k \circ f$.

而对 R-模, $\hom(N,M)$ 不仅是集合, 也是一个 R-模:$(rf)(x)=rf(x)$. 证明 $\bar{\phi}$ 是 $\hom(N,M)$ 上的 R-同态:

$$\bar{\phi}(f+g)(x+ky)=\phi_k\circ(f+g)$$

□

令 $h_M=\mathrm{Hom}_R(M,-)$, $\overline{f}=h_M(f)$; $h^N=\mathrm{Hom}_R(-,N)$, $\overline{g}=h^N(g)$。

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\overline{f}"'] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \\ & B \arrow[r, "g"] & N \arrow[u, "\overline{g}"] \end{tikzcd}$$

$\overline{f}=fh$, $\overline{g}=hg$。

Theorem 46

$0\to A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C$ 正合等价于以下左正合列 $0\to\mathrm{Hom}_R(M,A)\xrightarrow{\overline{f}}\mathrm{Hom}_R(M,B)\xrightarrow{\overline{g}}\mathrm{Hom}_R(M,C)$, 即 $0\to h_M(A)\xrightarrow{h_M(f)}h_M(B)\xrightarrow{h_M(g)}h_M(C)$。类似的, $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\to 0$ 正合等价于以下左正合列 $0\to h^N(C)\xrightarrow{h^N(g)}h^N(B)\xrightarrow{h^N(f)}h^N(A)$。

例如：对分裂短正合列, hom 函子依然给出分裂短正合列。

† 投射模 (Projective)

给定一满同态 $g:B\to C$, 若任一同态 $\sigma:P\to C\in h_P(C)$ 都有同态 $\overline{\sigma}:P\to B\in h_P(B)$ 使得 $\sigma=g\overline{\sigma}=h_P(\overline{\sigma})$, 则 P 称投射模。即 $h_P(B)\xrightarrow{h_P(g)}h_P(C)$ 是满射, 即 Projective module 能导出正合列的右半部分：$B\xrightarrow{g}C\to 0\Leftrightarrow h_P(B)\xrightarrow{h_P(g)}h_P(C)\to 0$。

1. 自由模是投射模, 可以看成自由模的推广。
2. 若 P 是自由模的直和项, 有自由模 V 使 $P\cong V/\ker\sigma$, 其中 $\sigma:V\to P$, 故 $\pi:V\to V/\ker\sigma\cong P$ 是满同态, 记 $K=\ker\sigma$, 则 $i:K\to V$ 是单同态, $0\to K\xrightarrow{f}V\xrightarrow{g}P\to 0$ 是分裂短正合列, 故 $V\cong P\oplus K$ 。
3. $\bigoplus\limits_i P_i$ 是投射模 $\Leftrightarrow$ P_i 是投射模。若 $V=K\oplus(\bigoplus\limits_i P_i)=K\oplus P_1\oplus\cdots$, 则 P_i 是投射模；反之, $\iota_j:P_j\to\bigoplus\limits_i P_i$ 是典范内射。

† 重要例子

$R=\mathbb{Z}_6$ 作为本身的 R 模, 是秩 1 自由模 $R=(1)$。$K=\{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\}\cong\mathbb{Z}_3$ 是 $\mathbb{Z}_6$ 的子模, $N=\{\overline{0},\overline{3}\}\cong\mathbb{Z}_2$ 也是子模, 显然 $R=K\oplus N$, 故 K 和 N 都是投射模, 但 K 和 N 都不是自由模, 对 K, $\overline{1}\cdot\overline{2}=\overline{4}\cdot\overline{2}=\overline{2}$, $\overline{2}\cdot\overline{4}=\overline{5}\cdot\overline{4}=\overline{2}$ 都不是基；对 N, $\overline{3}\cdot\overline{3}=\overline{5}\cdot\overline{3}=\overline{3}$ 也不是基。

† 对偶模

类似于对偶线性空间, 对偶模 $M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R) = \{f : M \to R\}$, 由于是 R 同态, 自动满足 R 线性, $f(r_1x_1 + r_2x_2) = r_1f(x_1) + r_2f(x_2)$ 。

内射模是投射模的对偶概念：对任一单同态 $0 \to A \xrightarrow{f} B$, 有如下正合序列 $h^I(B) \xrightarrow{h^I(f)} h^I(A) \to 0$(contravariant), 则称 I 是 injective module。即 $\forall h : A \to I \in h^I(A)$, 必存在 $\overline{h} : B \to I \in h^I(B)$ 使得 $h = \overline{h}f$。

Theorem 47

任一 R 模都是内射模的子模。

5 张量积和平坦模

$-\bigotimes-$ 是 $hom(-,-)$ 的对偶概念.

6 模的直和分解

6.1 PID 上的有限生成自由模

模的分类问题在 R 是 PID(主理想整环) 的时候可以解决。

Theorem 48: 1

PID 上秩 m 自由模的子模都是自由模, 且秩小于 m。

作为推论, PID 上有限生成模的子模也是有限生成的。$M \to R^{(n)}$ 是自由模。

6.2 有限生成模的分解

所有秩 m 的自由模 $M \cong R^{(m)}$ 是完全确定的。

Def 33: 扭子模

$\mathrm{Tor}(M) = \{a \in M \mid \exists$ 非零$r \in R$ 使$ra = 0\}$, 若 $ra = sb = 0 \Rightarrow rs(a - b) = r(sa) = 0$。

商掉 $\mathrm{Tor}(M)$ 后非零元素都是无扭的, 有如下定理：

Theorem 49

M 是 PID 上有限生成模, $M/\mathrm{Tor}(M)$ 无扭, 是自由模。$M = \langle\{x_1, \cdots, x_n\}\rangle$, $M/\mathrm{Tor}(M) = \langle\{\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_n\}\rangle$ 也是有限生成。因为有限生成无扭模均为自由模。若 $M/\mathrm{Tor}(M)$ 秩为 t, 例如基为 $\{\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_t\}$, 则 $\{x_1, \cdots, x_t\}$ 也是 M 中某自由子模 K 的基。

第 5 章　域扩张和 Galois 理论

1　域的基本性质

Def 34: Field

$(F, +, \cdot)$ 其中 $(F, +)$ 和 $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ 都是 Abelian 群。

素域: 只有 trivial 的子域, 可以看成极小的域。

Theorem 50

一个域中所有子域的交就构成一个素域。

1. 可见一个域的素域是存在且唯一的, 且是最小的子域。
2. 实际素域只有 2 类：$\mathbb{Z}_p$ 和 $\mathbb{Q}$。
   - $\mathbb{Z}_p$ 的子域：$|K| \mid p \Rightarrow |K| = p \Rightarrow \mathbb{Z}_p$ 是素域。
   - $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ 且 $\mathbb{Z}$ 的分式域就是 $\mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q}$ 本身是含自己最小的域。
   - 对任一素域 P, 其子环 $\mathbb{Z}e$ 是整环。考虑 $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}e$, 故 $\ker(\pi)$ 是主理想, $\ker(\pi) = (0)$ 或 (p)。分别有 $\mathbb{Z}e \cong \mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}e \cong \mathbb{Z}_p$, 故 $P \cong \mathbb{Z}e$ 的分式域 $\mathbb{Q}$ 或域 $\mathbb{Z}_p$。

域所包含素域的类型起到对域分类的作用, 记为特征 $\chi(F)$：

$$\chi(F) = \begin{cases} 0, \mathbb{Q} \subset F \\ p, \mathbb{Z}_p \subset F \end{cases}$$

1. $\chi(F) = p \Leftrightarrow \forall a \in F, pa = 0$； $\chi(F) = 0 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, na \neq 0$。即 $\chi(F)$ 是所有非零元共同的阶, 也就是特征。
2. $\chi(F) = 0$ 的性质：当 $\chi(F) = 0$ 时, $nx = b = (ne)x$, 因为 $(ne) \neq 0$, 故 $(ne)^{-1}b = x$ 是解 (唯一)。只有此时 $nx = b$ 才有解 $x = \dfrac{1}{n}b$。

2　域的代数扩张

任一域都可看成素域的扩张生成的。

2.1　生成的域

包含 F 和 S 的最小的域 $F(S)$, 即整环 $F[S]$ 的分式域。

$$F[S] = \{f(s_1, \cdots, s_n)\} \Rightarrow F(S) = \{f/g \mid g \neq 0\}$$

remark 由于任一扩域 $K = F(K)$, 希望用尽量小的集合 S 生成 K。

facts $F(S) = \bigcup_{S' \subset S} F(S')$, $F(S_1 \cup S_2) = F_1(S_1)(S_2)$。由此可知 $F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = F(\alpha_1)(\alpha_2)\cdots(\alpha_n)$。

2.2 单扩张

$K = F(\alpha)$

1. 单超越扩张：对于任意不定元 α, $F[\alpha]$ 即一元多项式环, $F(\alpha) \cong F(\alpha)$ 是唯一的。
2. 单代数扩张：对于任意代数元 α, $F[\alpha] \cong F[x]/I$。由于 $F[x]$ 是主理想整环, I 是主理想, $F[x]/I$ 是域, 故 $F(\alpha) \cong F[x]/I$。

2.3 等价扩张

$K_1 \cong K_2$ 且域同构限制在 F 上是恒等映射, 称 K_1 和 K_2 是 F 的等价扩张。

1. 单超越扩张是唯一的, 故 $\forall \alpha, \beta$, $F(\alpha)$ 和 $F(\beta)$ 是等价扩张。
2. 单代数扩张与代数元的代数关系有关。若 $\deg(p(x)) = n$, 则 $p(x)$ 的 n 个根 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 扩成的域 $F(\alpha_1), \cdots, F(\alpha_n)$ 互相是等价的, 实际上 $F(\alpha_i) \cong F^n$。

Theorem 51

$F(\alpha) \cong F[x]/I$ 是 F 上的 $n = \deg(p(\alpha))$ 维线性空间. 实际上

$$F(\alpha) = \operatorname{span}\{[1_\alpha], [\alpha_\alpha], \cdots, [\alpha_\alpha^{n-1}]\}$$

2.4 有限扩张

把扩域 K 看成基础域 F 上线性空间, $[K : F] = \dim_F K$ 称扩张次数, $[K : F] < \infty$ 时称“有限扩张”。

代数扩张：K 上元素都是基域 F 上的代数元。

代数元 $\alpha \in K$ 的次数：$\deg(f(\alpha))$。当 $\alpha \in F$, $f(\alpha) = 1 - \alpha^0\alpha \Rightarrow \deg f = 1$；当 $\alpha \notin F$, $\deg f > 1$。

1. 对扩张 K/F, $\alpha \in K$, 则 α 是 F 上代数元 $\Leftrightarrow \exists m$ 使 $1, \alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^m$ 线性相关。对于有限扩域 $[K : F] = n$, 任意 $\alpha \in K$ 都会使 $1, \alpha, \cdots, \alpha^n$ 线性相关, 故有限扩张 $\Rightarrow$ 代数扩张。

中间域 K/F 是扩张, 中间域 E 是满足 $F \subset E \subset K$ 的域。

Theorem 52

K/F 是有限扩张 $\Leftrightarrow K/E$, E/F 都是有限扩张, 且有 $[K : F] = [K : E] \times [E : F]$。

Proof. 假设 $K/F = \text{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, 而 E/F 是 K/F 子空间可记为 $E/F = \text{span}\{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$, $K/E = \text{span}\{\beta_1, \cdots, \beta_m\}$。$x \in E$ 可表为 $x = \sum_{i=1}^{r} x_i\alpha_i$, 其中 $x_i \in F$; 而 $y \in K$ 可表为 $y = \sum_{k=1}^{m} y_k\beta_k = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{r} y_{ki}\alpha_i\beta_k$。可见 $\{\alpha_i\beta_k\}$ 是 K/F 的一组基 $\Rightarrow [K:F] = mr = [K:E] \times [E:F]$。 □

1. 由线性空间的唯一性, $[E:F] = [K:F]$ 时 $E = K$。
2. p 是素数时, p 次扩张没有中间域。
3. 单代数扩张链对于任一有限扩张 K/F, 都有 $F = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_r = K$, 其中 F_{i+1}/F_i 是单代数扩张。任取 $\alpha_1 \in K$ 但 $\alpha_1 \notin F$, 由于 α_1 的次数 > 1, 则 α_1 对于 F 的单代数扩张 $F_1 = F(\alpha_1)$ 有 $[F_1 : F] = p_1 > 1$。同样, 取 $\alpha_2 \in K$ 但 $\alpha_2 \notin F_1$, $F_2 = F_1(\alpha_2) \Rightarrow [F_2 : F_1] = p_2 > 1$。故有限扩张可导出单代数扩张链。反之, 由单代数扩张链可知 $[K:F] = p_1p_2\cdots p_r$ 是有限扩张。
4. 若 K/E 和 E/F 都是代数扩张 $\Rightarrow K/F$ 也是代数扩张。

代数闭包：任一扩张 K/F 中 F 上的代数元的全体。**fact** 代数闭包构成一个中间域。

2.5 正规扩张

motivation 寻找一个能完全容纳域 F 上多项式 $f(x) = 0$ 的根的扩域。

分裂域：F 上的 n 次多项式 $f(x) \in F[x]$, 使 $f(x)$ 在扩张 E/F 中可完全分解 $f(x) = c(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n) \in E[x]$ 的最小扩域 $E = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$。

Theorem 53

给定 $f(x) \in F[x]$, 则分裂域是存在且唯一的。

第 6 章　代数

Def 35: F 代数 A

域 F 作用在环 A 上, 数乘分别与两个代数结构的代数运算相容.

1. 一个 $R-$ 模 A 同时也是环 $(A,+,\cdot)$, 使得数乘 (模作用) 有 $r(xy)=(rx)y=x(ry)$, 则称 A 为 $R-Algebra$。
2. 令 R 是交换环以不区分左/右模。
3. 标量 $r\in R$ 与所有东西交换, 本质是环 A 的乘法与 R 的作用关系。
4. A 为交换环 $\Rightarrow$commutative algebra ; A 为除环 $\Rightarrow$division algebra。
5. 数乘可以看为模环 A 上参数为 $\lambda\in R$ 的一族运算 $\{\cdot_\lambda : A\to A\}$

† 子结构

$B\subset A$ 也构成 R 代数, 当且仅当:

1. B 是 R 子模。
2. B 上乘法封闭, 即 B 是环 A 的乘性子集。

A 的理想 I 是 $R-$ 子模, 故 I 是子代数。

1　张量代数

† 对偶空间

对偶空间 $V^*=\{f\mid f:V\to\mathbb{R}\}$ 可对一般自由模定义, $\dim V=\dim V^*$, 其中对偶基为 $\{f_i\mid f_i(e_j)=\delta_{ij}\}$。

对偶映射 (拉回): 若 $F:V\to W$, 则有 $F^*:W^*\to V^*$。

Multilinear map: : $f:V_1\times\cdots\times V_r\to\mathbb{R}$

$\mathcal{L}(V_1,\cdots,V_r;\mathbb{R})=\{f:V_1\times\cdots\times V_r\to\mathbb{R}\}$ 构成线性空间, 维数为 $n_1n_2\cdots n_r$。利用多重线性扩张, $\mathcal{L}(V_1,\cdots,V_r;\mathbb{R})$ 的基为 $\{f_{k_1\cdots k_r}\mid f_{k_1\cdots k_r}(e_{j_1},\cdots,e_{j_r})=\delta_{j_1k_1}\cdots\delta_{j_rk_r}\}$。

† 张量积

由 categories 中泛性质：

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_r \arrow[r] \arrow[dr] & V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \arrow[d, "\exists!"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$(v_1, \cdots, v_r) \to v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$, 自然地, $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r)(x_1, \cdots, x_r) = \prod_{i=1}^{r} v_i(x_i)$。

Remark: v 可以是 V^* 中线性映射, 也可以是 V 中向量, 此时 $v_i(x_j) = x_j(v_i)$。

1. $\mathcal{L}(V_1, \cdots, V_r; \mathbb{R}) \cong V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$。可以验证 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \in \mathcal{L}(V_1, \cdots, V_r; \mathbb{R})$, 通过张量积也可给出一组基 $\{f_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes f_{i_r}^* \mid f_i^* \in V_i^*\}$, 则任一张量 $\sigma = \sum_{i_1, \cdots, i_r} a_{i_1 \cdots i_r} f_{i_1}^* \otimes \cdots \otimes f_{i_r}^*$。

† 分次代数

线性空间的直和 $V_1 \oplus V_2 = \{(v_1, v_2)\}$ 也是线性空间, $d = n_1 + n_2$。推广到无穷直和：$\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots$。

Fact: $\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i$ 是一个分次代数。

可以定义 $\bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i$ 上的线性映射 (i. e. 对偶空间)：

$$A = A_0 + A_1 + \cdots : \bigoplus_{i=0}^{n} V_i r \to \mathbb{R}$$

其中 $A_i \in V_i^*$, 满足 $A(v_0, v_1, \cdots) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(v_i) \in \mathbb{R}$。

取 $T_0(V) = K$, $T_1(V) = V$, $T_2(V) = V \otimes V$, $\cdots$, 则 $T(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T_i(V)$ 构成张量代数。

加法：$(\sigma_0, \sigma_1, \cdots) + (\sigma_0', \sigma_1', \cdots) = (\sigma_0 + \sigma_0', \sigma_1 + \sigma_1', \cdots)$。

乘法 (张量积)：

$$\begin{aligned} & (\sigma_0, \sigma_1, \cdots) \otimes (\sigma_0', \sigma_1', \cdots) \\ =& (\sigma_0 \otimes \sigma_0', \sigma_0 \otimes \sigma_1' + \sigma_1 \otimes \sigma_0', \sigma_1 \otimes \sigma_1' + \sigma_0 \otimes \sigma_2' + \sigma_2 \otimes \sigma_0', \cdots) \end{aligned}$$

数乘：$k(\sigma_0, \sigma_1, \cdots) = (k\sigma_0, k\sigma_1, \cdots)$。

2 外代数

† 反对称化

r 阶张量 $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_r \in T_r(V) \subset T(V)$, 定义线性化算子 $\sigma \in S_r$: $T_r(V) \to T_r(V)$(群作用), 其中 $\sigma(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_r) = \alpha_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma(r)}$。在 σ 作用下有两种特殊张量:

$$\sigma(\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_r) = (\pm 1)^\sigma \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_r$$

$+1$：对称张量；-1：反对称张量。可证所有 r 阶反对称张量构成 $T_r(V)$ 的子空间 $\wedge_r(V)$。r 阶反对称化算子：$A_r = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma \in S_r} sgn(\sigma)\sigma$, $A_r : T_r(V) \to \wedge_r(V)$ 有投影的作用, 可以将任一 r 阶张量变为 r 阶反对称张量, 又称 r 形式。

1. $r > \dim V$ 时, $A_r \equiv 0$。对于 $\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon_r$ 总有 $\varepsilon_i = \varepsilon_j$, 使 $\sigma = (ij)$, 则 $\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon_r = \sigma(\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon_r)$, $A_r(\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon_r) = A_r \cdot \sigma(\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon_r) = sgn(\sigma) \cdot A_r(\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon_r) = -A_r(\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon_r)$, $\Rightarrow A_r(\varepsilon_1 \otimes \cdots \otimes \varepsilon_r) \equiv 0$。
2. $x \in T_r(V)$, $y \in T_s(V)$, $A_{r+s}(x \otimes y) = (\pm 1)^{rs} A_{r+s}(y \otimes x)$, $\sigma(y \otimes x) = x \otimes y \Rightarrow sgn(\sigma) = (-1)^{rs}$。

† 外代数/Grassmann 代数

所有 r 形式空间的直和 $\wedge(V) = \wedge_0(V) + \cdots + \wedge_n(V)$ 是张量空间 $T(V)$ 的子空间。定义外积 $\wedge : T(V) \times T(V) \to \wedge(V)$, $x \wedge y = A(x \otimes y)$, 则 $\wedge(V)$ 是一个代数, 称外代数或 Grassmann 代数。

1. $x \in \bigwedge_s(V)$, $y \in \bigwedge_t(V)$, 当 $s + t > n$ 时 $x \wedge y = 0$。
2. $x \wedge y = (-1)^{st} y \wedge x$, actually, linear composition of tensor product。
3. $\dim \bigwedge_r(V) = C_n^r$, 其中基为 $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r}\}$, 外代数的维数 $\dim \bigwedge(V) = \sum_{r=0}^{n} C_n^r = 2^n$。

Theorem 54

$\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r = 0$ 等价于 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in V$ 线性相关。证明：若相关, $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{r-1} \wedge (\sum_{i=1}^{r-1} x_i \alpha_i) \equiv 0$；反之若不相关, 则 $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r$ 是 $\bigwedge_r(V)$ 的一个基, 显然 $\neq 0$。

Theorem 55

W 是 V 的子空间, 且有基 $\{y_1, \cdots, y_r\}$, 则 $r-$ 形式 $y_1 \wedge \cdots \wedge y_r$ 唯一决定了 $W^\perp$(即 W 的定向)。对于 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\alpha \wedge \alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \wedge (y_1 \wedge \cdots \wedge y_r) \equiv 0$。

第 7 章　表示论

1　群的线性表示

† Motivation

question 群的结构?

answer (1) subgroups (2) homomorphisms。群同态 $\rho : G \to GL(n, k)$, $n \in \mathbb{N}$ 是表示次数。

了解群的结构, 1 可以直接从群本身入手, 2 可以利用同态映射处理简单的同态像, 例如 $GL_n(V)$.

1. 同态映射

群同态 $\sigma : G \to G'$ 是单射 $\leftrightarrow$ $Ker\ \sigma = \{e\}$

在引入了“子群”的概念之后再考察同态映射 (同态核): $Ker\ \sigma$ 是群 G 的正规子群。而正规子群诱导的“商群 (quotient group)” $G/N = \{aN : a \in G, N \lhd G\}$, 可在群 G 和商群 G/N 之间建立自然同态映射 $\pi : G \to G/N, a \to aN$, 并且 $ker\ \pi = \pi^{-1}(N) = N$, $Im\ \pi = G/N = G/ker\ \pi$。

群同态基本定理: 群 G 的任意同态像 $Im\ \sigma$(是满同态) 同构于商群 $G/ker\ \sigma$。其中可以构造同构映射 $\psi : G/ker\ \sigma \to Im\ \sigma$, $aN \to \sigma(a)$

2. 线性表示

G 在域 K 上的线性表示是群 G 到一般线性群 $GL_n(V)$ 的群同态, 表示空间 V 的维数 $n = dim\ V$ 是表示次数。

群的线性表示是二元组 $(\phi : G \to GL_n(V), V)$, 可以利用适当多的线性表示了解群 G 的结构, 其中 $Im\ \phi$ 是 $GL_n(V)$ 的子群, $Ker\ \phi$ 是群 G 的正规子群, 因此可以利用线性表示同态核研究群 G 的结构。特殊的: $Ker\ \phi = \{e\}$ 的表示是 faithful ϕ, $Ker\ \phi = G$ 的表示是 trivial ϕ。单位表示: 1 次平凡的表示 $1_G : G \to R$, $g \to 1$。

(a). 不同的线性表示二元组可以是等价的, 首先应该有同构 $\sigma : V \to W$ 的表示空间, 其次希望 $\forall g \in G$, 表示 $\phi(g)$, $\psi(g)$ 在同构 σ 下是等价的, 即 $\sigma\phi(g) = \psi(g)\sigma$, 此时 $\phi(g)$ 在 V 中的作用和 $\psi(g)$ 在 W 中的作用相同。

特别的, 1 阶 K-表示的表示空间 V 应同构于域 K 的乘法群。

(b). 现给定一个群, 构造他的一个 n 阶 K-表示:

(b1) 群作用 $\circ$　$\circ : G \times \Omega \to \Omega$, $(a, x) \to a \circ x$ 满足 $(ab) \circ x = a \circ (b \circ x)$, $e \circ x = x$

(b2) 利用有限群作用集合 $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$ 构造 n 阶 K-表示:

首先由 Ω 构造 n 维表示空间 $V = \{a_1x_1 + ... + a_nx_n | a_i \in K, x_i \in \Omega\}$;

然后构造群同态 $\phi : G \to GL(V)$, 使每一个 $\phi(g) \in GL(V)$ 都是 $V \to V$ 的可逆线性映射。考

虑到群作用, 可以验证 $\phi(g)\big(x\big) = g \circ x$ 是一个 $V \to V$ 的线性映射；又因为 $[\phi(g)\phi(g^{-1})](x) = g \circ (g^{-1} \circ x) = (gg^{-1}) \circ x = x$, 所以 $\phi(g)\phi(g^{-1})$ 等于单位映射 1_V, 因此 $\phi(g)$ 是可逆线性映射；最后可以证明 ϕ 是群同态 $\phi(gh)(x) = (gh) \circ x = g \circ (h \circ x) = \phi(g)\phi(h)(x)$, 即群同态 $\phi(gh)(x) = \phi(g)\phi(h)$。

上述利用有限群作用构造的 n 次 K-表示称为“G 在 K 上的 *n 次置换表示*”, 其矩阵形式是 n 次置换矩阵。特殊的, 有限群 G 在它自身上的群作用“左平移” $G \times G \to G; (g, x) \to gx$ 下的 n 次置换表示称为“*正则 K-表示 ρ*”, ρ 的表示空间 $K[G] = \{\sum a_g g | a_g \in K\}$, 其中 $Ker\ \rho = \{e\}$ 可见 ρ 是 faithful 表示。

3. 线性表示的结构

(a). 因为群 G 有不同阶的线性表示, 考虑群 G 在 V 的子空间 U 上的 K-表示, 这要求可逆线性变换 $\phi(g) \in GL_n(V)$ 在 U 上是封闭的, 即 U 是 ϕ 的不变子空间, 称 $(\phi_U(g) = \phi(g)|_U, U)$ 是 (ϕ, V) 的子表示。子表示的矩阵形式, $\Phi(g) = \begin{pmatrix} \Phi_U(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$, 其中 V 的前 m 个基向量是不变子空间 U 的基向量。

通过内直和和外直和可以构造高阶的表示。内直和 $\phi : G \to GL(U \oplus V)$; $\phi = \phi_U \oplus \phi_V$ 满足 $\phi(g)(u + v) = \phi_U(g)(u) + \phi_V(g)(v)$, $u \in U, v \in V$, 外直和 $\phi : G \to GL(V_1 \dotplus V_2); \phi = \phi_U \dotplus \phi_V$: 满足 $\phi(g)(\alpha_1, \alpha_2) = (\phi_1(g)(\alpha_1), \phi_2(g)(\alpha_2))$。二者一样的矩阵形式 $\Phi(g) = \begin{pmatrix} \Phi_U(g) & 0 \\ 0 & \Phi_V(g) \end{pmatrix}$。

(b). 不可约表示: 可以看到在群的 K-表示的结构中, 只有 trivial 不变子空间 $\{0\}, V$ 的 K-表示不可分解为低维表示, 称为“不可约表示 (ϕ, V)”, 当 V 的 G 不变子空间可以分解成直和形式的时候, 称为完全可约的。

群 G 的有限维完全可约表示可分为有限个不可约子表示的直和。 K-表示都是完全可约的, 且

- 主表示 (单位表示)$\rho_0 : G \to GL(1, k)$, $\mathrm{Im}\rho_0 = \{e\}$。
- 等价表示：$\sigma : V \to W$ 使 $\rho(g)\sigma = \sigma\rho(g), \forall g \in G$, 矩阵形式 $\Phi(g) = S\Psi(g)S^{-1}, \forall g$。

† 具体表示类型

1. n 次置换表示：任给群作用 $G \times \{x_1, \cdots, x_n\} \to \{x_1, \cdots, x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$。令表示空间 $V = \{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \mid a_i \in K\}$, $\dim_K V = n$, $\rho : G \to GL(n, K)$。对有限群 $|G| < +\infty$, 取群到自身的左正则作用 l_g, $V = K[G] \cong G \cong GL(|G|, K)$, 称正则表示, $\ker(\rho) = \{g \mid l_g = \mathrm{id}\} = \{e\}$, 可见正则表示 faithful(忠实的)。
2. 子表示：表示 (ρ, V), 若 $\rho(g)|_U \in GL(m, K)$, 其中 $\dim U = m < n$ 是子空间, 称 U 是 G 不变子空间, (ρ_U, U) 称 m 次子表示。将 U 的基 $\{a_1, \cdots, a_m\}$ 扩充成 V 的基 $\{a_1, \cdots, a_m, \tilde{a}_{m+1}, \cdots, \tilde{a}_n\}$, 则 $\Phi(g) = \begin{bmatrix} \Phi_U(g) & A(g) \\ & B(g) \end{bmatrix}$。若有 U 的补空间 $U^\perp$ 也是 G 不变子空间, 则 $U^\perp$ 称 G 不变补空间。

构成内/外直和 $V = U \oplus U^\perp$, 令 $U = \mathrm{span}\{a_1, \cdots, a_m\}$, $U^\perp = \mathrm{span}\{a_{m+1}, \cdots, a_n\}$, 则 $\Phi(g) =$

$$\begin{bmatrix} \Phi_U(g) & \\ & \Phi_{U^\perp}(g) \end{bmatrix}。$$

† 表示 (ρ, V) 的结构

(ρ, V) 由 ρ, n, k 完全决定。

- 不可约 (ρ, V)：没有非平凡 G 不变子空间。
- 完全可约 (ρ, V)：任一 G 不变子空间都有 G 不变补空间。此时任一子表示也是完全可约的 (已对角化), $\Phi(g) = \Phi_{V_1}(g) \oplus \Phi_{V_2}(g) \oplus \cdots \oplus \Phi_{V_r}(g)$, 其中 (ρ_{V_i}, V_i) 是不可约的。

fact 对有限群, 若 $|G| \nmid |k|$, 则 (ρ, G) 均是完全可约的。相当于限制了 k, 故只需对不同的 ρ 和 n(也就是不等价的) 讨论, 由全部不可约表示生成任一表示。

† Abel 群上的 (ρ, V)

Theorem 56

Abel 群的有限维不可约复表示都是一次的。

已知 Abel 群上给定 $g \in G$, $\Phi(g)v_i = \lambda_g v_i$, $V_{\lambda_g} = \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_m\}$。对 $\forall h \in G$, $w = \sum_{i=1}^{m} \omega_i v_i \in V_{\lambda_g}$, $\Phi(h)\Phi(g)w = \lambda_g \sum_{i=1}^{m} \Phi(h)\omega_i v_i = \Phi(g) \sum_{i=1}^{m} \Phi(h)\omega_i v_i \Rightarrow \Phi(h)w \in V_{\lambda_g} \Rightarrow V_{\lambda_g}$ 是 Φ 的不变子空间。又 Φ 是不可约, 故 $V_{\lambda_g} = V$, 对复矩阵 $\dim V_{\lambda_g} = 1$。

fact 有限 Abel 群等于有限个循环群的直积, $G = \{\overline{P}_1, \cdots, \overline{P}_r\}$, $\overline{P}_i = \langle p_i \rangle$, $\overline{P}_i \cap \overline{P}_j = \{e\}$, $i \neq j$。记 $|\langle P_i \rangle| = n_i$, 则 $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ 称 G 的型。循环群的一次不可约复表示是显然的: $g \in \langle a \rangle$, $|\langle a \rangle| = n$, $\mathrm{ord}\ g = i$, $\rho : g \to e^{i2\pi\frac{j}{n}}$。故有限 Abel 群的不可约复表示都确定了。

fact 有限 Abel 群有 $|G|$ 个不可约复表示。

† 非 Abel 群情况

question 如何找非 Abel 群的所有不等价的不可约表示?

已知 G 的表示 (ρ, V), 且有同态 $T : H \to G$, 则 $(\rho T, V)$ 是 H 的表示。

1. G 不变子空间也是 H 不变子空间, $(\rho T(h))u = \rho(T(h))u \in U$, 故 $(\rho T, V)$ 不可约时 (ρ, V) 也一定不可约。
2. 若知 (ρ, V) 不可约, 且 T 是满射, 则 $(\rho T, V)$ 不可约, $\rho(g)u = \rho(T(h))u = (\rho T(h))u \in U$。

† 提升

$$G \xrightarrow{\pi} G/N \xrightarrow{\bar{\rho}} GL(n, k)$$

$(\overline{\rho} = \rho \circ \pi, V)$ 是对 (ρ, V) 的提升, 取 $N = G^{(1)}$ 则 $G/G^{(1)}$ 是 Abel 群, ρ 的全部不可约表示可确定 $\Rightarrow \overline{\rho}$ 的全部不可约表示也确定了。

† 挠表示

取 $\sigma : G \to G$ 为自同构, (ρ, V) 是 G 的表示, 则 $(\rho^\sigma = \rho \circ \sigma, V)$ 是 G 由 σ 的挠表示。 ρ^σ 和 ρ 不一定等价。

1. $\sigma_a(g) = aga^{-1}$, $\rho \circ \sigma_a(g) = \rho(aga^{-1}) = \rho(a)\rho(g)\rho(a^{-1})$, $\sigma_a \circ \rho(g) = a\rho(g)a^{-1}$。
2. 共轭。

2 有限群不可约表示

考虑群表示在域 k 上的向量空间。

† 域 k 上的群代数

$K[G] = \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in K \right\}$, $(K[G], +, \cdot)$ 是环, 自然也是环 $K[G]$ 上左模, $(K[G], +)$ 是域 K 上向量空间, $1_{K[G]} = 1_G$。

第 8 章　同调代数

1　Chain 同伦

在 $Comp(\mathrm{Mod}_R)$ 中 $\mathrm{Hom}(C,D)$ 里两个态射 $\alpha,\beta:(C_n,d_n)\to(D_n,\delta_n)$ 的同伦定义为：存在 $\{s_n:C_n\to D_{n+1}\}$，其中 $\alpha_n-\beta_n=\delta_{n+1}\circ s_n+s_{n-1}\circ d_n$ 。0 **motivation**

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d, "\text{红色箭头为}\alpha"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\text{蓝色箭头为}\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D \arrow[r] & D \arrow[r] & D \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Theorem 57

同调模是同伦等价的。即 $\alpha\sim\beta:(C_n,d_n)\to(D_n,\delta_n)$ 可以推出 $\overline{\alpha}_n=\overline{\beta}_n:H_n(C)\to H_n(D)$。

2　复形和同调模

2.1　模复形的范畴

1. R 复形 $C=(C_n,d_n)$ 表示为

$$\cdots\to C_n\xrightarrow{d_n}C_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}\cdots\xrightarrow{d_1}C_0\xrightarrow{d_0}C_{-1}\xrightarrow{d_{-1}}\cdots$$

   其中 $C_n\in\mathrm{Mod}_R$，R 同态满足 $d_nd_{n-1}=0$，d_n 称为边缘算子、微分。

2. 态射 $\phi:(C_n,d_n)\to(D_n,\delta_n)$ 定义为：$\phi_n:C_n\to D_n$ 使下图交换

$$\begin{tikzcd}
C_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "\phi_n"] & C_{n-1} \arrow[d, "\phi_{n-1}"] \\
D_n \arrow[r, "\delta_n"] & D_{n-1}
\end{tikzcd}$$

   即 $\phi_{n-1}\circ d_n=\delta_n\circ\phi_n$。
   需要验证 $\mathrm{Comp}(\mathrm{Mod}_R)$ 是 Abel 范畴。

2.2　同调模

$Z_n(C)=\ker d_n$ 称为 n 闭链，$B_n(C)=\mathrm{Im}d_{n+1}$ 称为 n 边缘。

$$H_n(C)=Z_n/B_n=\{[c_n]\}$$

称为同调模，$[c_n]$ 称为同调类。无圈 (acyclic) 的情况是：正合序列 $\ker d_n=\mathrm{Im}d_{n+1}\Rightarrow H_n(C)=0$，称 C 是零调的。

$H(C)=\{H_n(C)\}$ 属于 R 模范畴, 而 C 属于 $\mathrm{Comp}(\mathrm{Mod}_R)$, 由复形间的态射 $\phi:(C_n,d_n)\to(D_n,\delta_n)$ 可导出 R 同态

$$\overline{\phi}_n:H_n(C)\to H_n(D),\quad [c_n]\to[\phi_n(c_n)]$$

即 $H_n:\mathrm{Comp}(\mathrm{Mod}_R)\to\mathrm{Mod}_R$ 是一个共变函子 (加性函子), $(C_n,d_n)\to H_n(C)$。

† (co)chain complex

记 $C_n=C^n$, $d_n=d^n$, 则一个复形记为

$$\cdots\to C_n\xrightarrow{d_n}C_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}\cdots\xrightarrow{d_1}C_0\xrightarrow{d_0}C^1\xrightarrow{d^1}\cdots\to C^n\xrightarrow{d^n}C^{n+1}\to\cdots$$

将 $\cdots\to C_n\xrightarrow{d_n}C_{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}\cdots\xrightarrow{d_1}C_0\to 0$ 称为 chain complex(链复形), 而 $0\to C_0\xrightarrow{d^0}C^1\xrightarrow{d^1}\cdots\to C^n\xrightarrow{d^n}C^{n+1}\to\cdots$ 称为 cochain complex(上链复形)。类似的有 coboundary(上边缘) 等于 d^n, cocycle(上闭链)$Z^n=\ker d^n$ 和 coboundary $B^n=\mathrm{Im}d^{n-1}$, 上同调模 $H^n=Z^n/B^n$。

2.3 长正合列

$\mathrm{Comp}(\mathrm{Mod}_R)$ 中态射 $\phi:(C_n,d_n)\to(D_n,\delta_n)$ 是单 (满) 射等价于 $\phi_n:C_n\to D_n$ $(\forall n)$ 是单 (满) 射。可以构造 $\mathrm{Comp}(\mathrm{Mod}_R)$ 中的短正合列:

$$0\to C'\xrightarrow{\alpha}C\xrightarrow{\beta}C''\to 0$$

则有同调模 $H(C')$, $H(C)$, $H(C'')$ 之间的长正合列:

$$0\longrightarrow H_n(C')\xrightarrow{\overline{\alpha}_n}H_n(C)\xrightarrow{\overline{\beta}_n}H_n(C'')\xrightarrow{\Delta_n}H_{n-1}(C')\xrightarrow{\overline{\alpha}_{n-1}}H_{n-1}(C)\xrightarrow{\overline{\beta}_{n-1}}H_{n-1}(C'')\longrightarrow 0$$

其中 和 是显然的, 而连接同态 (connective homomorphism)$\Delta_n:H_n(C'')\to H_{n-1}(C')$ 可以定义为 $[c_n'']\to[\alpha_{n-1}^{-1}d_n\beta_n^{-1}(c_n'')]$, 即

$$\begin{tikzcd}
Z_n' \arrow[r] \arrow[d, "d_n"] & Z_n \arrow[r, "\beta_n"] \arrow[d, "d_n"] & Z_n'' \arrow[d, "d_n"] \\
Z_{n-1}' \arrow[r] & Z_{n-1} \arrow[r, "\beta_{n-1}"] & Z_{n-1}''
\end{tikzcd}$$

Theorem 58

复形短正合列的交换图可导出 R 同调模长正合列之间的交换图.

Proof. 复形的短正合列:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi'"] & C \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\phi"] & C'' \arrow[r] \arrow[d, "\phi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D' \arrow[r, "\gamma"] & D \arrow[r, "\delta"] & D'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

相应同调模的正合列：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_n(C') \arrow[r, "\overline{\alpha}_n"] \arrow[d, "\overline{\phi}'_n"] & H_n(C) \arrow[r, "\overline{\beta}_n"] \arrow[d, "\overline{\phi}_n"] & H_n(C'') \arrow[r, "\Delta_n"] \arrow[d, "\overline{\phi}''_n"] & H_{n-1}(C') \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\phi}'_{n-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_n(D') \arrow[r, "\overline{\gamma}_n"] & H_n(D) \arrow[r, "\overline{\delta}_n"] & H_n(D'') \arrow[r, "\widetilde{\Delta}_n"] & H_{n-1}(D') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

□

2.4 Chain 同伦

$\mathrm{Comp}(\mathrm{Mod}_R)$ 中 $\mathrm{Hom}(C, D)$ 里两个态射 $\alpha, \beta : (C_n, d_n) \to (D_n, \delta_n)$ 的同伦定义为：$\{s_n : C_n \to D_{n+1}\}$, 其中 $\alpha_n - \beta_n = \delta_{n+1} \circ s_n + s_{n-1} \circ d_n$。直观理解 (motivation)：

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & D \arrow[r] & D \arrow[r] & D \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Theorem 59

调模是同伦等价的。$\alpha \sim \beta : (C_n, d_n) \to (D_n, \delta_n)$ 可以推出 $\overline{\alpha}_n = \overline{\beta}_n : H_n(C) \to H_n(D)$。

Proof. (证明部分图片未完整展示, 此处无法给出具体内容) □

3 单纯同调 (群)

优点：好计算。缺点：只能在可剖分空间。

Def 36

- simplex(单形)
- complex(复形)
- ∂(边缘算子, 图片中未完整展示其定义相关内容)

4 奇异同调群

4.1 奇异单形

1. $q-$ 标准单形 (Euclidean space)：

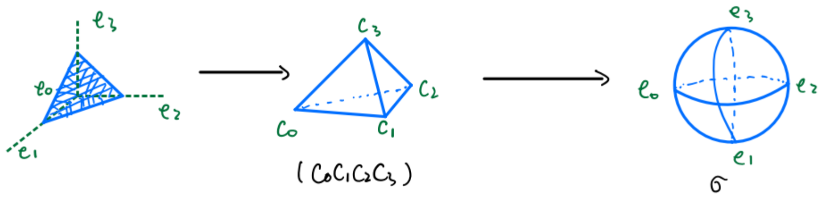
$$\Delta_q = \{(x_0, \cdots, x_q) \mid \sum x_i = 1, x_i \geq 0\}$$

2. $q-$ 单形 (一般的拓扑空间)：连续映射将 Δ_q 映到 X(不一定同胚), 记为 $\sigma : \Delta_q \to X$。

3. 特殊情况：线性单形将标准单形线性变换到顶点 $c_0, \cdots, c_q$ 的凸集 C 上，记为

$$(c_0c_1\cdots c_q):\Delta_q\to C$$

作为凸集包括内部点，即 $\sum x_ie_i\mapsto\sum x_ic_i$，其中有图示：



4.2 奇异单形的复形和同调群

1. Abel 群 ($q-$chain group)：由 $\{\sigma_q\}$ 生成的自由群 $S_q(X)$。$q-$chain：$c_q\in S_q(X)$ 为有限和 $c_q=k_1\sigma_q^{(1)}+\cdots+k_r\sigma_q^{(r)}$，其中 $k_i\in\mathbb{Z}$，$\sigma_q^{(i)}:\Delta_q\to X$。
2. 边缘同态：$q-$ 单形 $\sigma:\Delta_q\to X$，其边缘是 $(q-1)-$chain，$\partial\sigma=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sigma\circ\iota_i$(若 face 的加 $\sim$ 减 $\sim$，有反序性)。
   结合群加法，边缘同态 $\partial_q:S_q(X)\to S_{q-1}(X)$，$k_1\sigma_q^{(1)}+\cdots+k_r\sigma_q^{(r)}\mapsto k_1\partial\sigma_q^{(1)}+\cdots+k_r\partial\sigma_q^{(r)}$。
   证明 ∂_q 是边缘同态，即 $\partial_{q-1}\circ\partial_q=0$(交错化)：对每个 $q-$ 单形 σ：

$$\begin{aligned}\partial_{q-1}\circ\partial_q(\sigma)&=\partial_{q-1}(\sum_{i=0}^{q}(-1)^i\sigma\circ\iota_i)\\&=\sum_{j=0}^{q-1}\sum_{i=0}^{q}(-1)^{i+j}\sigma\circ\iota_i\circ\iota_j\\&=\sum_{0\le i\le j\le q-1}(-1)^{i+j}\sigma\circ\iota_i\circ\iota_j+\sum_{1\le i\le j+1\le q}(-1)^{i+j}\sigma\circ\iota_i\circ\iota_j\end{aligned}$$

   由交换性 $\iota_i\circ\iota_j=\iota_j\circ\iota_{i-1}$，故 $\partial_{q-1}\circ\partial_q=0$。
   由此得到奇异链复形 $S_*(X)=\{S_q(X),\partial_q\}$，奇异同调群 $H_*(X)=H_*(S_*(X))$。
3. 链映射：连续映射 $f:X\to Y$，对于 $\Delta_q\xrightarrow{\sigma}X\xrightarrow{f}Y$，给出 Y 上的单形 $f_*(\sigma)=f\circ\sigma:\Delta_q\to Y$。$f_*:S_q(X)\to S_q(Y)$ 是个群同态，构成链映射。
   以上，建立了拓扑空间范畴 $\{X,f\}$ 和同调群范畴 $\{S_*(X),f_*\}$ 的 functor S_*，称为 (奇异) 链函子。

Theorem 60

同调的拓扑不变性。当 f 是同胚时，$f_*(\sigma)$ 是一一的，故 f_* 是同构。同调群在同构意义下不变。

example $X=\{x_0\}\cong pt$(单点集)。任意维数 q，只有一个 q 单形 $\sigma_q:\Delta_q\to pt$，$S_q(pt)=\langle\sigma_q\rangle\cong\mathbb{Z}$。

- $q=0$ 时, $\partial\sigma_q=0$。
- $q=2n+1$ 时, $\partial\sigma_q=\sum_{i=0}^{2n+1}(-1)^i\sigma_i=\sigma_{q-1}\sum_{i=0}^{2n+1}(-1)^i=0$。
- $q=2n$ 时, $\partial\sigma_q=\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\sigma_i=\sigma_{q-1}$。

得到链复形 $0\xleftarrow{\partial_0}\mathbb{Z}\xleftarrow{\partial_1}\mathbb{Z}\xleftarrow{\partial_2}\mathbb{Z}\xleftarrow{\partial_3}\mathbb{Z}\cdots$, 其中：$B_0=\mathrm{Im}\partial_1=\{0\}$, $Z_0=\ker\partial_0=\mathbb{Z}$, $H_0=\mathbb{Z}/\{0\}=\mathbb{Z}$；$B_1=\mathrm{Im}\partial_2=\mathbb{Z}$, $Z_1=\ker\partial_1=\mathbb{Z}$, $H_1=0$；$B_2=\mathrm{Im}\partial_3=\{0\}$, $Z_2=\ker\partial_2=\{0\}$, $H_2=0$；$\cdots$ 所以 $H_q(pt)=\begin{cases}\mathbb{Z}, & q=0\\ 0, & q\neq 0\end{cases}$。

Kronecker index：$\sigma_0:\Delta_0\to C_0=k_1a_1+\cdots+k_ra_r$, $\varepsilon(C_0)=k_1+\cdots+k_r$ 是 Kronecker index, $\varepsilon:S_0(X)\to\mathbb{Z}$。

example Connected topological space(连通拓扑空间, 图片中未详细展开相关内容)。

5 Mayer - Vietoris 序列

5.1 同调列

1. Exact of complex sequence(复形序列的正合性)：一个链复形和链映射序列 $C\xrightarrow{f}D\xrightarrow{g}E$ 在 D 处正合, 当且仅当对于每个 q, Abel 群序列 $C_q\xrightarrow{f_q}D_q\xrightarrow{g_q}E_q$ 正合。
2. Induced boundary homomorphism of homological group(同调群的诱导边缘同态)：给定链复形的短正合序列 $0\to C\xrightarrow{f}D\xrightarrow{g}E\to 0$, 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r, "f_{q+1}"] \arrow[d, "\partial_{q+1}"] & D_{q+1} \arrow[r, "g_{q+1}"] \arrow[d, "\partial'_{q+1}"] & E_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial''_{q+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_q \arrow[r, "f_q"] \arrow[d] & D_q \arrow[r, "g_q"] \arrow[d] & E_q \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{q-1} \arrow[r, "f_{q-1}"] & D_{q-1} \arrow[r, "g_{q-1}"] & E_{q-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

即对于给定的 q(f_q 是单射且 g_q 是满射), $\partial''_{q+1}\circ f_{q+1}=f_q\circ\partial_{q+1}$, $\partial'_{q+1}\circ g_{q+1}=g_q\circ\partial''_{q+1}$。

对于 $e_q\in Z_q(E)$, 定义群同态 $\partial_*:H_q(E)\to H_{q-1}(C)$, $[e_q]\mapsto[f_{q-1}^{-1}\partial_q g_q^{-1}(e_q)]$。推导过程如下：因为 $e_q\in Z_q(E)$, 即 $\partial''_q(e_q)=0$, 又 g_q 是满射, 所以 $\exists d_q\in D_q$, 使得 $g_q(d_q)=e_q$；由交换性 $g_{q-1}\circ\partial'_q(d_q)=\partial''_q\circ g_q(d_q)=\partial''_q(e_q)=0$, 则 $\partial'_q(d_q)=d_{q-1}\in\ker(g_{q-1})\subset D_{q-1}$；由于序列正合, $d_{q-1}\in\ker(g_{q-1})=\mathrm{Im}(f_{q-1})$, 且 f_{q-1} 是单射, 所以 $\exists$ 唯一 c_{q-1}, 使得 $f_{q-1}(c_{q-1})=d_{q-1}$；再由交换性和 $\partial^2=0$, $\partial'_{q-1}\circ f_{q-1}(c_{q-1})=f_{q-2}\circ\partial_{q-1}(c_{q-1})=0$, 因为 f_{q-1} 是单射, 所以 $\partial_{q-1}(c_{q-1})=0$, 即 $c_{q-1}=f_{q-1}^{-1}(d_{q-1})=f_{q-1}^{-1}\circ\partial'_q\circ g_q^{-1}(e_q)\in Z_{q-1}(C)$。

回顾链映射诱导的同调群同态 $f_*:H_*(C)\to H_*(D)$, $g_*:H_*(D)\to H_*(E)$, 我们得到一个群序列 $\cdots\to H_{q+1}(E)\xrightarrow{\partial_*}H_q(C)\xrightarrow{f_*}H_q(D)\xrightarrow{g_*}H_q(E)\xrightarrow{\partial_*}H_{q-1}(C)\to\cdots$, 称为 exact homology sequence(正合同调序列)。

Theorem 61

Map of exact complex sequence(正合复形序列的映射)：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

链映射 α, β, γ 给出正合同调序列的同态。

第 9 章　交换代数

1　Zaraski 拓扑

第 10 章　结合代数

第 11 章　李代数

一种非结合代数 $\mathfrak{g}$