UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTÍN

Facultad de Ingeniería de Producción y Servicios

Ciencia de la Computación

Práctica 06

ALUMNOS:
Fernandez Mamani, Brayan Gino
Pfuturi Huisa, Oscar David
Quispe Menor, Hermogenes
Quiñonez Lopez, Efrain German
Santos Apaza, Yordy Williams

DOCENTE:
MSc. Vicente Machaca Arceda

CURSO:
Computación Gráfica

17 de mayo de 2021

Índice

1. Ejercicio 1

Dado estos cuatro puntos homogéneos: p0 = (3, 4, 2, 0.5), p1 = (24, 32, 16, 4), p2 = (9, 12, 6, 1) y p3 = (18, 24, 12, 3). Estos representan el mismo punto en 3D, excepto uno, encuentre dicho punto.

Considere un punto P en el espacio n-dimensional. La posición de este punto puede describirse usando coordenadas cartesianas como *P = (x1, x2, ..., xn)*

El punto P se puede representar desde un espacio (n+1)-dimensional mediante el vector *H(x) = (x1w, x2w, ..., xnw, w)*, este es el vector en coordenadas homogéneas, donde w tiene un valor arbitrario y representa un factor de escala.

Para transformar puntos homogéneos a coordenadas cartesianas usamos :

$$Homogénea : (x, y, z) \Leftrightarrow Cartesiana : (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$$

Entonces, los cuatro puntos en coordenadas cartesianas son:

- p0 = (6, 8, 4)
- p1 = (6, 8, 4)
- p2 = (9, 12, 6)
- p3 = (6, 8, 4)

Por lo tanto, el punto p2 es el punto diferente a las demás.
Un punto en coordenadas cartesianas es una línea recta (vector) en coordenadas homogéneas.

2. Ejercicio 2

Obtenga la matriz de transformación, que permita la transformación de la Figura 1.

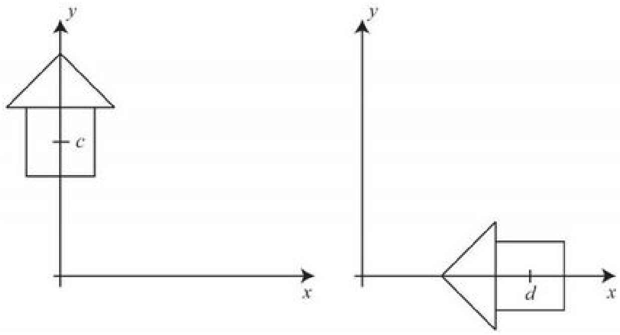


Figura 1: Transformaciones

Calculando la traslación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculando la rotación:

$$\begin{pmatrix} \cos(90) & -\mathrm{sen}(90) & 0 \\ sen(90) & \cos(90) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 1 \end{pmatrix}$$

El resultado es la coordenada (d, 0) con una rotación de 90°.
Aplicando el ejercicio con THREE JS:

```
const translation = new THREE.Matrix4();
translation.set(
    1, 0, 0, d,
    0, 1, 0, -c,
    0, 0, 1, 0,
    0, 0, 0, 1
);
const rotateZ = new THREE.Matrix4();
var theta2 = Math.PI/2;
rotateZ.set(
    Math.cos(theta2), -Math.sin(theta2), 0, 0,
    Math.sin(theta2), Math.cos(theta2), 0, 0,
    0, 0, 1, 0,
    0, 0, 0, 1
);
var transformation = translation.multiply(rotateZ);
```

3. Ejercicio 3

¿Cual es el propósito de la matriz de proyección perspectiva y como se relaciona con el *frustum*?

La proyección en perspectiva intenta hacer que una imagen 2D parezca 3D, utilizando el concepto de perspectiva para imitar lo que vemos cuando miramos el mundo real. Los objetos que están cerca parecen más grandes que los objetos que están lejos y, en algunos casos, las líneas que son paralelas en el espacio 3D ya no lo son cuando se dibujan con perspectiva.

El campo de visión es el ángulo vertical del espacio visible. La relación de aspecto es la relación (ancho / alto) de los planos de recorte cercanos y lejanos. La forma formada por estos elementos y que se muestra en la Figura 2 se llama *frustum*.

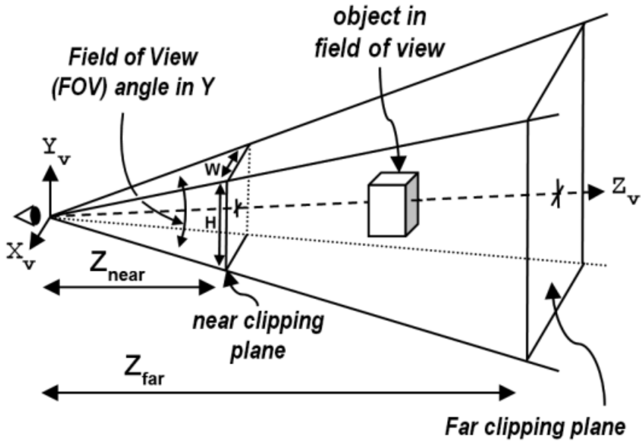


Figura 2: Volumen de vista en perspectiva o frustum.

4. Ejercicio 4

Investigue y explique el fundamento matemático de la matriz de proyección perspectiva. Representamos la matriz de proyección perspectiva como una transformación lineal, sera M_{proy}:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = M_{Proy} * \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{bmatrix}$$

$$x_p = n\frac{x_e}{-z_e} \quad y_p = n\frac{y_e}{-z_e}$$

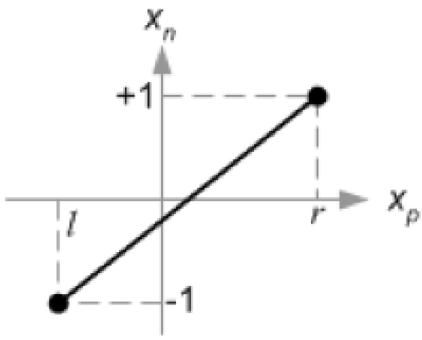
$$x = nx_e \quad y = ny_e$$

$$x_p = \frac{x}{-z_e} \quad y_p = \frac{y}{-z_e}$$

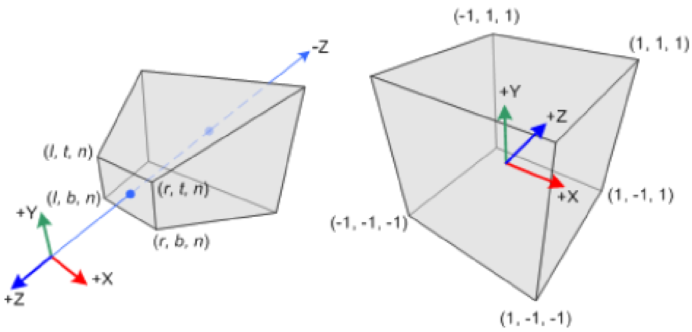
Podemos establecer que la componente w en este espacio intermedio es $-z_e$. Entonces, la cuarta fila de la matriz es (0,0,-1,0).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{bmatrix}$$

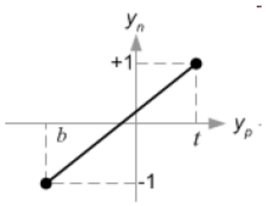
Buscamos ahora una expresión que nos permita encontrar la transformación lineal para x y para y. Sabemos que debemos tener en cuenta las relaciones lineales $[l, r] \rightarrow [-1, 1]y[b, t] \rightarrow [-1, 1]$

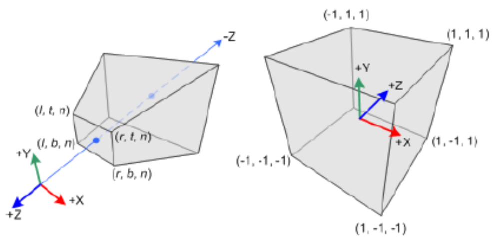


$$x_n = \frac{1-(-1)}{r-1} * x_p + \beta \Rightarrow 1 = \frac{2r}{r-1} + \beta$$
$$\beta = 1 - \frac{2r}{r-1} = \frac{r+1}{r-1} \therefore x_n = \frac{2x_p}{r-1} - \frac{r+1}{r-1}$$



Se mapea y_p con $[b, t]] \to [-1, 1]$:





$$y_n = \frac{1-(-1)}{t-b} * y_p + \beta \Rightarrow 1 = \frac{2r}{t-b} + \beta \qquad \beta = 1 - \frac{2t}{t-b} = \frac{t+b}{t-b} \therefore y_n = \frac{2y_p}{t-b} - \frac{t+b}{t-b}$$

Dado que conocemos el mapeo y que sabemos que para pasar del espacio intermedio a las coordenadas normalizadas del dispositivo debemos dividir por w=-ze veamos ahora cómo obtenemos x e y.

Sabemos que:

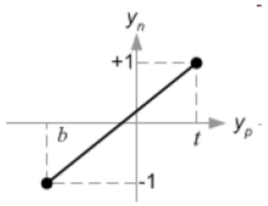
$$x_n = \frac{2x_p}{r-1} - \frac{r+1}{r-1} \quad y_n = \frac{2y_p}{t-b} - \frac{t+b}{t-b}$$
$$x_p = n\frac{x_e}{-z_e} \quad y_p = n\frac{y_e}{-z_e}$$

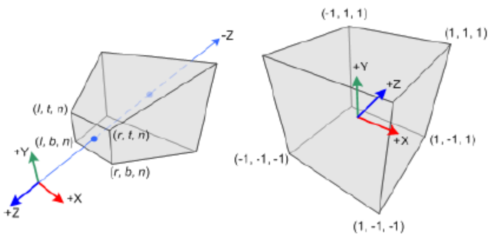
Reemplazando:

$$x_n = \frac{2x_p}{r-1} - \frac{r+1}{r-1} = \frac{2\frac{nx_e}{-z_e}}{r-1} - \frac{r+1}{r-1}$$

$$= \frac{2nx_e}{(r-1)(-z_e)} - \frac{r+1}{r-1} = \frac{2\frac{nx_e}{(r-1)}}{-z_e} - \frac{r+1}{r-1}$$

$$= \frac{\frac{2n}{r-1}x_e}{-z_e} - \frac{\frac{r+1}{r-1}(-z_e)}{-z_e} = \frac{(\frac{2n}{r-1}x_e + \frac{r+1}{r-1}z_e)}{-z_e} = \frac{x}{-z_e}$$





$$x_n \quad w = -z_e$$

Para y efectuamos cálculos análogos y obtenemos:

$$x = (\frac{2n}{r-1}x_e + \frac{r+1}{r-1}z_e) \quad y = (\frac{2n}{t-b}y_e + \frac{t+b}{t-b}z_e)$$

Entonces completamos la primera y la segunda fila de la matriz de proyección:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-1} & 0 & \frac{r+1}{r-1} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{bmatrix}$$

Para encontrar z_n debemos trabajar de manera diferente porque z_e en el espacio del ojo se proyecta siempre a -n en el plano near. Además de poder realizar el test de profundidad, debemos poder realizar la transformada inversa de la proyección. Sabemos que z no depende del valor de x o de y.

$$z_n = \frac{z}{w}, w = -z_e \Rightarrow z_n = \frac{z}{-z_e} = \frac{Az_e + Bw_e}{-z_e} = \frac{Az_e + B}{-z_e}$$

Para encontrar los coeficientes A y B usamos la relación que existe entre $(ze, zn), esdecir(-n \Rightarrow -1)y(-f \Rightarrow 1):$

$$z_n = \frac{Az_e + B}{-z_e}$$

y tenemos entonces 2 ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} B = An - n \\ B = Af + f \end{cases} \quad A = -\frac{f+n}{f-n}$$

y reemplazando A en $B = An - n = -\frac{2fn}{f-n}$

así podemos obtener así z en función de z_e completamos la matriz de transformación:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-1} & 0 & \frac{r+1}{r-1} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-(f+n)}{f-n} & \frac{-2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{bmatrix}$$

Referencias

[1] Lab. de Visualización y Computación Gráfica. (s. f.). Escenas 3D. Computación Grafica. Recuperado 15 de mayo de 2021, de http://www.cs.uns.edu.ar/cg/clasespdf/3-Pipe3D.pdf