PROPUESTA DE TESIS

Aprendizaje automático en el modelado de la propagación de ondas: De los métodos numéricos estándar a las redes neuronales informadas por la física

Estudiante: Oscar Rincón-Cardeño
Director: Nicolás Guarín-Zapata, Ph.D.
Codirectora: Silvana Montoya-Noguera, Ph.D.
Grupos de investigación: Aplicaciones Matemáticas en Ciencias e Ingeniería
Naturaleza y Ciudad

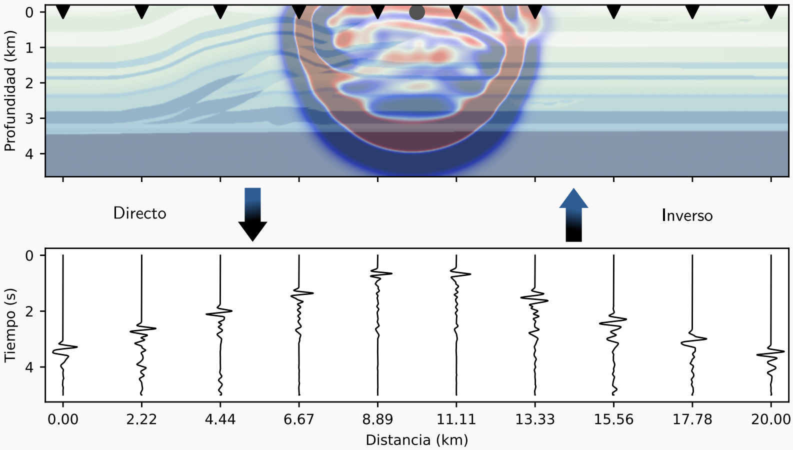
Universidad EAFIT
Escuela de Ciencias Aplicadas e Ingeniería
Doctorado en Ingeniería

Noviembre de 2025

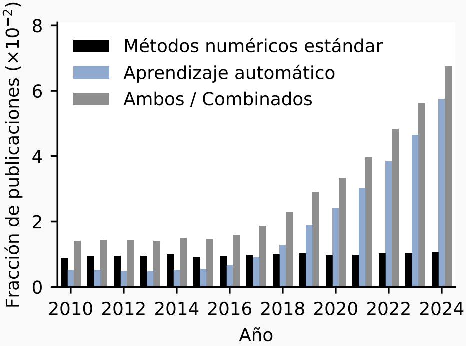
Contenido

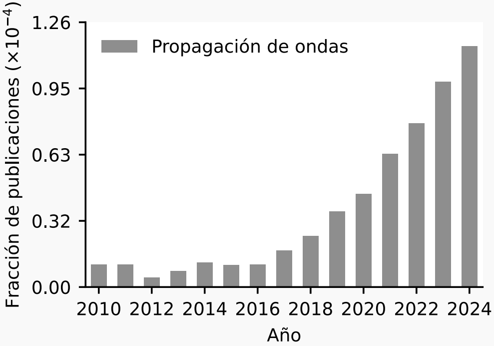
Introducción

Un **modelo matemático que describe la propagación de ondas** en un medio en el caso directo busca representar, mediante una función, cómo evoluciona un sistema a lo largo del tiempo y en el espacio.

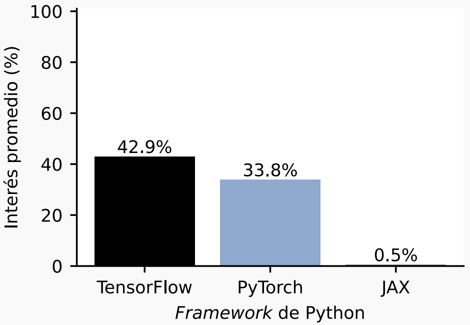


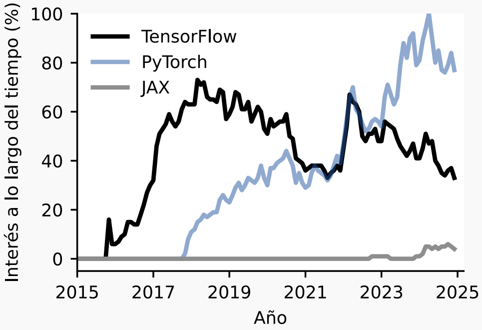
La relevancia de esta investigación se sustenta en el **creciente interés por integrar técnicas de aprendizaje automático** en áreas tradicionalmente dominadas por métodos numéricos estándar, como la sismología.



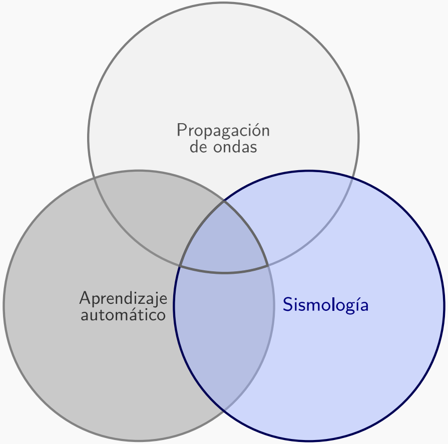


La investigación en aprendizaje automático fue impulsada por avances en hardware como las GPUs, un incremento significativo en la disponibilidad de datos, así como el desarrollo de **herramientas computacionales de acceso abierto** para la implementación de estos métodos.





Proponemos abordar la intersección entre el **aprendizaje automático** y el modelado de **la propagación de ondas**, específicamente en aplicaciones en **sismología**.



Se plantea la siguiente **pregunta de investigación**:

> *¿De qué manera el aprendizaje automático puede constituir una alternativa o un complemento para las aplicaciones relacionadas con la propagación de ondas sísmicas?*

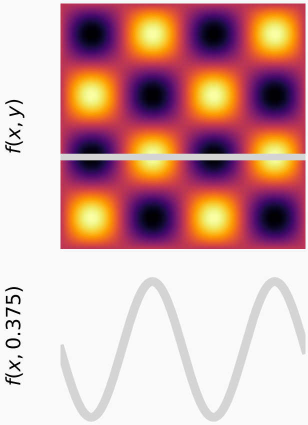
En los **métodos numéricos estándar**, el dominio espacial se discretiza para resolver la ecuación diferencial.

Consideremos **el caso de la solución aproximada $\hat{f}$ obtenida mediante el método de diferencias finitas** para la ecuación de Helmholtz:

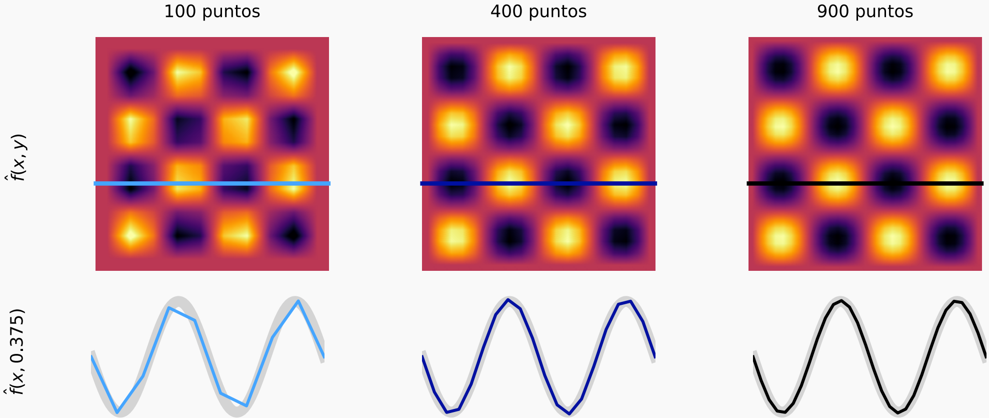
$$\begin{cases} \nabla^2 f + (5\pi)^2 f = 0, & \text{en } \Omega, \\ f = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

La solución analítica correspondiente está dada por

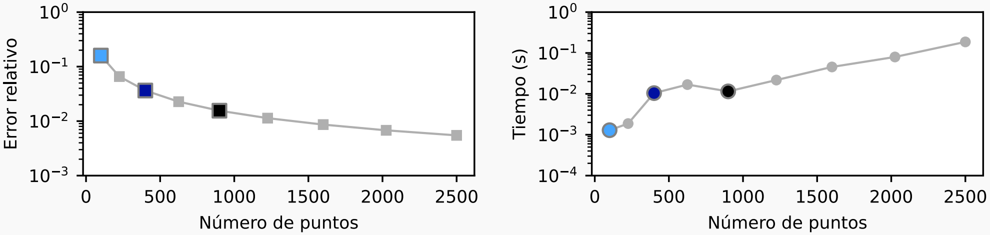
$$f(x, y) = \sin(5\pi x)\sin(5\pi y).$$



la precisión requerida que se logra **depende de la discretización de la malla computacional.**



Se reduce el error relativo con respecto a la solución analítica y, al mismo tiempo, **incrementa el tiempo de cómputo.**

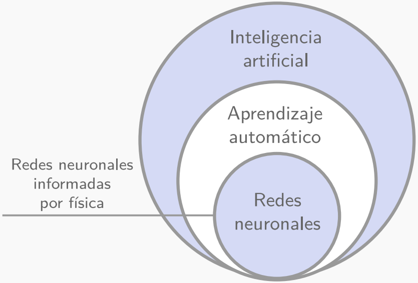


Se ha sugerido que las implementaciones basadas en **aprendizaje automático** pueden hacer que sus aplicaciones sean más eficientes.

Una red neuronal puede entenderse como una función $f(x)$ que es **la composición de varias funciones** $g_i(x)$, cada una representando una transformación aplicada a la entrada x:

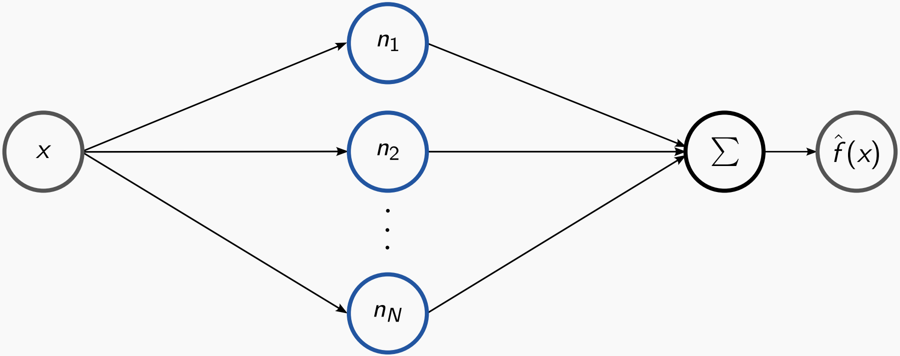
$$f(x) = g_n(g_{n-1}(\ldots g_2(g_1(x))\ldots)).$$

Cada función $g_i(x)$ se define como: $g_i(x) = \sigma(w_i x + b_i)$, donde w_i y b_i **son parámetros ajustables (peso y sesgo)** y σ es una función de activación.



Teorema de aproximación universal

Una red neuronal con una sola capa oculta y cierto número finito de neuronas puede aproximar de manera arbitraria cualquier función continua, dada una función de activación adecuada.



$\approx f(x)$

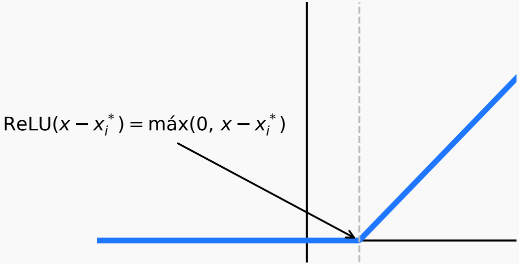
Queremos **aproximar la siguiente función**:

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

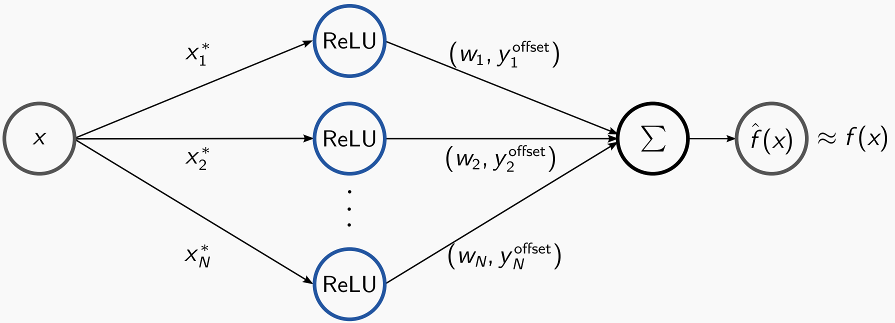
Utilizando una red neuronal de una sola capa de la forma:

$$f(x) \approx \hat{f}_i(x) = \sum_{i=1}^{N} g_i(x).$$

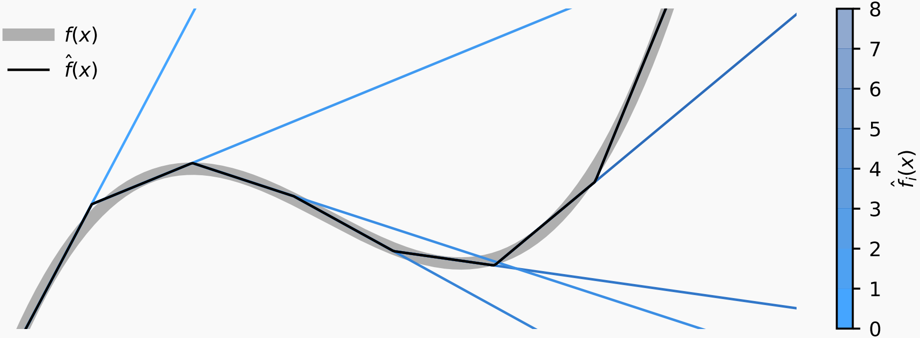
Donde: $g_i(x) = w_i \,\mathrm{ReLU}(x - x_i^*) + y_i^{\text{offset}}$.



Se construye una red con una sola capa oculta y un número finito de neuronas N.

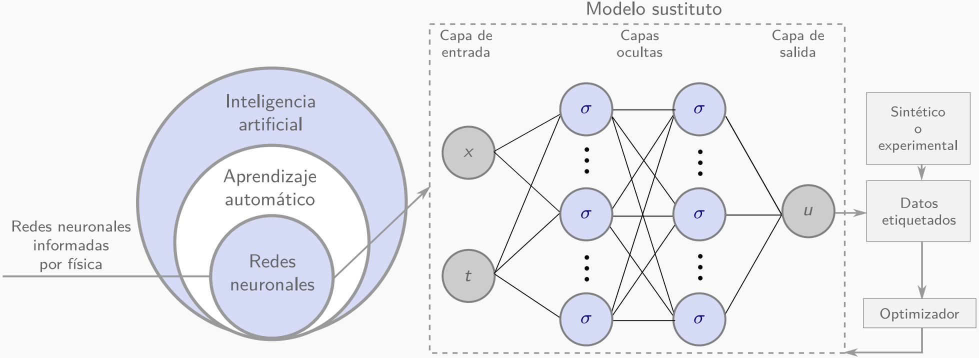


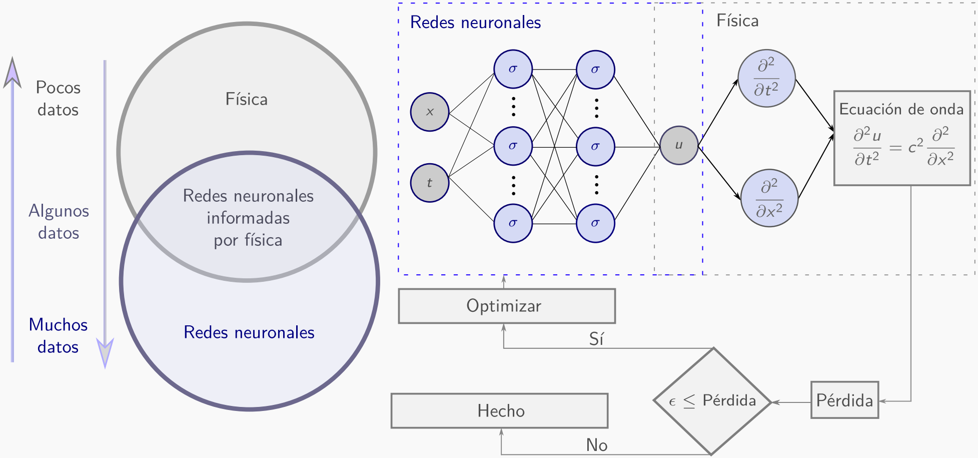
La combinación de todos los tramos produce una aproximación por partes que captura la estructura de $f(x)$.



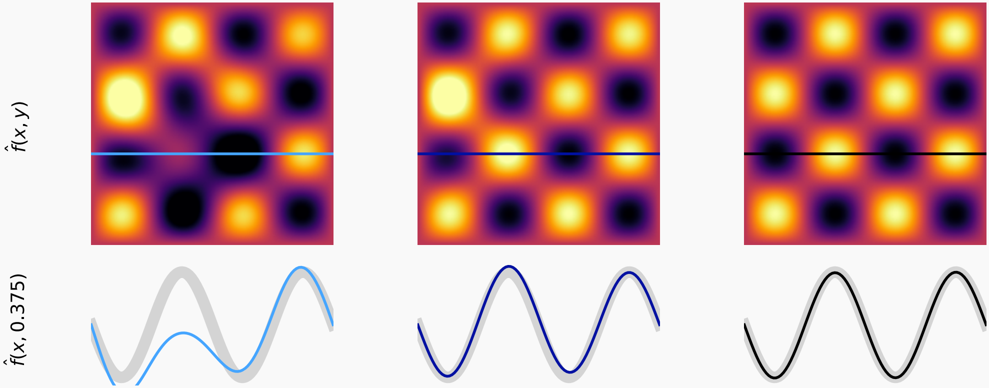
Aunque una red de una sola capa es capaz de aproximar cualquier función, dicha capa podría requerir un número de neuronas inviable y aun así no garantizar un aprendizaje y generalización adecuados.

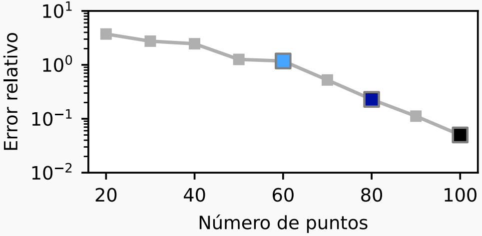
Goodfellow, Bengio & Courville (2016)


Modelo sustituto
Capa de entrada
Capas ocultas
Capa de salida
Inteligencia artificial
Aprendizaje automático
Redes neuronales
Redes neuronales informadas por física
x
t
σ
u
Sintético o experimental
Datos etiquetados
Optimizador

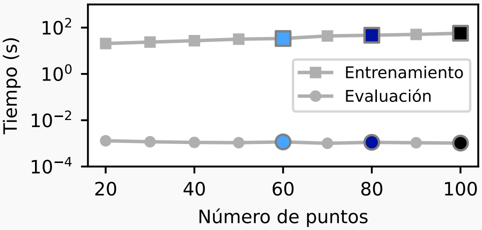

Pocos
datos
Algunos
datos
Muchos
datos
Física
Redes neuronales
informadas
por física
Redes neuronales
Redes neuronales
Física
x
t
σ
u
$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$
$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$
Ecuación de onda
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$
Optimizar
Sí
$\epsilon \leq$ Pérdida
Pérdida
Hecho
No


60 puntos
80 puntos
100 puntos
Puntos de muestreo


$\hat{f}(x, y)$
$\hat{f}(x, 0.375)$



10^1
10^0
10^{-1}
10^{-2}
Error relativo
20
40
60
80
100
Número de puntos



10^2
10^0
10^{-2}
10^{-4}
Tiempo (s)
Entrenamiento
Evaluación
20
40
60
80
100
Número de puntos

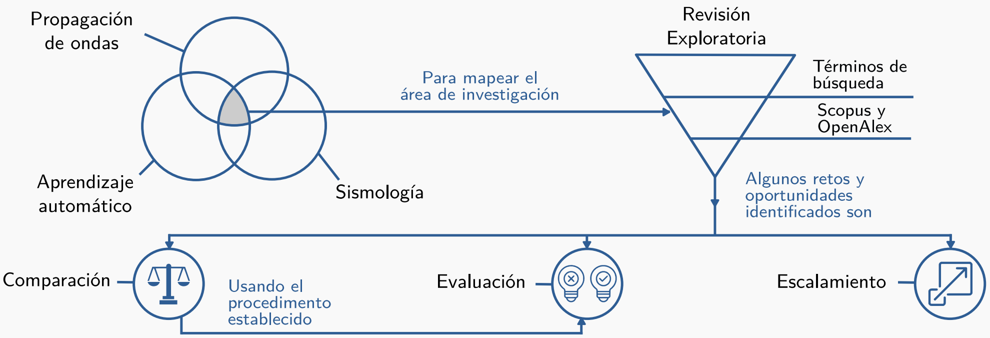
Objetivos de investigación

Objetivo general:

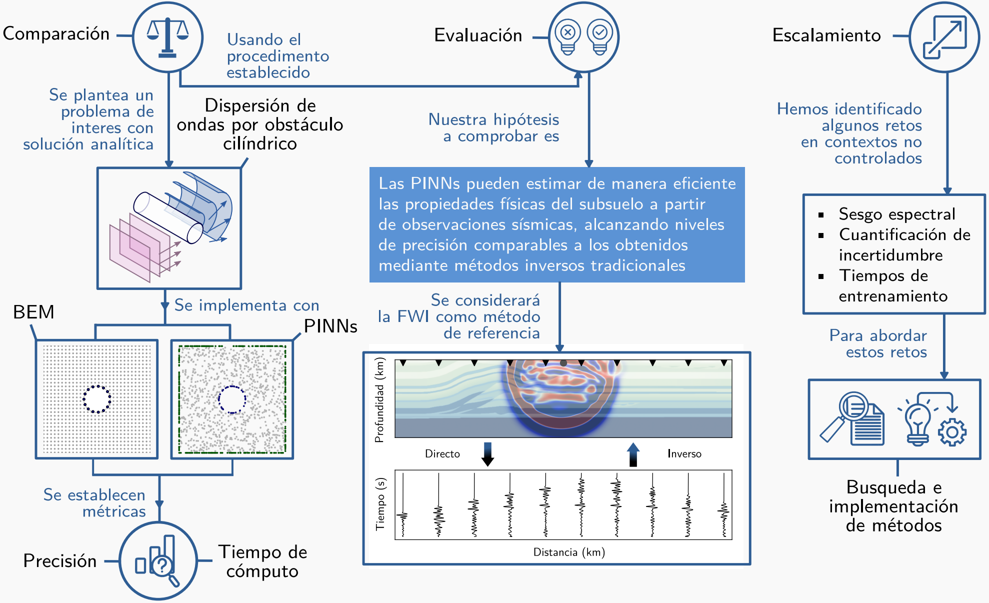
Desarrollar enfoques de aprendizaje automático que puedan constituir una alternativa o complemento a los métodos numéricos estándar en la modelación de la propagación de ondas, con énfasis en la evaluación de su rendimiento computacional y aplicabilidad en sismología.

Objetivos específicos:

- **Mapear** las técnicas de aprendizaje automático utilizadas en el modelado de la ecuación de ondas aplicadas a la sismología, resaltando sus aplicaciones, alcances y desafíos actuales.
- **Comparar** métodos representativos de aprendizaje automático, frente a enfoques numéricos estándares, evaluando su precisión y eficiencia computacional, destacando sus ventajas, limitaciones y potencial de integración.
- **Evaluar** la capacidad de las PINNs para resolver problemas inversos en sismología, en lo referente a mantener una precisión comparable a la de los métodos estándar y, al mismo tiempo, reducir los costos computacionales.
- **Escalar** los enfoques basados en aprendizaje automático para favorecer el uso de datos provenientes de problemas en sismología en escenarios no controlados.


Propagación de ondas
Aprendizaje automático
Sismología
Para mapear el área de investigación
Revisión Exploratoria
Términos de búsqueda
Scopus y OpenAlex
Algunos retos y oportunidades identificados son
Comparación
Usando el procedimento establecido
Evaluación
Escalamiento

Métodología



Comparación
Usando el procedimento establecido
Evaluación
Escalamiento
Se plantea un problema de interes con solución analítica
Dispersión de ondas por obstáculo cilíndrico
Nuestra hipótesis a comprobar es
Las PINNs pueden estimar de manera eficiente las propiedades físicas del subsuelo a partir de observaciones sísmicas, alcanzando niveles de precisión comparables a los obtenidos mediante métodos inversos tradicionales
Hemos identificado algunos retos en contextos no controlados
Sesgo espectral
Cuantificación de incertidumbre
Tiempos de entrenamiento
Se implementa con
BEM
PINNs
Se considerará la FWI como método de referencia
Para abordar estos retos
Profundidad (km)
Directo
Inverso
Tiempo (s)
Distancia (km)
Se establecen métricas
Precisión
Tiempo de cómputo
Busqueda e implementación de métodos

Avances preliminares

¿Cómo pueden compararse los enfoques modernos basados en aprendizaje automático para resolver PDEs con los métodos numéricos estándar?

Contacto: orincon@eafit.edu.co