

PROPUESTA DE TESIS

Aprendizaje automático en el modelado de la propagación de ondas: De los métodos numéricos estándar a las redes neuronales informadas por la física

Estudiante: Oscar Rincón-Cardeño

Director: Nicolás Guarín-Zapata, Ph.D.

Codirectora: Silvana Montoya-Noguera, Ph.D.

Grupos de investigación: Aplicaciones Matemáticas en Ciencias e Ingeniería
Naturaleza y Ciudad

Universidad EAFIT

Escuela de Ciencias Aplicadas e Ingeniería

Doctorado en Ingeniería

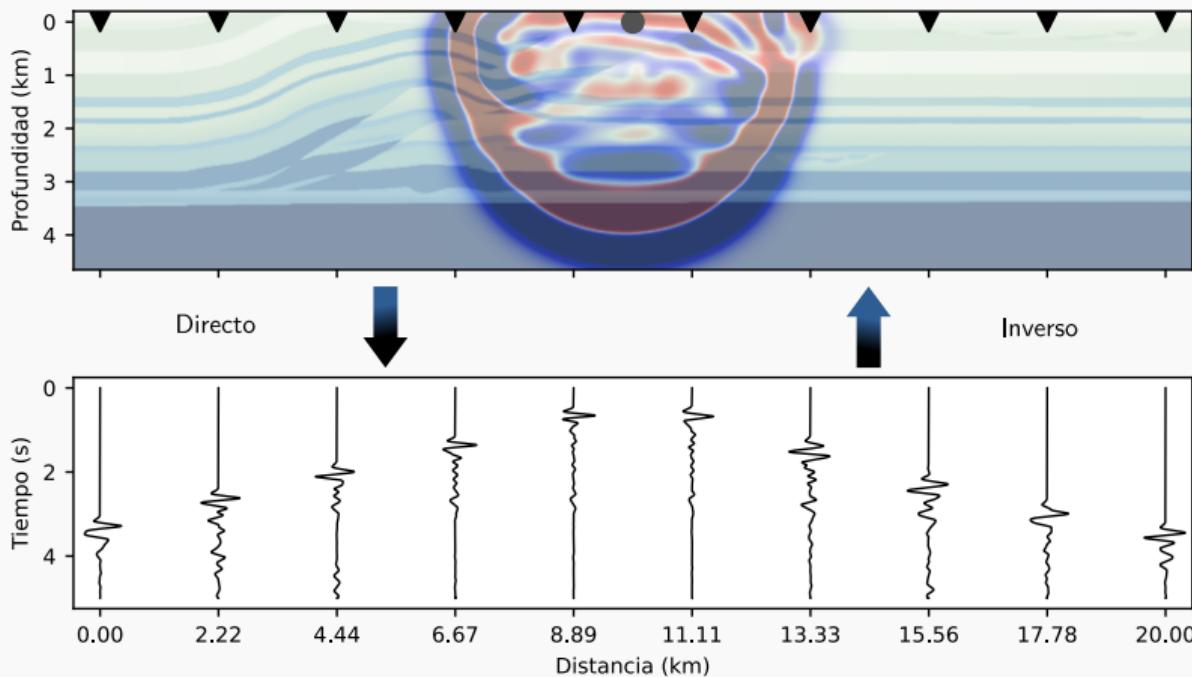
Noviembre de 2025

Contenido

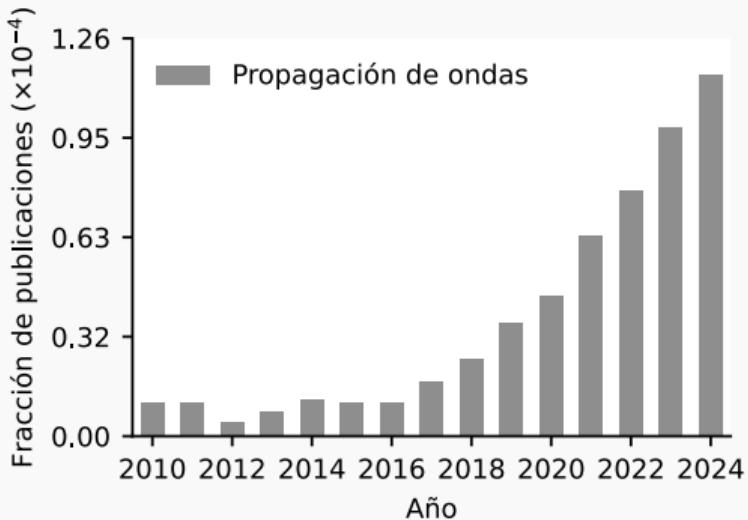
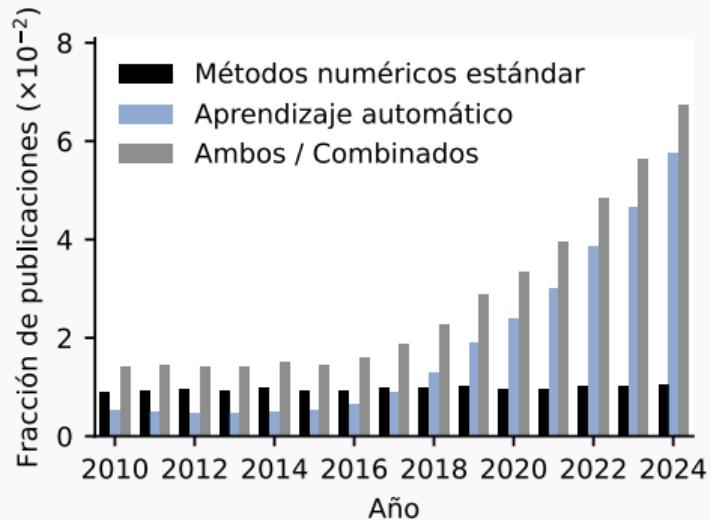
- ▶ Introducción
 - Modelado de la propagación de ondas
 - Métodos numéricos estándar
 - Métodos basados en aprendizaje automático
- ▶ Objetivos de investigación
 - Objetivo general
 - Objetivos específicos
- ▶ Metodología
- ▶ Avances preliminares

Introducción

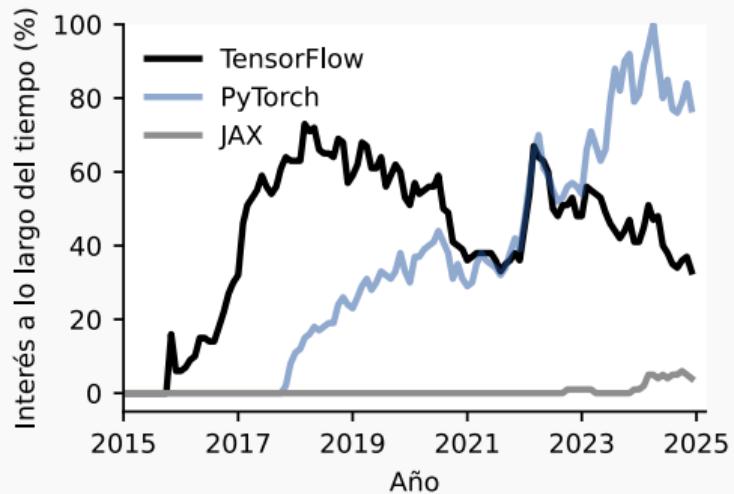
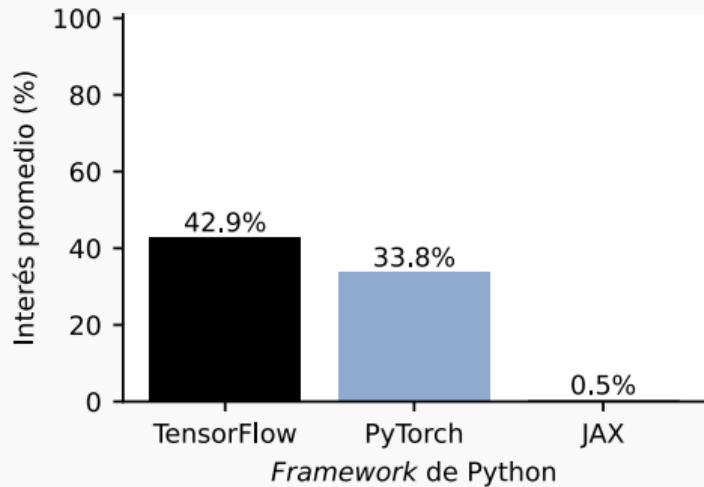
Un modelo matemático que describe la propagación de ondas en un medio en el caso directo busca representar, mediante una función, cómo evoluciona un sistema a lo largo del tiempo y en el espacio.



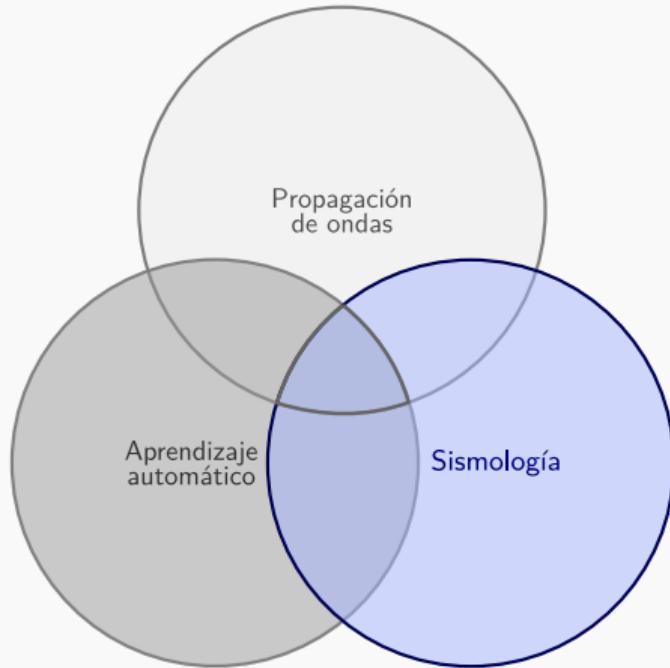
La relevancia de esta investigación se sustenta en el **creciente interés por integrar técnicas de aprendizaje automático** en áreas tradicionalmente dominadas por métodos numéricos estándar, como la sismología.



La investigación en aprendizaje automático fue impulsada por avances en hardware como las GPUs, un incremento significativo en la disponibilidad de datos, así como el desarrollo de **herramientas computacionales de acceso abierto** para la implementación de estos métodos.



Proponemos abordar la intersección entre el **aprendizaje automático** y el modelado de **la propagación de ondas**, específicamente en aplicaciones en **sismología**.



Se plantea la siguiente **pregunta de investigación**:

¿De qué manera el aprendizaje automático puede constituir una alternativa o un complemento para las aplicaciones relacionadas con la propagación de ondas sísmicas?

En los **métodos numéricos estándar** la precisión requerida que se logra depende de la discretización de la malla computacional.



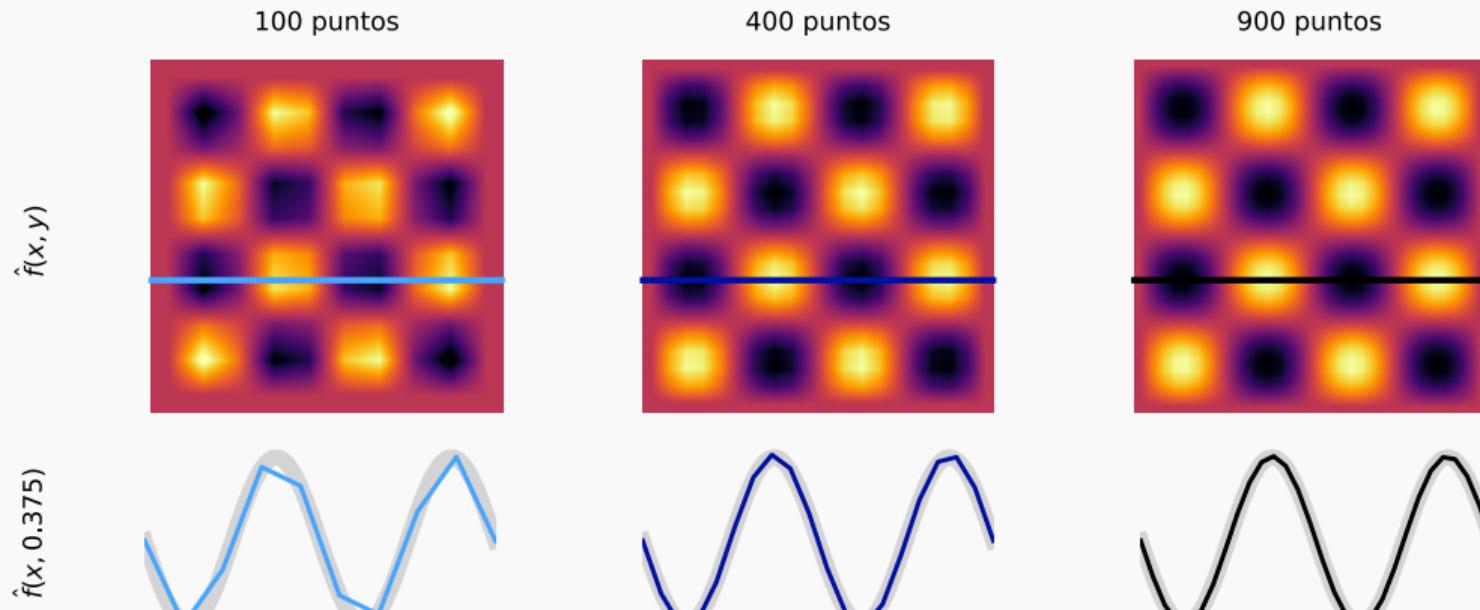
Consideremos el caso de la solución aproximada \hat{f} obtenida mediante el método de diferencias finitas para la ecuación de Helmholtz:

$$\begin{cases} \nabla^2 f + (5\pi)^2 f = 0, & \text{en } \Omega, \\ f = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

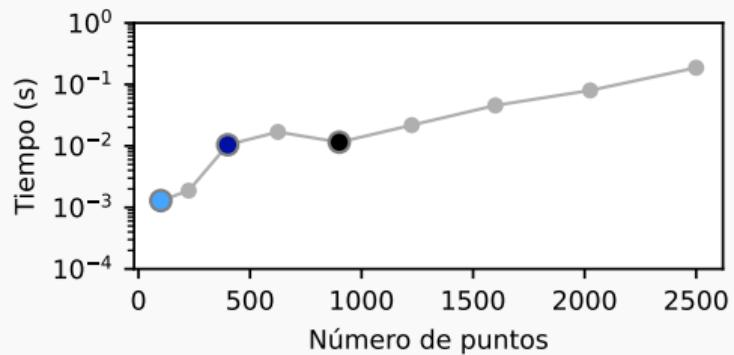
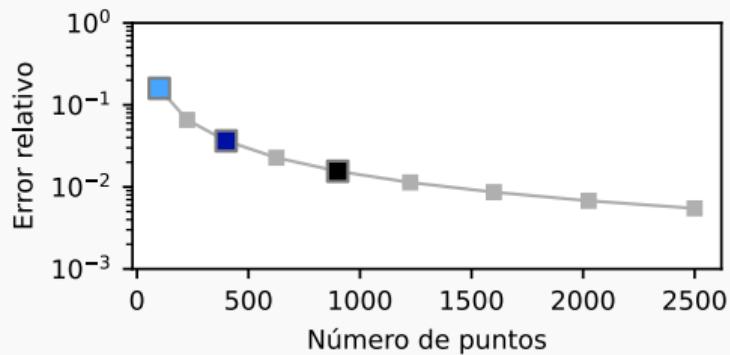
La solución analítica correspondiente está dada por

$$f(x, y) = \sin(5\pi x) \sin(5\pi y).$$

El refinamiento de la malla mejora la aproximación numérica.



Se reduce el error relativo con respecto a la solución analítica y, al mismo tiempo, incrementa el tiempo de cómputo.



Aprendizaje automático como alternativa para el modelado de la propagación de ondas

¿Qué es una red neuronal?

Una red neuronal puede entenderse como una función $f(x)$ que es **la composición de varias funciones** $g_i(x)$, cada una de las cuales aplica una transformación a la entrada x :

$$f(x) = g_n(g_{n-1}(\dots g_2(g_1(x)) \dots)).$$

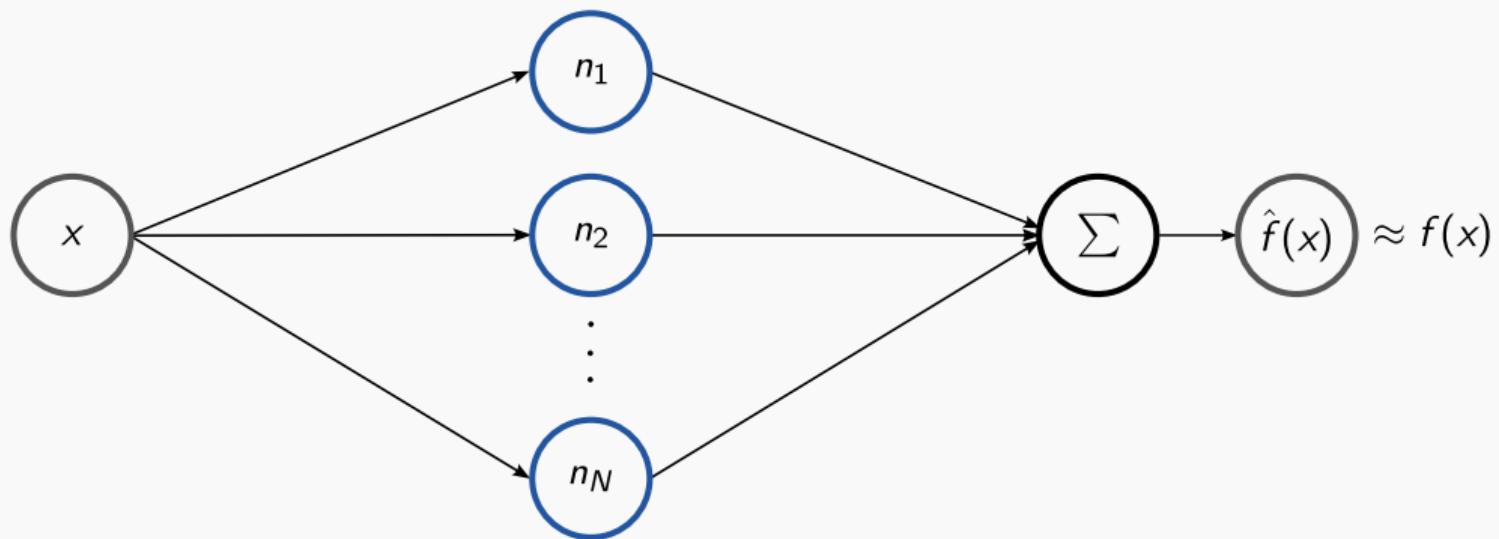
Cada función $g_i(x)$ puede escribirse como:

$$g_i(x) = \sigma(w_i x + b_i),$$

donde w_i y b_i son parámetros ajustables (peso y sesgo, respectivamente), y σ es una función de activación no lineal.

Teorema de aproximación universal

Una red neuronal con una sola capa oculta y cierto número finito de neuronas puede aproximar de manera arbitraria cualquier función continua, dada una función de activación adecuada.



Ejemplo: aproximación de funciones con redes neuronales

Queremos aproximar la siguiente función:

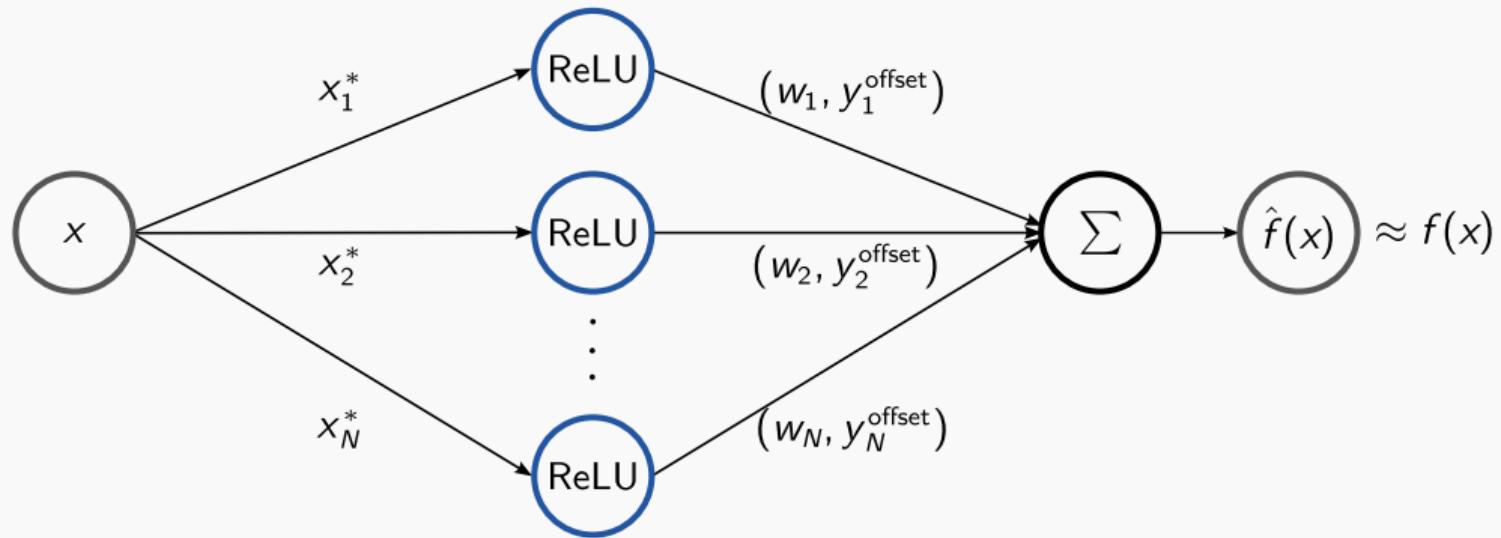
$$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

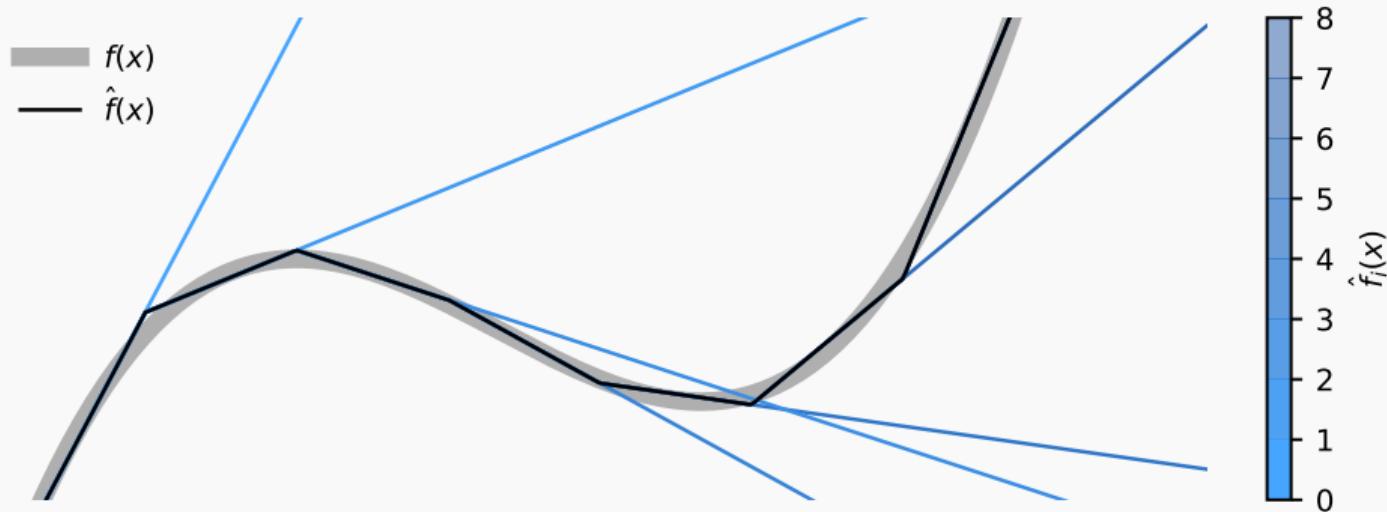
Utilizando una red neuronal de una sola capa de la forma:

$$f(x) \approx \hat{f}_i(x) = \sum_{i=1}^N g_i(x).$$

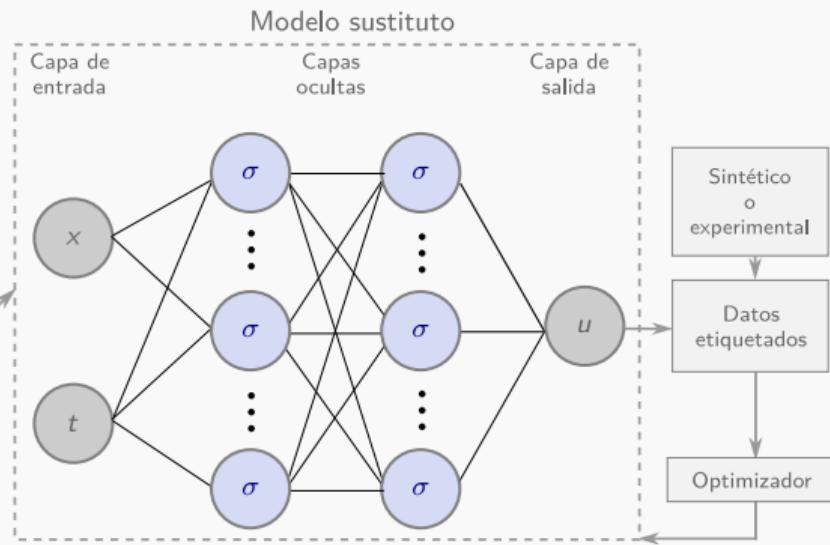
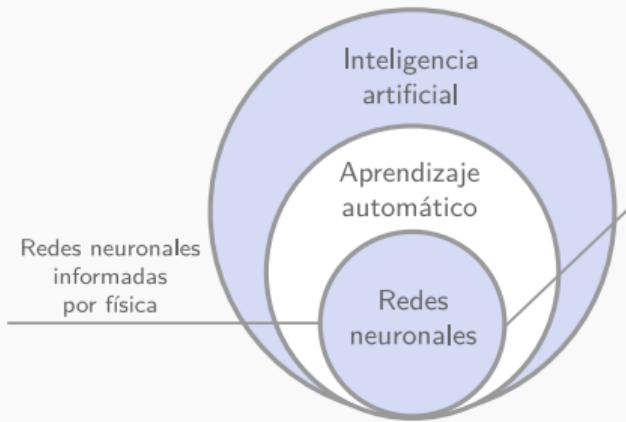
donde cada función $g_i(x)$ está dada por:

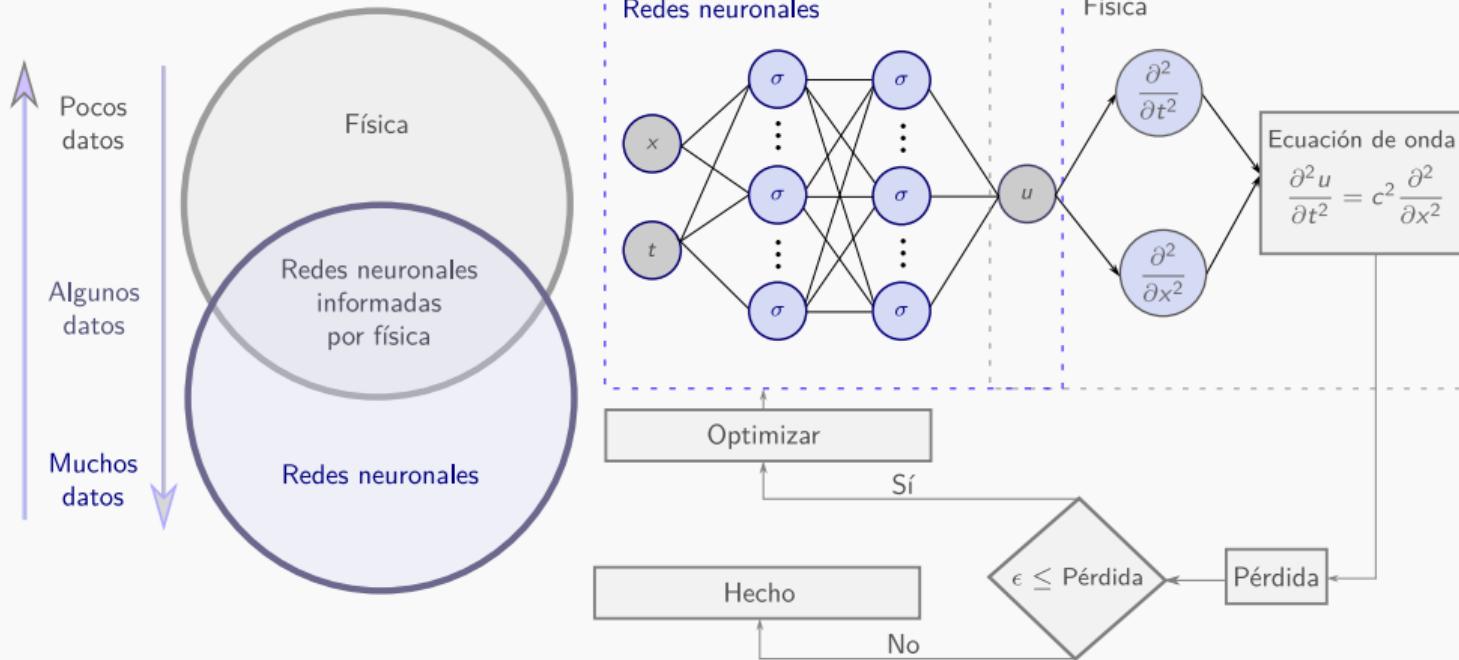
$$g_i(x) = w_i \operatorname{ReLU}(x - x_i^*) + y_i^{\text{offset}}.$$





Aunque una red de una sola capa es capaz de aproximar cualquier función, dicha capa podría requerir un número de neuronas inviable y aun así no garantizar un aprendizaje y generalización adecuados.





Puntos de muestreo

60 puntos



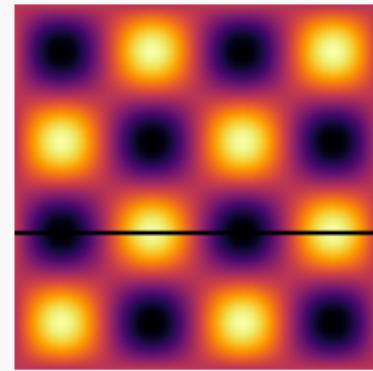
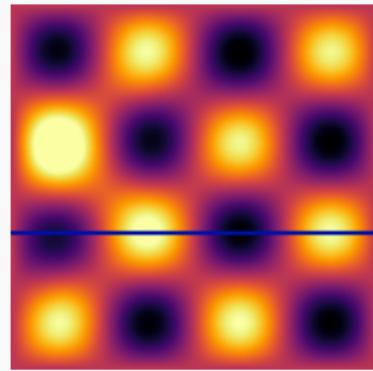
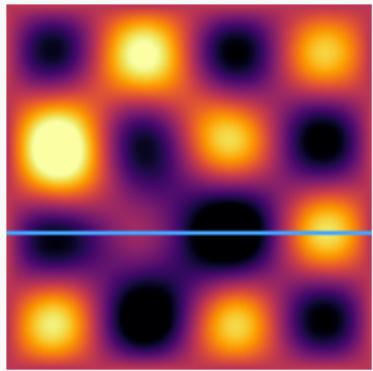
80 puntos



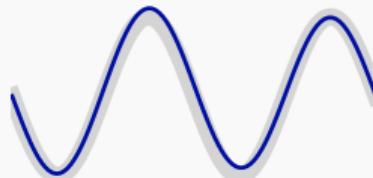
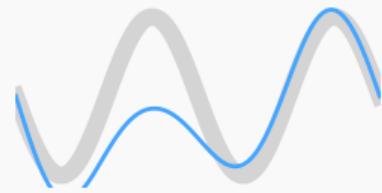
100 puntos

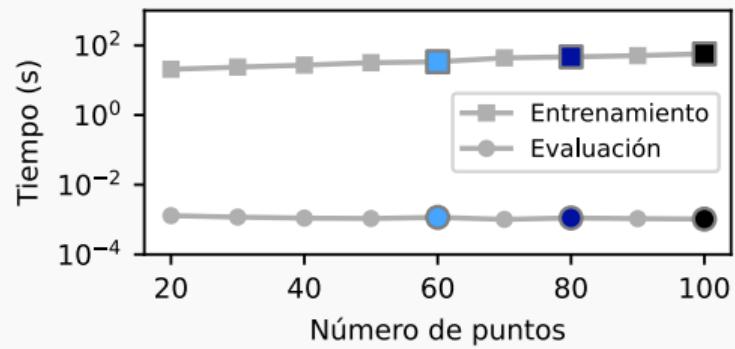
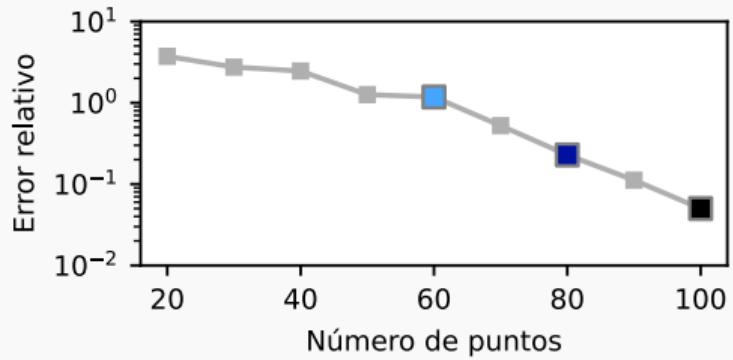


$\hat{f}(x, y)$



$\hat{f}(x, 0.375)$





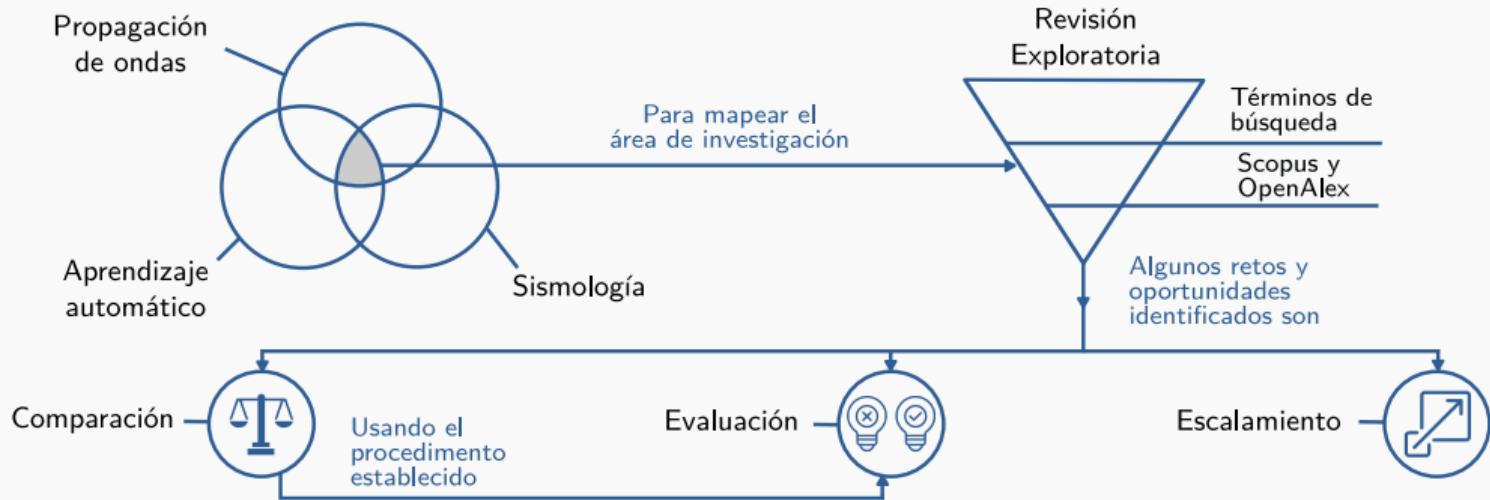
Objetivos de investigación

Objetivo general:

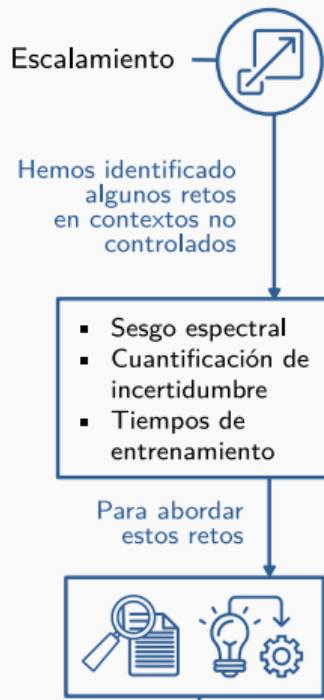
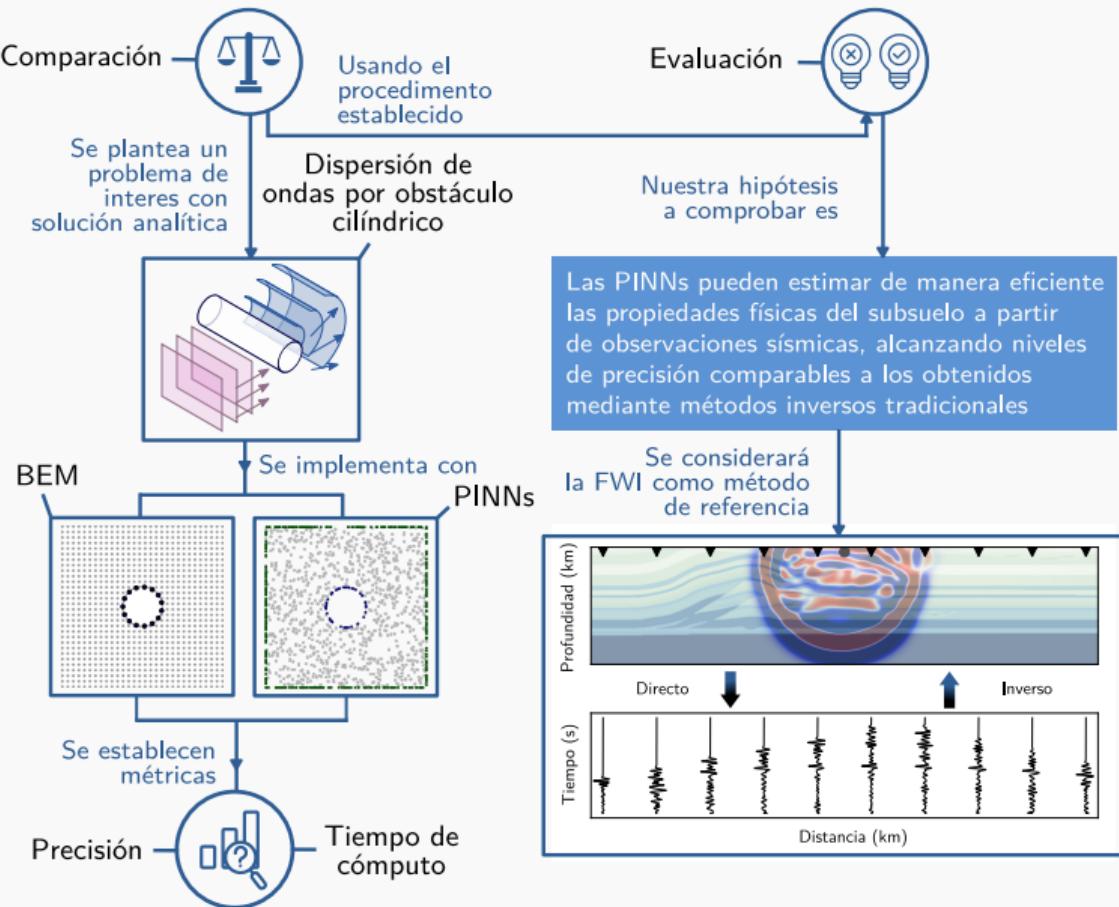
Desarrollar enfoques de aprendizaje automático que puedan constituir una alternativa o complemento a los métodos numéricos estándar en la modelación de la propagación de ondas, con énfasis en la evaluación de su rendimiento computacional y aplicabilidad en sismología.

Objetivos específicos:

- ▶ **Mapear** las técnicas de aprendizaje automático utilizadas en el modelado de la ecuación de ondas aplicadas a la sismología, resaltando sus aplicaciones, alcances y desafíos actuales.
- ▶ **Comparar** métodos representativos de aprendizaje automático, frente a enfoques numéricos estándares, evaluando su precisión y eficiencia computacional, destacando sus ventajas, limitaciones y potencial de integración.
- ▶ **Evaluar** la capacidad de las PINNs para resolver problemas inversos en sismología, en lo referente a mantener una precisión comparable a la de los métodos estándar y, al mismo tiempo, reducir los costos computacionales.
- ▶ **Escalar** los enfoques basados en aprendizaje automático para favorecer el uso de datos provenientes de problemas en sismología en escenarios no controlados.



Métodología



Avances preliminares

¿Cómo pueden compararse los enfoques modernos basados en aprendizaje automático para resolver PDEs con los métodos numéricos estándar?

Contacto: orincon@eafit.edu.co