PROPUESTA DE TESIS

# Aprendizaje automático en el modelado de la propagación de ondas: De los métodos numéricos estándar a las redes neuronales informadas por la física


**Estudiante:** Oscar Rincón-Cardeño
**Director:** Nicolás Guarín-Zapata, Ph.D.
**Codirectora:** Silvana Montoya-Noguera, Ph.D.
**Grupos de investigación:** Aplicaciones Matemáticas en Ciencias e Ingeniería
Naturaleza y Ciudad

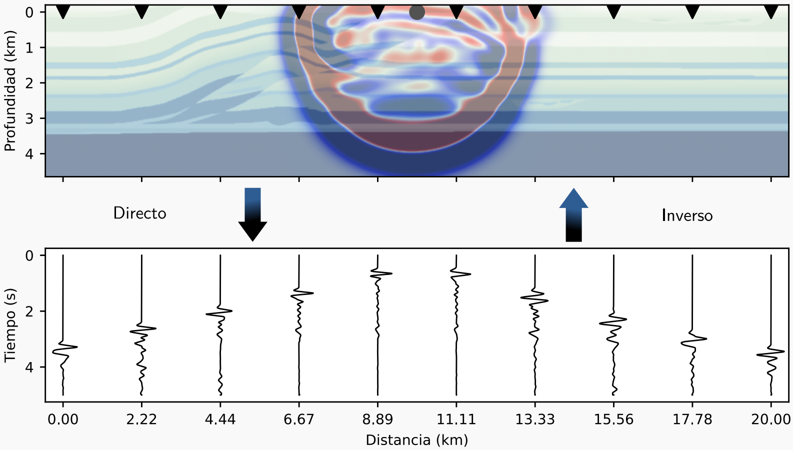
Universidad EAFIT
Escuela de Ciencias Aplicadas e Ingeniería

Doctorado en Ingeniería
Noviembre de 2025

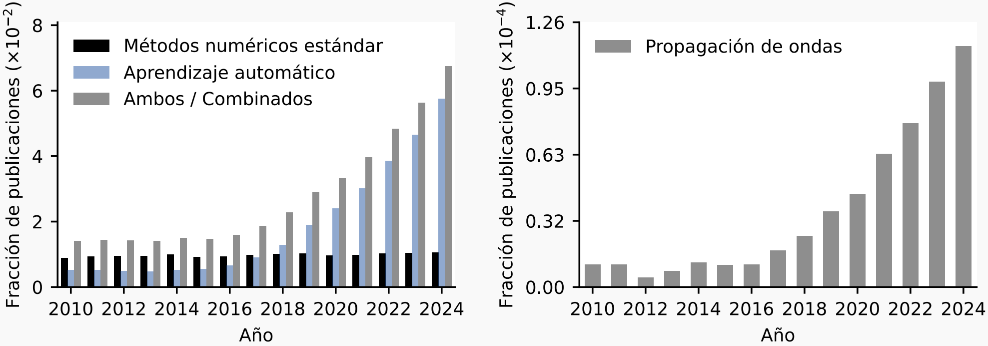
# Contenido

# Introducción

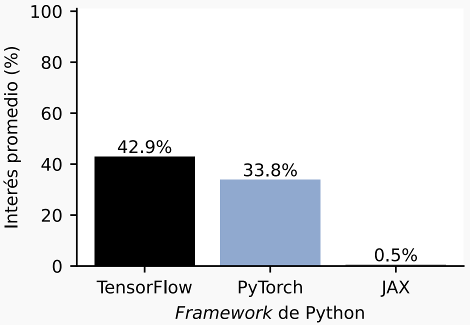
Un **modelo matemático que describe la propagación de ondas** en un medio en el caso directo busca representar, mediante una función, cómo evoluciona un sistema a lo largo del tiempo y en el espacio.

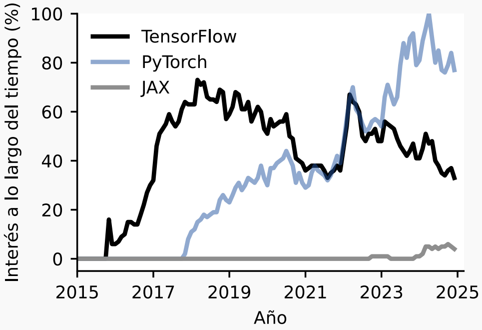


La relevancia de esta investigación se sustenta en el **creciente interés por integrar técnicas de aprendizaje automático** en áreas tradicionalmente dominadas por métodos numéricos estándar, como la sismología.

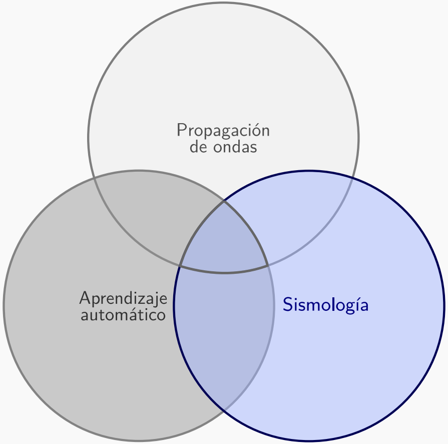


La investigación en aprendizaje automático fue impulsada por avances en hardware como las GPUs, un incremento significativo en la disponibilidad de datos, así como el desarrollo de **herramientas computacionales de acceso abierto** para la implementación de estos métodos.



Proponemos abordar la intersección entre el **aprendizaje automático** y el modelado de **la propagación de ondas**, específicamente en aplicaciones en **sismología**.



Se plantea la siguiente **pregunta de investigación**:

> *¿De qué manera el aprendizaje automático puede constituir una alternativa o un complemento para las aplicaciones relacionadas con la propagación de ondas sísmicas?*

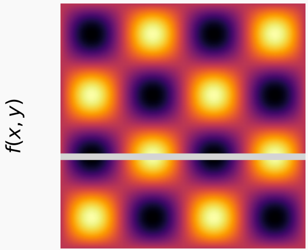
En los **métodos numéricos estándar**, el dominio espacial se discretiza para resolver la ecuación diferencial.

Consideremos **el caso de la solución aproximada $\hat{f}$ obtenida mediante el método de diferencias finitas** para la ecuación de Helmholtz:

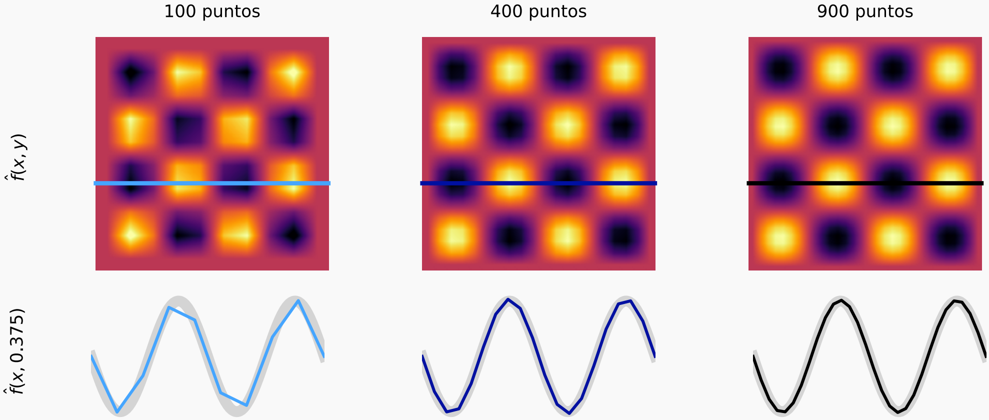
$$\begin{cases} \nabla^2 f + (5\pi)^2 f = 0, & \text{en } \Omega, \\ f = 0, & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

La solución analítica correspondiente está dada por

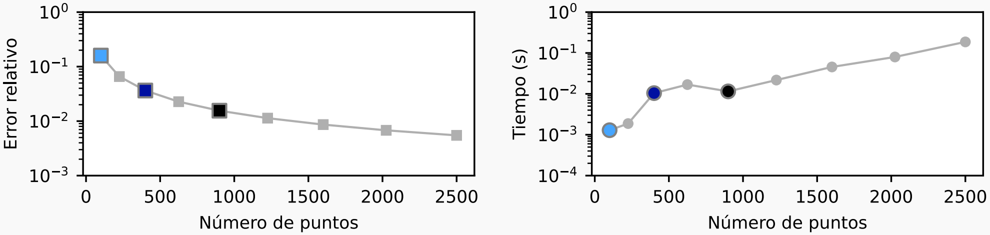
$$f(x, y) = \sin(5\pi x) \sin(5\pi y).$$




la precisión requerida que se logra **depende de la discretización de la malla computacional.**



Se reduce el error relativo con respecto a la solución analítica y, al mismo tiempo, **incrementa el tiempo de cómputo.**

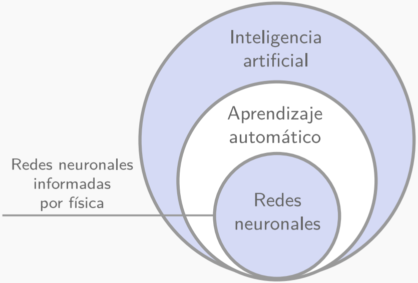



Se ha sugerido que las implementaciones basadas en **aprendizaje automático** pueden hacer que sus aplicaciones sean más eficientes.

**Una red neuronal** puede entenderse como una función $f(x)$ que es **la composición de varias funciones** $g_i(x)$, cada una representando una transformación aplicada a la entrada $x$:

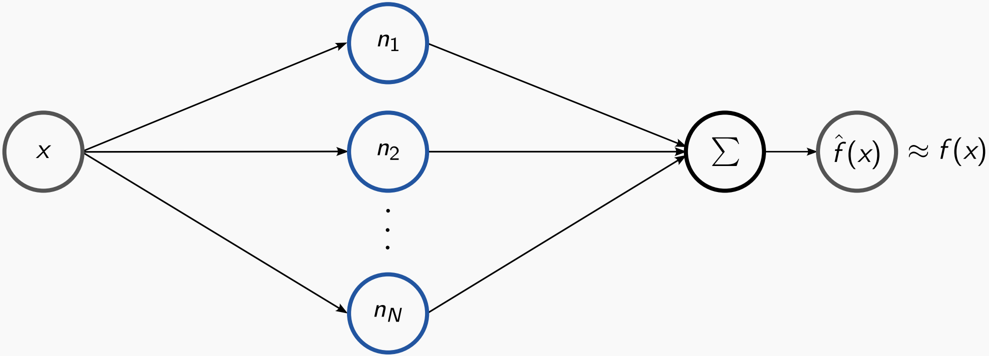
$$f(x) = g_n(g_{n-1}(\dots g_2(g_1(x))\dots)).$$

Cada función $g_i(x)$ se define como: $g_i(x) = \sigma(w_i x + b_i)$, donde $w_i$ y $b_i$ **son parámetros ajustables (peso y sesgo)** y $\sigma$ es una función de activación.



# Teorema de aproximación universal

*Una red neuronal con una sola capa oculta y cierto número finito de neuronas puede aproximar de manera arbitraria cualquier función continua, dada una función de activación adecuada.*



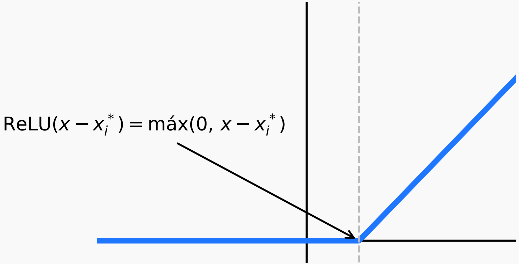
Queremos **aproximar la siguiente función**:

$$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

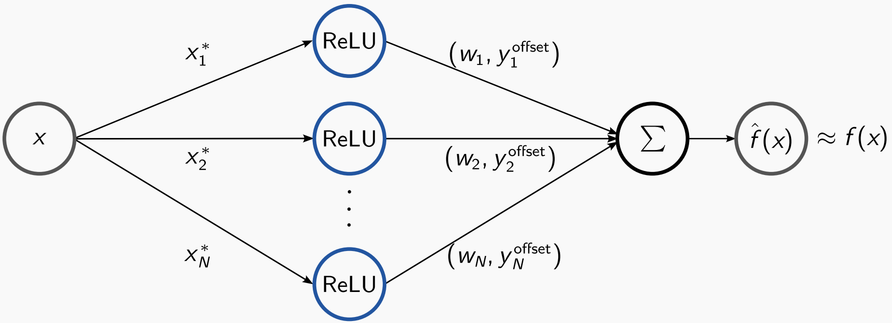
Utilizando una red neuronal de una sola capa de la forma:

$$f(x) \approx \hat{f}_i(x) = \sum_{i=1}^{N} g_i(x).$$

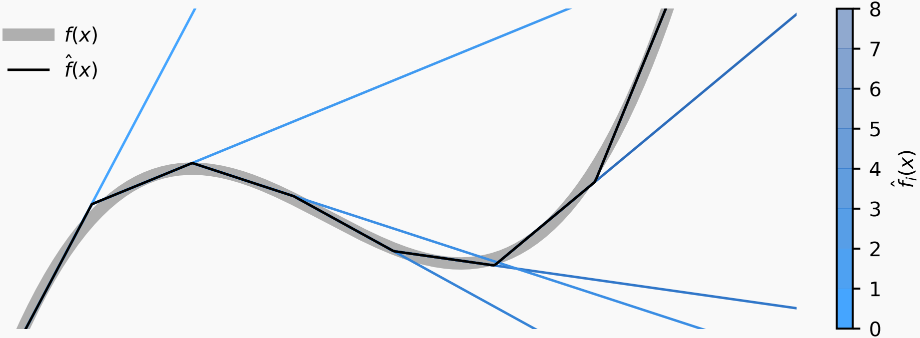
Donde: $g_i(x) = w_i \, \mathrm{ReLU}(x - x_i^*) + y_i^{\mathrm{offset}}$.



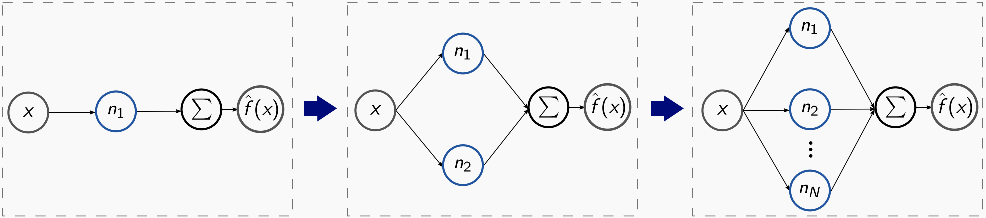
Se construye una red con una sola capa oculta y un número finito de neuronas $N$.



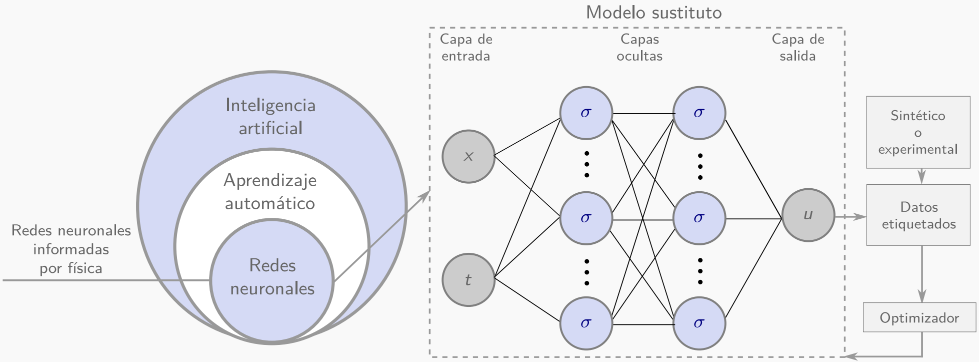
La combinación de todos los tramos produce una aproximación por partes que captura la estructura de $f(x)$.



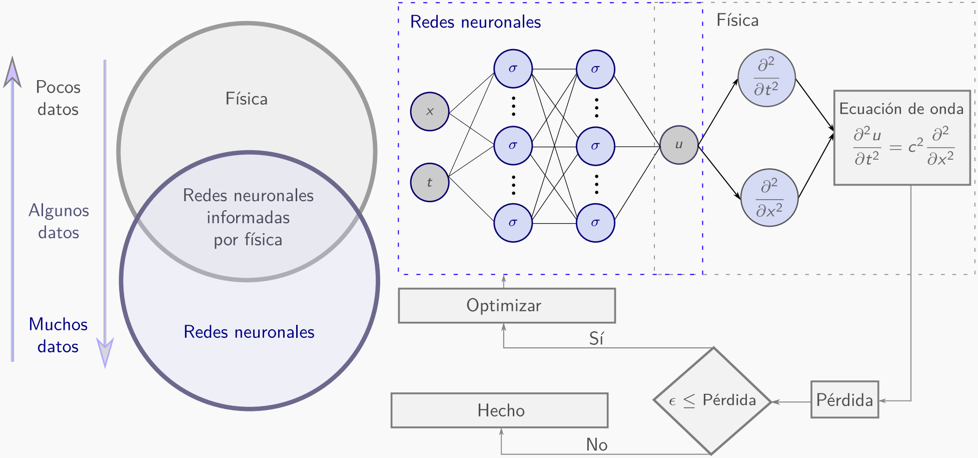
*Aunque una red de una sola capa es capaz de aproximar cualquier función, dicha capa* ***podría requerir un número de neuronas inviable*** *y aun así no garantizar un aprendizaje y generalización adecuados.*



En un **modelo sustituto** la función a aproximar corresponde a la solución de una ecuación diferencial.



Las **redes neuronales informadas por la física** integran el conocimiento de las leyes físicas en el proceso de entrenamiento de la red neuronal.



Consideremos aproximar la solución de la **ecuación de Helmholtz**:

$$\nabla^2 f + (5\pi)^2 f = 0.$$

Proponemos una aproximación del tipo

$$f(x, y) \approx \hat{f}_\theta(x, y) = x(1 - x)\, y(1 - y)\, f_\theta(x, y)$$

A partir de ella, definimos el **residuo físico** asociado a la ecuación diferencial:

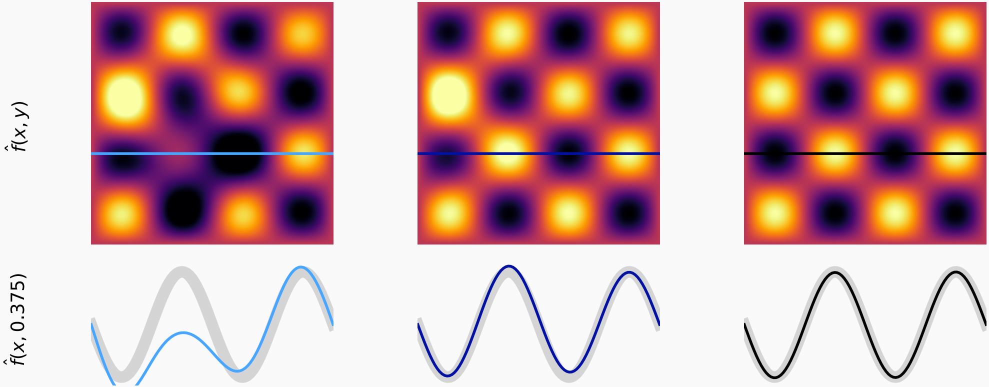
$$\mathcal{R}(x, y; \theta) = \nabla^2 f_\theta + (5\pi)^2 f_\theta.$$

La red se entrena minimizando la función de pérdida:

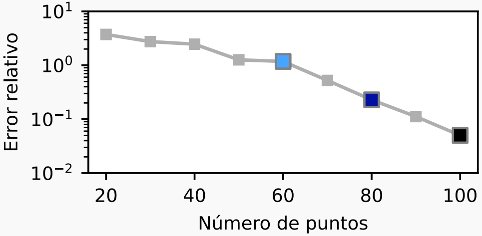
$$L_{\text{physics}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |\mathcal{R}(x_i, y_i; \theta)|^2,$$

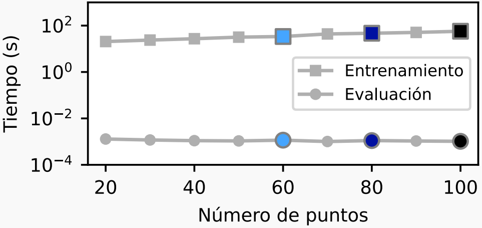
Aumentar la cantidad de puntos de muestreo permite capturar de manera más detallada las variaciones de la solución.

Al aumentar la cantidad de puntos de entrenamiento, la red mejora su capacidad para aproximar la solución analítica, reduciendo el error relativo.



El tiempo de evaluación del modelo, una vez entrenado, permanece prácticamente constante, independientemente del número de puntos empleados.




El tiempo de entrenamiento alcanza valores del orden de $10^1$ s, lo que representa dos órdenes de magnitud más que el tiempo máximo registrado con el método de diferencias finitas

1. ¿Qué técnicas de aprendizaje automático se han aplicado para modelar la propagación de ondas en el contexto de la sismología?
2. ¿Cómo pueden compararse los enfoques modernos basados en aprendizaje automático para resolver PDEs con los métodos numéricos estándar?
3. ¿En qué medida las PINNs pueden estimar de forma eficiente los parámetros físicos del modelo a partir de observaciones sísmicas, manteniendo una precisión comparable a la de los métodos de inversión estándar?
4. ¿De qué manera pueden los enfoques basados en aprendizaje automático escalarse para aprovechar datos provenientes de problemas sismológicos en contextos no controlados?

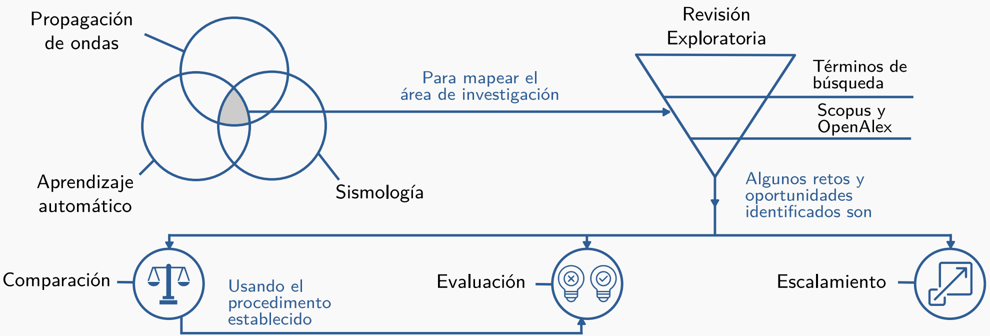
# Objetivos de investigación

## Objetivo general:

Desarrollar enfoques de aprendizaje automático que puedan constituir una alternativa o complemento a los métodos numéricos estándar en la modelación de la propagación de ondas, con énfasis en la evaluación de su rendimiento computacional y aplicabilidad en sismología.

## Objetivos específicos:

- **Mapear** las técnicas de aprendizaje automático utilizadas en el modelado de la ecuación de ondas aplicadas a la sismología, resaltando sus aplicaciones, alcances y desafíos actuales.
- **Comparar** métodos representativos de aprendizaje automático, frente a enfoques numéricos estándares, evaluando su precisión y eficiencia computacional, destacando sus ventajas, limitaciones y potencial de integración.
- **Evaluar** la capacidad de las PINNs para resolver problemas inversos en sismología, en lo referente a mantener una precisión comparable a la de los métodos estándar y, al mismo tiempo, reducir los costos computacionales.
- **Escalar** los enfoques basados en aprendizaje automático para favorecer el uso de datos provenientes de problemas en sismología en escenarios no controlados.


Propagación de ondas
Aprendizaje automático
Sismología
Para mapear el área de investigación
Revisión Exploratoria
Términos de búsqueda
Scopus y OpenAlex
Algunos retos y oportunidades identificados son
Comparación
Usando el procedimento establecido
Evaluación
Escalamiento

# Métodología

Comparación

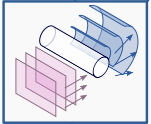
Usando el procedimento establecido

Evaluación

Escalamiento

Se plantea un problema de interes con solución analítica

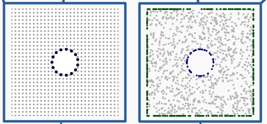
Dispersión de ondas por obstáculo cilíndrico



Se implementa con

BEM

PINNs



Se establecen métricas

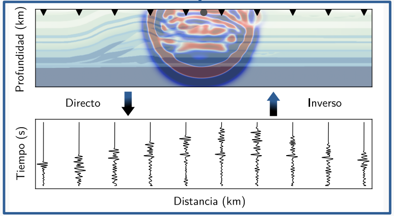
Precisión

Tiempo de cómputo

Nuestra hipótesis a comprobar es

Las PINNs pueden estimar de manera eficiente las propiedades físicas del subsuelo a partir de observaciones sísmicas, alcanzando niveles de precisión comparables a los obtenidos mediante métodos inversos tradicionales

Se considerará la FWI como método de referencia




Hemos identificado algunos retos en contextos no controlados

- Sesgo espectral
- Cuantificación de incertidumbre
- Tiempos de entrenamiento

Para abordar estos retos

Busqueda e implementación de métodos

# Avances preliminares

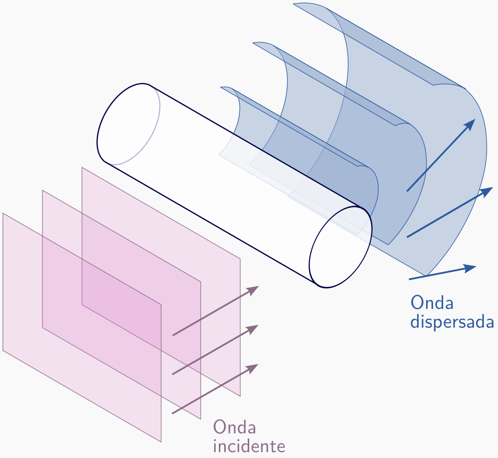
# Avances preliminares

- **Revisión exploratoria del estado del arte** – Uso de aprendizaje automático en modelación de propagación de ondas. – Manuscrito en fase final de redacción.
- **Repositorio de reproducibilidad en PyTorch** – Reimplementación del trabajo clásico de Raissi (2019). – Código abierto con experimentos verificables. – Disponible en GitHub: `ReScience-PINNs`.
- **Comparación numérica BEM vs. PINNs** – Resultados presentados en *MadeAI 2025* (Porto, Portugal). – Manuscrito preparado para ser enviado a *Engineering Computations*. – Preprint disponible en arXiv.
- **Trabajo de grado (dominios semi-infinitos)** – Presentado en la 5ª Semana de la Geofísica (2025). – Estrategia alternativa de muestreo y fronteras para PINNs. – Borrador de artículo en preparación.

# Comparación numérica BEM vs. PINNs

*¿Cómo pueden compararse los enfoques modernos basados en aprendizaje automático para resolver PDEs con los métodos numéricos estándar?*

Consideramos el problema clásico de **la dispersión de ondas acústicas por un obstáculo cilíndrico** bajo una onda incidente armónica en el tiempo.



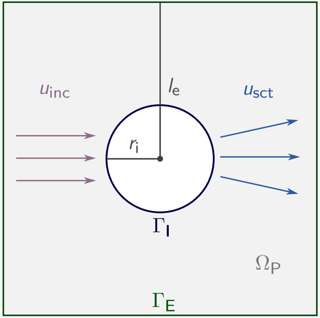
Cuando un campo acústico incidente interactúa con un obstáculo, se genera un **campo dispersado** que modifica la propagación original.

## Campo de presión acústica

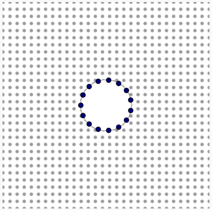
$$u = u_{\text{inc}} + u_{\text{sct}}$$

## Ecuación de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0$$



# Método de elementos de frontera



• $\mathbf{x} \in \Omega_\mathrm{P}$ • $\mathbf{x} \in \Gamma_\mathrm{I}$

**Entrada:**
Definir $N_\mathrm{I}$ & $N_\mathrm{P}$

→

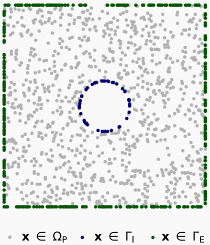
Formar las matrices $G$ y $H$
&
Resolver el sistema

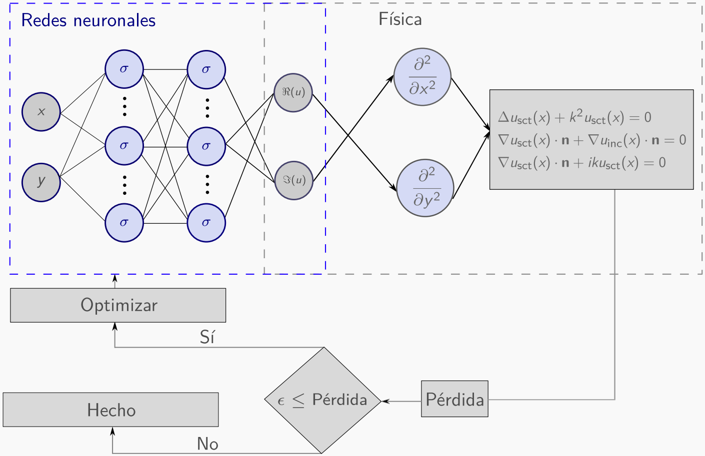
$$\sum_{j=1}^{N_\mathrm{I}} \hat{H}_{ij} u^j = \sum_{j=1}^{N_\mathrm{I}} G_{ij}\, u_n^j$$

→

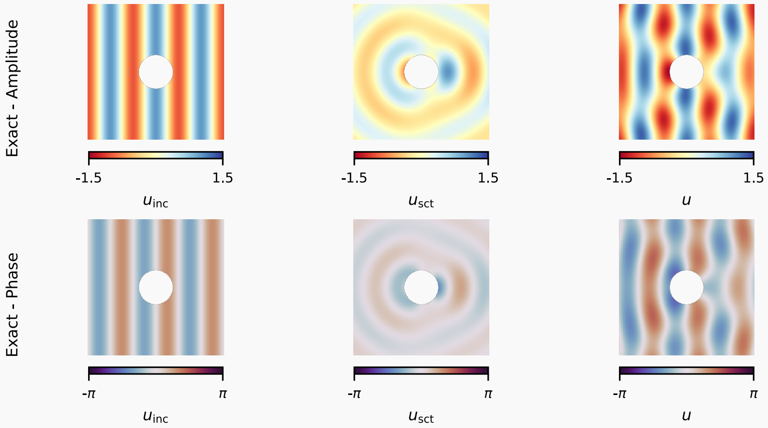
**Salida:**
Calcular la solución
en el punto de evaluación

# Método de redes neuronales informadas por la física

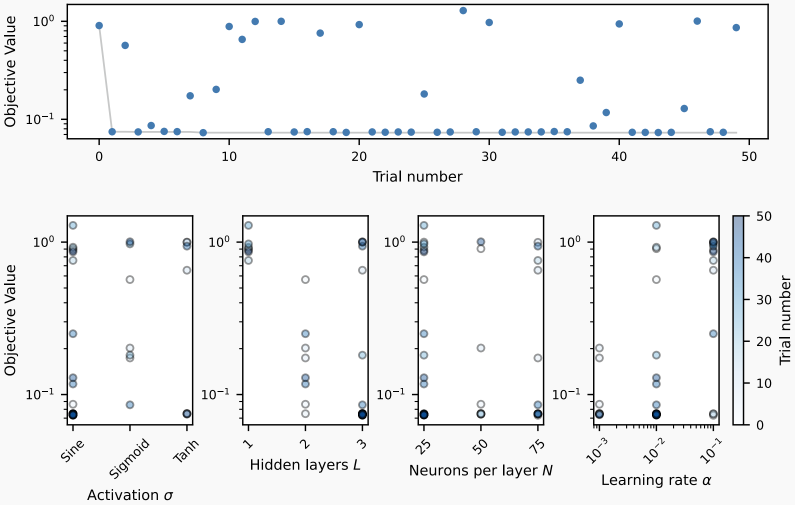


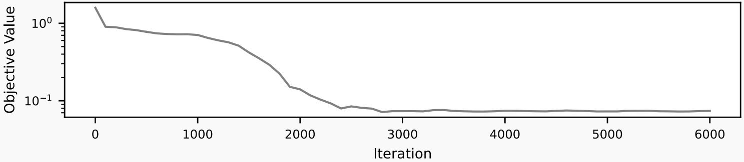
La solución analítica se utilizó para calcular el error relativo de los métodos numéricos evaluados en este estudio.

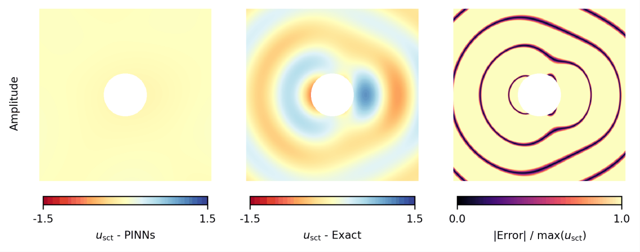


# Un ajuste de hiperparámetros permite alcanzar la mayor precisión.

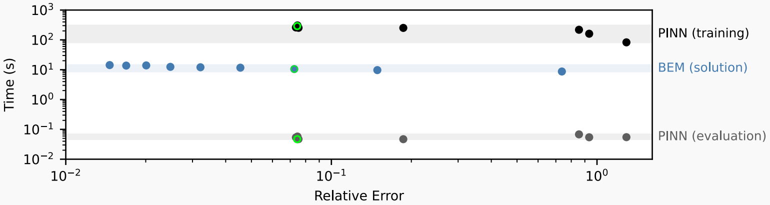


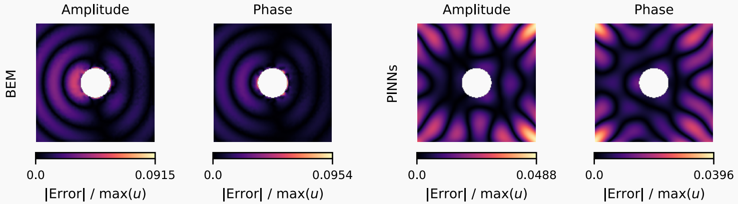
# Network training



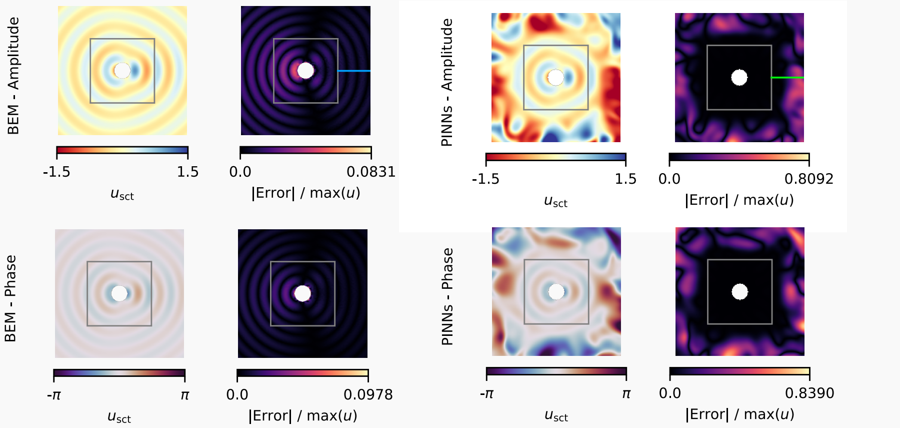



Si bien las PINN son capaces de resolver problemas directos, su proceso de entrenamiento suele ser computacionalmente costoso debido a los largos tiempos de entrenamiento.

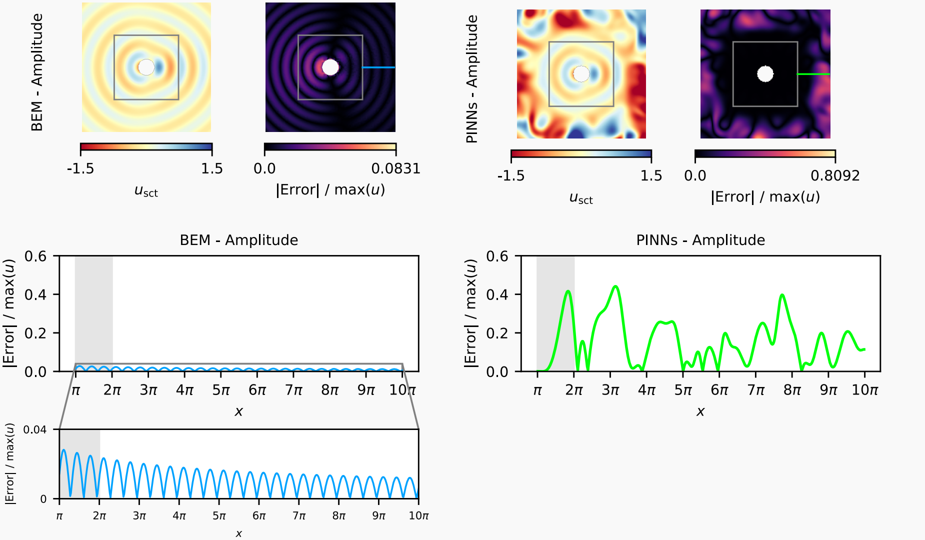


Una distinción importante entre BEM y PINN radica en cómo cada método maneja la condición de radiación, que rige el comportamiento del campo disperso a grandes distancias.



# Las PINN no representen con precisión la respuesta de campo lejano, especialmente fuera del dominio utilizado durante el entrenamiento.



# Conclusiones del estudio BEM vs. PINNs

- Las técnicas basadas en redes neuronales ofrecen ventajas como implementación libre de malla, diferenciación automática e inferencia eficiente.
- Las PINNs requieren tiempos de entrenamiento mucho mayores que BEM para lograr precisión comparable, limitando su uso en problemas directos.
- Los enfoques híbridos PINN–BEM son prometedores, especialmente para problemas inversos que demandan múltiples evaluaciones del modelo.

# Gracias por su atención

**Contacto:** `orincon@eafit.edu.co`

Repositorio PINNs reproducible

Preprint del artículo en arXiv