Discretización de la formulación devil del problema de valores en la frontera

La formulación fuerte del problema de valores en la frontera esta dado por:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in V, \tag{1}$$

donde σ_{ij} es el tensor de esfuersos, f_i es el vector de fuerzas de cuerpo y $\mathbf{x}$ una coordenada espacial en el volumen V. Aplicando el producto interno de la ecuación 1 con w_i y la integral sobre el dominio V, tenemos que:

$$\int_V \left(\sigma_{ij,j} + f_i\right) w_i dV = 0, \tag{2}$$

donde w_i son las funciones de prueba o funciones de ponderación, que satisfacen:

$$w_i = 0 \in S_u$$

Expandiendo los terminos en la integral

$$\int_V \sigma_{ij,j} w_i dV + \int_V f_i w_i dV = 0,$$

aplicando el teorema de divergencia

$$-\int_V \sigma_{ij} w_{i,j}\, dV + \int_S \sigma_{ij} w_i n_j\, dS + \int_V f_i w_i dV = 0$$

De acuerdo a la ecuación 2 tenemos que:

$$-\int_V \sigma_{ij} w_{i,j}\, dV + \int_{S_t} \sigma_{ij} w_i n_j\, dS + \int_V f_i w_i dV = 0$$

Por definición del vector de tracciones tenemos que:

$$t_i^{\hat{n}} = \sigma_{ij} \hat{n}_j \tag{3}$$

Entonces al reemplazar la ecuación 3 y multiplicar por -1:

$$\int_V \sigma_{ij} w_{i,j} \, dV - \int_{S_t} t_i^{\hat{n}} w_i \, dS - \int_V f_i w_i \, dV = 0$$

Aahora considerando que el dominio V es dividido en un munero finito de subdominios Ω_e. Entonces aplicando una sumatoria de los subdominios a la formulación devil, tenemos que:

$$\sum_e \int_{\Omega_e} \sigma_{ij} w_{i,j} \, \mathrm{d}\Omega_e - \sum_e \int_{\Omega_e} f_i w_i \, \mathrm{d}\Omega_e - \sum_e \int_{S_e} t_i w_i \, \mathrm{d}S_e = 0$$

Por definición tenemos que:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

y que:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right)$$

Si asumimos que dentro de cada subdominio los desplazamientos u_i y las funciones de ponderación w_i se pueden aproximar con la función de forma:

$$u_i(\vec{x}) = N_i^Q(\vec{x}) \widehat{u}^Q$$
$$w_i(\vec{x}) = N_i^Q(\vec{x}) \widehat{w}^Q$$