Discretización de la formulación debil del problema de valores en la frontera

La formulación fuerte del problema de valores en la frontera esta dado por:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad \forall\, \mathbf{x} \in V, \tag{1}$$

donde σ_{ij} es el tensor de esfuersos, f_i es el vector de fuerzas de cuerpo y $\mathbf{x}$ una coordenada espacial en el volumen V. Al multiplicar la ecuación 1 por w_i y luego integrar sobre el dominio V, obtenemos:

$$\int_V \left(\sigma_{ij,j} + f_i\right) w_i dV = 0, \tag{2}$$

donde w_i son las funciones de prueba o funciones de ponderación, que satisfacen:

$$w_i = 0 \in S_u \tag{3}$$

donde $S_t \cup S_u = S$ y $S_t \cap S_u = \emptyset$.

Expandiendo los terminos en la integral

$$\int_V \sigma_{ij,j} w_i dV + \int_V f_i w_i dV = 0,$$

aplicando el teorema de divergencia

$$-\int_V \sigma_{ij} w_{i,j}\, dV + \int_S \sigma_{ij} w_i n_j\, dS + \int_V f_i w_i dV = 0$$

De acuerdo a la ecuación 3 tenemos que:

$$-\int_V \sigma_{ij} w_{i,j}\, dV + \int_{S_t} \sigma_{ij} w_i n_j\, dS + \int_V f_i w_i dV = 0$$

Por la definición del vector de tracciones tenemos que:

$$t_i^{\hat{n}} = \sigma_{ij} \hat{n}_j \tag{4}$$

Entonces al reemplazar la ecuación 4:

$$\int_V \sigma_{ij} w_{i,j}\, dV - \int_{S_t} t_i^{\hat{n}} w_i\, dS - \int_V f_i w_i\, dV = 0$$

Ahora considerando que el dominio V es dividido en un número finito de subdominios Ω_e. Entonces aplicando una sumatoria de los subdominios a la formulación devil, tenemos que:

$$\sum_e \int_{\Omega_e} \sigma_{ij} w_{i,j} \, \mathrm{d}\Omega_e - \sum_e \int_{\Omega_e} f_i w_i \, \mathrm{d}\Omega_e - \sum_e \int_{S_e} t_i w_i \, \mathrm{d}S_e = 0 \tag{5}$$

Por definición del tensor de deformaciones tenemos que:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) \tag{6}$$

Si asumimos que dentro de cada subdominio los desplazamientos u_i y las funciones de ponderación w_i se pueden aproximar con:

$$u_i(\vec{x}) = N_i^Q(\vec{x}) \widehat{u}^Q$$

donde $N_i^Q(\vec{x})$ es la función de forma y $\widehat{u}^Q$ el componente escalar de $u_i(\vec{x})$ en el nodo Q. Entonces:

$$u_{i,j}(\vec{x}) = \frac{\partial u_i(\vec{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial N_i^Q(\vec{x})}{\partial x_j} \widehat{u}^Q = N_{i,j}^Q(\vec{x}) \widehat{u}^Q \tag{7}$$

y

$$u_{j,i}(\vec{x}) = \frac{\partial u_j(\vec{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial N_j^Q(\vec{x})}{\partial x_i} \widehat{u}^Q = N_{j,i}^Q(\vec{x}) \widehat{u}^Q \tag{8}$$

Reemplazando 7 y 8 en 6:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(N_{i,j}^Q(\vec{x}) \widehat{u}^Q + N_{j,i}^Q(\vec{x}) \widehat{u}^Q \right) = \frac{1}{2} \left(N_{i,j}^Q(\vec{x}) + N_{j,i}^Q(\vec{x}) \right) \widehat{u}^Q$$

y si

$$B_{ij}^Q(\vec{x}) = \frac{1}{2} \left(N_{i,j}^Q(\vec{x}) + N_{j,i}^Q(\vec{x}) \right)$$

Entonces

$$\varepsilon_{ij} = B_{ij}^Q(\vec{x}) \widehat{u}^Q \tag{9}$$

Por definición tenemos que:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{10}$$

Reemplazando la ecuación 9 en la 10:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} B_{kl}^Q(\vec{x}) \widehat{u}^Q \tag{11}$$

De manera similar la para la función de prueba w_i tenemos que:

$$w_i(\vec{x}) = N_i^Q(\vec{x}) \widehat{w}^Q \tag{12}$$

y

$$w_{i,j}(\vec{x}) = \frac{\partial w_i(\vec{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial N_i^Q(\vec{x})}{\partial x_j}\widehat{w}^Q = N_{i,j}^Q(\vec{x})\widehat{w}^Q \tag{13}$$

Para un solo elemento del dominio V tenemos que:

$$\int_{\Omega_e} \sigma_{ij} w_{i,j} \, \mathrm{d}\Omega_e - \int_{\Omega_e} f_i w_i \, \mathrm{d}\Omega_e - \int_{S_e} t_i w_i \, \mathrm{d}S_e = 0 \tag{14}$$

Reemplazando 11, 12 y 13 en 14:

$$\widehat{u}^Q \widehat{w}^P \int_{\Omega_e} C_{ijkl} B_{kl}^Q(\vec{x}) N_{i,j}^P(\vec{x}) \, \mathrm{d}\Omega_e - \widehat{w}^P \int_{\Omega_e} f_i N_i^P(\vec{x}) \, \mathrm{d}\Omega_e - \widehat{w}^P \int_{S_e} t_i N_i^P(\vec{x}) \, \mathrm{d}S_e = 0 \tag{15}$$

ahora cancelamos el termino comun $\widehat{w}^P$:

$$\widehat{u}^Q \int_{\Omega_e} C_{ijkl} B_{kl}^Q(\vec{x}) N_{i,j}^P(\vec{x}) \, \mathrm{d}\Omega_e = \int_{\Omega_e} f_i N_i^P(\vec{x}) \, \mathrm{d}\Omega_e + \int_{S_e} t_i N_i^P(\vec{x}) \, \mathrm{d}S_e \tag{16}$$