

Existence de la fonction exponentielle

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ et } v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

La démarche est alors la suivante :

Démontrer que les deux suites sont adjacentes et admettent donc une limite commune. Cette limite dépend bien sûr de x . On peut alors créer une fonction f qui à toute valeur de x associe cette limite.

On est alors assuré de l'existence d'une fonction f telle que $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$, pour tout x réel.

On montrera alors enfin que $f(0) = 1$ et que f est dérivable avec $f'(x) = f(x)$.

Il ne reste plus alors qu'à conclure.

1. Soit la propriété (P_n) : pour tout réel $\alpha > -1$, $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$.

Démontrer que cette propriété est vraie pour tout n de N .

2. Démontrons que $(u_n(x))$ est croissante :

2.1. Vérifier que $1 + \frac{x}{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n(n+1)(1 + \frac{x}{n})}\right)$

2.2. En remplaçant dans l'expression de u_{n+1} , en déduire que $u_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n(n+1)(1 + \frac{x}{n})}\right)^{n+1}$

2.3. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $-\frac{x}{n(n+1)(1 + \frac{x}{n})} > -1$.

2.4. En appliquant la propriété P_n à $\left(1 - \frac{x}{n(n+1)(1 + \frac{x}{n})}\right)^{n+1}$, montrer qu'alors $u_{n+1} \geq u_n$.

2.5. Conclure sur la monotonie de $(u_n(x))$.

3. En remarquant que $v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}$ démontrer que $(v_n(x))$ est décroissante.

4. Démontrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n(x) - v_n(x)) = 0$.

On pourra majorer à l'aide de P_n : $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ et $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$

5. Conclure concernant les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ et leurs limites.

6. Soit donc $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$. Montrer que $f(0) = 1$.

7. Montrons que f est dérivable et que $f'(x) = f(x)$ pour tout x .

On va donc essayer d'étudier la limite de $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ quand h tend vers 0, pour un x fixé quelconque.

7.1. Ecrire ce qu'est $f(x+h)$

7.2. Vérifier que $\left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left[1 + \frac{\frac{h}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right]^n$

7.3. Montrer que pour $|h| < 1$ et $n+x > 1$, en utilisant encore la propriété P_n ,

$$\text{que } \left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left[1 + \frac{h}{1 + \frac{x}{n}}\right]$$

7.4. En déduire que $f(x+h) \geq f(x)(1+h)$

7.5 En réécrivant cette expression pour $x+h$ et en remplaçant h par $-h$,

$$\text{montrer que } f(x) \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x)}{1-h} \text{ ou } \frac{f(x)}{1-h} \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq f(x)$$

7.6 Conclure

On considère les suites réelles (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \geq 1$ par :

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \text{ et } v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

1. Soit la propriété (P_n) : pour tout réel $\alpha > -1$, $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$.

Démontrer que cette propriété est vraie pour tout n de N .

Démonstration par récurrence : Supposons $x > -1$; Soit (P_n) : $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$

★ $(1 + \alpha)^0 = 1 + 0 \times \alpha = 1$ La propriété est donc vraie pour $n = 0$

★ Hérédité : Supposons P_n vraie, c'est à dire $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$

Dès lors, $(1 + \alpha)^{n+1} = (1 + \alpha)^n (1 + \alpha)$ donc $(1 + \alpha)^{n+1} \geq (1 + n\alpha)(1 + \alpha)$ puisque $\alpha > -1 \Rightarrow 1 + \alpha > 0$

$$\begin{aligned} \text{Et } (1 + \alpha)^{n+1} &\geq n\alpha^2 + \alpha + n\alpha + 1 \\ &\geq \alpha + n\alpha \text{ puisque } n\alpha^2 + 1 > 0 \\ &\geq (n + 1)\alpha \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie à l'ordre $n + 1$.

La propriété est donc vraie pour $n = 0$; la supposant vraie à l'ordre n elle l'est encore à l'ordre $n + 1$.

Elle est donc vraie pour tout n . C'est à dire, $\alpha > -1$, $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$

2. Démontrons que $(u_n(x))$ est croissante :

$$\text{2.1. Vérifier que } 1 + \frac{x}{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right) = 1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n(n+1)}$$

Il suffit alors de réduire le 2° membre au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right) &= 1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n(n+1)} \\ &= 1 + \frac{(n+1)x - x}{n(n+1)} \\ &= 1 + \frac{nx}{n(n+1)} \\ &= 1 + \frac{x}{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } 1 + \frac{x}{n+1} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)$$

2.2. En remplaçant dans l'expression de u_{n+1} , en déduire que $u_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)^{n+1}$

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \Rightarrow u_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n(n+1)}\right)^{n+1} \\ \text{Or } 1 + \frac{x}{n} - \frac{x}{n(n+1)} &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } u_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n(n+1)\left(1 + \frac{x}{n}\right)}\right)^{n+1}$$

2.3. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $-\frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})} > -1$.

En multipliant les deux membres par -1 , il suffit d'établir que : $\frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})} < 1$ à partir d'une certaine valeur de n .

Si $1 + \frac{x}{n} > 0$, c'est à dire pour $n + x > 0$ donc pour $n > -x$ condition (C_1) on a: $n(n+1)(1+\frac{x}{n}) > 0$

Ainsi, sous cette condition (C_1) , $\frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})} < 1 \Leftrightarrow x < n(n+1)(1+\frac{x}{n})$

$$\Leftrightarrow x < (n+1)(n+x)$$

$$\Leftrightarrow x < n^2 + n + nx + x$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n + nx > 0$$

En divisant par n cette condition devient : $n + 1 + x > 0$ donc $n > -1 - x$ condition (C_2)

La plus restrictive de ces deux conditions étant la première, on peut écrire :

$$n > -x \Rightarrow \frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})} < 1 \Rightarrow -\frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})} > -1$$

Donc que $n > -x \Rightarrow -\frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})} > -1$

2.4. En appliquant la propriété P_n à $\left(1 - \frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})}\right)^{n+1}$, montrer qu'alors $u_{n+1} \geq u_n$.

On a vu que pour $\alpha > -1$, $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ ou encore, à l'ordre $n + 1$: $(1 + \alpha)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\alpha$

Donc ici, en prenant $-\frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})}$ pour α ,

$$-\frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})} > -1 \Rightarrow \left(1 - \frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})}\right)^{n+1} \geq 1 + (n+1)\left(-\frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \left(1 - \frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})}\right)^{n+1} &\geq 1 - \frac{x}{n(1+\frac{x}{n})} \\ &\geq 1 - \frac{x}{(n+x)} \\ &\geq \frac{n}{n+x} \end{aligned}$$

$$\text{Or } u_{n+1}(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n(n+1)(1+\frac{x}{n})}\right)^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } u_{n+1}(x) &\geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \frac{n}{n+x} \\ &\geq \left(\frac{n+x}{n}\right)^{n+1} \frac{n}{n+x} \\ &\geq \left(\frac{n+x}{n}\right)^n \\ &\geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \end{aligned}$$

On a donc bien $u_{n+1}(x) \geq u_n(x)$

2.5. Conclure sur la monotonie de $(u_n(x))$. $(u_n(x))$ est donc croissante à partir d'un certain rang. ($n > -x$)

3. En remarquant que $v_n(x) = \frac{1}{u_n(-x)}$ démontrer que $(v_n(x))$ est décroissante.

$(u_n(x))$ est donc croissante, propriété démontrée pour tout x réel, on aura $u_{n+1}(-x) \geq u_n(-x) \Rightarrow \frac{1}{u_{n+1}(-x)} \leq \frac{1}{u_n(-x)}$
Donc $v_n(x) \geq v_{n+1}(x)$ et $(v_n(x))$ est donc décroissante à partir d'un certain rang. ($n > -x$)

4. Démontrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n(x) - v_n(x)) = 0$.

On pourra majorer à l'aide de $P_n : \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ et $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$

$$u_n(x) - v_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

▲ Or, $n > -x \Rightarrow \frac{x}{n} > -1$ donc d'après $P_n : \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 + x$ notée (I_1)

▲ De même, pour $n > x$, $\frac{-x}{n} > -1$ on aura donc $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 - x$

On prendra en fait n supérieur au plus grand des deux nombres x et $-x$ pour être certain des deux majorations.

Dès lors, $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 - x \Rightarrow \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{1 - x}$ la fonction inverse étant décroissante
 $\Rightarrow \frac{-1}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n} \geq \frac{-1}{1 - x}$ en multipliant par -1 notée (I_2)

▲ Et $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} \geq (1 + x) - \frac{1}{1 - x}$ en faisant la somme membre à membre de (I_1) et (I_2)

$$\text{Donc } u_n(x) - v_n(x) \geq \frac{1 - x^2 - 1}{1 - nx} \Rightarrow u_n(x) - v_n(x) \geq \frac{-x^2}{1 - nx}$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - nx) = \pm\infty \text{ suivant le signe de } x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{1 - nx} = 0$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n(x) - v_n(x)) = 0$

5. Conclure concernant les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ et leurs limites.

Les suites sont donc adjacentes. Elles convergent vers une même limite

6. Soit donc $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x)$. Montrer que $f(0) = 1$.

Pour $x = 0$,

$$u_n(0) = \left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = 1 \text{ et } v_n(0) = \left(1 - \frac{0}{n}\right)^{-n} = 1.$$

Les suites sont constantes et on donc pour limite 1. Donc $f(0) = 1$

7. Montrons que f est dérivable et que $f'(x) = f(x)$ pour tout x .

On va essayer d'étudier la limite de $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ quand h tend vers 0, pour un x fixé quelconque.

7.1. Ecrire ce qu'est $f(x+h)$

$$f(x+h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x+h)$$

$$\text{Donc } f(x+h) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n$$

7.2. Vérifier que $\left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left[1 + \frac{\frac{h}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right]^n$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left[1 + \frac{\frac{h}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right]^n = \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{\frac{h}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right)\right]^n$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{\frac{h}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right) &= \left(\frac{n+x}{n}\right) \left(1 + \frac{h}{n+x}\right) \\ &= \left(\frac{n+x}{n}\right) \left(\frac{n+x+h}{n+x}\right) \\ &= \frac{n+x+h}{n} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{\frac{h}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right) = 1 + \frac{x+h}{n}$$

$$\text{On en déduit que } \boxed{\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{\frac{h}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right)\right]^n = \left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n}$$

7.3. Montrer que pour $|h| < 1$ **et** $n+x > 1$, **en utilisant encore la propriété** P_n ,

$$\text{que } \left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left[1 + \frac{h}{1 + \frac{x}{n}}\right]^n$$

$$1 + \frac{\frac{h}{n}}{1 + \frac{x}{n}} \text{ si } n+x > 1 \text{ alors } 1 + \frac{x}{n} > \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} < n \text{ et donc } \left|\frac{1}{1 + \frac{x}{n}}\right| < n$$

Si de plus $|h| < 1$, alors $\left|\frac{h}{n}\right| < \frac{1}{n}$ et $\left|\frac{\frac{h}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right| = \frac{\left|\frac{h}{n}\right|}{\left|1 + \frac{x}{n}\right|} < \frac{1}{n} \times n$ comme produit de deux quantités comprises entre 0 et 1.

Donc $\left|\frac{\frac{h}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right| < 1$ On aura donc forcément $\frac{\frac{h}{n}}{1 + \frac{x}{n}} > -1$ (sinon sa valeur absolue serait plus grande que 1)

On peut donc appliquer à nouveau P_n , avec $\alpha = \frac{\frac{h}{n}}{1 + \frac{x}{n}}$.

$$\text{Donc pour } n > 1-x \text{ et } |h| < 1, \left[1 + \frac{\frac{h}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right]^n \geq 1 + \frac{n \frac{h}{n}}{1 + \frac{x}{n}}$$

$$\text{Donc } \left[1 + \frac{\frac{h}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right]^n \geq 1 + \frac{h}{1 + \frac{x}{n}} \text{ donc } \left[1 + \frac{\frac{h}{n}}{1 + \frac{x}{n}}\right]^n \geq 1 + \frac{h}{1 + \frac{x}{n}}$$

$$\text{et } \left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left[1 + \frac{h}{1 + \frac{x}{n}}\right]^n \Rightarrow \boxed{\left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{h}{1 + \frac{x}{n}}\right)^n}$$

7.4. En déduire que $f(x+h) \geq f(x)(1+h)$

En passant à la limite, $\left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n$ étant convergente (c'est u_n) de même que $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ et $\left(1 + \frac{h}{1 + \frac{x}{n}}\right)^n$
et en vertu des théorèmes généraux sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{h}{1 + \frac{x}{n}}\right)^n$
c'est à dire, $\boxed{f(x+h) \geq f(x)(1+h)}$.

7.5 En réécrivant cette expression pour $x+h$ et en remplaçant h par $-h$,

montrer que $f(x) \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x)}{1-h}$ ou $\frac{f(x)}{1-h} \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq f(x)$

Remarquons que les conditions sont $|h| < 1$ ce qui sera plutôt sympa quand il faudra faire tendre h vers 0 et $n+x > 1$.
Dés lors, $|h| < 1 \Rightarrow |-h| < 1$. la formule obtenue avec h sera vraie aussi pour $-h$.

De plus, $n+x+h > 1$ peut toujours être vérifiée en commençant éventuellement à un ordre supérieur.

On aurait de en x' et en écrivant la formule avec $-h$: $f(x'-h) \geq f(x')(1-h)$

Donc en prenant $x' = x+h$: $f(x+h-h) \geq f(x+h)(1-h)$ donc $f(x+h) \leq \frac{f(x)}{1-h}$

En regroupant ces deux inégalités, on obtient : $f(x)(1+h) \leq f(x+h) \leq \frac{f(x)}{1-h}$

C'est à dire : $f(x) + hf(x) \leq f(x+h) \leq \frac{f(x)}{1-h}$ donc $hf(x) \leq f(x+h) - f(x) \leq \frac{f(x)}{1-h} - f(x)$

C'est à dire $hf(x) \leq f(x+h) - f(x) \leq hf(x)$ donc $\boxed{f(x) \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x)}{1-h} \text{ pour } h > 0}$

et $\boxed{\frac{f(x)}{1-h} \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x)}{h} \text{ pour } h < 0}$

7.6 Conclure

Et par conséquent, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)$, ce qui prouve que f est dérivable et que $\boxed{f'(x) = f(x)}$.

Le début (jusqu'au 5.) prouve l'existence de f , la suite prouve que $f(0) = 1$ et que $f'(x) = f(x)$ pour tout x .

**Et voilà démontrée la fameuse existence de cette fonction exponentielle,
valant 1 en 0 et qui est sa propre dérivée.**