Chapitre : Les Identités Remarquables

1. Introduction : Pourquoi ?

En calcul littéral, on doit très souvent **développer** des expressions, c'est-à-dire transformer un produit en somme.

Par exemple, $(x+3)(x+2)$. On utilise la **double distributivité** :
$(x+3)(x+2) = x \times x + x \times 2 + 3 \times x + 3 \times 2$
$(x+3)(x+2) = x^2 + 2x + 3x + 6$
$(x+3)(x+2) = x^2 + 5x + 6$

Certains produits reviennent si souvent qu'on a créé des "raccourcis" pour aller plus vite.
Ce sont les **identités remarquables**.

---

2. L'identité (a + b)² : Carré d'une somme

C'est le cas où l'on multiplie une somme par elle-même, par exemple $(x+5)(x+5)$, qu'on note $(x+5)^2$.

La Formule

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Démonstration (Calcul)

On utilise la double distributivité :
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$
$(a+b)^2 = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b$
$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Démonstration (Géométrie)

On dessine un grand carré dont le côté mesure $(a+b)$. L'aire de ce grand carré est donc $(a+b)^2$.

On peut aussi voir que ce grand carré est composé de quatre parties :

- Un carré de côté a (son aire est a^2)
- Un carré de côté b (son aire est b^2)
- Deux rectangles de côtés a et b (chacun a une aire de ab)

L'aire totale est la somme de ces parties : $a^2 + b^2 + ab + ab$. En simplifiant, on obtient : $a^2 + 2ab + b^2$.

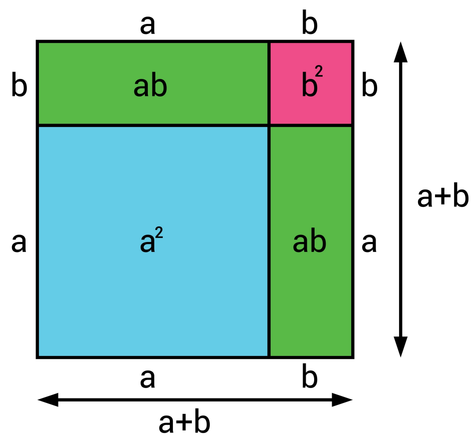

Figure 1: Première identité

Exemples (Développer)

- $(x+3)^2$
  - $a = x$
  - $b = 3$
  - Résultat : $x^2 + 2(x)(3) + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
- $(2y+4)^2$
  - $a = 2y$
  - $b = 4$
  - Résultat : $(2y)^2 + 2(2y)(4) + 4^2 = 4y^2 + 16y + 16$

---

3. L'identité (a - b)² : Carré d'une différence

C'est le cas où l'on multiplie une différence par elle-même, par exemple $(x-7)(x-7)$, qu'on note $(x-7)^2$.

La Formule

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Démonstration (Calcul)

On fait attention aux signes :
$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$
$(a-b)^2 = a \times a + a \times (-b) + (-b) \times a + (-b) \times (-b)$

$(a-b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Démonstration (Géométrie)

On part d'un grand carré de côté a. Son aire est a^2. On veut trouver l'aire du carré de côté $(a-b)$, qui est $(a-b)^2$ (la zone jaune sur l'image).

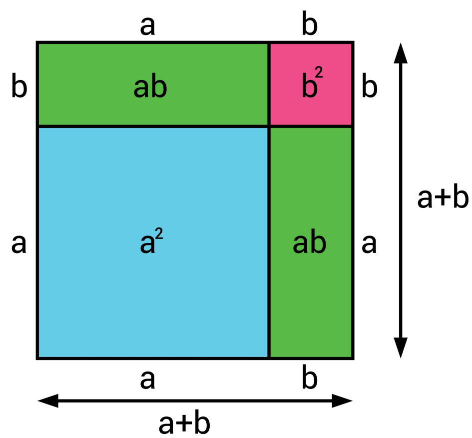

Figure 2: Seconde identité

On peut le voir par soustraction :

1. On prend le grand carré d'aire a^2.
2. On enlève le rectangle "du haut" (d'aire $a \times b$).
3. On enlève le rectangle "du côté" (d'aire $a \times b$).
4. En faisant $a^2 - ab - ab$, on a enlevé le petit carré de coin (d'aire b^2) **deux fois** !
5. Il faut donc le "rajouter" une fois pour compenser.

Ce qui donne la formule : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Exemples (Développer)

- $(x-5)^2$
  - $a = x$
  - $b = 5$
  - Résultat : $x^2 - 2(x)(5) + 5^2 = x^2 - 10x + 25$
- $(3z-1)^2$
  - $a = 3z$
  - $b = 1$
  - Résultat : $(3z)^2 - 2(3z)(1) + 1^2 = 9z^2 - 6z + 1$

4. L'identité (a + b)(a - b) : Différence de deux carrés

C'est le cas où l'on multiplie une somme par sa différence.

La Formule

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Démonstration (Calcul)

Les termes du milieu s'annulent :
$(a+b)(a-b) = a \times a + a \times (-b) + b \times a + b \times (-b)$
$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Démonstration (Géométrie)

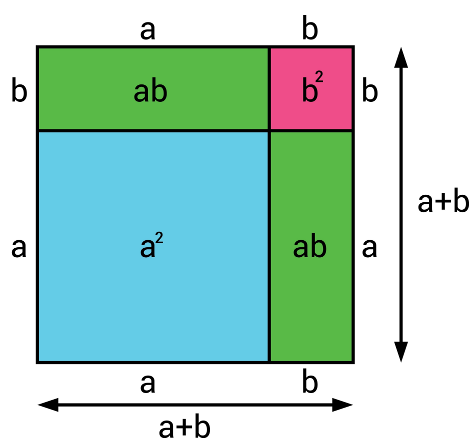

Figure 3: Troisième identité

1. On part d'un grand carré de côté a (aire a^2).
2. On lui enlève (on "coupe") un petit carré de côté b (aire b^2) dans un coin.
3. L'aire de la zone qui reste (en forme de "L" sur l'image) est donc $a^2 - b^2$.
4. Maintenant, on réorganise cette forme en "L" : on la coupe en deux rectangles.
5. On "pivote" l'un des rectangles pour le coller à l'autre.
6. On obtient un nouveau, grand rectangle.
   - Sa hauteur est $(a-b)$.
   - Sa largeur est $(a+b)$.

7. L'aire de ce nouveau rectangle est $(a+b)(a-b)$.

Comme c'est la même aire que celle de départ, on a bien l'égalité : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Application (Développer ET Factoriser)

C'est la formule la plus importante pour **factoriser** (transformer une somme/différence en produit).

- **Exemple (Développer) :**
  - $(x+9)(x-9) = x^2 - 9^2 = **x^2 - 81**$
- **Exemples (Factoriser) :**
  - $y^2 - 25$
    * $a^2 = y^2 \implies a = y$
    * $b^2 = 25 \implies b = 5$
    * Résultat : $(y+5)(y-5)$
  - $49 - z^2$
    * $a^2 = 49 \implies a = 7$
    * $b^2 = z^2 \implies b = z$
    * Résultat : $(7+z)(7-z)$
  - $4x^2 - 36$
    * $a^2 = 4x^2 \implies a = 2x$
    * $b^2 = 36 \implies b = 6$
    * Résultat : $(2x+6)(2x-6)$

---

5. Résumé à retenir

Quand l'utiliser ?	Expression de départ	Formule
Carré d'une somme	$(a+b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$
Carré d'une différence	$(a-b)^2$	$a^2 - 2ab + b^2$
Différence de 2 carrés	$(a+b)(a-b)$	$a^2 - b^2$

Attention : $(a+b)^2$ n'est **JAMAIS** égal à $a^2 + b^2$!

6. Exercices d'application

Exercice 1 : Développer

Utiliser les identités remarquables pour développer les expressions suivantes :

1. $(x+8)^2$
2. $(y-6)^2$
3. $(z+10)(z-10)$
4. $(2a+3)^2$

5. $(4b-1)^2$

Exercice 2 : Factoriser

Utiliser l'identité remarquable $a^2 - b^2$ pour factoriser :

1. $x^2 - 100$
2. $y^2 - 9$
3. $64 - z^2$
4. $9x^2 - 1$
5. $16y^2 - 81$