模擬與統計計算

HW2

N26120838 吳定洋

1. 模擬實驗(一)

5. $\int_{-2}^{2} e^{x+x^2}\,dx$

我使用 python 的 random，隨機生成由-2 到 2 的浮點數，並模擬了隨機取樣 10 次、1000 次、100000 次，而每個取樣次數我都各模擬 10 次，我想結合上次作業的大數法則來看穩定後的結果。

我的作法是隨機生成 x 之後，帶入 f(x) = e^(x+x^2)，並記錄每次的 f(x)，之後將所有 f(x)取平均後再乘以 4 來模擬出積分的結果，因為 x 是由-2 到 2。

首先有些好奇上面數學式子畫出來的圖會長什麼樣子，所以我隨機取 10000 次範圍落在-2 到 2 間的浮點數 x，獲得 f(x)後，把圖形畫出來。

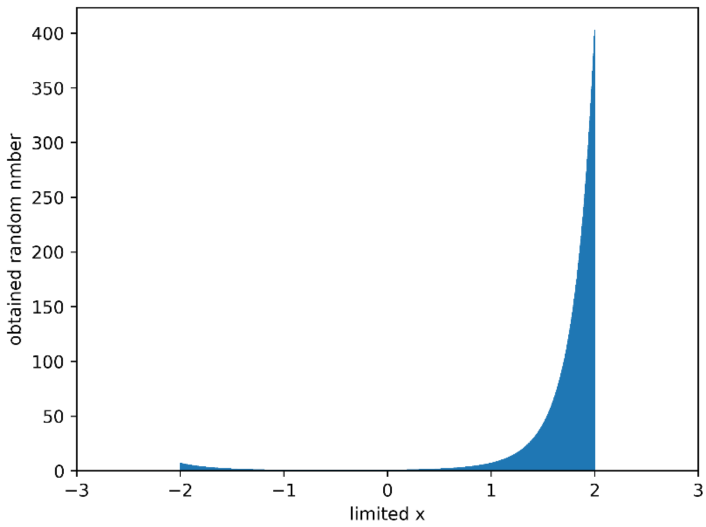

圖 一 e^(x+x^2)的圖形

再來則是取樣。

重複 10 次隨機取樣 10 個 x 後將 f(x)相加並平均的結果：

[41.59392, 7.18612, 26.8926, 197.36428, 34.968, 27.9344, 31.51048, 20.4324, 59.62428, 72.56284]

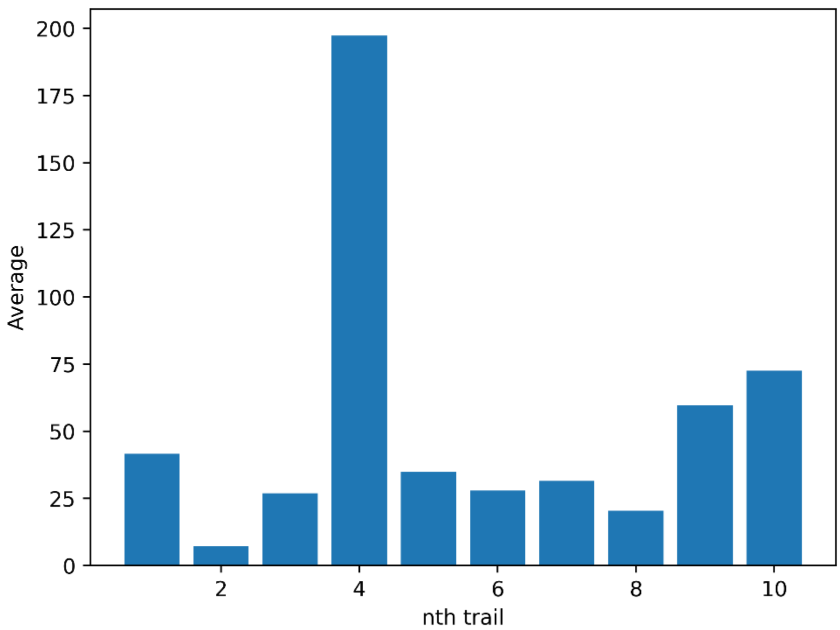

圖 二 隨機 10 次 x，做 10 次結果

重複 10 次隨機取樣 1000 個 x 後將 f(x)相加並平均的結果：
[95.87328, 92.04732, 84.4986, 102.75256, 100.10664, 94.76892, 100.91292, 99.05384, 101.7454, 88.28308]

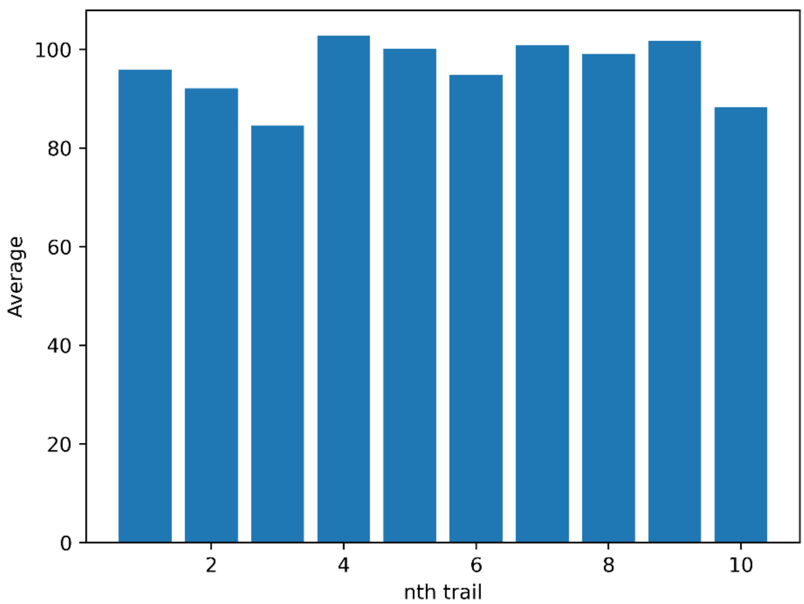

圖 三 隨機 10 次 x，做 1000 次結果

重複 10 次隨機取樣 100000 個 x 後將 f(x)相加並平均的結果：
[93.02564, 94.4374, 92.79116, 93.16444, 93.146, 93.65608, 92.3632, 92.8938, 92.2282, 93.02508]

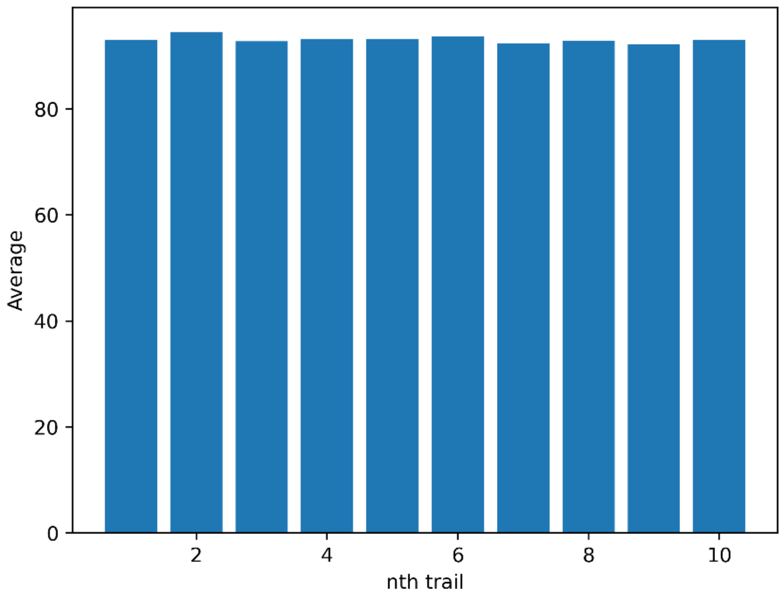

圖 四 隨機 10 次 x，做 100000 次結果

取到 100000 次已經趨於平穩了，此積分結果大約了 93 左右。

2. 模擬實驗(二)

12. For uniform (0, 1) random variables $U_1, U_2, \ldots$ define

$$N = \text{Minimum}\left\{n: \sum_{i=1}^{n} U_i > 1\right\}$$

That is, N is equal to the number of random numbers that must be summed to exceed 1.

(a) Estimate $E[N]$ by generating 100 values of N.
(b) Estimate $E[N]$ by generating 1000 values of N.
(c) Estimate $E[N]$ by generating 10,000 values of N.
(d) What do you think is the value of $E[N]$?

題目想要我們隨機生成 0 到 1 的浮點數，並將每次結果相加，紀錄使相加總合超過 1 的最小取樣次數，每次紀錄到 n 中，並通過多次相同動作，來計算期望值 E[N] = 所有 n 總和 / n 數量。

我一樣是使用 python 的 random 來隨機生成 x，將每次生成的數字相加，

直到剛剛好超過 1 那次結束，並記錄該 trail 總共取樣幾次。
在模擬中，題目要求生成 100、1000、10000 個 n 並獲得其平均值。

- 100 個 n 的 E[N] = 2.8
- 1000 個 n 的 E[N] = 2.67
- 10000 個 n 的 E[N] = 2.7208

我還取樣了 10000000 個 n 進行平均，結果為 2.7182132，而這數字跟我在維基百科上查到的尤拉數非常相似。

$e = 2.71828182845904523536\cdots$，近似值約為 $\frac{271801}{99990}$。

我猜這題就是**尤拉數**的 Monte Carlo Approach.