TAREA 6

Metodo diferencial, geométrico y desacoplo cinemático de un robot

Oscar Daniel Altamirano Vargas

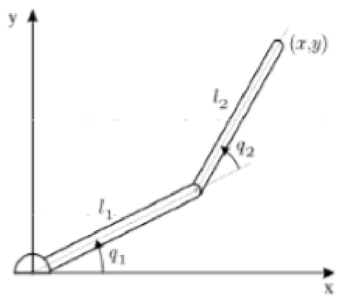
21 de octubre de 2019

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE LA ZONA METROPOLITANA DE GUADALAJARA

METODOS[1]

CINEMÁTICA DIRECTA: MÉTODO GEOMÉTRICO

- Es un método no sistemático que utiliza las relaciones geométricas para obtener la posición del extremo del robot.
- Normalmente se emplea para la obtención de la posición y no de la orientación
- Se usan en robots de pocos grados de libertad.



Para un brazo con dos GDL:

$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1+q_2)$$

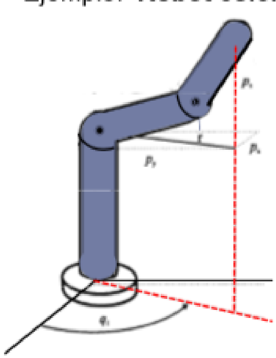
$$y = l_1 \operatorname{sen} q_1 + l_2 \operatorname{sen}(q_1+q_2)$$

CINEMÁTICA INVERSA: MÉTODO GEOMÉTRICO

Se basan en descomponer la cadena cinemática en distintos planos geométricos y resolviendo por trigonometría cada plano. Se trata de encontrar el numero suficiente de relaciones geométricas para posicionar el extremo del robot. Se utiliza para las primeras articulaciones.

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

Datos: Px, Py, Pz donde se quiere situar el extremo del robot.



$$q_1 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2-l_2^2-l_3^2}{2l_2l_3}$$

$$\sin q_3 = \pm\sqrt{1-\cos^2 q_3}$$

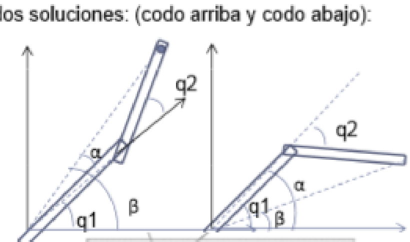
$$q_3 = \arctan\left(\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right)$$

a articulación q_2 tiene dos soluciones: (codo arriba y codo abajo):

$$q_2 = \beta - \alpha$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{p_z}{r}\right) = \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2+p_y^2}}\right)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$



$$q_2 = \arctan\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2+p_y^2}}\right) - \arctan\left(\frac{l_3 \sin q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

CINEMÁTICA INVERSA: MATRICES HOMOGÉNEAS

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

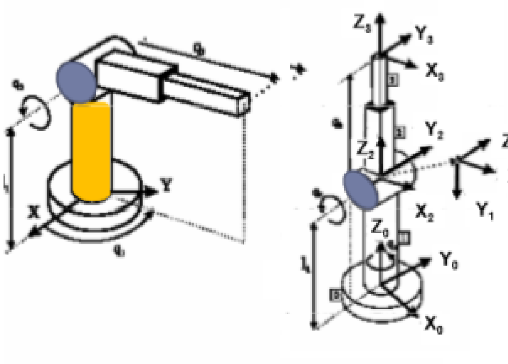


Tabla D-H

	θi	di	ai	αi
1	**q1**	**L_1**	**0**	**-90º**
2	**q2**	**0**	**0**	**90º**
3	**0**	**q3**	**0**	**0º**

MTH:

$$
{}^0_1A = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & -Cq1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad
{}^1_2\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Cq}2 & 0 & -\boldsymbol{Sq}2 & 0 \\ \boldsymbol{Sq}2 & 0 & \boldsymbol{Cq}2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad
{}^2_3\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{q}3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

CINEMÁTICA INVERSA: MATRICES HOMOGÉNEAS

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

px py pz DATOS (Posición del terminal)

$$
{}^0_3T = {}^0_1A\,{}^1_2A\,{}^2_3A
$$

$$
\left({}^0_1A\right)^{-1}\,{}^0_nT = {}^1_2A\,{}^2_3A \Rightarrow despejamos \quad q_1
$$

$$
\left({}^0_1A\right)^{-1}\,{}^0_nT = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & -Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & Cq1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq2 & 0 & Sq2 & 0 \\ Sq2 & 0 & -Cq2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\left({}^0_1A\right)^{-1}\,{}^0_nT = \begin{bmatrix} Cq1 & Sq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & L1 \\ -Sq1 & Cq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cq2 & 0 & Sq2 & \boxed{Sq2q3} \\ Sq2 & 0 & -Cq2 & -Cq2q3 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
-p_x\,Sq1 + p_y\,Cq1 = 0 \Rightarrow \frac{Sq1}{Cq1} = \frac{p_y}{p_x} \Rightarrow \boxed{q1 = \arctan\left(\frac{p_y}{p_x}\right)}
$$

CINEMÁTICA INVERSA: MATRICES HOMOGÉNEAS

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

$$\left({}^1_2A\right)^{-1}\left({}^0_1A\right)^{-1}\,{}^0_3T = {}^2_3A \Rightarrow despejamos \quad q_2 \quad y \quad q_3$$

$$\left({}^1_2A\right)^{-1}\left({}^0_1A\right)^{-1}\,{}^0_nT = \begin{bmatrix} Cq2 & Sq2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -Sq2 & Cq2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Cq1 & Sq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L1 \\ -Sq1 & Cq1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left({}^1_2\boldsymbol{A}\right)^{-1}\left({}^0_1\boldsymbol{A}\right)^{-1}\,{}^0_n\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Cq2Cq1} & \boldsymbol{Cq2Sq1} & \boldsymbol{Sq2} & \boldsymbol{-L1Sq2} \\ \boldsymbol{-Sq1} & \boldsymbol{Cq1} & 1 & 0 \\ \boldsymbol{-Sq2Cq1} & \boldsymbol{-Sq2Sq1} & \boldsymbol{Cq2} & \boldsymbol{-L1Cq2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{n_x} & \boldsymbol{o_x} & \boldsymbol{a_x} & \boldsymbol{p_x} \\ \boldsymbol{n_y} & \boldsymbol{o_y} & \boldsymbol{a_y} & \boldsymbol{p_y} \\ \boldsymbol{n_z} & \boldsymbol{o_z} & \boldsymbol{a_z} & \boldsymbol{p_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{q3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PxCq2Cq1 + PySq1Cq2 + PzSq2 - L1Sq2 = 0 \Rightarrow -\frac{Sq2}{Cq2} = \frac{PxCq1 + PySq1}{Pz - L1} \Rightarrow \boxed{q2 = \arctan\left(-\frac{PxCq1 + PySq1}{Pz - L1}\right)}$$

$$-Sq2Cq1Pz - Sq2Sq1Py + PzCq2 - L1Cq2 = q3 \Rightarrow \boxed{q3 = Cq2(Pz - L1) - Sq2(Cq1Pz + Sq1Py)}$$

CINEMÁTICA INVERSA: DESACOPLO CINEMÁTICO

Se basan en al resolución independiente de los grados de libertad que posicionan (3) y de los que orientan la muñeca (3).
Por lo que el problema cinemático inverso se divide en dos subproblemas:

1. Resolver las tres primeras articulaciones de posición.
2. Resolver las tres ultimas articulaciones que corresponden a la muñeca.

El método de resolución:

1) A partir de la posición y orientación que se busca [n,o,a,p], se obtiene el punto de corte de los 3 últimos grados de libertad (punto de muñeca Pm).
2) Se resuelve el problema cinemático inverso para el brazo de 3 GDL (q_1,q_2,q_3) que llega hasta la **Pm** (desde la base).
3) Se resuelve el problema cinemático inverso que va desde **Pm** hasta el punto final pf (calculando q_4,q_5,q_6).

CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO: MODELO DIFERENCIAL

Hasta ahora se ha considerado únicamente las relaciones de las articulaciones de una manera **estática** en ausencia de movimiento del robot (problemas Cinemático Directo e Inverso).

Cuando el robot se desplaza, los elementos de la cadena cinemática **propagan** de una articulación a al siguiente tanto **velocidades lineales como angulares**.
La velocidad del elemento i+1 será la del elemento **i** mas las componentes que añade la articulación **i+1.**

Métodos de resolución
Modelo Diferencial

Propagación de velocidades

Ecuaciones de revolución

Ecuaciones de Translación

Cálculo Matriz Jacobiana

Velocidades de las articulaciones

Velocidades del extremo del robot

$$\begin{bmatrix} \dot{q}1 \\ \dot{q}2 \\ \vdots \\ \dot{q}n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Jacobiano DIRECTO}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{q}1 \\ \dot{q}2 \\ \vdots \\ \dot{q}n \end{bmatrix} \xleftarrow{\text{Jacobiano INVERSO}} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO: MATRIZ JACOBIANA

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

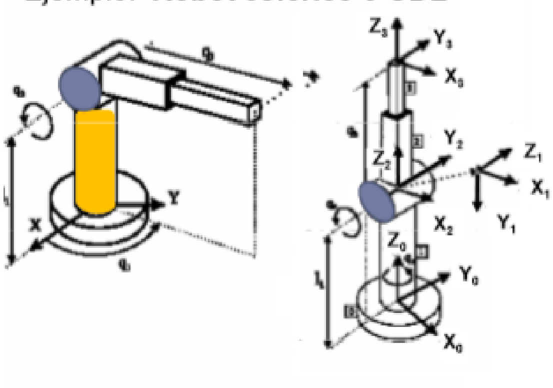


Tabla D-H

	θi	di	ai	αi
1	q1	L_1	0	-90º
2	q2	0	0	90º
3	0	q3	0	0º

MTH:

$$
{}^{0}_{1}A = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & -Cq1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
{}^{1}_{2}A = \begin{bmatrix} Cq2 & 0 & -Sq2 & 0 \\ Sq2 & 0 & Cq2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad
{}^{2}_{3}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO: MATRIZ JACOBIANA

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

$$
{}^{0}_{3}A = \begin{bmatrix} Cq1 & 0 & -Sq1 & 0 \\ Sq1 & 0 & Cq1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & L1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} Cq2 & 0 & Sq2 & 0 \\ Sq2 & 0 & -Cq2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =
$$

$$
{}^{0}_{3}A = \begin{bmatrix} Cq1Cq2 & -Sq1 & Cq1Sq2 & \boxed{q3Cq1Sq2} \\ Sq1Cq2 & Cq1 & Sq1Sq2 & \boxed{q3Sq1Sq2} \\ Sq2 & 0 & Cq2 & \boxed{q3Cq2+L1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{matrix} \rightarrow \boldsymbol{x = f_x(q_1, q_2, \ldots, q_n)} \\ \rightarrow \boldsymbol{y = f_y(q_1, q_2, \ldots, q_n)} \\ \rightarrow \boldsymbol{z = f_z(q_1, q_2, \ldots, q_n)} \\ \end{matrix}
$$

$$
\begin{aligned}
x &= q3\,Cq1\,Sq2 \\
y &= q3\,Sq1\,Sq2 \\
z &= q3Cq2 + L1
\end{aligned}
$$

Ahora se calcula el Jacobiano, a partir de las ecuaciones de posición del extremo

CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO: MATRIZ JACOBIANA

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

$$x = q3\,Cq1\,Sq2$$
$$y = q3\,Sq1\,Sq2$$
$$z = q3Cq2 + L1$$

Jacobiano

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q3Sq1Sq2 & q3Cq1Cq2 & Cq1Sq2 \\ q3Cq1Sq2 & q3Sq1Cq2 & Sq1Sq2 \\ 0 & -q3Sq2 & Cq2 \end{bmatrix}$$

Las velocidades del extremo del robot, en función de las aceleraciones de las articulaciones y las posiciones de las mismas.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q3Sq1Sq2 & q3Cq1Cq2 & Cq1Sq2 \\ q3Cq1Sq2 & q3Sq1Cq2 & Sq1Sq2 \\ 0 & -q3Sq2 & Cq2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

CINEMÁTICA DE MOVIMIENTO: MATRIZ JACOBIANA

Ejemplo: **Robot esférico 3 GDL**

Supongamos que la posición del robot viene definida por las articulaciones: q_1=0, q_2=90, q_3=1m. El robot tiene una longitud L1=1 m y esta sometido a unas velocidades articulares de q_1'=90º/s, q_2'=0º/s y q_3'=0.5 m/s. Calcular la velocidad del extremo del robot utilizando el Jacobiano.

$$J = \begin{bmatrix} q3Sq1Sq2 & -q3Cq1Cq2 & -cq1Sq2 \\ -q3Cq1Sq2 & -q3Sq1Cq2 & -sq1Sq2 \\ 0 & -q3Sq2 & Cq2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Velocidad del extremo del robot será:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi/2 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ \pi/2 \\ 0 \end{bmatrix} m/s$$

Referencias

[1] ocw.ehu.eus. modelo geométrico y cinemático del robot, September 2015.