Centro de masa para un sistema de partículas y cuerpos rígidos

El concepto de centro de masa es útil para describir el movimiento de objetos o de sistemas de partículas. Dicho centro de masa representa el movimiento de todo el cuerpo o sistema de partículas. Cuando el cuerpo es homogéneo y tiene simetría entonces el centro de masa coincide con su centro de simetría.

a) Si existen n partículas con masas m1, m2, . . . mn respectivamente el centro de masa se define:

$$X_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$Y_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$Z_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

b) Para el caso de un cuerpo continuo:

$$X_{CM} = \frac{\int X \, dm}{\int dm}$$

$$Y_{CM} = \frac{\int Y \, dm}{\int dm}$$

$$Z_{CM} = \frac{\int Z \, dm}{\int dm}$$

Desde el punto de vista de una notación vectorial:

$$\vec{R}_{CM} = \left(X_{CM}, Y_{CM}, Z_{CM}\right) = X_{CM}\,\hat{i} + Y_{CM}\,\hat{j} + Z_{CM}\,\hat{k}$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, X_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\,\hat{i} + \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, Y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\,\hat{j} + \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \, Z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\,\hat{k}$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i X_i}{M}\hat{\imath} + \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i Y_i}{M}\hat{\jmath} + \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i Z_i}{M}\hat{k}$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i X_i \hat{\imath} + \sum_{i=1}^{n} m_i Y_i \hat{\jmath} + \sum_{i=1}^{n} m_i Z_i \hat{k}\right)$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(X_i \hat{\imath} + Y_i \hat{\jmath} + Z_i \hat{k}\right)$$

Por lo tanto:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{R}_i$$

Movimiento del centro de masa partiendo del caso discreto.

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{R}_i$$

$$M\vec{R}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{R}_i$$

Derivando ambos lados de la igualdad con respecto al tiempo, resulta:

$$\frac{d}{dt}(M\vec{R}_{CM}) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{R}_i$$

$$M\frac{d}{dt}(\vec{V}_{CM}) = \left(m_1\frac{d}{dt}\vec{v}_1 + m_2\frac{d}{dt}\vec{v}_2 + \ldots + m_n\frac{d}{dt}\vec{v}_n\right)$$

$$(M\vec{V}_{CM}) = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n)$$

Derivando la expresión anterior con respecto al tiempo, resulta:

$$\frac{d}{dt}(M\vec{V}_{CM}) = \frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n)$$

$$M\frac{d}{dt}(\vec{V}_{CM}) = \left(m_1\frac{d}{dt}\vec{v}_1 + m_2\frac{d}{dt}\vec{v}_2 + \ldots + m_n\frac{d}{dt}\vec{v}_n\right)$$

$$M\vec{A}_{CM} = (m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + \ldots + m_n\vec{a}_n)$$

$$M\,\vec{A}_{CM} = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n\right)$$

Por lo tanto:

$$M\,\vec{A}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{i\ \, externas}$$

Es decir:

La masa total del sistema de partículas está concentrada en el centro de masa y se considera que las sumas de fuerzas externas se aplican en dicho punto.

Para obtener las componentes del tensor de inercia a partir del momento cinético, consideramos las componentes cartesianas de los vectores

$$\vec{\omega} = \omega_x\vec{\imath} + \omega_y\vec{\jmath} + \omega_z\vec{k} \qquad\qquad \overrightarrow{AP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

y aplicamos que

$$\overrightarrow{AP} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AP}) = (\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP})\vec{\omega} - (\overrightarrow{AP} \cdot \vec{\omega})\overrightarrow{AP}$$

Esto nos da, para la componente x del momento cinético

$$L'_{Ax} = \sum_i m_i((x_i^2+y_i^2+z_i^2)\omega_x - (x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)x_i) = \left(\sum_i m_i(y_i^2+z_i^2)\right)\omega_x + \left(-\sum_i m_i x\right.$$

Por otro lado, si desarrollamos la expresión matricial anterior queda, para la componente x

$$L'_{Ax} = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$$

lo que nos permite identificar las componentes buscadas, como los coeficientes de las componentes de la velocidad angular:

$$I_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) \qquad I_{xy} = -\sum_i m_i x_i y_i \qquad I_{xz} = -\sum_i m_i x_i z_i$$

y análogamente para las otras dos filas

$$I_{yx} = -\sum_i m_i x_i y_i \qquad I_{yy} = \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) \qquad I_{yz} = -\sum_i m_i y_i z_i$$

y

$$I_{zx} = -\sum_i m_i y_i z_i \qquad I_{zy} = -\sum_i m_i y_i z_i \qquad I_{zz} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

En forma compacta, podemos escribir el tensor de inercia como la expresión

$$\bar{\bar{I}} = \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_1^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}$$

o, de forma un poco más extensa, pero más simétrica

$$\bar{\bar{I}} = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \sum_i m_i \begin{pmatrix} x_i x_i & x_i y_i & x_i z_i \\ x_i y_i & y_i y_i & y_i z_i \\ x_i z_i & y_i z_i & z_i z_i \end{pmatrix}$$