Université Nationale des Sciences, Technologies, Ingénierie et Mathématiques (UNSTIM)
École Normale Supérieure de Natitingou

Examen de rattrapage de Calcul différentiel
Année 2022 - 2023, Durée 3 H

Exercice I

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 18x - 24y + 2xy + 120$$

1. Étudier les éventuels extrema locaux de f sur $\mathbb{R}^2$
2. Étudier les extrema globaux de f sur $\mathbb{R}^2$

Exercice II

On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 6x + 2y + 3$

1. Peut-on affirmer a priori l'existence de point(s) de maximum ou de minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$?
2. Chercher ses points critiques et dire s'il s'agit de col(s) ou de point(s) de minimum ou de maximum local sur $\mathbb{R}^2$.
3. Ecrire le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage d'un point critique.
4. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice Hessienne de f
5. Que pouvez-vous dire du reste dans le développement limité ?
6. Qu'en déduisez-vous sur l'existence de point(s) de maximum ou de minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice III

On considère une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1. Quand dit-on que f est différentiable en un point $a \in \mathbb{R}^n$?
2. On considère une matrice carrée d'ordre n, symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) =< Ax, x >$, où $< ., . >$ est le produit scalaire canonique. Montrer que g est différentiable en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et préciser sa différentielle en x, appliquée à $h \in \mathbb{R}^n$, $dg_x(h)$
3. On considère dans cette question, la fonction $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, définie par $\phi(A) = tr(A^2)$, où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ et $tr(A^2)$, la trace de la matrice A^2.
   (a) Justifier sans calcul que ϕ est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
   (b) Pour $1 \leq i, j \leq n$, on note $e_{i,j}$ la matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont tous nuls, sauf celui de la i-ième ligne et la j-ième colonne qui vaut 1. Exprimer le développement limité à l'ordre 1 de $\phi(A + tE_{i,j})$ en fonction de A et $E_{i,j}$.
   (c) En déduire $\dfrac{\partial \phi}{\partial E_{i,j}}|_A$ en fonction des coefficients $(a_{k,l})$ de A