Resolución del Problema de la Página 31

Optimización No Lineal

Oscar Cristhofer Barra Jara

6 de junio de 2025

Enunciado

Problema: Demuestre el teorema de Taylor para la siguiente función:

$$f(x_1, x_2) = 1{,}20\, x_1 + 1{,}16\, x_2 - \frac{1}{2}\left(2x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2\right)$$

Usando los valores:

$$x^T = \begin{bmatrix} 0{,}23 \\ 0{,}41 \end{bmatrix}, \quad \Delta x^T = \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}01 \end{bmatrix}, \quad t = 0{,}01$$

Se requiere verificar que:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \nabla f(x)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \nabla^2 f(x + t\Delta x) \Delta x$$

Procedimiento

1. Definición de la función

La función dada es:

$$f(x_1, x_2) = 1{,}20\, x_1 + 1{,}16\, x_2 - \frac{1}{2}\left(2x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2\right)$$

2. Gradiente y matriz Hessiana

Se calculan las derivadas parciales de primer:

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} -3x - y + 1{,}20 \\ -x - 2y + 1{,}16 \end{bmatrix}$$

Evaluando en el punto $x = \begin{bmatrix} 0{,}23 \\ 0{,}41 \end{bmatrix}$, se obtiene:

$$\nabla f(x) \approx \begin{bmatrix} 0{,}10 \\ 0,11 \end{bmatrix}$$

La matriz Hessiana de la función es:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es constante, por lo que su evaluación en cualquier punto da:

$$\nabla^2 f(x + t\Delta x) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

3. Aplicación del Teorema de Taylor

Se utiliza la siguiente definición del teorema de Taylor:

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + \nabla f(x)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \nabla^2 f(x + t\Delta x) \Delta x$$

Se sustituyen los valores calculados:

$$f(x + \Delta x) \approx 0{,}40985 + \begin{bmatrix} 0{,}10 & 0{,}11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}01 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}01 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3{,}00 & -1{,}00 \\ -1{,}00 & -2{,}00 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}01 \end{bmatrix}$$

Se desarrollan los calculos:

$$f(x + \Delta x) \approx 0{,}40985 + 0{,}0021 - 0{,}00035 = 0{,}4116$$

4. Validación numérica utilizando Python

Se implementó el procedimiento anterior en Python utilizando SymPy. A continuación se muestran los resultados:

- Parte 1: $f(x) = 0{,}40985$
- Parte 2: $\nabla f(x)^T \Delta x = 0{,}0021$
- Parte 3: $\frac{1}{2} \Delta x^T \nabla^2 f(x + t\Delta x) \Delta x = -0{,}00035$
- Resultado estimado: $f(x + \Delta x) \approx 0{,}4116$
- Resultado exacto: $f(x + \Delta x) = 0{,}4116$

Conclusión

El teorema de Taylor aplicado en la función dada proporciona una aproximación bastante precisa utilizando los valores entregados. Ademas el valor estimado coincide con el valor exacto de $f(x + \Delta x)$, lo que demuestra la validez del teorema y la precisión del método para desplazamientos pequeños.

6. Repositorio de código

El código utilizado para resolver este problema y verificar los resultados se encuentra disponible en '05.Programacion no lineal' dentro del siguiente repositorio de GitHub:

https://github.com/oscarbarra/Talleres_Sumativos_Optimizacion.git

Este incluye la implementación en Python de las derivadas, el gradiente, la matriz Hessiana y la verificación del teorema de Taylor.