

# El Problema del Milenio y su Aplicación al Salto de un Delfín

## Introducción

Las ecuaciones de Navier-Stokes, fundamentales en la mecánica de fluidos, describen el movimiento de los fluidos bajo diferentes condiciones físicas. Estas ecuaciones, planteadas en el siglo XIX, no solo tienen aplicaciones prácticas, sino que también representan uno de los "Problemas del Milenio". La existencia y suavidad de sus soluciones aún no ha sido resuelta matemáticamente, lo que las coloca en el centro de los desafíos matemáticos contemporáneos.

Este documento aplica estas ecuaciones para modelar el salto de un delfín desde una profundidad inicial de 10 m hasta la superficie, emergiendo parcialmente al aire. Además, se calcula la energía total requerida para el salto, y se evalúa cuántos arenques debe consumir un delfín diariamente para compensar esta energía.

## Formulación Matemática

### Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible se expresan como:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}, \quad (1)$$

donde:

- $\mathbf{u} = (u, v, w)$  es el vector de velocidad.
- $p$  es la presión dinámica.
- $\rho$  es la densidad del fluido.
- $\nu$  es la viscosidad cinemática.
- $\mathbf{g}$  es el vector de gravedad:  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ .

### Ecuación de Continuidad

La conservación de la masa se garantiza mediante:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

## Condiciones de Frontera

- En la superficie del delfín:  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  (no deslizamiento).
- En la interfaz agua-aire: continuidad de velocidad y presión.
- En los bordes lejanos del dominio: sin penetración ( $\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ ).

## Propiedades de los Fluidos

- Agua:  $\rho_{\text{agua}} = 1025 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu_{\text{agua}} = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ .
- Aire:  $\rho_{\text{aire}} = 1.225 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu_{\text{aire}} = 1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ .

## Energía Requerida para el Salto

### Componentes del Trabajo

El trabajo necesario para el salto del delfín se divide en tres componentes:

1. **Trabajo contra la resistencia del agua:**

$$W_{\text{agua}} = \int_0^h \frac{1}{2} \rho_{\text{agua}} C_D A v^2 dz, \quad (3)$$

donde  $C_D = 0.05$  es el coeficiente de arrastre,  $A = 0.5 \text{ m}^2$  es el área frontal del delfín y  $v = 3 \text{ m/s}$  es su velocidad promedio.

2. **Trabajo contra la resistencia del aire:**

$$W_{\text{aire}} = \int_h^{h_{\text{aire}}} \frac{1}{2} \rho_{\text{aire}} C_D A v^2 dz. \quad (4)$$

3. **Trabajo gravitacional:**

$$W_{\text{gravedad}} = mgh, \quad (5)$$

donde  $m = 150 \text{ kg}$  es la masa del delfín.

## Energía Total por Salto

Sumando las tres contribuciones, la energía total por salto es:

$$W_{\text{total}} = W_{\text{agua}} + W_{\text{aire}} + W_{\text{gravedad}}. \quad (6)$$

Sustituyendo valores:

$$\begin{aligned} W_{\text{agua}} &= \frac{1}{2} (1025) (0.05) (0.5) (3^2) (10) = 1153.12 \text{ J}, \\ W_{\text{aire}} &= \frac{1}{2} (1.225) (0.05) (0.5) (3^2) (1) = 0.14 \text{ J}, \\ W_{\text{gravedad}} &= (150) (9.81) (10) = 14715 \text{ J}, \\ W_{\text{total}} &= 1153.12 + 0.14 + 14715 \approx 15868.26 \text{ J}. \end{aligned}$$

## Consumo Energético Diario

Si el delfín realiza 288 saltos al día, la energía total diaria es:

$$E_{\text{diaria}} = 288 \times 15868.26 \approx 4572834 \text{ J.} \quad (7)$$

Un arenque aporta aproximadamente 500000 J de energía. Por lo tanto, el delfín necesita consumir:

$$N_{\text{arenques}} = \frac{E_{\text{diaria}}}{500000} \approx 9.15 \text{ arenques diarios.} \quad (8)$$

## Detalles Físicos y Matemáticos Adicionales

Para resolver numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes en este contexto, es necesario implementar métodos de discretización espacial y temporal.

### Discretización Espacial y Temporal

- **Malla tridimensional:** Se utiliza una malla uniforme con  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.1 \text{ m}$ .
- **Diferencias finitas:** Las derivadas espaciales se aproximan por diferencias centradas, mientras que las derivadas temporales se aproximan por diferencias hacia adelante.

### Ecuaciones Discretizadas

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j,k}^{n+1} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} + u_{i,j,k}^n \frac{u_{i+1,j,k}^n - u_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1,j,k}^n - p_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x} + \nu \frac{u_{i+1,j,k}^n - 2u_{i,j,k}^n + u_{i-1,j,k}^n}{\Delta x^2}. \\ \frac{v_{i,j,k}^{n+1} - v_{i,j,k}^n}{\Delta t} + v_{i,j,k}^n \frac{v_{i,j+1,k}^n - v_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i,j+1,k}^n - p_{i,j-1,k}^n}{2\Delta y} + \nu \frac{v_{i,j+1,k}^n - 2v_{i,j,k}^n + v_{i,j-1,k}^n}{\Delta y^2}. \end{aligned}$$

## Conclusión

El salto del delfín es un proceso que involucra interacciones complejas entre fluidos y fuerzas externas. Este análisis no solo cuantifica la energía necesaria, sino que también resalta la importancia de las ecuaciones de Navier-Stokes para modelar sistemas físicos reales. La aproximación numérica y los cálculos energéticos son fundamentales para entender las demandas fisiológicas de estos animales.