Problema 1) Oscar FD

Debemos probar que $\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\cdots+\binom{n-1}{3}=\binom{n}{4}$

Supongamos que hay un grupo de n personas, y queremos escoger 4 representantes, Donde ya sabemos que hay $\binom{n}{4}$ formas para escoger a los 4.

Pero también podemos escoger por casos, para explicar los casos voy a ejemplificar con un caso finito:

Tengamos las personas $\{a,b,c,d,e,f\}$

caso 1: Tomamos a la "a" como constante y elegimos del subconjunto $\{b,c,d\}$ 3 o sea de $\binom{3}{3}$ para formar $\{a,b,c,d\}$

caso 2- Tomamos a "e" como constante y elegimos del subconjunto $\{a,b,c,d\}$ 3 o sea de $\binom{4}{3}$ para formar $\{e,a,b,c\}$, $\{e,b,c,d\}$, $\{e,a,b,d\}$ $\{e,a,c,d\}$

caso 3: Tomamos a "f" como constante y elegimos del subconjunto $\{a,b,c,d,e\}$ a 3, o sea de $\binom{5}{3}$ para formar. $\{f,a,b,c\}$, $\{f,a,b,d\}$, $\{f,a,b,e\}$, $\{f,b,c,d\}$, $\{f,b,c,e\}$ $\{f,b,d,e\}$ $\{f,c,d,e\}$ $\{f,a,c,d\}$ $\{f,a,c,e\}$ $\{f,a,d,e\}$

y así se consideran todos los casos, y todas las posibilidades.

De igual manera lo podemos hacer para el caso n.

y ya nos quedaría que $\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\cdots+\binom{n-1}{3}=\binom{n}{4}$

Problema 2 Oscar.F.D

Debo proponer una fórmula para $1+3+5+\cdots+(2n-1)$

Sol. y demostrarla por inducción.

Vemos que:

n	
1	$1=1^2$
2	$1+3=4=2^2$
3	$1+3+5=9=3^2$
4	$1+3+5+7=16=4^2$

fórmula propuesta:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

Afirmación

1	$1=1^2$
2	$1+3=2^2$
3	$1+3+5=3^2$
$\vdots$	

Base de inducción

Para $n=1$ es cierto pues $1=1^2=1$

Hipotesis de inducción:

Supongamos que $k\geq 1$ y que todas las afirmaciones desde la primera hasta la k-ésima son verdaderas, por demostrar que la $k+1$ es verdadera.

o sea $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$ P.D $\rightarrow$ $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$

Dem:

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+(2k-1)}_{k^2 \text{ por H.I}}+(2k+1)=k^2+(2k+1)=\overbrace{k^2+2k+1}^{\text{trinomio cuad. perf.}}=\underline{\underline{(k+1)^2}}$$

Problema 3) Oscar F. D

La fórmula sería: $\frac{n(n+1)}{2}+1$

Podemos llamar a a_n el número de regiones para n rectas

entonces se propone que $a_n=\frac{n(n+1)}{2}+1$

Dem.

afirmación:

1 | $a_0=1$
2 | $a_1=2$
3 | $a_2=4$
$\vdots$

Base de inducción:

$n=0$ $a_0=1=\frac{0(1)}{2}+1$

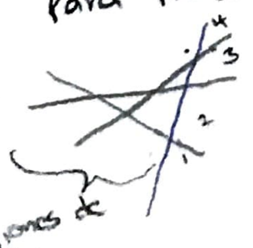
$n=1$ $a_1=2=\frac{1(2)}{2}+1$ cumple

Hipotesis de inducción:

Sea $n\geq 1$ y supongamos que $a_n=\frac{n(n+1)}{2}+1$

Por demostrar que $a_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}+1$.

Entones vamos a suponer que tenemos $n+1$ rectas en el plano en posición general
y por lo tanto vamos a tener un subconjunto de n rectas, donde por
HI divide al plano en $\frac{n(n+1)}{2}+1$ regiones, donde vamos a tener
que la recta que sobra va a pasar por cada una de las otras
n rectas (pues no hay 2 paralelas o 3 concurrentes) como por ejemplo:
para $n=3$.



regiones de a_3

o sea nos divide en 2, y por lo mismo siempre
habrá $n+1$ regiones nuevas, en el ejemplo las regiones
totales son las de a_3+4. Pues siempre hay n puntos de intersección
con la nueva recta, y $n+1$ regiones nuevas. (el otro lado, los segmentos siguen igual)

$$\therefore a_{n+1}=a_n+n+1 \underset{HI}{=} \frac{n(n+1)}{2}+1+n+1=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

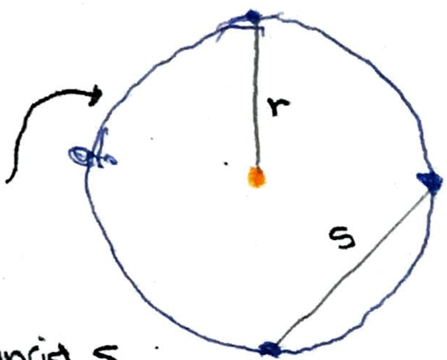
Problema 4 Oscar FD

Usemos la sugerencia:

Supongamos que no es cierto la afirmación.

sea r y $s \in \mathbb{R}$ y sea r la distancia a la cual no hay puntos rojos
y s la distancia a la cual no hay puntos azules

Podemos poner un punto en el plano de color rojo, por lo que podemos construir un circulo de radio r, donde por suposición no hay puntos rojos. $\Rightarrow$ debe ser azul



Ahora supongamos que $s \leq 2r$, y de esta forma ya habría 2 puntos azules a distancia s.

$\therefore$ No hay que suponer que NO se cumple la afirmación.

si $s \geq 2r$ sólo hay que formar ahora un circulo con centro de color azul, radio s y circunferencia de color rojo, y se hace lo mismo y se llega a la misma conclusión.

y de esta forma ya queda demostrada la afirmación