Laboration 2

Linjärprogrammering

Ludvig Markgren
luma0054@student.umu.se

Viktor Färnegårdh
vifa0032@student.umu.se

Johan Meurk
jome0095@student.umu.se

Simon Styrefors
sist0064@student.umu.se

Oscar Lindquist
osli0076@student.umu.se

Kursansvarig
Gerold Jäger

Lärare
Alp Yurtsever
Lars-Daniel Öhman
Erika Bäckman
Mimmi Vestin

8 maj 2023

Innehåll

1 Problembeskrivning

Sonya vill bygga upp en investeringsportfölj och behöver besluta hur hon ska fördela sina besparingar på olika tillgångar. Hon har låg risktolerans och målet är att utforma en portfölj som minimerar risken samtidigt som den förväntade avkastningen hålls ungefär runt inflationsnivån. Historisk data på 25 olika aktier från SP500 ska användas där daglig avkastning har bokförts för respektive aktie över en 5 års period, genom att använda denna historiska data Sonyas mål och begränsningar modelleras genom att lösa en optimeringsuppgift med linjära begränsningar och en icke-linjär (konvex kvadratisk) målfunktion. Problemet kan lösas med en sekvens av linjära program genom en klassisk metod inom icke-linjär programmering som kallas den konditionella gradientmetoden (CGM). Huvuduppgiften i laborationen är att implementera och använda CGM för att lösa Sonyas portföljoptimeringsproblem med hjälp av historisk data om avkastning på SP500-aktiebolag.

2 Metod

2.1 Förbehandlning av data

Information om historisk avkastning hos 25 olika aktiebolag hämtades ur den angivna länken i uppgiften (S&P 500) som en textfil. För att öppna och läsa av textfilen på korrekt sätt i Matlab krävdes ingen förbehandling utan programmet importerade den korrekt med funktionen *importdata*. Datan var organiserad med de olika bolagen som kolumner och avkastning per handelsdag som rader.

2.2 Programvara

För att lösa linjärprogrammet användes programspråket Matlab och funktionen *linprog* som löser linjärprogram utifrån angiven målfunktion, bivillkor och variabelbegränsningar.

2.3 Implementation av CGM

Conditional Gradient Method (CGM) är en optimeringsalgoritm som har möjligheten att lösa icke-linjära problem med hjälp av linjärapproximation. Den fungerar genom att hitta en rikting som minskar målfunktionen mest i varje steg och rör sig på så sätt iterativt mot den mest optimala lösningen.

Uppgiften utgick i första hand från följande icke-linjära optimeringsproblem:

$$\text{minimera } \sum_{n=1}^{N} \sigma_n^2 x_n^2$$

$$\text{med bivillkor } \sum_{n=1}^{N} \mu_n x_n \geq \alpha$$

$$\sum_{n=1}^{N} x_n = 1$$

$$x_n \geq 0, \quad n = 1, \ldots, N$$

Där x_n representerar mängden pengar investerat i aktie n

Med hjälp av teorin bakom CGM kunde problemet linjärapproxmeras till:

$$\text{minimera } 2\sum_{n=1}^{N} \sigma_n^2 x_n^{(k)} x_n$$

$$\text{med bivillkor } \sum_{n=1}^{N} \mu_n x_n \geq \alpha$$

$$\sum_{n=1}^{N} x_n = 1$$

$$x_n \geq 0, \quad n = 1, \ldots, N$$

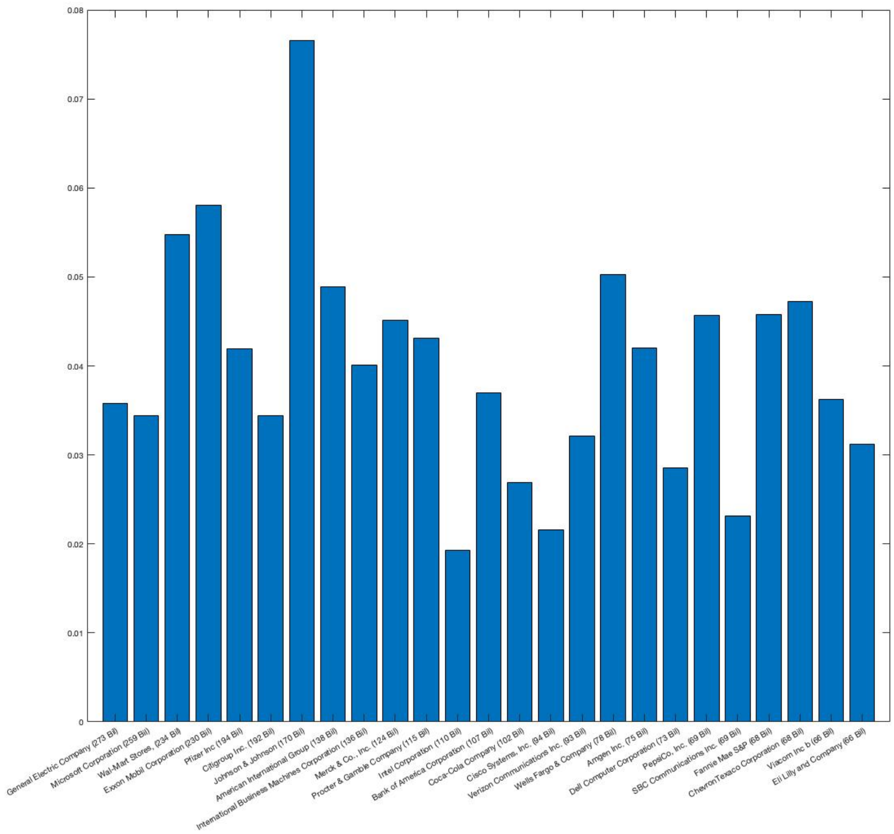
Där x_n representerar mängden pengar investerat i aktie n i startfallet och x_n^k mängden pengar investerat i aktie n i iteration k

Vidare användes den linjärapproximerade målfunktionen till köra CGM-algoritmen k iterationer där $x_n^{(k)}$ termen ändrades i varje iteration enligt $x^{(k+1)} = (1-\eta_k)x^{(k)} + \eta_k y^{(k)} k$ med steglängden η_k, där $y^{(k)}$ representerar det erhållna svaret efter varje iteration. Vi valde att använda oss av den agnostiska steglängden $\eta_k = 2/(k+1)$ och den "giriga" steglängden $\eta_k = \arg\min f((1-\eta)x^{(k)} + \eta y^{(k)})$, $\eta \in [0,1]$.
Först användes avkastningskravet $\alpha = \mu_{av} = \sum_{n=1}^{N} \mu_n$ (inflationstakten), sedan användes det högre avkastningskravet $\alpha = \frac{1}{2}(\mu_{av} + \mu_{max})$. μ_n är medelvärdet av returnering för varje aktie n, vilket kan definieras som $\mu_n = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} a_{n,t}$ där T är antalet dagar. σ_n^2 är variansen på aktie n.

3 Resultat

3.1 Inflationstakt som avkastningkrav

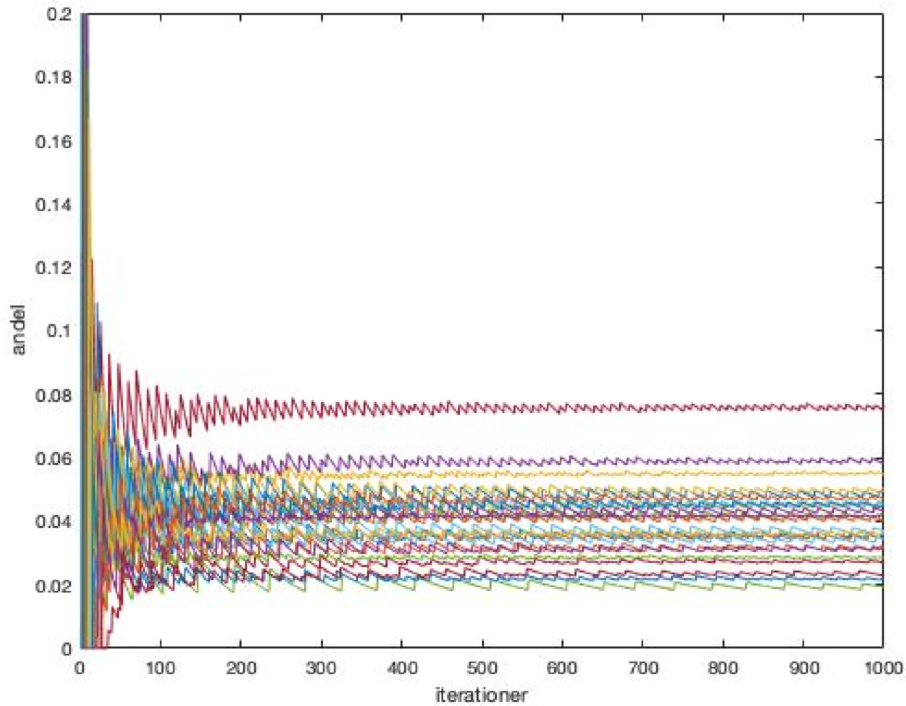
Först beräknades aktieportföljen med inflationstakten som avkastningskrav med hjälp av den agnostiska steglängden och k = 1000 iterationer. Inflationstakten estimerades till den genomsnittliga avkastningen hos alla aktier.
I figur 1 kan man betrakta aktieportföljen som löser problemet.



Figur 1: Aktieuppdelning i slutgiltig portfölj (lägre avkastningskrav, agnostisk steglängd)

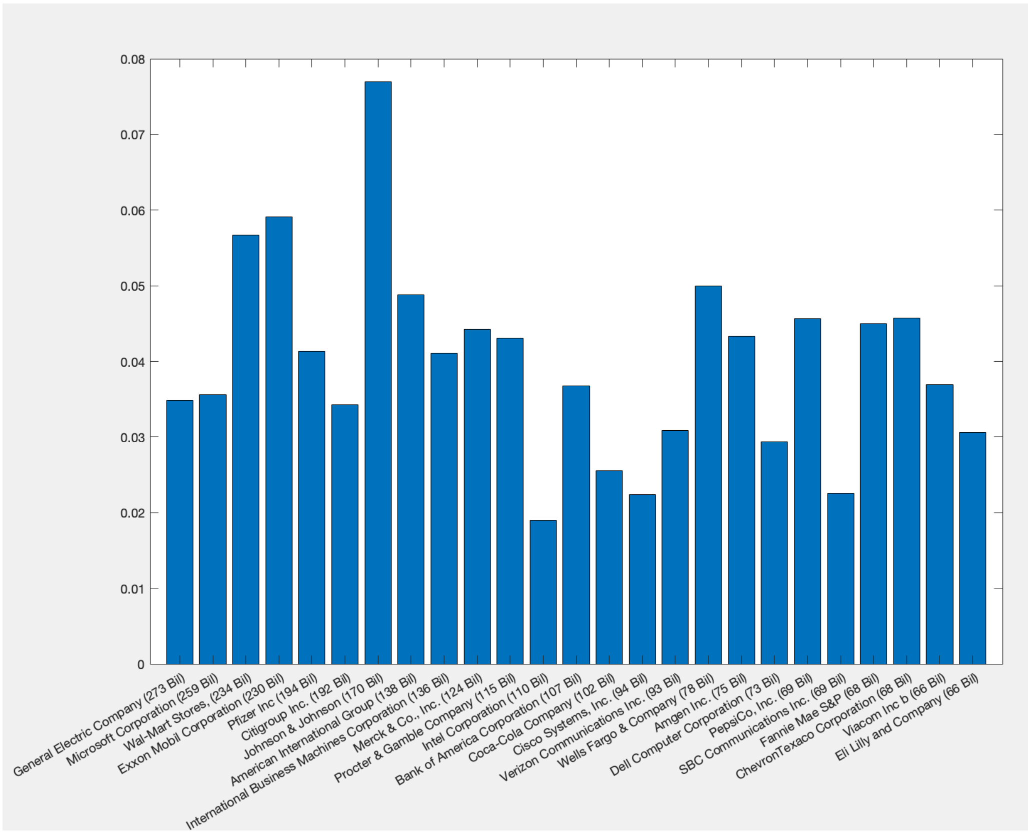
Den totala variansen/risken blev: $\sigma^2 = 2,38 * 10^{-5}$

Figur 2 beskriver hur aktieportföljen förändrades i varje iteration.



Figur 2: Visualisering av aktieuppdelningens konvergens (lägre avkastningskrav, agnostisk steglängd)

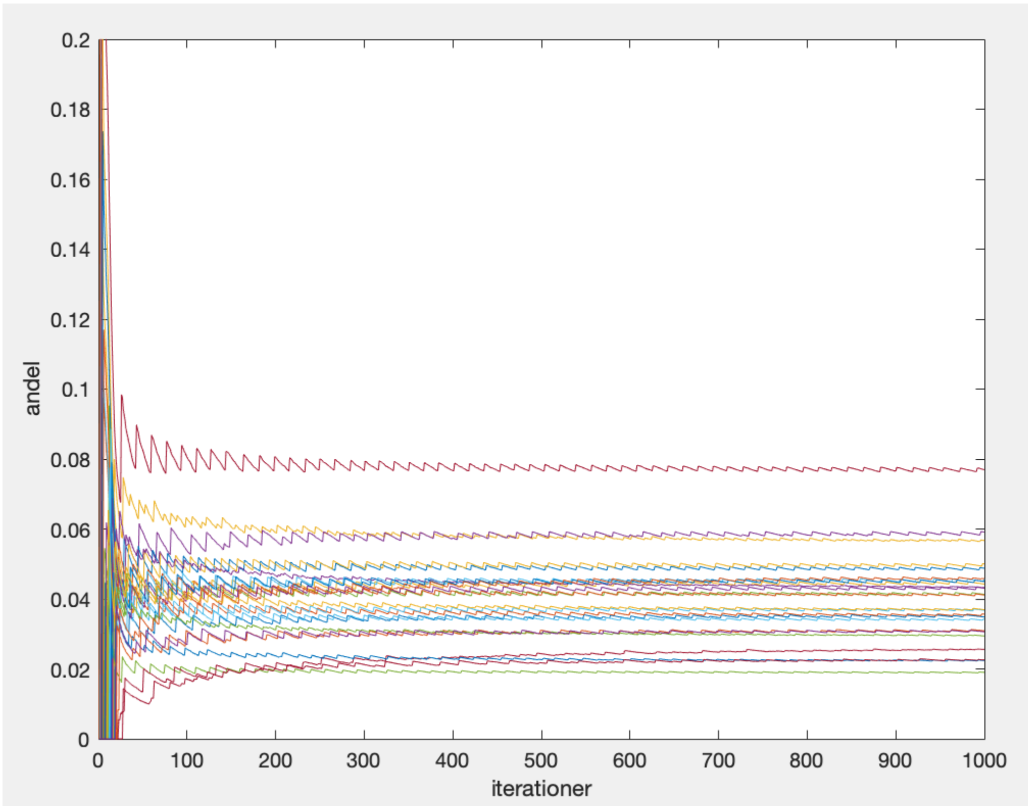
Liknande aktieportfölj beräknades även fast med ”girig” steglängd, det går att studera detta i figur 7.



Figur 3: Aktieuppdelning i slutgiltig portfölj (lägre avkastningskrav, girig steglängd)

Den totala variansen/risken blev: $\sigma^2 = 2,40 * 10^{-5}$

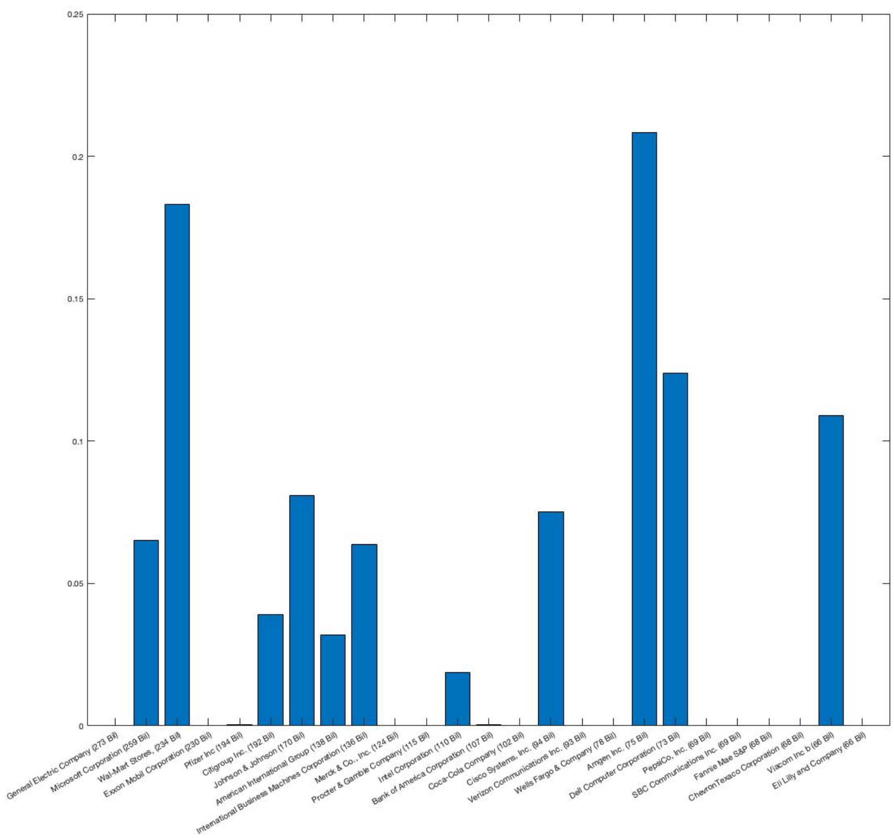
I figur 4 kan man betrakta hur aktieportföljen förändrades i varje iteration.



Figur 4: Visualisering av aktieuppdelningens konvergens (lägre avkastningskrav, girig steglängd)

3.2 Något högre avkastningskrav

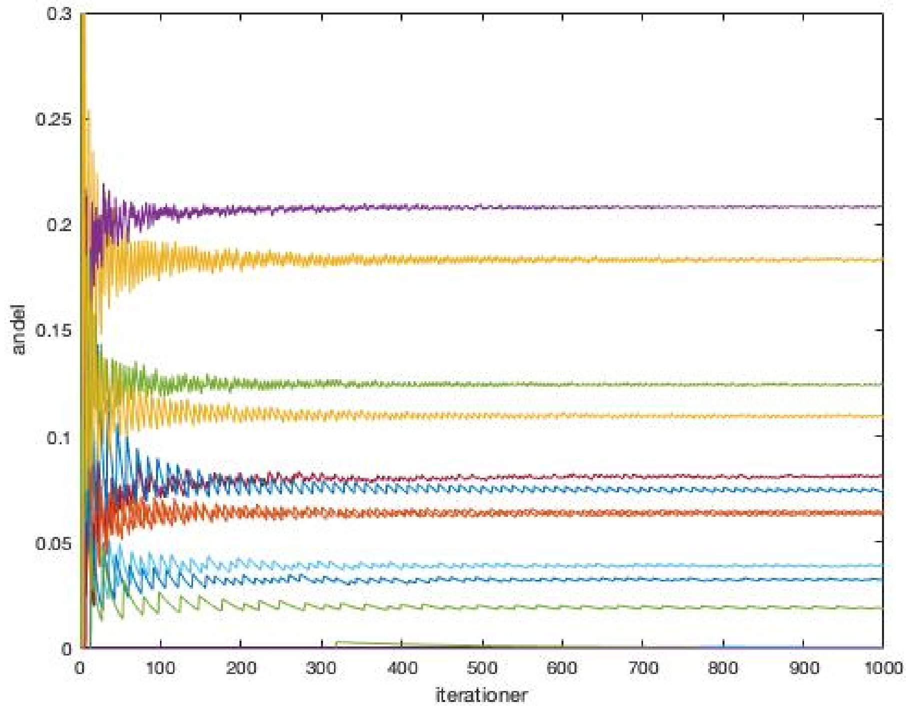
Sedan beräknades aktieportföljen med det något högre avkastningskravet med hjälp av den agnostiska steglängden och k = 1000 iterationer. Avkastningkravet beräknades som medelvärdet mellan inflationstakten och den aktie med den högsta historiska avkastningen. I figur 5 kan man betrakta resultatet.



Figur 5: Aktieuppdelning i slutgiltig portfölj (högre avkastningskrav, agnostisk steglängd)

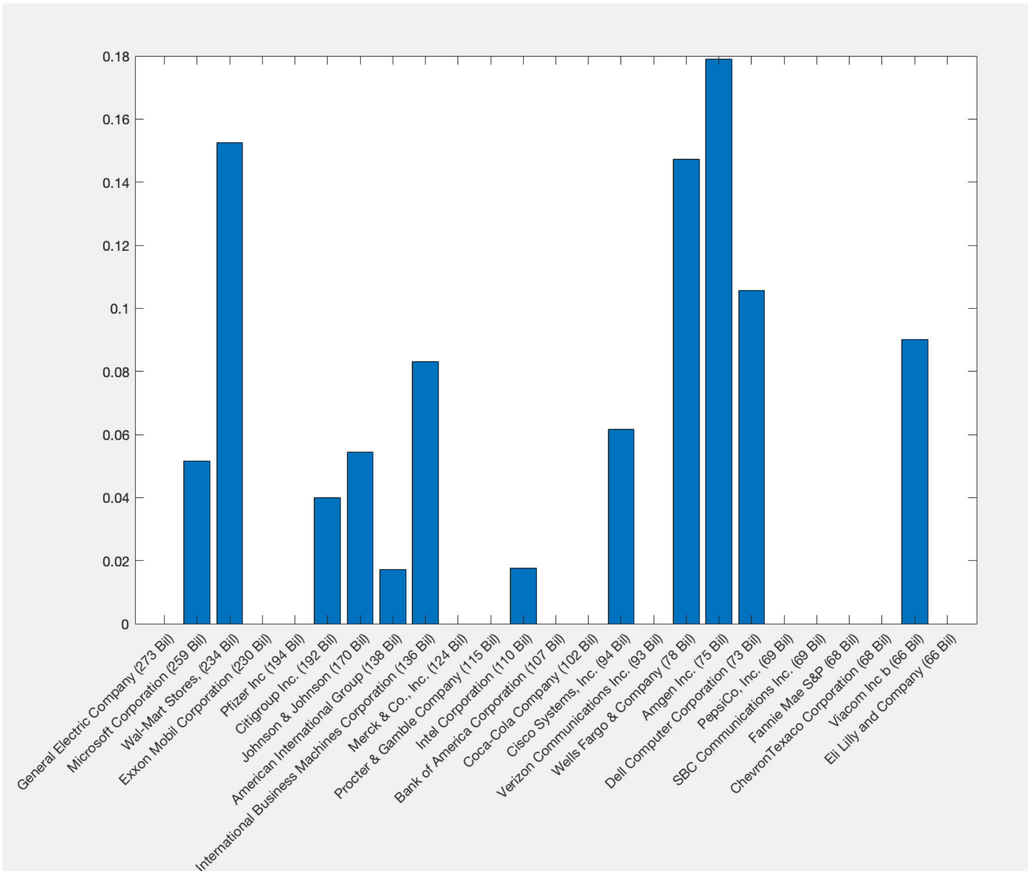
Den totala variansen/risken blev: $\sigma^2 = 1,16 * 10^{-4}$

I figur 6 kan man betrakta hur aktieportföljen förändrades i varje iteration när den agnostiska steglängden var implementerad.



Figur 6: Visualisering av aktieuppdelningens konvergens (högre avkastningskrav, agnostisk steglängd)

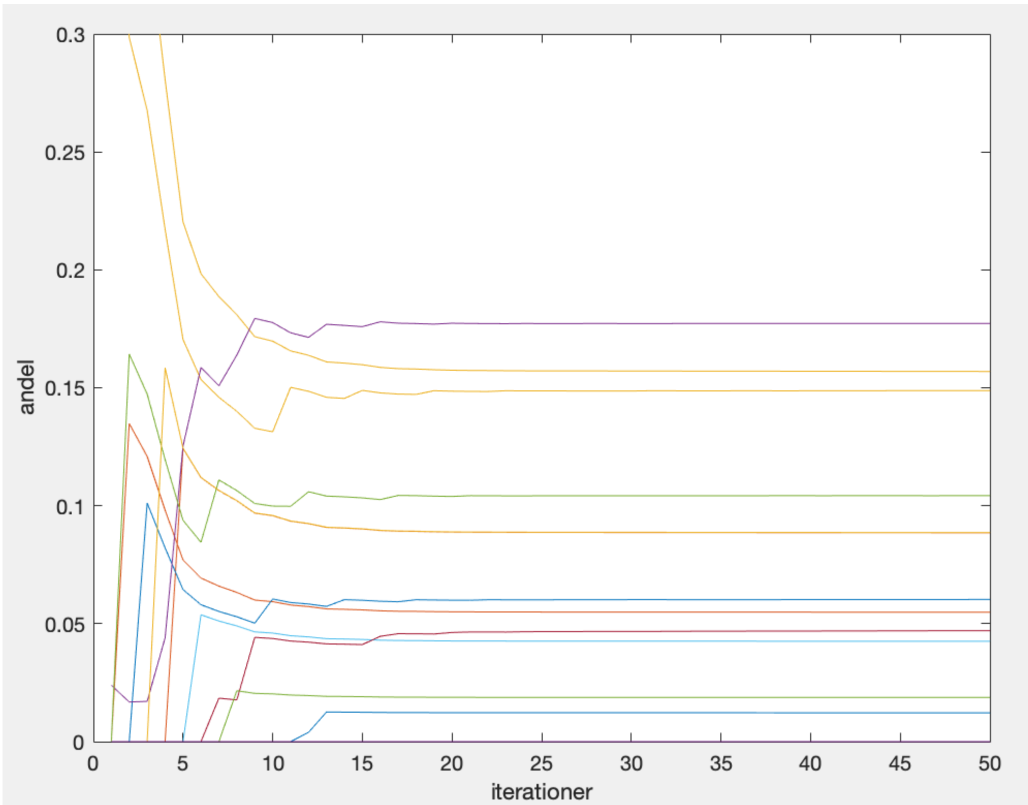
Liknande aktieportfölj beräknades även fast med ”girig” steglängd, det går att studera detta i figur 7.



Figur 7: Aktieuppdelning i slutgiltig portfölj (högre avkastningskrav, girig steglängd)

Den totala variansen/risken blev: $\sigma^2 = 9,43 * 10^{-5}$

I figur 8 kan man betrakta hur aktieportföljen förändrades i varje iteration när den giriga steglängden var implementerad. Figuren visar dem 50 första iterationerna.



Figur 8: Visualisering av aktieuppdelningens konvergens (högre avkastningskrav, girig steglängd)

3.3 Systemtid

Tabellen nedan visar tiden det tog att lösa optimeringsproblemet med 1000 iterationer för olika avkastningskrav och steglängder. Alla körningar gjordes 10 gånger och ett medelvärde beräknades.

	Agnostisk steglängd	Girig steglängd
Inflationstakt	13,2 s	14,3 s
Högre avkastningskrav	14,3 s	14,1 s

4 Diskussion

För att kunna utföra den konditionella gradientmetoden (CGM) så krävdes en tillåten startpunkt där $x^{(k)} \in X$, dvs där startpunkten är inom området som bildas av bivillkoren. Vi valde en startpunkt där aktie nummer 17 motsvarade 100% av portföljsinnehavet. Detta gjorde vi eftersom aktie nummer 17 är en av dem aktier med bäst avkastning vilket betyder att den med säkerhet skulle uppfylla bivillkoret för alla våra avkastningskrav i diverse simulationer.

Genom att studera resultaten så kan man identifiera en tydlig trend där andelarna av respektive aktie i portföljen konvergerar mot en stabilt uppdelning. Vi kan se att portföljen uppnåt en hyfsat stabil uppdelning redan efter 300 iterationer vilket ger upphov till färre itereringar vid simulation med syfte att effektivisera simulationerna.

Vid simulation med högre avkastningsvillkor i beaktning så kunde vi betrakta en portfölj med färre antal aktier men där variansen/risken var högre. Detta var rimligt eftersom aktierna som historiskt visat sig ha bäst avkastning har även tendens att vara mer volatila än dem med lägre avkastning. Vi kunde studera detta genom att utföra simulationer för olika avkastningskrav. Eftersom att Sonya eftertraktade en stabil portfölj kan vi baserat på simulationerna rekommendera att hon investerar med en uppdelning som angiven i figur 1. Något som Sonya däremot bör vara medveten om är att den här modellen inte tar hänsyn till att de olika aktierna är beroende av varandra vilket kan påverka resultatet eftersom att i verkligheten skulle de troligtvis vara det.

Vid studering av olika steglängder kunde vi observera en skillnad i resultaten. Skillnaden blev antalet iterationer som krävdes för att nå en konvergens för respektive aktie mot respektive andel. I fallet med den agnostiska steglängden så rör vi oss mot ett optimum utifrån tid, eller rättare sagt, iteration. I fallet med den giriga algoritmen rör vi oss inte mot optimum utifrån tid, utan baserat på hur långt ifrån optimum vi befinner oss per iteration. Detta medför att den giriga algoritmen når optimum i ett tidigare skede än den agnostiska.

De olika programkörningstiderna ger ett något förvånande resultat. Enligt dessa verkar körningstiden vara ungefär densamma för både girig och agnostisk steglängd. Den skillnad som finns kan bara vara upp till varians mellan olika körningar. En rimlig förväntan från innan var att den giriga steglängden skulle ha haft längre körningstid då den innefattar en mer komplex beräkning. Men en rimlig slutsats utifrån resultatet är att nästan all komplexitet och tid för att lösa problemet kommer ifrån själva linjärproblems lösaren. Pga detta så skulle tiden för att beräkna steglängden bli såpass liten att små skillnader i den inte visar sig tydligt i resultatet.

5 Granskning

5.1 Granskning av grupp 4

”Redovisas resultaten på överskådligt sätt? Figur 3 och figur 7 har likadana beskrivningar, girig steglängd och inflationen som avkastningskrav, men är det två olika grafer, kan det vara bildtexten på figur 7 som inte stämmer? Det hade varit bra med lite förtydligande där. Det är väldigt många grafer och det är lite svårt att överblicka. Steglängden står ovanför graferna och avkastningskravet står i bildtexten under graferna. Försök vara ännu mer tydlig med vad som skiljer de olika graferna åt för att det ska bli lättare att överblicka och hänga med.”

”Finns det en diskussion av resultaten som följer givna instruktioner? Intressant diskussion kring resultatet av era olika simuleringar, samt förhållandet mellan risk och avkastning och stabiliteten i portföljen. Dock, saknar vi en diskussion rörande körningstiden. I slutet av diskussionen diskuterar ni tid som iterationer och jämför de två steglängderna, men nämner inget om hur de skiljer sig åt i faktisk tid. Har ni testat om den ena är snabbare än den andra i sekunder? T.ex. genom att använda funktionen “tic toc” i Matlab.”

5.2 Åtgärder

Figurbeskrivningarna till samtliga figurer strukturerades upp och gjordes mer tydliga och sammanhängande.
Båda parametrarna går nu att finna i figurbeskrivningen under varje figur.
Resultat och diskussion gällande körningstid för de olika steglängderna och avkastningskrav infördes. Även en diskussion gällande körningstid adderades.

6 Referenslista

Allan Borodin, Ran El-Yaniv, Vincent Gogan. (u.å). *Datasets and Suplementary Material for a Portfolio Selection Paper*. https://csaws.cs.technion.ac.il/ rani/portfolios/portfolios.htm. Hämtad: 2023-04-26