NIVELACIÓN MATEMÁTICA

Semana 7

Factorización

iacc instituto profesional

APRENDIZAJE ESPERADO

El estudiante será capaz de:

- Solucionar ejercicios y problemas con factorización, considerando el uso de productos notables.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Dentro de las operaciones algebraicas vistas hasta ahora se ha mencionado la multiplicación de estas, y cómo es posible llevarlas a cabo cuando dichas expresiones corresponden a monomios, binomios o incluso polinomios. También se ha visto que existen ciertos casos especiales que suelen aparecer a menudo en matemática que se denominan productos notables, tales como el cuadrado de binomio o la suma por diferencia.

Existe un proceso inverso al de la multiplicación algebraica, que se entiende como la descomposición en factores, descomposición factorial o factorización. Las factorizaciones permiten reescribir las expresiones algebraicas o polinomios con cierto grado, en la forma de una multiplicación de otras expresiones o polinomios de grado menor. Esta operación o manipulación algebraica permite realizar cálculos de una manera más sencilla, los que de otra manera podrían llegar a resultar muy complejos, por lo que resulta muy importante familiarizarse y dominar este tema.

RESUMEN

En este documento se revisará la descomposición factorial, también llamada factorización, la que corresponde a una operación en que la expresión algebraica es escrita como producto de otras expresiones. Esto es de utilidad para la manipulación de dichas expresiones algebraicas en los problemas que así lo requieran.

Se espera que al finalizar esta lectura el estudiante se familiarice con los distintos tipos de factorizaciones explicadas, y que sea capaz de reconocer y ejecutar las que sean posibles de realizar en una expresión algebraica dada, considerando para ello la factorización por medio del factor común, el trinomio cuadrado perfecto, la diferencia de cuadrados, entre otros.

PALABRAS CLAVE

	**Factorización**	**Factor común**
	Trinomio perfecto	**Diferencia de cuadrados**
	Factor binomio	**Término común**

PREGUNTAS GATILLANTES

- ¿Cuáles son los números primos y los compuestos?
- ¿Cómo se puede descomponer un número en sus factores primos?
- ¿Se puede realizar un procedimiento similar con una expresión algebraica?

1. FACTORIZACIÓN

La factorización se entiende como el proceso inverso de realizar una multiplicación de expresiones algebraicas. Es decir, dada una expresión algebraica cualquiera, se busca escribir esta misma expresión, pero como una multiplicación (producto) de otras expresiones (factores).

Por ejemplo, la expresión del lado izquierdo de la siguiente igualdad corresponde a la factorización de la expresión del lado derecho.

$$\underbrace{2x}_{\text{factor}} \cdot \underbrace{(x+3)}_{\text{factor}} = \underbrace{2x^2+6x}_{\text{producto}}$$

1.1 FACTOR COMÚN

Corresponde a la forma de factorización elemental, en la que se debe encontrar ya sea factores literales o numéricos que sean comunes a cada uno de los términos de la expresión.

Ejemplo: Factorizar la expresión:

$$4x^2 + 5x$$

Se observa que ambos términos poseen el factor x en común, por lo que este será el factor común, el cual se extrae y se deja como un factor separado, multiplicando a un binomio, de modo que el resultado de este producto sea la expresión original:

$$x \cdot (4x+5)$$

Puede verificar que si se realiza la multiplicación indicada se obtiene la expresión inicial.

Como se indica al comienzo de esta sección, el factor común puede ser un factor literal o un coeficiente numérico. Para esto último, se deben considerar los factores que componen a dicho coeficiente.

Ejemplo: Factorizar la expresión:

$$3x^2 + 6y$$

En este caso, no hay factor literal común, sin embargo, al descomponer el segundo coeficiente en sus factores primos, encontramos un factor común en ambos términos:

$$3x^2 + 2 \cdot 3 \cdot y$$

$$3 \cdot (x^2 + 2y)$$

De este modo, hemos factorizado la expresión con el factor común 3.

Todo lo anterior se puede combinar para encontrar factores comunes compuestos, tanto por factores literales como por coeficientes numéricos.

Ejemplo: Factorice la expresión:

$$4x^2y + 20xy + 12xy^2$$

En relación con los factores literales, encontramos que las variables x e y son comunes a los tres términos, *por lo que se debe considerar la potencia más baja de estas variables comunes*. Por otro lado, los coeficientes numéricos tienen como factor común el valor 4. Dado lo anterior, podemos escribir:

$$4 \cdot x^2y + 5 \cdot 4 \cdot xy + 4 \cdot 3 \cdot xy^2$$

$$4xy \cdot (x + 5 + 3y)$$

1.2 FACTOR COMÚN BINOMIO

Existen algunos casos en que no es posible encontrar un factor para todos los términos de la expresión, aunque sí para parte de ella, lo que permite encontrar posteriormente un factor común que corresponde a una expresión completa en forma de binomio. Para ilustrar esta factorización, considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Factorizar la expresión:

$$\boldsymbol{ax + by + ay + bx}$$

Como se puede observar, no hay un único factor que sea común a todos los términos. Sin embargo, es posible agrupar los que tienen el factor a y los que tienen el factor b, simplemente cambiando el orden, pues se trata de una suma:

$$ax + ay + bx + by$$

Factorizamos cada uno de estos pares de términos:

$$a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y)$$

Observamos que tenemos ahora 2 términos separados por una suma, y que tienen en común el factor $(x+y)$, por lo que aplicamos la factorización quedando:

$$a \cdot \underbrace{(x+y)}_{\text{factor}} + b \cdot \underbrace{(x+y)}_{\text{factor}}$$
$$(x+y)\cdot(a+b)$$

1.3 TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Se trata de expresiones que provienen de un cuadrado de binomio, por lo que la factorización corresponderá justamente a dicho producto notable (recomendamos que lo revise si no lo recuerda bien). Se reconocen por tener 3 términos, 2 de ellos al cuadrado, y un tercer término que corresponde a la multiplicación de los otros dos y el factor 2. Por ejemplo, la expresión:

$$x^2+6x+9$$

Se puede escribir como:

$$x^2+6x+9 = x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2$$

Y se observa que corresponde a un trinomio cuadrado perfecto, por lo que su factorización es:

$$x^2+6x+9 = x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2 = (x+3)^2$$

Puede verificar que el desarrollo de este cuadrado de binomio resulta en el trinomio original.

Ejemplo: Factorizar el trinomio:

$$\mathbf{4x^2+20x+25}$$

El trinomio se puede escribir como:

$$4x^2+20x+25 = (2x)^2+2\cdot 2x\cdot 5+5^2$$
$$= (2x+5)^2$$

1.4 DIFERENCIA DE CUADRADOS

Al igual que el caso anterior, esta factorización corresponde al proceso recíproco de un producto notable. Como su nombre lo indica, es posible reconocer este tipo de expresiones cuando existe una diferencia de términos que a su vez son el cuadrado de algo, dando como resultado una factorización de suma por diferencia.

Ejemplo: Factorizar la expresión:

$$\boldsymbol{a^2 - 16}$$

$$a^2 - 16 = a^2 - 4^2 = (a + 4) \cdot (a - 4)$$

Observe que el orden es parte importante en esta factorización, el término cuadrático que se resta es el que se debe restar en el paréntesis resultante que contiene la diferencia.

Ejemplo: Factorizar la expresión:

$$\boldsymbol{9 - 25a^2}$$

$$9 - 25a^2 = 3^2 - (5a)^2 = (3 + 5a) \cdot (3 - 5a)$$

1.5 TRINOMIO DE LA FORMA x^2 + bx + c

Se reconocen estos trinomios por tener un término cuadrático, el cual será el término común en la factorización buscada. El término cuadrático es común a los dos binomios que resultan en la descomposición factorial. Luego se consideran los valores de b y de c, pues los demás términos que se buscan cumplen con que la suma de ellos es b y la multiplicación c.

Considere el siguiente ejemplo que ilustra el procedimiento.

Ejemplo: Factorizar la expresión:

$$\boldsymbol{x^2 + 5x + 6}$$

Es posible observar un término cuadrático, por lo que este será el término común en los factores de la descomposición:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + \ \ ) \cdot (x + \ \ )$$

Ahora se deben encontrar los términos que acompañarán a x en estos binomios. Para ellos, se debe buscar dos números tales que su suma nos de 5, y la multiplicación de ellos sea 6. Estos números son 2 y 3, por lo que la factorización queda:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3)$$

Es importante poner atención a los signos que puedan aparecer en la expresión, ya que deben ser tomados en cuenta al realizar la descomposición factorial.

Ejemplo: Factorizar la expresión:

$$\boldsymbol{x^2 - 10x + 21}$$

Se reconoce la estructura $x^2 + bx + c$, por lo que se tiene $b = -10$ y $c = 21$. Ahora la pregunta es ¿qué números multiplicados dan 21 y sumados dan -10? La respuesta es -7 y -3, por lo que la factorización queda:

$$x^2 - 10x + 21 = (x - 7) \cdot (x - 3)$$

COMENTARIO FINAL

La descomposición factorial es un tema muy importante para el desarrollo de las matemáticas, por lo que es necesario dominarla para poder avanzar en el conocimiento de otras disciplinas. La mayoría de las factorizaciones vistas en este documento están íntimamente relacionadas con los productos notables vistos la semana anterior, por lo que se recomienda que repase ambos contenidos para que el estudio de estos temas resulte más eficaz.

Recuerde revisar los contenidos adicionales, donde podrá ver otros ejemplos que le ayudarán en la comprensión de estos temas, además de plantear las dudas que surjan a su docente online.

REFERENCIAS

Baldor, A. (2008). *Álgebra de Baldor*. 2.ª edición. Editorial Patria, México.

Carreño, X. y Cruz, X. (2008). *Álgebra*. MC Graw Hill, Chile.

Pérez, J. (2016). *Nivelación en Matemáticas Básicas.* Editorial Universidad EAN, Colombia.

PARA REFERENCIAR ESTE DOCUMENTO, CONSIDERE:

IACC (2021). Factorización. Nivelación matemática. Semana 7.