NIVELACIÓN MATEMÁTICA

Semana 8

Expresiones algebraicas racionales

APRENDIZAJE ESPERADO

El estudiante será capaz de:

- Seleccionar ejercicios y problemas con expresiones algebraicas racionales, considerando dominio, operatoria y propiedades de estos en su resolución, estableciendo relaciones con el desempeño laboral.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Para completar el estudio de las expresiones algebraicas, en este apartado se estudiarán las expresiones de tipo racional, es decir, aquellas que tienen la forma de una fracción donde el numerador y el denominador corresponden a polinomios de algún grado.

Este tipo de expresiones aparecen en el estudio del cálculo y del álgebra, con aplicaciones a otras ramas científicas e ingenieriles, pero por sí mismas resultan muy importantes, pues su estudio permite poner en práctica lo aprendido hasta ahora acerca de las factorizaciones y la manipulación algebraica en general.

RESUMEN

En este documento se revisarán las expresiones algebraicas que están representadas por medio de una fracción, donde tanto el numerador como el denominador corresponden ya sea a un monomio o a un polinomio.

Se verá cómo manipular estas expresiones, aplicando factorizaciones, productos notables y simplificaciones, además de cómo realizar las operaciones elementales: suma, resta, multiplicación y división, siendo de gran utilidad la mayoría de los contenidos vistos hasta ahora.

Se espera que al finalizar la lectura de este documento el estudiante sea capaz de reconocer este tipo de expresiones, identificar los valores que no están permitidos dentro de ellas, realizar simplificaciones de estas expresiones, así como toda la operatoria que se ha mencionado anteriormente.

PALABRAS CLAVE

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Expresión algebraica racional</td><td rowspan="3">Raíz de un polinomio</td><td rowspan="3">Operatoria algebraica</td></tr>
<tr><td>Simplificación</td></tr>
<tr><td>Dominio</td></tr>
</table>

PREGUNTAS GATILLANTES

- ¿Cuál es la diferencia entre monomio y polinomio?
- Dado un polinomio cualquiera, ¿es posible encontrar siempre una factorización?
- ¿Es posible dividir dos polinomios cualesquiera encontrando como resultado otro polinomio?
- ¿Cómo se simplifica la expresión $\frac{4\mathrm{a}}{a}$?

1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Este tipo de expresiones corresponden a dos polinomios cualquiera $P(x)$ y $Q(x)$, los que se combinan para dar forma a la expresión de la siguiente manera:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

Es decir, las expresiones algebraicas racionales corresponden a fracciones en que tanto el numerador como el denominador son a su vez una expresión algebraica, ya sea esta un monomio o un polinomio. Las siguientes son ejemplos de expresiones algebraicas racionales:

$$\frac{4x+3}{9x+10}$$

$$\frac{5x^2-3x}{6x}$$

$$\frac{100}{7-2x}$$

$$\frac{4x^4+3x^3-2x^2+7x}{2x^3-7x^2+4}$$

1.1 DOMINIO DE UNA EXPRESIÓN RACIONAL

El dominio de una expresión algebraica se puede entender como los valores permitidos de la variable x, de modo que la expresión completa posea un valor válido. En general, para un polinomio de cualquier grado, el dominio corresponde a todos los números reales $\mathbb{R}$, es decir, la variable x puede tomar cualquier valor.

Sin embargo, en las expresiones racionales, al tratarse de una división entre polinomios, el denominador no puede ser cero (pues la división por cero no está definida), por lo que se buscará entonces aquellos números que cumplan con:

$$Q(x)=0$$

Ejemplo: Hallar el dominio de la expresión

$$\frac{3x+5}{x-10}$$

Se establece la restricción $Q(x)=0$, que en este caso queda como:

$$x-10=0$$

Al despejar el valor de x se obtiene:

$$x = 10$$

Por lo tanto, el dominio de esta expresión corresponde a todos los números reales excepto el 10:

$$Dom\left(\frac{3x+5}{x-10}\right) = \mathbb{R} - \{10\}$$

Ejemplo: Hallar el dominio de la expresión

$$\frac{x^2}{x^2 - 10x + 21}$$

En este caso la condición $q(x) = 0$ se expresa como:

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

Para encontrar los valores de x que hacen que la expresión anterior sea cero, se puede factorizar:

$$(x-7) \cdot (x-3) = 0$$

Como el producto de los paréntesis es cero, uno de los dos debe ser cero, es decir:

$x - 7 = 0$ o $x - 3 = 0$

$x = 7$ o $x = 3$

Por lo tanto, si la variable toma el valor 7 o 3 se obtiene $Q(x) = 0$, por lo que corresponden a valores prohibidos, y así el dominio es:

$$Dom\left(\frac{x^2}{x^2 - 10x + 21}\right) = \mathbb{R} - \{3, 7\}$$

1.2 SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES RACIONALES

Cuando se tiene una expresión algebraica racional de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

es posible que en algunos casos los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ posean una factorización tal que existe un factor que es común a dichos polinomios. Hallar factorizaciones en los polinomios que conforman a la expresión racional permite simplificar dicha expresión.

Ejemplo: Simplificar la expresión algebraica racional

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 5x - 14}$$

Desarrollo:

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + 5x - 14} = \frac{(x-5)\cdot(x-2)}{(x+7)\cdot(x-2)} = \frac{x-5}{x+7}$$

En este caso, se simplificó por el factor $(x-2)$ que se encontraba tanto en el numerador como en el denominador.

En general, para un polinomio cualquiera $P(x)$ existe una factorización por un factor de la forma $(x-a)$, siempre que se cumpla que $P(a) = 0$, es decir, si al evaluar el polinomio en el valor $x = a$ se obtiene como resultado el valor cero, entonces el polinomio es factorizable por $(x-a)$. Este valor a es conocido como una *raíz del polinomio*.

Ejemplo: Considere el polinomio

$$P(x) = x^2 - 4x + 3$$

Verificar si $x = 1$ y $x = 3$ son raíces del polinomio.

Desarrollo: al evaluar este polinomio en los valores 1 y 3 se encuentran los siguientes resultados:

$$P(1) = 1^2 - 4\cdot 1 + 3 = 0$$

$$P(3) = 3^2 - 4\cdot 3 + 3 = 0$$

Por lo tanto, los valores 1 y 3 son raíces del polinomio, por lo tanto, es posible escribirlo de la forma:

$$P(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1) \cdot (x-3)$$

Esta idea de encontrar un factor de la forma $(x - a)$ es aplicable a polinomios de cualquier grado.

Ejemplo: Verificar si $x = 5$ es una raíz del polinomio $P(x)$, y realizar la factorización correspondiente.

$$P(x) = x^3 - 6x^2 - x + 30$$

Desarrollo: primero se evalúa el polinomio en $x = 5$:

$$P(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 - 5 + 30 = 125 - 150 - 5 + 30 = 0$$

Por lo tanto, $x = 5$ es una raíz del polinomio, lo que implica que es posible realizar la factorización con el factor $(x - 5)$. Para encontrar dicha factorización se utiliza la división entre los polinomios $P(x)$ y $(x - 5)$, obteniéndose el resultado:

$$P(x) \div (x - 5) = x^2 - x - 6$$

Y, de esta manera, es posible escribir el polinomio como:

$$\mathrm{P}(x) = (x - 5) \cdot (x^2 - x - 6)$$

Un punto importante que se debe destacar es que la simplificación de una expresión racional debe ocurrir de manera posterior a la determinación del Dominio, de lo contrario, la raíz asociada al término simplificado no sería excluida de los valores posibles del dominio.

1.3 OPERATORIA CON EXPRESIONES RACIONALES

Para poder realizar las operaciones básicas con expresiones algebraicas racionales se debe considerar todo lo aprendido hasta ahora. En particular, se deben aplicar las reglas vistas para las fracciones numéricas que se han estudiado en documentos anteriores, recordando que los factores literales representan una cantidad cualquiera, y esta es la razón por la que es posible aplicar las mismas reglas.

1.3.1 SUMA Y RESTA CON IGUAL DENOMINADOR

Para sumar o restar expresiones algebraicas racionales con igual denominador aplicamos las mismas reglas que con las fracciones numéricas (ver documento 1), es decir, se mantiene el denominador común y se suman o restan los numeradores.

Ejemplo: Realizar la operación

$$\frac{3x+2}{x-7}+\frac{2x+8}{x-7}$$

Desarrollo:

$$\frac{3x+2}{x-7}+\frac{2x+8}{x-7}=\frac{3x+2+2x+8}{x-7}=\frac{5x+10}{x-7}$$

1.3.2 SUMA Y RESTA CON DISTINTO DENOMINADOR

Al igual que en el caso anterior, se aplican las reglas ocupadas en las fracciones numéricas, y en este caso, es posible ocupar la regla de multiplicación cruzada:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplo: Realizar la operación

$$\frac{2x+3}{x-2}+\frac{x-1}{x}$$

Desarrollo:

$$\frac{2x+3}{x-2}+\frac{x-1}{x}=\frac{(2x+3)\cdot x+(x-2)\cdot(x-1)}{(x-2)\cdot x}=$$

$$=\frac{2x^2+3x+x^2-x-2x+2}{x^2-2x}=\frac{3x^2+2}{x^2-2x}$$

Otra alternativa posible (y que es equivalente a la anterior) es calcular el mínimo común múltiplo entre los denominadores y determinar entonces las expresiones adecuadas por las que se debe amplificar cada término.

Ejemplo: Realizar la operación

$$\frac{\mathrm{x}+3}{\mathrm{x}-7}+\frac{\mathrm{x}-2}{\mathrm{x}}$$

Desarrollo: el mínimo común múltiplo entre $(x-7)$ y x es:

$$x\cdot(x-7)=x^2-7x$$

Por lo tanto, el primer término de la suma se amplifica por x, y el segundo término por $(x-7)$:

$$\frac{\mathrm{x}+3}{\mathrm{x}-7}\cdot\frac{x}{x}+\frac{\mathrm{x}-2}{\mathrm{x}}\cdot\frac{\mathrm{x}-7}{\mathrm{x}-7}=$$

$$=\frac{x^2+3x}{x^2-7x}+\frac{x^2-9x+14}{x^2-7x}=$$

$$=\frac{x^2+3x+x^2-9x+14}{x^2-7x}=$$

$$=\frac{2x^2-6x+14}{x^2-7x}$$

1.3.3 MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES RACIONALES

Se siguen las mismas reglas que para las fracciones numéricas, es decir, se multiplican los numeradores entre sí, al igual que los denominadores:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Ejemplo: Realizar la operación

$$\frac{x+3}{x-7}\cdot\frac{x+5}{x-10}$$

Desarrollo:

$$\frac{x+3}{x-7} \cdot \frac{x+5}{x-10} = \frac{(x+3)\cdot(x+5)}{(x-7)\cdot(x-10)} = \frac{x^2+8x+15}{x^2-17x+70}$$

1.3.4 DIVISIÓN DE EXPRESIONES RACIONALES

Al igual que en el caso anterior, se siguen las mismas reglas que para las fracciones numéricas, es decir, se transforma la división en una multiplicación por el inverso multiplicativo del divisor, y luego se realiza la operación resultante:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo: Realizar la operación

$$\frac{x}{x-3} \div \frac{2x-5}{x+6}$$

Desarrollo:

$$\frac{x}{x-3} \div \frac{2x-5}{x+6} = \frac{x}{x-3} \cdot \frac{x+6}{2x-5} = \frac{x\cdot(x+6)}{(x-3)\cdot(2x-5)} = \frac{x^2+6x}{2x^2-11x+15}$$

COMENTARIO FINAL

La noción de dominio vista en este documento será de utilidad en asignaturas posteriores en las que se deberá aprender acerca de las funciones. Asimismo, la operatoria que se puede realizar con estas expresiones es parte de otras herramientas que son aplicadas al momento de llevar a cabo el análisis matemático acerca del comportamiento de las funciones. Además, estas operaciones son muy importantes para el desarrollo de las habilidades lógico-matemáticas y su ejercitación le ayudará a poner en práctica todo lo aprendido hasta este punto.

REFERENCIAS

Baldor, A. (2008). Álgebra de Baldor. 2.ª edición. Editorial Patria, México.

Carreño, X. y Cruz, X. (2008). Álgebra. Chile: MC Graw Hill.

Pérez, J. (2016). Nivelación en Matemáticas Básicas. Editorial Universidad EAN, Colombia.

PARA REFERENCIAR ESTE DOCUMENTO, CONSIDERE:

IACC (2021). Expresiones algebraicas racionales. Nivelación matemática. Semana 8.