NIVELACIÓN MATEMÁTICA

Semana 6

Productos notables

iacc instituto profesional

APRENDIZAJE ESPERADO

El estudiante será capaz de:

- Solucionar ejercicios y problemas con factorización, considerando el desarrollo de productos notables.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Posterior al manejo elemental de las expresiones algebraicas, corresponde revisar el siguiente paso en esta rama de las matemáticas: los productos notables y la factorización. Estas operaciones se aplican en muchos desarrollos matemáticos, desde el álgebra hasta el cálculo diferencial e integral. Por ello, su aprendizaje posee una gran relevancia, tanto para comprender las bases de la matemática elemental como de la superior.

Los productos notables y la factorización son conocidos desde la antigua Grecia, y se han utilizado para comprender problemas relacionados con la geometría, hasta problemas mucho más complejos, por ejemplo, Isaac Newton creó el binomio de Newton, que permite determinar la potencia de un binomio, cualquiera sea su exponente entero, el que utilizó para su desarrollo del cálculo diferencial y de la física.

RESUMEN

En este documento se hará una revisión de los productos notables, que corresponden a operaciones de expresiones algebraicas que son habituales de encontrar en desarrollos de las matemáticas, y que representan fórmulas de uso frecuente. Estas operaciones siguen las reglas vistas la semana anterior para llegar al resultado de la fórmula final, y se puede usar directamente tanto la fórmula como la operación algebraica correspondiente.

Se espera que al finalizar esta lectura sea capaz de desarrollar cualquiera de los productos notables que aparezcan en los ejercicios, además de intentar poner en práctica lo aprendido anteriormente para desarrollar algunas de las fórmulas que acá encontrarás.

PALABRAS CLAVE

	**Producto notable**	**Cuadrado de binomio**
	Suma por diferencia	**Cubo de binomio**
	Término común	

PREGUNTAS GATILLANTES

- ¿Recuerda haber usado productos algebraicos durante su formación escolar? ¿Cuáles?
- Si se te plantea una multiplicación de expresiones algebraicas, ¿cree que hay reglas o patrones que se pueden aplicar para desarrollarla, o solo se siguen los procedimientos vistos la semana anterior?
- ¿Puede pensar en algún ejemplo del ámbito cotidiano o laboral en que deba aplicar un producto algebraico?

1. PRODUCTOS NOTABLES

Los productos notables corresponden a fórmulas de expresiones algebraicas, que como se verá, se obtienen a partir del desarrollo de las multiplicaciones de estas expresiones. Entre los productos notables más conocidos se encuentran el cuadrado de binomio y la suma por diferencia, pero existe una gran cantidad de productos notables adicionales.

1.1 CUADRADO DE BINOMIO

Como su nombre lo indica, corresponde a un binomio que se encuentra elevado a 2, es decir, se multiplica por sí mismo.

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) =$$
$$= a^2 + ab + ba + b^2 =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

En resumen:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Es decir, el resultado de un cuadrado de binomio es *el primer término al cuadrado, más el doble del primero por el segundo, más el segundo término al cuadrado*.

Ejemplo: Desarrollar el siguiente cuadrado de binomio:

$$(x+2y)^2$$

Aplicando directamente la fórmula e identificando al primer término con x y al segundo término con $2y$, se tiene:

$$x^2 + 2\cdot x\cdot 2y + (2y)^2$$
$$x^2 + 4xy + 4y^2$$

Así como existe una fórmula para un binomio que tiene una suma, también hay una para la resta, el producto notable es:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\mathrm{ab} + b^2$$

Puede intentar demostrar esta fórmula, el desarrollo es similar al caso anterior. Es importante notar que, en este caso, los términos que están al cuadrado siempre son positivos, solo cambia el signo del término central.

Ejemplo: Desarrollar el siguiente cuadrado de binomio:

$$(2xy - 7)^2$$
$$(2xy)^2 - 2 \cdot 2xy \cdot 7 + 7^2$$
$$4x^2y^2 - 28xy + 49$$

1.2 SUMA POR DIFERENCIA

Corresponde al producto entre la suma de 2 términos algebraicos y la diferencia entre ellos.

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$$
$$= a^2 - b^2$$

En resumen:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Es decir, el resultado de una suma por diferencia es *la diferencia de los cuadrados de los términos*.

Ejemplo: Desarrollar la siguiente suma por diferencia:

$$(2x + 3y) \cdot (2x - 3y)$$
$$(2x + 3y) \cdot (2x - 3y)$$
$$(2x)^2 - (3y)^2$$
$$4x^2 - 9y^2$$

1.3 CUBO DE BINOMIO

Similar al cuadrado de binomio, la fórmula de este producto se obtiene mediante el desarrollo de la multiplicación respectiva, y de la misma manera, existen también dos versiones: una para la suma y otra para la resta de los términos.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Se deja propuesto el desarrollo de estas fórmulas.

Ejemplo: Desarrolle el siguiente cubo de binomio:

$$(4x-5)^3$$
$$(4x)^3 - 3\cdot(4x)^2\cdot 5 + 3\cdot(4x)\cdot 5^2 - 5^3$$
$$64x^3 - 240x^2 + 300x - 125$$

1.4 BINOMIOS CON TÉRMINO COMÚN

Estos productos notables corresponden a expresiones habituales encontradas en matemática, y la fórmula siguiente representa una regla que se puede seguir para desarrollarlos:

$$(x+b)\cdot(x+c) = x^2 + (b+c)\cdot x + bc$$

Es importante destacar que los términos b y c deben ser considerados con su signo al momento de realizar las operaciones. También es posible realizar el desarrollo de este producto siguiendo las operaciones habituales vistas la semana anterior.

Ejemplo: Desarrolle los siguientes productos notables:

$$\boldsymbol{(x+4)\cdot(x+7)} \text{ y } \boldsymbol{(x-3)\cdot(x-5)}$$

$$(x+4)\cdot(x+7)$$
$$x^2 + (4+7)\cdot x + 4\cdot 7$$
$$x^2 + 11x + 28$$

$$(x-3)\cdot(x-5)$$
$$x^2 + (-3+-5)\cdot x + (-3)\cdot(-5)$$
$$x^2 - 8\mathrm{x} + 15$$

1.5 CUADRADO DE TRINOMIO

Como su nombre lo indica, corresponde a un trinomio que se multiplica por sí mismo:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Ejemplo: Desarrolle el producto:

$$(2x+5+x^2)^2$$

Se identifican los términos $a = 2x$, $b = 5$, $c = x^2$, y aplicando la fórmula:

$$\begin{aligned}(2x+5+x^2)^2 &= (2x)^2 + 5^2 + (x^2)^2 + 2\cdot 2x\cdot 5 + 2\cdot 2x\cdot x^2 + 2\cdot 5\cdot x^2\\ &= 4x^2 + 25 + x^4 + 20x + 4x^3 + 10x^2\\ &= 14x^2 + 25 + x^4 + 20x + 4x^3\\ &= x^4 + 4x^3 + 14x^2 + 20x + 25\end{aligned}$$

En el último paso se ordenó la expresión según el grado de los términos de mayor a menor.

COMENTARIO FINAL

Es posible resumir los resultados anteriores en la siguiente tabla:

Nombre	Producto	Resultado
Cuadrado de binomio	$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$
	$(a-b)^2$	$a^2-2ab+b^2$
Suma por diferencia	$(a+b)\cdot(a-b)$	a^2-b^2
Cubo de binomio	$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
	$(a-b)^3$	$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
Binomios con término común	$(x+b)\cdot(x+c)$	$x^2+(b+c)x+bc$

Estos resultados son de gran utilidad en el desarrollo de problemas en matemática, por lo que se recomienda que los aprenda correctamente y que practique su aplicación.

Por último, se menciona el desarrollo de un binomio elevado a cualquier potencia, es decir, de la forma $(a+b)^n$, donde a y b puede ser cualquier número real, y n es un número natural. Para desarrollar esta expresión, se pueden identificar los coeficientes del polinomio resultante por medio del famoso "Triángulo de Pascal":

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

Triángulo de Pascal

Las dos primeras filas tienen los valores 1, y el resto de las filas se forma a partir de la suma de los dos valores inmediatamente superiores. Si observa el resultado del cuadrado de binomio visto anteriormente, podrá darse cuenta de que los coeficientes de cada término corresponden a los de la tercera fila; y si observa el cubo de binomio, verá que los coeficientes corresponden a los de la cuarta fila. Así, este triángulo nos entrega los coeficientes de cualquier potencia del binomio, y los exponentes de los términos se obtienen aumentando y disminuyendo gradualmente las potencias de cada uno, con la potencia del binomio como el grado más alto. Por ejemplo:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Puede observar que la potencia de la variable a disminuye término a término, por otro lado, la potencia de b aumenta en cada término. Así, es posible encontrar la expansión del binomio para cualquier potencia usando este patrón y el triángulo de Pascal.

REFERENCIAS

Baldor, A. (2008). *Álgebra de Baldor.* 2ª edición. Editorial Patria, México.

Carreño, X. y Cruz, X. (2008). *Álgebra*. MC Graw Hill, Chile.

Pérez, J. (2016). *Nivelación en Matemáticas Básicas.* Editorial Universidad EAN, Colombia.

PARA REFERENCIAR ESTE DOCUMENTO, CONSIDERE:

IACC (2021). Productos notables. Nivelación matemática. Semana 6.