Universidad Nacional Autónoma
de México

Facultad de Ciencias

NOTAS SOBRE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN Y SU ANÁLISIS EN MATHEMATICA

REPORTE DE ACTIVIDAD DOCENTE

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

PRESENTA:

OSCAR IVAN DE JESÙS MUNGUÌA

TUTOR

M. en C. JORGE CHÁVEZ CARLOS

2018

DEDICATORIAS:

Con mucho cariño y amor quiero dedicar estas notas, especialmente a mi hijo Alexis Ivan de Jesus Almaraz y a mi hija Itzmin Yaretzi de Jesus Almaraz, quienes han sido mi mayor motivación para lograr mis objetivos y salir adelante en todo momento. Así como también a mi amada esposa Maria de Jesús Almaraz de la Cruz por confiar en mi.

A mis padres biológicos Gelacio de Jesús Colín y Carmen Munguia Martinez(+) por ayudarme en los momentos que los mas los eh necesitado.

A mis padres adoptivos Faustino de Jesús Colín y Maria del Carmen Pascual Florez por apoyarme en todo momento de mi vida, bajo cualquier circunstancia difícil que se me ah presentado.

A cada uno de mis hermanos a quienes admiro y respeto con mucho cariño.

A mis amigos con quienes eh convivido y a quienes me ayudaron cuando los necesitaba, en especial a mi amigo Jesus por tenderme la mano en mi trayectoria como estudiante y darme los mejores consejos para hacer posible este trabajo.

A mis profesores con quienes me compartieron sus conocimientos y resolvieron mis dudas. En especial al Dr. Jorge Chavez Carlos por ayudarme a terminar con éxito estas notas.

AGRADECIMIENTOS:

Quiero agradecer a Dios por permitirme estar en estos momentos hasta donde he llegado.

Índice general

INTRODUCCION

Las siguientes notas presentan definiciones, ejemplos , aplicaciones y ejercicios en el lenguaje MATHEMATICAL, en relación a ecuaciones diferenciales ordinarias. Destinado como apoyo al lector que desee conocer las ecuaciones diferenciales con MATHEMATICAL.

Cada capitulo consta de una introducción teórica, ejercicios resueltos y otros propuestos. Algunos ejemplos se llevan a cabo con el software MATHEMATICAL, el cual reduce considerablemente el esfuerzo de programación y facilita la representación gráfica de los resultados.

En estas notas se abarcan las siguientes aplicaciones:

En el capitulo 1 se introdujo las definiciones básicas de ecuaciones diferenciales, así como también ejemplos y ejercicios que mejora su entendimiento.

En el capitulo 2 se introduce a ecuaciones primer orden así como sus distintos tipos que la caracterizan.

En la sección 2.3 se proporcionan aplicaciones de ecuaciones diferenciales que manejan la taza de intereses de un banco. Las mismas ecuaciones diferenciales manejan la taza de cambio mediante el factor de tiempo.

En la sección 3.2 se trata de los sistemas de ecuaciones diferenciales y su clasificación de puntos críticos. Muestra los programas en MATHEMATICAL que generan el campo vectorial en el plano cartesiano mediante distintos ejemplos los cuales tratan de la aproximación numérica para las soluciones de ecuaciones diferenciales, así como su esboce gráfico del sistema de ecuaciones.

Capítulo 1

ECUACIONES DIFERENCIALES

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS

ón (Ecuación Diferencial).

La primera definición que vamos a ver, es la de ecuación diferencial. Una **ecuación diferencial** es una ecuación con contenido derivables, de las cuales se pueden clasificar como ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales.
ón

Ejemplo 1.1.1 *A continuación se presentan algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales:*

$$ay'' - by' + cy = g(t) \tag{1.1}$$

$$\operatorname{sen}(y)\frac{d^2y}{dx^2} = (1-y)\frac{dy}{dx} + y^2e^{-5y} \tag{1.2}$$

$$y^{(4)} + 10y''' - 4y' + 2y = cos(t) \tag{1.3}$$

$$\alpha^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.4}$$

$$a^2u_{xx} = u_{tt} \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial^2 x\partial t} = 1 + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.6}$$

Definición 1.1.1 *(Orden).*

El **orden** de una ecuación diferencial, es la derivada que presenta mayor orden en una ecuación diferencial.

Las ecuaciones (1.1),(1.2),(1.4) y (1.5) son de segundo orden, mientras que la ecuación (1.6) es de tercer orden y la ecuación (1.3) es de orden cuatro.

Notemos que el orden no depende de si se tiene derivadas ordinarias o parciales en la ecuación diferencial.

Definición 1.1.2 *(Ecuacion Diferencial Orninaria).*

Una ecuación diferencial es llamada **ecuación diferencial ordinaria** , si contiene derivadas ordinarias de una o mas variables dependientes con respecto a una sola variable independiente.

Ejemplo 1.1.2 *Las ecuaciones (1.1),(1.2) y (1.3) son ecuaciones diferenciales ordinarias. En la ecuación (1.1) y (1.3) la variable t es la única variable independiente y y es una variable dependiente. En la ecuación (1.2) la variable independiente es x, mientras que la variable independiente es y.*

Definición 1.1.3 *(Ecuacion Diferencial Parcial).*

Una ecuación diferencial es llamada **ecuación diferencial parcial** , si contiene derivadas ordinarias de una o mas variables dependientes con respecto a mas de una variable independiente.

Ejemplo 1.1.3 *Las ecuaciones (1.4),(1.5) y (1.6) son ecuaciones diferenciales parciales. En las ecuaciones (1.4) y (1.5) las variables x y t son variables independientes y u es una variable dependiente. En las ecuación (1.6) las variables x, t y $y$son variables independientes y u es una variable dependiente.*

Definición 1.1.4 *(Ecuación Diferencial Lineal).*

Una **ecuación diferencial lineal** es una ecuación que se puede escribir de la siguiente forma.

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + ... + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y(t) = g(t) \tag{1.7}$$

Notemos que en la ecuación diferencial lineal no hay productos de la función $y(t)$ o con alguna de sus derivadas, ni productos entre las derivadas, ademas la variable dependiente así como sus derivadas se presentan solo en la primera potencia.

Si la ecuación diferencial, no se escribe de la forma (1.7) entonces esta se dice que es una ecuación diferencial **NO LINEAL**.

Ejemplo 1.1.4 *Las ecuaciones del ejemplo (1.1) y ()1.3) son ecuaciones diferenciales, pero la ecuación la ecuación (1.2) no es lineal.*

1.2. SOLUCIONES

Una solución de una ecuación diferencial en un intervalo $\alpha < t < \beta$ es una función $y(t)$ que satisface la ecuación diferencial en cuestión del intervalo $\alpha < t < \beta$. Es importante notar que las soluciones van a acompañadas de intervalos y eso intervalos pueden importar información importante sobre la solución. Véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.2.1 *Muestre que $y(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ es una solución para $4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0$ para $x > 0$*

Solución *Vamos a necesitar la primera y segunda derivada de la función $y(x) = x^{-\frac{3}{2}}$, donde se obtiene*

$$y'(x) = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \qquad y''(x) = \frac{15}{4}x^{-\frac{7}{2}}$$

sustillendo las derivadas en la ecuación $4x^2y'' + 12xy' + y = 0$ obtenemos

$$4x^2\left(\frac{15}{4}x^{-\frac{7}{2}}\right) + 12x\left(-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\right) + 3\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) = 0$$

$$15x^{-\frac{3}{2}} - 18x^{-\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{3}{2}} = 0$$

$$0 = 0$$

Así $y(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ *satisface la ecuación diferencial y por lo tanto es solución.*

Notemos que en el ejemplo anterior a pesar de que una función puede simbólicamente satisfacer una ecuación diferencial, debido a ciertas restricciones provocadas por la solución no podemos usar todos los valores de la variable independiente y por lo tanto, debe hacer una restricción sobre la variable independiente. Este será el caso de muchas soluciones a ecuaciones diferenciales.

A su vez en este ejemplo, observemos que hay de hecho muchas más soluciones posibles a la ecuación diferencial dada. Por el momento, todas las siguientes son solución

$$y(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y(x) = -9x^{-\frac{3}{2}}$$

$$y(x) = 7x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y(x) = -9x^{-\frac{3}{2}} + 7x^{-\frac{1}{2}}$$

se dejan los detalles para comprobar que estos son de hecho soluciones. Teniendo en cuenta estos ejemplos ¿ se podría encontrar otras soluciones a la ecuación diferencial ? Existe de hecho un numero infinito de soluciones en esta ecuación diferencial.

Así, dado que son un numero infinito de soluciones de la ecuación diferencial al ejemplo anterior, se podria hacer la siguiente pregunta ¿ Cual es la solución que queremos o si importa la solución que estamos usando?. Esta pregunta nos lleva a la siguiente definición de esta sección.

ón (Condición Inicial).

La(s) condición(es) inicial(es) es una condición o conjunto de condiciones, sobre la solución que nos permitirá determinar la solución que buscamos. Las condiciones iniciales son de la forma,

$$y(t_0) = y_0 \qquad y/o \qquad y^k(t_0) = y_k$$

Por lo tanto, en otras palabras, las condiciones iniciales son valores de la solución y su(s) derivada(s) en puntos específicos.
ón

Con el tiempo veremos soluciones de la ecuación diferencial que son únicas y por lo tanto solo una solución satisfará las condiciones dadas.

El número de condiciones iniciales que se requieren para una ecuación diferencial dada dependerá del orden de la ecuación diferencial como veremos en el siguiente ejemplo

Ejemplo 1.2.2 *Muestre que* $y(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ *es una solución para* $4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0$, $y(4) = \frac{1}{4}$ *y* $y'(4) = -\frac{3}{64}$

Solución *Como pudimos ver en el ejemplo anterior que la función* $y(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ *es una solución y podemos observar que*

$$y(4) = 4^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(\sqrt{4})^3} = \frac{1}{8}$$

$$y'(4) = -\frac{3}{2}4^{-\frac{5}{2}} = -\frac{3}{2}\frac{1}{(\sqrt{4})^5} = -\frac{3}{64}$$

Por lo que esta solución también cumple las condiciones iniciales de $y(4) = \frac{1}{8}$ *y* $y'(4) = -\frac{3}{64}$. *De hecho,* $y(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ *es la única solución a esta ecuación diferencial que satisface estas dos condiciones iniciales.*

Definición 1.2.1 *(Solucion General).*

La **solución general** de una ecuación diferencial es la forma más general que la solución puede tomar y no tomar en cuenta cualquier condición inicial.

Ejemplo 1.2.3 $y(t) = \frac{3}{4} + \frac{c}{t^2}$ *es la solución general de*

$$2ty' + 4y = 3$$

Definición 1.2.2 *(Solucion Real).*

La **solución real** de una ecuación diferencial es la solución especifica, que no solo satisface la ecuación diferencial, sino que también satisface las condiciones iniciales dadas.

Ejemplo 1.2.4 *¿Cuál es la solución real al siguiente problema de valor inicial?*

$$2ty' + 4y = 3 \qquad y(1) = -4$$

Solución *Para resolver esta ecuación es necesario separar en ambos lados de la igualdad a la variable dependiente "y" a la variable independiente "t"haciendo los despejes correspondientes se tiene lo siguiente.*

$$\frac{2}{3-4y}d_y = \frac{1}{t}d_t$$

Al final obtenemos que esta ecuación, se puede ver como una función

$$y(t) = \frac{3}{4} + \frac{c}{t^2}$$

Para determinar el valor de "c"procedemos a usar la condición inicial.

$$-4 = y(-1) = \frac{3}{4} + \frac{c}{(-1)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad c = -4 - \frac{3}{4} = -19/4$$

Por lo tanto la solución real para el problema de valor inicial es

$$y(t) = \frac{3}{4} - \frac{19}{4t^2}$$

Para este ejemplo podemos ver que una vez que tenemos la ecuación diferencial encontramos que la solución real no es más que aplicar la(s) condición(es) inicial(es) y resolver la(s) constante(s) que están en la solución general.

Consideremos el concepto de una solución de la ecuación diferencial ordinaria de n-esimo orden.

$$F\left[t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, ..., \frac{d^ny}{dt^n}\right] \tag{1.8}$$

donde F es una función real de sus $(n+2)$ argumentos $t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, ..., \frac{d^ny}{dt^n}$

Definición 1.2.3 *(Solucion Explicita).*

Una **solución explicita** es una solución dada de la forma $y(t) = y$. Una **solución implícita** es una solución que no este en forma explicita. Una relación $g(t, y) = 0$ se llama una solución implícita de (1.8) si esta relación define por lo menos una función real f de la variable t en un intervalo I tal que esta sea una solución explicita de (1.8) en este intervalo.

Ejemplo 1.2.5 *La relación*

$$\operatorname{sen} t + \cos t - y = 0 \tag{1.9}$$

es una ecuación implícita de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0 \tag{1.10}$$

para todo real t. La relación (1.9) define la función $f(t) = \operatorname{sen} t + \cos t$ que es una solución explicita de la ecuación diferencial (1.10), donde

$$f''(t) = -\operatorname{sen} t - \cos t$$

Al sustituir f"(t) y f(t) en la ecuación diferencial (1.10) esta se reduce a la identidad.

$$(-\operatorname{sen} t - \cos t) + (\operatorname{sen} t + \cos t) = 0$$

que se cumple para todo real x.

Capítulo 2

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

2.1. ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Las ecuaciones diferenciales de primer orden, que se estudiaran en este capitulo, se pueden expresar de la siguiente manera.

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t) \tag{2.1}$$

Donde $p(t)$ y $g(t)$ son funciones continuas. Ahora supongamos que existe una función $\mu(t)$, llamado factor de integración. Donde multiplicando $\mu(t)$ en la ecuación (2.1) se obtiene lo siguiente

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t) \tag{2.2}$$

Ahora supongamos que $\mu(t)$, satisface lo siguiente

$$\mu(t)p(t) = \mu'(t) \tag{2.3}$$

De esta manera siempre que $p(y)$ sea continua podemos, sustituir (2.3) en (2.2) donde se tiene

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu'(t)y = \mu(t)g(t) \tag{2.4}$$

En esta parte por (2.4) aplicamos la regla del producto

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu'(t)y = (\mu(t)y(t))'$$

Usando la regla del producto en (2.4) se tiene lo siguiente

$$(\mu(t)y(t))' = \mu(t)g(t) \tag{2.5}$$

Integrando ambos lados de la igualdad en (2.5) se obtiene

$$\begin{aligned} \int (\mu(t)y(t))'dt &= \int \mu(t)g(t)dt \\ \mu(t)y(t) + c &= \int \mu(t)g(t)dt \end{aligned} \tag{2.6}$$

Despejamos la función $y(t)$ lo cual se tiene

$$y(t) = \frac{\int \mu(t)g(t)dt - c}{\mu(t)}$$

Ahora, en esta función tenemos a la contante c, la cual es una constante desconocida, pero con signo negativo. en esta parte le cambiaremos el signo a la constante en donde al final de la respuesta esta no afectara la solución. De esta manera tenemos

$$y(t) = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + c}{\mu(t)} \tag{2.7}$$

Ahora que tenemos una solución general de (2.1) necesitamos volver a lo anterior y determinar cual es la función $\mu(t)$. Comenzando en (2.3) dividiendo en ambos lados por $\mu(t)$, se obtiene.

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t)$$

Recordando resultados del calculo I, obtenemos que lo anterior es

$$(\ln \mu(t))' = p(t)$$

Integrando en ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\ln \mu(t) + k = \int p(t) \ln \mu(t) = \int p(t) + k$$

sacamos el exponencial en ambas parte de la igualdad

$$\mu(t) = e^{\int p(t)+k}$$
$$\mu(t) = e^{k} e^{\int p(t)}$$

donde posteriormente obtenemos

$$\mu(t) = ke^{\int p(t)} \tag{2.8}$$

De esta manera tenemos una formula para la solución general (2.7) y una formula para el factor de integración. Sin embargo, tenemos dos constantes desconocidas, la constante k y la contante c. Para eliminar una de ellas, necesitamos sustituir (2.8) en (2.7) de esta manera obtenemos

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\int ke^{\int p(t)} g(t)dt + c}{ke^{\int p(t)}} \\ &= \frac{\int e^{\int p(t)} g(t)dt + \frac{c}{k}}{e^{\int p(t)}} \end{aligned}$$

Entonces, puesto que tanto c como k son constantes desconocidas, así es la relación de las dos constantes. Por lo tanto, sólo llamaremos la razón c y luego dejaremos k fuera de (2.8) ya que sólo se absorberá en c eventualmente.

Por lo tanto la solución de la ecuación diferencial lineal de primer orden es

$$y(t) = \frac{\int \mu(t) g(t)dt + c}{\mu(t)} \tag{2.9}$$

Donde,

$$\mu(t) = ke^{\int p(t)} \tag{2.10}$$

Ejemplo 2.1.1 *Encontrar la solución de la ecuación diferencial dada por*

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - 0{,}196v$$

Solución *Primero ordenamos la ecuación de la forma correcta (2.1)*

$$\frac{dv}{dt} + 0{,}196v = 9{,}8$$

En este caso $p(x) = 0{,}196$ *, así* $\mu(t)$ *es entonces*

$$\mu(t) = e^{\int 0{,}196 dt} = e^{0{,}196t}$$

Ahora multiplicamos todos los términos en la ecuación diferencial por el factor de integración y simplifiquemos de la siguiente forma

$$e^{0{,}196t}\frac{dv}{dt} + 0{,}196e^{0{,}196t}v = e^{0{,}196t}9{,}8$$

$$(e^{0{,}196t}v)' = e^{0{,}196t}9{,}8$$

Integrando ambas partes de la igualdad tenemos

$$\int (e^{0{,}196t}v)'dt = \int e^{0{,}196t}9{,}8dt$$

$$e^{0{,}196t}v + k = 50e^{0{,}196t} + c$$

pasando la constante k *del otro lado de la igualdad*

$$e^{0{,}196t}v = 50e^{0{,}196t} + c - k$$

Aquí c *y* k *son constantes desconocidas por lo que la diferencia es también una constante desconocida. Por lo tanto, escribiremos la diferencia como* c*. Así que ahora tenemos*

$$e^{0{,}196t}v = 50e^{0{,}196t} + c$$

Dividiendo entre $e^{0{,}196t}$ *se tiene la solución*

$$v(t) = 50 + ce^{-0{,}196t}$$

Resolvamos el siguiente ejemplo con respecto a una condición inicial.

Ejemplo 2.1.2 *Resolver el problema de valor inicial que consiste de la ecuación diferencial*

$$(t^2+1)\frac{dy}{dt} + 4ty = t \tag{2.11}$$

y la condición inicial $y(2) = 1$.

Solución *Tenemos que la ecuación diferencial (2.11) el cual no tiene la forma (2.1), por lo que dividimos entre* (t^2+1) *para obtener*

$$\frac{dy}{dt} + \frac{4t}{t^2+1}y = \frac{t}{t^2+1} \tag{2.12}$$

De esta manera la ecuación tiene la forma estándar (2.1),donde

$$p(t) = \frac{4t}{t^2+1}$$

Un factor de integración es

$$exp\left[\int p(t)dt\right] = exp\left(\int \frac{4t}{t^2+1}dt\right) = exp\left[ln(t^2+1)^2\right] = (t^2+1)^2$$

al multiplicar la ecuación (2.12) pro el factor de integración tenemos

$$(t^2+1)^2\frac{dy}{dt} + 4t(t^2+1)y = t(t^2+1)$$

o bien,

$$\frac{d}{dt}\left[(t^2+1)^2y\right] = t^3+t$$

Integramos la ecuación para obtener un familia uniparametrica de soluciones de la ecuación (2.11).

$$(t^2+1)^2y = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + c$$

Aplicando la condición inicial dada en un inicio se obtiene

$$25 = 6 + c$$

Por lo tanto, $c = 19$ y la solución del problema de valor inicial bajo consideración es

$$(t^2 + 1)^2 y = \frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} + 19$$

o bien

$$y(t) = \frac{76 + 2t^2 + t^4}{4(1 + t^2)^2}$$

Aquí se presenta la solución gráfica

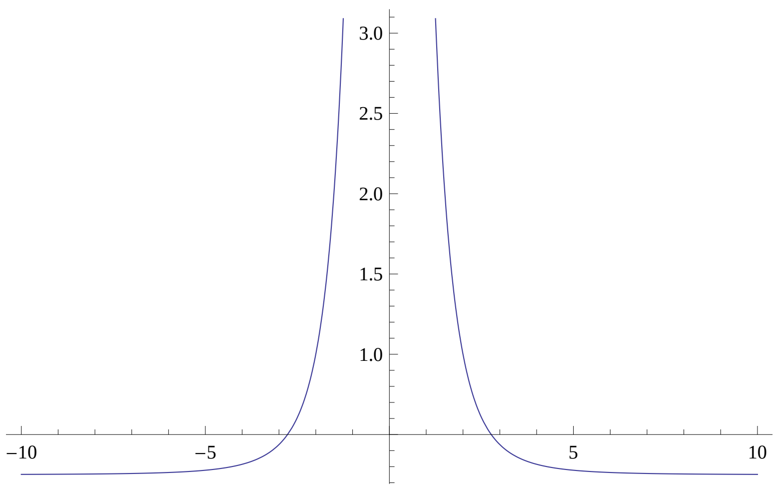


Figura 2.1: Solución gráfica de la ecuación (2.11).

2.2. ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES

Ya hemos visto las características de una ecuación diferencial con condiciones iniciales, de la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$
$$y(t_0) = y_0$$

donde f es una función continua de t y y en algún dominio D del plano xy.

Las cuestiones que se consideran para ello son si existe una solución, si esta es única, sobre que intervalo esta definida y como obtener una formula para la solución. Sin embargo para las ecuaciones no lineales no existe una formula correspondiente, lo cual es mas establecer propiedades generales que sean semejante a la solución.

Comenzaremos estudiando las ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden. El primer tipo de ecuaciones diferenciales No lineales de primer orden que veremos a continuación es el de ecuaciones diferenciales separables.

2.2.1. ECUACIONES DIFERENCIALES SEPARABLES

Definición 2.2.1 *(Ecuación Separable).*

Una ecuación de la forma

$$F(x)G(y)dx + f(x)g(x)dy = 0 \tag{2.13}$$

se llama **ecuación separable** o **ecuación de variables separables** .

Por lo general, la ecuación de la forma (2.15) posee un factor de integración dado por

$$\frac{1}{f(x)G(y)}$$

Si multiplicamos esta expresión por la ecuación (2.15) la ecuación se reduce equivalentemente.

$$\frac{F(x)}{f(x)}dx + \frac{g(y)}{G(y)}dy = 0 \tag{2.14}$$

Si llamamos $F(x)/f(x)$ por $M(x)$ y $g(y)/G(y)$ por $N(y)$, la ecuación (2.14) toma la forma $M(x)dx + N(y)dy = 0$. Como M es una función de x y N es una función de y, entonces una familia uniparametrica de soluciones estaría dada por

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = c$$

donde c es una constante.

Veamos los siguientes ejemplos que nos permitirán ver mas a detalle el proceso de las ecuaciones diferenciales separables.

Ejemplo 2.2.1 *Resolver la ecuación diferencial y y determinar el intervalo de valides para la solución.*

$$\frac{dy}{dx} = 6y^2x \qquad y(1) = \frac{1}{25}$$

Solución *Comenzamos separando la ecuación diferencial de la siguiente manera*

$$y^{-2}dy = 6xdx$$

integrando ambos lados de la igualdad tenemos

$$\int y^{-2}dy = \int 6xdx$$

$$-\frac{1}{y} = 3x^2 + c$$

De esta manera tenemos una solución explicita, en el cual aplicando las condiciones iniciales se obtiene el valor de la constante c que nos servirá para encontrar la solución general, entonces

$$-\frac{1}{\frac{1}{25}} = 3(1)^2 + c \qquad c = -28$$

De esta sustituimos el valor de la constante c en la ecuación $-1/y = 3x^2 + c$*, la cual nos da la solución explicita dada por*

$$y(x) = \frac{1}{28 - 3x^2}$$

Esta solución a su vez contiene intervalos de validez, la cual nos permite saber en que puntos la función en continua o discontinua.

por lo tanto, tenemos que la función es discontinua en los intervalos $x = \pm\sqrt{\frac{28}{3}}$*. Así obtenemos lo intervalos de valides en donde la función es continua.*

$$-\infty < x < -\sqrt{\frac{28}{3}}, \qquad -\sqrt{\frac{28}{3}} < x < \sqrt{\frac{28}{3}}, \qquad \sqrt{\frac{28}{3}} < x < \infty$$

Gráficamente podemos ver el intervalo en donde la función tiene solución.

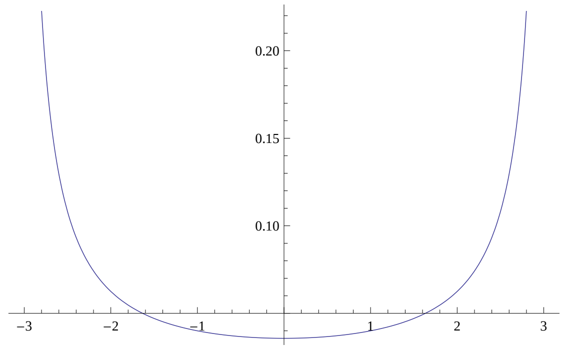


Figura 2.2: Solución gráfica de la ecuación f(x).

Observemos que en la gráfica no aparecen no aparecen los intervalos restantes, lo cual no quiere decir que no sean solución. Sin embargo con las condiciones iniciales adecuadas, cualquiera de estos pudo haber sido solución.

Ejemplo 2.2.2 *Resuelva la ecuación diferencial y determinar el intervalo de validez de la solución.*

$$\frac{dy}{dt} = e^{y-t} sec(y)(1+t^2) \qquad y(0) = 0$$

Solución

Dada la ecuación, comencemos separando las variables a cada lado de la igualdad para posteriormente integrar la igualdad.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^y e^{-t}}{cos(y)}(1+t^2)$$

$$\frac{cos(y)}{e^y} dy = e^{-t}(1+t^2)dt$$

Integrando ambos lados de la igualdad tenemos

$$\int \frac{cos(y)}{e^y} dy = \int e^{-t}(1+t^2)dt$$

$$\frac{e^{-y}}{2}(Sen(y) - Cos(y)) = -e^{-t}(t^2 + 2t3) + c$$

Sustituyendo las condiciones iniciales tenemos los siguientes resultados.

$$\frac{1}{2}(-1) = -(3) + c \qquad c = \frac{5}{2}$$

Entonces la solución implícita esta dada por

$$\frac{e^{-y}}{2}(Sen(y) - Cos(y)) = -e^{-t}(t^2 + 2t3) + \frac{5}{2}$$

En este caso no fue posible encontrar una solución explicita, de modo que lo dejaremos en su forma implícita.

2.2.2. ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS

Definición 2.2.2 *(Ecuación Diferencial Exacta).*

Dada la expresión

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \tag{2.15}$$

Se llama diferencial exacta en un dominio D si existe una función F de dos variables reales tal que esta expresión sea igual a la diferencial total dF(x,y) parta todo $(x, y) \in D$. Es decir la expresión (2.15) es una diferencial exacta en D si existe una función F tal que

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \qquad y \qquad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y)$$

para todo $(x, y) \in D$.
Si $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una diferencial exacta, entonces la ecuación diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

se llama **ecuación diferencial exacta** .

Teorema 2.2.1
Consideremos la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.16}$$

donde M y N tienen primeras derivadas parciales continuas en todos los puntos (x, y) en un dominio rectangular D.

1. Si la ecuación diferencial (2.16) es exacta en D, entonces

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$

2. Recíprocamente si

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$, entonces la ecuación diferencial (2.16) es exacta en D.

Demostración

Parte 1. Como la ecuación diferencial (2.16) es exacta en un dominio rectangular D, entonces $Mdx + Ndy$ es una diferencial exacta en D. Entonces por la definición de la ecuación exacta, existe una función F tal que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad y \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

para todo $(x, y) \in D$. Entonces

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,y}{\partial y} \qquad y \qquad \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$. entonces

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

y por lo tanto,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x, y) \in D$

Parte 2. Por hipótesis tenemos que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x,y) \in D$. Por demostrar que $Mdx + Ndy = 0$ es exacta en D, es decir que existe una función F tal que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \tag{2.17}$$

y

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \tag{2.18}$$

para todo $(x,y) \in D$. Supongamos que F satisface (2.17); entonces integrando con respecto de x a la igualdad tenemos

$$F(x,y) = \int M(x,y)\partial x + \phi(y) \tag{2.19}$$

donde ϕ es una función arbitraria de y. Al derivar parcialmente (2.19) con respecto de y, se tiene

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

por lo que si (2.18) debe satisfacerse, se debe tener

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x + \frac{d\phi(y)}{dy} \tag{2.20}$$

y por lo tanto se tiene

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x$$

como ϕ es una función de y solamente, la derivada $d\phi/dy$ debe ser también independiente de x es decir que para que (2.20) se cumpla,

$$N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x \tag{2.21}$$

debe ser independiente de x.

Demostremos que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]=0$$

y fácilmente se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int M(x,y)\partial x$$

si (2.17) y (2.18) deben satisfacerse entopnces al usar la hipotesis (2.16) se tiene

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int M(x,y)\partial x=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\int M(x,y)\partial x$$

por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int M(x,y)\partial x$$

así se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$$

pero por hipótesis tenemos que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

para todo $(x,y)\in D$. Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]=0$$

para todo $(x,y)\in D$. de esta forma (2.21) es independiente de x. Por consiguiente se puede escribir como

$$\phi=\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]dy$$

Al sustituir esto en la funcion (2.19), se tiene

$$F(x,y)=\int M(x,y)\partial x+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x\right]dy$$

esta $F(x,y)$ entonces satisface tanto a (2.17) como a (2.18) para todo $(x,y)\in D$ y por tanto $Mdx+Ndy=0$ es exacta en D.

Ejemplo 2.2.3 *Resolver la ecuación diferencial con condiciones iniciales*

$$2xy - 9x^2 + (2y + x^2 + 1)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad y(0) = -3$$

Solución
Primero identifiquemos a M y N, posteriormente ver si la ecuación diferencial es exacta o no. En este caso

$$M(x,y) = 2xy - 9x^2 \qquad N(x,y) = 2y + x^2 + 1$$
$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2x$$

para todo real (x,y), tenemos que la ecuación es exacta en todo dominio rectangular D. Ahora nos proponemos a determinar F tal que

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 2xy - 9x^2 \qquad y \qquad \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2y + x^2 + 1$$

integramos la primera igualdad tenemos

$$F(x,y) = \int M(x,y)\partial x + \phi(y) = \int 2xy - 9x^2\partial x + \phi(y)$$
$$= x^2y - 3x^3 + \phi(y)$$

Entonces

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = x^2 + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

Pero tenemos que tener

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2y + x^2 + 1$$

por lo tanto

$$2y + x^2 + 1 = x^2 + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

Así tenemos

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = 2y + 1$$

Por lo tanto, $\phi(y) = y^2+y+c_0$, *donde* c_0 *es una constante arbitraria, por lo que tenemos*

$$F(x, y) = x^2y - 3x^3 + y^2 + y + c_0$$

claramente tenemos una familia uniparametrica de soluciones dada por $F(x, y) = c_1$, *o bien*

$$y^2 + (x^2 + 1)y - 3x^3 + c_0 = c_1$$

Al combinar las contantes c_0 *y* c_1 *se puede escribir esta solución como*

$$y^2 + (x^2 + 1)y - 3x^3 = c$$

donde $c = c_1 - c_0$ *es una contante arbitraria. Aplicando la condición inicial, tenemos*

$$(-3)^2 + ((0)^2 + 1)(-3) - 3(0)^3 = c \qquad \Longrightarrow \qquad c = 6$$

por lo tanto la solución implícita esta dada por

$$y^2 + (x^2 + 1)y - 3x^3 - 6 = 0$$

De esta forma tenemos una ecuación cuadrática de la cual podemos resolverla mediante formula general. Por lo que tenemos

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{-(x^2 + 1) \pm \sqrt{(x^2 + 1)^2 - 4(1)(-3x^3 - 6)}}{2(1)} \\ &= \frac{-(x^2 + 1) \pm \sqrt{x^4 + 12x^3 + 2x^2 + 25}}{2} \end{aligned}$$

sustituyendo lo valores de la condición inicial

$$-3 = y(0) = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3, 2$$

Por tanto la solución se satisface cuando consideramos el valor negativo, es decir

$$y(x) = \frac{-(x^2 + 1) \pm \sqrt{x^4 + 12x^3 + 2x^2 + 25}}{2}$$

Ahora veamos para que valores de x, la función tiene solución. Consideramos primero la ecuación

$$x^4 + 12x^3 + 2x^2 + 25 = 0$$

Resolviendo la ecuación, esta tiene solución en los valores $x = -11{,}81557624$ *y* $x = -1{,}396911133$. *Graficando la ecuación tenemos*

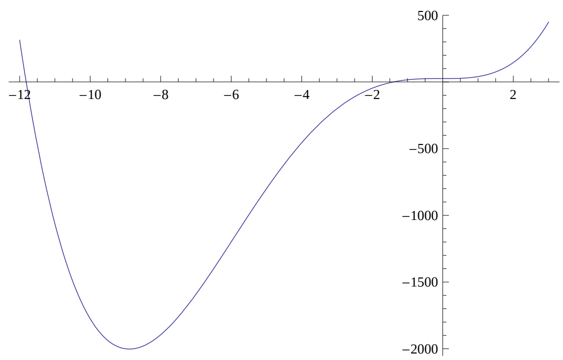


Figura 2.3: Solucion grafica de la ecuacion $x^4 + 12x^3 + 2x^2 + 25 = 0$.

Observemos que la ecuación es positiva para los valores de x que se encuentran entre

$$-\infty < x \leq -11{,}81557624 \qquad y \qquad -1{,}396911133 \leq x < \infty$$

Sin embargo, recordemos que los intervalos de validez deben ser intervalos continuos y contener valores de x que se utilizan en la condición inicial. Por lo tanto, el intervalo de validez debe ser.

$$-1{,}396911133 \leq x < \infty$$

De esta manera la solución gráfica de la función esta dada por

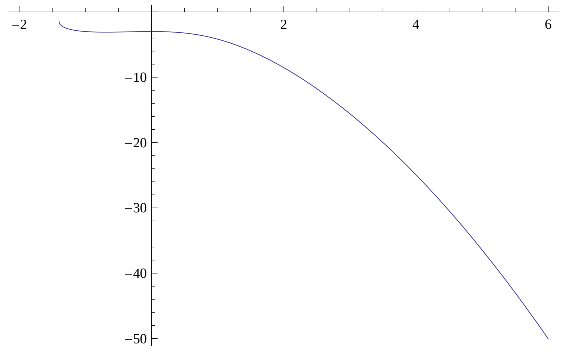


Figura 2.4: Solución gráfica de la función f(x).

2.2.3. ECUACIONES DIFERENCIALES NO EXACTAS

En ocasiones la ecuación diferencial puede no ser exacta, sin embargo esta puede convertirse en exacta cuando se multiplica por un factor de integración apropiado. En general se tiene la siguiente definición.

Definición 2.2.3 *(Factor de Integración).*

Si la ecuación diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.22}$$

no es exacta en un dominio D, pero la ecuación diferencial

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{2.23}$$

es exacta en D, entonces $\mu(x,y)$ se llama un factor de integración de la ecuación diferencial (2.22).

Ejemplo 2.2.4 *Hallar la solución general de la ecuación diferencial*

$$\frac{y^2}{2} + 2ye^x + (y+e^x)\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2.24}$$

Solución *Primero determinemos si la ecuación es exacta o no. En este caso*

$$M(x,y) = \frac{y^2}{2} + 2ye^x \qquad y \qquad N(x,y) = y + e^x$$

Entonces

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = y + 2e^x \qquad\qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^x$$

por lo que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Por tanto la ecuación (2.24), no es exacta en ningún dominio rectangular D. Sin embargo tenemos que

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{y+e^x}{y+e^x} = 1$$

Por tanto la ecuación tiene un factor integrante de la forma $\mu(x) = exp\left(\int 1dx\right) = e^x$

Esto significa que la ecuación correspondiente, de la forma (2.23), es

$$\frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x} + (ye^x + e^{2x})\frac{dy}{dx} = 0$$

Esta ecuación es exacta en todo dominio rectangular D, puesto que

$$\frac{\partial\left[\mu(x,y)M(x,y)\right]}{\partial y} = ye^x + 2e^{2x} = \frac{\partial\left[\mu(x,y)N(x,y)\right]}{\partial x}$$

para todo real (x,y). Por lo tanto existe una función $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial\left[\mu(x,y)F(x,y)\right]}{\partial x} = M(x,y) = \frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x} \qquad \frac{\partial\left[\mu(x,y)F(x,y)\right]}{\partial y} = N(x,y) = ye^x + e^{2x}$$

De la primera de la igualdades,

$$\mu(x,y)F(x,y) = \int M(x,y)\partial x + \phi(y) = \int (\frac{y^2}{2}e^x + 2ye^{2x})\partial x + \phi(y)$$

$$= \frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + \phi(y)$$

Entonces

$$\frac{\partial[\mu(x,y)F(x,y)]}{\partial y} = ye^x + e^{2x} + \frac{d\phi(y)}{dy}$$

así tenemos

$$\frac{d\phi(y)}{dy} = 0$$

por lo tanto,

$$\phi(y) = c_0$$

En consecuencia

$$\mu(x,y)F(x,y) = \frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} + c_0$$

una familia unipareametrica de soluciones es $\mu(x,y)F(x,y) = c_1$ *que se puede expresar como*

$$\frac{y^2}{2}e^x + ye^{2x} = c$$

despejando y *como función de* x, *resulta*

$$y(x) = -e^x \pm [e^{2x} + 2ce^{-x}]^{1/2}$$

2.3. APLICACIONES

Resumen

En este capitulo abordaremos problemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden, con la finalidad de que el alumno analice algunos modelos matemáticos con enfoque a la unicidad de soluciones con condición inicial.

1. Suponga que se deposita una suma S_0 en un banco que paga intereses a una tasa anual r, compuesto continuamente.

   a) Halle el tiempo T necesario para duplicar el valor de la suma original como una función de la tasa de interés r.

   b) Encuentre la tasa de interés que debe pagarse si la inversión inicial tiene que duplicarse en 8 años.

   Solución:

   $\boxed{\text{Inciso (a)}}$

   Tenemos como datos del problema lo siguiente:

   1. $f(0) = S_0$ (Capital inicial)
   2. $\delta = r$
   3. $t = T$
   4. $f(T) = 2S_0$

   Con referencia al resultando que se, obtiene en el libro del boyce 5^a edición *pag*,54 tenemos el siguiente resultado:

   $$2S_0 = S_0 e^{rT}$$

   como $S_0 > 0$ se tiene que:

   $$2S_0 = S_0 e^{rT} \quad \Leftrightarrow \quad 2 = e^{rT}$$

Entonces

$$ln(2) = ln(e^{rT})$$

por lo tanto

$$ln(2) = rT$$

Luego, como $r > 0$ se llega a que:

$$T = \frac{ln(2)}{r}$$

$\boxed{\text{Inciso (b)}}$

en este inciso tenemos los siguiente:

1. $f(0) = S_0$ (Capital inicial)
2. $\delta = r$
3. $t = T = 8$ (Tiempo que transcurre para duplicarse el capital inicial)
4. $f(T) = 2S_0$

Del inciso (a) conocemos que cuanto tiempo debería transcurrir para que el capital inicial se duplique en términos de la tasa de interés, entonces:

$$T = 8 = \frac{ln(2)}{r}$$

Entonces

$$r = \frac{ln(2)}{8} \approx 0{,}087$$

Por lo tanto, la inversión inicial se duplica en 8 años si se invierte a una tasa continua del 8;7 %.

2. Supongamos que los desechos de una fabrica contaminan un lago y que, a causa de ello, una población de peces disminuye vertiginosamente. Los científicos han logrado detectar que la población disminuye en proporción al numero de peces con una constante de proporcionalidad igual a 0.2:

$$\frac{dN}{dt} = -0{,}2N$$

donde $N(t)$ es el numero de peces en el tiempo t. Se sabe que si la población se reduce a una décima parte de la población actual, no sera posible salvar la especie. De cuanto tiempo se dispone para tomar medidas que reviertan el problema?

Solución:

consideremos a $N(t_a) = N_a$ donde t_a es el tiempo actual. Ahora consideremos la ecuación

$$\frac{dN}{dt} = -0{,}2N$$

que describe la población de peces. Para resolver la ecuación es necesario encontrar las funciones $N(t)$. Procedemos de la siguiente manera de acuerdo a la ecuación anterior.

$$\frac{dN/dt}{N} = -0{,}2 \qquad si \qquad N \neq 0$$

por la regla de la cadena, el primer miembro de la ecuación es la derivada de $ln \mid N \mid$ con respecto de t, por lo que se tiene

$$\frac{d}{dt} ln \mid N \mid = -0{,}2$$

integrando ambos lados de la igualdad se tiene

$$ln \mid N \mid = -0{,}2t + C$$

donde C es una contante de integración arbitraria. De modo que al aplicar la exponencial en la ecuación tenemos lo siguiente

$$N = e^{-0,2t+C} = e^{C}e^{-0,2t}$$

por tanto

$$N = Ce^{-0,2t}$$

Dado que $N(t_a) = N_a$, tenemos que

$$N_a = Ce^{-0,2t_a}$$

entonces

$$C = N_a e^{0,2t_a}$$

sustituyendo la constante C en la ecuación N tenemos

$$\begin{aligned} Ce^{-0,2t} =& N_a e^{0,2t_a} e^{-0,2t} \\ =& N_a e^{0,2(t_a - t)} \end{aligned}$$

Ahora se sabe que si la poblacion se reduce a la décima parte de la población actual, no sera posible salvar la especie. Es decir

$$N_a e^{0,2(t_a - t_a)} = 1/10 N_a \qquad \Longrightarrow \qquad e^{0,2(t_a - t)} = 1/10$$

Aplicando el logaritmo natural a ambos miembros de la ecuación tenemos

$$0,2(t_a - t) = ln(1/10)$$

despejando a t tenemos por lo tanto que

$$t = t_a - 5ln(10)$$

3. Supongamos que se usa pentobarbitol sódico para anestesiar a un animal de 30 Kg. El animal queda anestesiado cuando la concentración de anestésico es de 4.5 miligramos por kilogramo de peso. Se sabe que el anestésico se elimina de la sangre a una velocidad proporcional a la cantidad de anestésico presente, $\frac{dA}{dt} = -\mu A$, donde μ es la constante de proporcionalidad, $\mu > 0$. Ademas se sabe que en 5

horas el organismo alcanza a eliminar la mitad del anestésico administrado. ¿ Que dosis debe ser administrada al animal para que este permanezca anestesiado durante una hora?

Solución: (De ejercicio al lector)

Capítulo 3

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

3.1. ALGEBRA MATRICIAL Y SUS PROPIEDADES

En esta sección se trabajara con sistemas de ecuaciones diferenciales, así como también los conceptos básicos que se utilizan ocasionalmente.

Comenzaremos con la notación básica para matrices. Una nxm (A menudo se denomina tamaño o dimensión de la matriz) matriz esta conformada de n filas y m columnas con entradas en la i-ésima fila y la j-ésima columna que se denotan por aij. Una manera de escribir una matriz general n x m es el siguiente.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}_{nxm} = (a_{ij})_{nxm}$$

Tenemos dos tamaños especiales de matrices las cuales son las siguientes.

1. Una *matriz cuadrada* es una matriz que tiene el mismo numero de filas y de columnas. Es decir si el numero de reglones y de columnas es n, diremos que es una *matriz cudrada* de nxn.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. Un *vector* es una matriz que tiene exactamente una columna. Si el vector tiene n renglones entonces tenemos

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

así tenemos un vector $nx1$.

El siguiente tema que vamos a ver es el de la determinante de una matriz. La determinante es actualmente una función que toma una matriz cuadrática ya la convierte en un numero.

El método principal para calcular determinantes de cualquier matriz cuadrada se denomina método de cofactores. Vamos a tratar casi exclusivamente con 2 x 2 matrices y la matriz ocasional 3 x 3 . La notación estándar para la determinante de la matriz A es.

$$det(A) =\mid A \mid$$

Aquí tenemos la forma de las determinantes de las matrices de $2x2$ y $3x3$.

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 3.1.1 *Encontrar la determinante para cada una de las matrices.*

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -18 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -6 & 7 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución. *Resolvamos primero la matriz A de $2x2$ de acuerdo a lo anterior.*

$$det(A) = \begin{vmatrix} -9 & -18 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (-9)(4) - (2)(-18) = 0$$

por lo tanto la $det(A) = 0$. Por otra parte la determinante de B la obtenemos de acuerdo a la formula de la siguiente manera. Donde obtenemos

$$det(B) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -6 & 7 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -6 & 7 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -6 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2[(-6)(-1) - (5)(7)] - 3[(-1)(-1) - (4)(7)] + 1[(-1)(5) - (4)(-6)]$$

$$= 2(-29) - 3(-27) + 1(19) = -58 + 81 + 19 = 42$$

Propiedades de las matrices

1. **Igualdad**. Se dice que dos matrices nxm, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, son iguales si y solo si todos los elementos correspondientes son iguales, es decir $A = B$ si y solo si $a_{ij} = b_{ij}$ para $i = 1, 2, ..., n$ y $j = 1, 2, ..., m$.

2. **Cero**. Para cualquier entero positivo dado m, el vector columna (o matriz) $mx1$ con todas las componentes iguales a cero se llama vector cero.

3. **Adición**. La suma de dos matrices nxm, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, se define como la matriz nxm $C = (c_{ij})$, donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para $i = 1, 2, ..., n$ y $j = 1, 2, ..., m$. es decir $C = A + B$.

4. **Multiplicación por un numero**. El producto de una matriz nxm,$A = a_{ij}$ y el numero c se define como la matriz mxx,$B = (b_{ij})$, donde $b_{ij} = ca_{ij}$ para $i = 1, 2, ..., n$ y $j = 1, 2, ..., m$. Escribiremos $B = cA$.

5. **Sustracción**. La diferencia de dos matrices nxm. se define como

$$A - B = A + (-B)$$

. por lo tanto

$$A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$$

6. **Multiplicación**. Sea $A = a_{ij}$ una matriz nxm y $B = b_{ij}$ una matriz mxp. El producto AB se define como la matriz nxp, $C = (c_{ij})$, donde

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

para toda $i = 1, 2, ..., n$ y para toda $j = 1, 2, ..., p$. Se escribe $C = AB$.

7. **Combinación lineal de vectores**. Sean $x_1, x_2, ..., x_n$, n vectores, $mx1$ y sean $c_1, c_2, ..., c_n$, n números. Entonces un elemento de la forma

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

es un vector de $nx1$ llamado combinación lineal de los vectores $x_1, x_2, ..., x_n$.

8. **Identidad**. Para cualquier entero positivo dado n, la matriz cuadrada nxn en la que todos los elementos diagonales son uno y los demás elementos son cero, se llama matriz identidad y se representa por **I**. En otras palabras $\mathbf{I} = a_{ij}$ donde $a_{ij} = 1$ para toda $i = j$ y $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ $(i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n)$. Asi tenemos

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Así por la definición de multiplicación de matrices, tenemos

AI=IA=A

9. **Inversa**. Una matriz cuadrada es *invertible* o *no singular* si existe otra matriz **B** tal que **AB=I** y **BA=I**, donde **I** es la matriz identidad. La matriz inversa única de A nxn se representa por A^{-1} , de tal forma que tenemos

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \tag{3.1}$$

3.2. SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES PLANOS

3.2.1. CLASIFICACIÓN DE PUNTOS CRÍTICOS

Para este tema comenzaremos considerando el sistema lineal homogéneo de segundo orden con coeficientes constantes de la forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax \tag{3.2}$$

donde A es una matriz contante de $2x2$ y x un vector de $2x1$. A menudo en el punto en el que $x = 0$ corresponden a puntos de equilibrio o soluciones de equilibrio. En el caso de las ecuaciones diferenciales individuales, las soluciones de equilibrio son aquellas soluciones para las cuales

$$Ax = 0$$

suponiendo que A es una matriz no singular se tendría por tanto una solución $x = 0$, así tendremos una solución de equilibrio.

Haremos algo similar en la siguiente sistema; primero restrinjamos para el caso de la matriz de $2x2$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= ax_1 + bx_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= cx_1 + dx_2 \end{aligned} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x$$

La solución a este sistema sera de la forma

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

y nuestra solución de equilibrio sera

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los puntos críticos se pueden clasificar mediante la solución general de la ecuación diferencial (3.2)

$$x = c_1\xi^{(1)}e^{r_1 t} + c_2\xi^{(2)}e^{r_2 t} \tag{3.3}$$

mediante la ecuación (3.3) tenemos los siguientes casos

CASO 1.a)

Dados los eigenvalores reales r_1 y r_2 ambos distintos pero con signos iguales (positivos o negativos), la solución general de la ecuación (3.2) sera

$$x = c_1\xi^{(1)}e^{r_1 t} + c_2\xi^{(2)}e^{r_2 t} \tag{3.4}$$

Suponiendo que $r_1 < r_2 < 0$ y que lo eigenvectores ξ^1 y ξ^2 son como se muestra en la figura . De la ecuación (3.3) tenemos que $x \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$ sin importar los valores de c_1 y c_2.

Ahora si r_1 y r_2 son ambos positivos y $0 < r_2 < r_1$ entonces las trayectorias tienden a seguir el mismo patrón sin embargo la dirección se efectúa en sentido opuesto al origen. Este tipo de punto critico se conoce como **nodo**.

CASO 1.b)

Dado los eigenvalores reales r_1 y r_2, con signos opuestos, la solución general de la ecuación (3.2) es (3.3). Donde $r_1 > 0$ y $r_2 < 0$. Suponiendo que ξ^1 y ξ^2 son como se muestra en la figura. Si la solución parte de un punto inicial en la recta que pasa por $\xi^{(1)}$, entonces se sigue que $c_2 = 0$. Por lo que para toda t la solución permanece en la recta que pasa por $\xi^{(1)}$, y dado que $r_1 > 0$, $\|x\| \longrightarrow \infty$ cuando $t \longrightarrow \infty$. Si la solución parte en un punto inicial en la recta que pasa por $\xi^{(2)}$ entonces $\|x\| \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$ porque $r_2 < 0$. En esta situación se le conoce como punto silla.

CASO 2

Dado los eigenvalores reales r_1 y r_2, con signos iguales, se obtienen los casos en el que los eigenvalores tienen dos eigenvectores independientes o solo un eigenvector independiente. Considerando eigenvalores negativos, se tienen el mismo resultado solo que las trayectoria se invierte en sentido opuesto.

a) **DOS EIGENVECTORES INDEPENDIENTES**. Sabemos que la solución general de la ecuación (3.2) esta dada por (3.3). Donde $\xi^{(1)}$ y $\xi^{(2)}$ son los eigenvectores independientes como en la figura. El punto critico recibe el nombre de **nodo propio**.

b) **UN EIGENVECTOR INDEPENDIENTE**. En este caso la solución general de la ecuación diferencial (3.2) esta dada por

$$x = c_1\xi^1 e^{rt} + c_2(\xi^2 t e^{rt} + \eta e^{rt}) \tag{3.5}$$

Donde ξ es el eigenvector y η es el eigenvector generalizado que se asocia al eigenvalor repetido. Para t grande el termino dominante en la ecuación (3.5) es $c_2\xi te^{rt}$. Así, cuando $t \longrightarrow \infty$, todas las trayectorias tienden al origen de modo tangente a la recta que pasa por el eigenvector. Esto pasa si $c_2 = 0$, porque entonces la solución $x = c_1\xi e^{rt}$ se encuentra en esta recta. Análogamente para t negativa grande el termino $c_2\xi te^{rt}$ es de nuevo el dominante, es decir cunado $t \longrightarrow \infty$ cada trayectoria es asintótica a una recta paralela a ξ

La orientación de las trayectorias depende de las posiciones relativas de ξ y η. En la figura se presenta una posible situación. Escribiendo la solución (3.5) en la forma

$$x = c_1\xi^1 e^{rt} + c_2(\xi^2 te^{rt} + \eta e^{rt}) = [(c_1\xi + c_2\eta) + c_2\xi t]e^{rt} = ye^{rt} \tag{3.6}$$

donde $y = (c_1\xi + c_2\eta) + c_2\xi t$. El vector y es el que determina el sentido de x, mientras que la cantidad escalar e^{rt} influye solo en la magnitud de x. Notemos que, para los valores fijos de c_1 y c_2, la expresión para y es una ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $c_1\xi+c_2\eta$ y es paralela ξ. Para trazar la trayectoria correspondiente a un par dado de valores de c_1 y c_2 puede procederse de la siguiente manera. primero, se traza la recta dada por $(c_1\xi+c_2\eta)+c_2\xi t$ y se observa el sentido en que t aumenta sobre la recta, el sentido del vector x dado por la ecuación (3.6) es el de t creciente sobre la recta , pero con la magnitud de x disminuye con rapidez y tiende a cero debido al factor de decaimiento exponencial e^{rt}. Por ultimo, cuando t disminuye hacia $-\infty$, el sentido de x esta determinado por los puntos en la parte correspondiente de la recta y la magnitud de x tiende a infinito. De este modo se obtienen las trayectorias de trazo grueso de la figura de la figura. con trazo delgado se representan otras trayectorias para ayudar a completar el diagrama. La otra situación posible se ilustra en la figura donde la orientación relativa de ξ y η se invierte. Si $r_1 1 = r_2 > 0$, se puede trazar las trayectorias siguiendo el mismo procedimiento. En este caso las trayectorias se corren en el sentido hacia afuera y la orientación de las trayectorias con respecto a la de ξ y η también se invierten. Cuando un eigenvaolor doble tiene eigenvector independiente, el punto critico se denomina nodo impropio o degenerado.

CASO 3.a)

En el caso donde los eigenvalores son complejos, es decir de la forma $\lambda \pm i\mu$, donde λ y μ son reales, con $\lambda \neq 0$ y $\mu > 0$.

En este caso se puede escribir la solución general en términos de eigenvalores y eigenvectores. los sistemas que tienen los eigenvectores $\lambda \pm i\mu$ están tipificados por

$$x' = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} x \tag{3.7}$$

de tal forma que

$$x_1' = \lambda x_1 + \mu x_2, \qquad x_2' = -\mu x_1 + \lambda x_2 \tag{3.8}$$

Introducimos las coordenadas polares r, θ dadas por

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \qquad tan\theta = x_2/x_1$$

derivando ambas ecuaciones se obtiene

$$rr' = x_1 x_1' + x_2 x_2', \qquad (sec^2\theta)\theta' = (x_1 x_2' - x_2 x_1')/x_1^2 \tag{3.9}$$

sustituyendo (3.8) en la primera ecuación de (3.9) se tiene

$$r' = \lambda r$$

por lo tanto tenemos que

$$r = ce^{\lambda t} \tag{3.10}$$

Donde c es una constante. De modo similar, si se sustituye de las ecuaciones (3.8) en la segunda ecuación de (3.9) y aplicando el hecho de que $sec^2\theta = r^2/x_1^2$ se tiene que

$$\theta' = -\mu$$

y en consecuencia,

$$\theta = -\mu\mathbf{t} + \theta_0, \tag{3.11}$$

donde θ_0 es el valor de θ cuando $t = 0$. Dado que $\mu > 0$, de la ecuación (3.11) se sigue que θ disminuye cuando t aumenta, de modo que el sentido del movimiento sobre una trayectoria es el de las manecillas del reloj. Cuando $t \longrightarrow \infty$, se observa de la ecuación (3.10) si $\lambda < 0$ y $r \longrightarrow \infty$ si $\lambda > 0$. Por tanto, las trayectorias son espirales, que se acercan al origen o se alejan de el dependiendo el signo de λ. El punto critico se denomina **punto espiral**.véase los casos en la siguiente figura..

CASO 3.b)

En este caso si $\lambda = 0$ para el sistema (3.7) se reduce a

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} x \tag{3.12}$$

con eigenvalores $\pm i\mu$. Aplicando el mismo argumento que en el caso 4, se encuentra que

$$r' = 0, \qquad \theta' = -\mu, \tag{3.13}$$

donde c y θ_0 son constantes. Por lo tanto, las trayectorias son círculos, con centro en el origen, que se recorren en el sentido de las manecillas del reloj si $\mu > 0$ y en el sentido contrario si $\mu < 0$. Se complementa una vuelta al rededor del origen en un intervalo de tiempo $2\phi/\mu$, de modo que todas las soluciones son periódicas con periodo $2\phi/\mu$. El punto critico se denomina **centro**. Generalmente cuando los eigenvalores son imaginarios puros, es posible demostrar que las trayectorias son elipses con centro en el origen. Véase la siguiente figura.

3.2.2. ESPACIO FASE

En esta sección nos centraremos en la descripción geométrica de los sistemas de ecuaciones diferenciales.

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x,y) \tag{3.14}$$

La variable independiente t no aparece en los términos del lado derecho $f(x,y)$ y $g(x,y)$; tales sistemas se llaman autónomos. Notemos que los sistemas autónomos esta libre a los corrimiento del tiempo, en sentido de que la pareja $x(t), y(t)$ resuelve (3.14), así como también la recorrida en el tiempo $x(t+c), y(t+c)$ para cualquier constante c.

Por otra parte si $X(t) = x(t+c)$ y $Y(t) = y(t+c)$, aplicando regla de la cadena se tiene

$$\frac{dX}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t+c) = f(x(t+c), y(t+c)) = f(X(t), Y(y))$$

,

$$\frac{dY}{dt}(t) = \frac{dy}{dt}(t+c) = g(x(t+c), y(t+c)) = g(X(t), Y(y))$$

,

entonces $X(t), Y(t)$ también son solución de (3.14). Así podemos intuir la regla de la cadena dividiendo las dos ecuaciones

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

,

De esta manera consideramos la ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}. \tag{3.15}$$

De esta manera tenemos la ecuación en el plano fase. Asi, tenemos a (3.15) con ventajas sobre (3.14). sin embargo tengamos encuenta lo siguiente.

1. Una solución del problema (3.14) es una pareja de funciones de t, dadas por $x(t), y(t)$ que satisface (3.14) para toda t en I. si en el plano xy localizamos el punto $(x(t), y(t))$ al variar t en I, la curva resultante es la trayectoria de la pareja solución $x(t), y(t)$, y el plano xy es el plano fase en este contexto. Sin embargo la trayectoria en este plano contiene menos información que las gráficas originales, pues se elimino la dependencia t. se podría reconstruir punto por punto la trayectoria atravez de la gráfica solución pero no la gráfica solución aparir de la trayectoria fase pues no sabríamos asignar un valor de t para cada punto.

2. La pendiente $\frac{dy}{dx}$ de una trayectoria en el plano fase esta dada por (3.15), y al resolverla estamos resolviendo las trayectorias del sistema (3.14) en el plano fase.

3. Si consideramos a x como la variable independiente y y a y como la variable dependiente; en ecuaciones de la forma (3.15). esto ya no seria cierto en el contexto del sistema (3.14); así x y y son variables dependientes y t la variable independiente.

De esta manera un retrato en el plano fase podría ser una herramienta útil, aunque incompleta, para analizar los sistemas autónomos de primer orden como (3.14).

Ejemplo 3.2.1 *Dibujar el campo de direcciones en el plano fase para el sistema*

$$\frac{dx}{dt} = -x$$
$$\frac{dy}{dt} = -2y$$

e identificar el punto critico.

Solución *Tenemos lo siguiente,* $f(x, y) = -x$ *y* $g(x, y) = -2y$*, entonces cuando* $x = y = 0$*, tenemos que ambas funciones se anulan, por tanto* $(0, 0)$ *es un punto critico. Así el campo de direcciones para la ecuacion en el campo fase seria:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{-x} = \frac{2y}{x}$$

Como $dx/dt = -x$ *las trayectorias del semiplano derecho se mueven hacía la izquierda y viceversa. En la siguiente figura podemos ver que todas las soluciones fluyen hacia un punto critico* $(0, 0)$ *y dicho punto es asintòticamnete estable.*

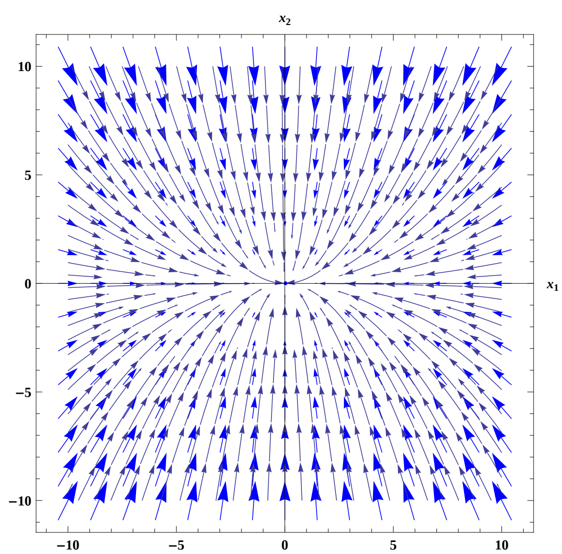


Figura 3.1: Grafica del sistema con punto critico asintoticamente estable.

Observación. *En este ejemplo se observa que el sistema se puede resolver de manera explicita. Sus soluciones serian* $x(t) = c_1e^{-t}$ *y* $y(t) = c_2e^{-2t}$. *Entonces de la ecuación* $y = c_2e^{-2t} = c_2[x(t)/c - 1]^2$ *así las trayectorias se encuentran a lo largo de las parábolas* $y = cx^2$.

PROGRAMA EN MATHEMATICA

In[1]:=

```
(*-----------------------ESPACIO
 FASE DEL SISTEMA-----------------------*)
(* Este código resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales planas:
        x'= ax + by,  y' = cx + dy,
 en forma exacta para alguna condición inicial dada (x(0),y(0)),
analiza la estabilidad del punto crítico del sistema,
graficar las soluciones temporales de x(t) y y(t)
 y muestra la trayectoria en el espacio fase con diversas
 condiciones iniciales en forma de campo vectorial.
  Por: Oscar Ivan de Jesus Munguía y Jorge Chávez Carlos.    *)
(*----------------------------------------------------------------------
*)
a =
 -1;
b = 0;
c = 0;
d = -2; (* <- Seleción de parámetros {a,b,c,d}*)
x0 = 1; y0 = 0.5; (* <- Condiciones inicales*)
(*Rangos gráficos*)
ti = 0;
tf = 15;
{xl, xr} = {-10, 10};
{yl, yr} = {-10, 10};
(*----------------------------------------------------------------------
*)
A = {{a, b}, {c, d}};
val = Eigenvalues[A];
vect = Eigenvectors[A];
Δ = Tr[A]^2 - 4 Det[A];
sis[x_, y_] := {a x + b y, c x + d y};
Print[
  "================================================================="];
Print["El Sistema de Ecuaciones Diferenciales es: x̅'=" MatrixForm[A], " x̅"];
Print["El punto crítico es:"];
imCamp = VectorPlot[sis[x, y], {x, xl, xr}, {y, yl, yr},
   VectorStyle → Blue, StreamPoints → Fine, Axes → True, AxesLabel → {x1, x2},
   LabelStyle → Directive[Black, Bold], PlotRange → Automatic];
(*----------Clasificación de estabilidad----------*)
If[Δ ≥ 0, {If[val[[1]] == val[[2]],
     {If[val[[1]] < 0, Print["Nodo Degenerado Atractor"],
       Print["Nodo Degenerado Repulsoror"]], vec1 = vect[[1]],
      vec2 = Transpose[Eigenvectors[A - val[[1]] {{1, 0}, {0, 1}}]][[1]]},
     {If[val[[1]] val[[2]] < 0, Print["Nodo Hiperbólico"],
       If[val[[1]] < 0, Print["Nodo Atractor"], Print["Nodo Repulsor"]]],
      vec1 = vect[[1]], vec2 = vect[[2]]}]},
  {If[Re[val[[1]]] < 0, Print["Nodo Espiral Atractor"], If[Re[val[[1]]] == 0,
      Print["Nodo centro"], Print["Nodo Espiral Repulsor"]]],
   vec1 = Re[vect[[1]]], vec2 = Im[vect[[2]]]}];
Print["Los valores propios del sistema son: ", val];
(*-------Solución de Ecuación Diferencial---------*)
sol = Simplify[DSolve[
     {{x'[t], y'[t]} == sis[x[t], y[t]], x[0] == x0, y[0] == y0}, {x[t], y[t]}, t]];
```

Ejemplo 3.2.2

Determinar los puntos críticos, así como también los campos de direcciones del plano fase y predecir el comportamiento cuando $t \to \infty$ de la solución que parte de $x = 2$, y $y = 0$ cuando $t = 0$.

$$\frac{dx}{dt} = 5x - 3y - 2$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x - 3y - 1$$

Solución *El único punto critico es la solucion de las ecuaciones simultaneas $f(x, y) = g(x, y) = 0$:*

$$5x_0 - 3y_0 - 2 = 0$$
$$4x_0 - 3y_0 - 1 = 0$$

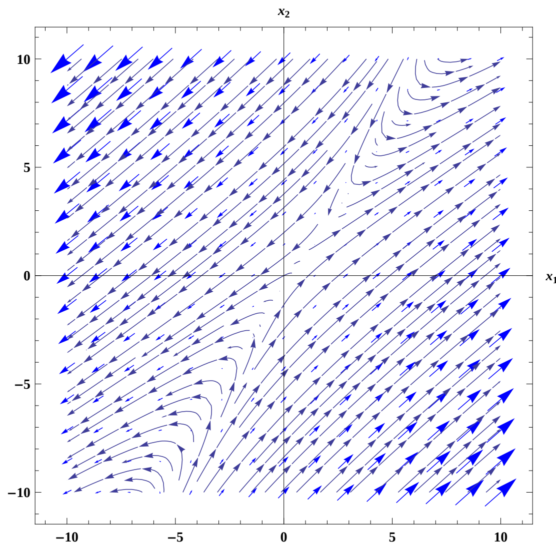
Entonces $x_0, y_0 = 1$.El campo de direcciones para la ecuación del plano fase es dado por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x_0 - 3y_0 - 1 = 0}{5x_0 - 3y_0 - 2 = 0}$$

Notese que $5x_0 - 3y_0 - 2 > 0$ son las soluciones que fluyen hacia la derecha para todos los puntos debajo de la recta $5x_0 - 3y_0 - 2 = 0$. Así como también las flechas de dirección que van a lo largo de la curva integral que pasa por lo puntos $(2, 0)$ parecen extenderse hasta infinito hacia la derecha.

Sin embargo si (x(t),y(t)) se detuviera en algún punto $(x_1, y - 1)$ entonces concluiríamos que $(x_1, y - 1)$ seria un punto de equilibrio. Entonces como ya hayamos el único punto critico, concluimos que el sistema tiende a infinito.

*En la siguiente figura observemos que el punto critico es **inestable**, pues aunque muchas soluciones se acercan tanto como queremos a $(1, 1)$, la mayor parte se aleja de el. Las* *soluciones que están sobre la recta* $y = 2x - 1$, *convergen a* $(1,1)$, *a esto se le conoce como* ***punto silla****.*



PROGRAMA EN MATHEMATICA

```
In[1]:=
(*-----------------------ESPACIO
 FASE DEL SISTEMA-----------------------*)
(* Este código resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales planas:
        x'= ax + by,  y' = cx + dy,
 en forma exacta para alguna condición inicial dada (x(0),y(0)),
analiza la estabilidad del punto crítico del sistema,
graficar las soluciones temporales de x(t) y y(t)
 y muestra la trayectoria en el espacio fase con diversas
 condiciones iniciales en forma de campo vectorial.
  Por: Oscar Ivan de Jesus Munguía y Jorge Chávez Carlos.    *)
(*-------------------------------------------------------------------
*)
a =
 5;
b = -3;
c = 4;
d = -3;
e = -2;
f = -1 (* <- Seleción de parámetros {a,b,c,d}*)
x0 = 1; y0 = 0.5; (* <- Condiciones inicales*)
(*Rangos gráficos*)
ti = 0;
tf = 15;
{xl, xr} = {-10, 10};
{yl, yr} = {-10, 10};
(*-------------------------------------------------------------------
*)
A = {{a, b}, {c, d}};
val = Eigenvalues[A];
vect = Eigenvectors[A];
Δ = Tr[A]^2 - 4 Det[A];
sis[x_, y_] := {a x + b y + e, c x + d y + f};
Print[
  "================================================================"];
Print["El Sistema de Ecuaciones Diferenciales es: x̅'=" MatrixForm[A], " x̅"];
Print["El punto crítico es:"];
imCamp = VectorPlot[sis[x, y], {x, xl, xr}, {y, yl, yr},
   VectorStyle → Blue, StreamPoints → Fine, Axes → True, AxesLabel → {x1, x2},
   LabelStyle → Directive[Black, Bold], PlotRange → Automatic];
(*----------Clasificación de estabilidad----------*)
If[Δ ≥ 0, {If[val[[1]] == val[[2]],
    {If[val[[1]] < 0, Print["Nodo Degenerado Atractor"],
      Print["Nodo Degenerado Repulsoror"]], vec1 = vect[[1]],
     vec2 = Transpose[Eigenvectors[A - val[[1]] {{1, 0}, {0, 1}}]][[1]]},
    {If[val[[1]] val[[2]] < 0, Print["Nodo Hiperbólico"],
      If[val[[1]] < 0, Print["Nodo Atractor"], Print["Nodo Repulsor"]]],
     vec1 = vect[[1]], vec2 = vect[[2]]}]},
  {If[Re[val[[1]]] < 0, Print["Nodo Espiral Atractor"], If[Re[val[[1]]] == 0,
     Print["Nodo centro"], Print["Nodo Espiral Repulsor"]]],
   vec1 = Re[vect[[1]]], vec2 = Im[vect[[2]]]}];
Print["Los valores propios del sistema son: ", val];
(*-------Solución de Ecuación Diferencial---------*)
```

3.2.3. SOLUCIONES EN LA BASE CANÓNICA

3.2.3.1. EIGENVALORES REALES

Comencemos considerando el sistema simple, tal sistema es de la forma

$$x' = Ax$$

que sera de forma

$$x = \xi e^{rt}$$

donde r y ξ son eigenvalores y eigenvectores de la matriz A. Vamos a trabajar con el sistema de $2x2$ lo que obtendremos dos soluciones x_1 y x_2, donde la determinante de la matriz es distinto de cero.

Comensaremos el caso donde donde nuestros eigevalores, r_1 y r_2 son reales y distintos. Recordando también que los vectores propios para valores propios simples son linealmente independientes. Esto significa que las soluciones que obtengamos de estos también serán linealmente independientes. Si las soluciones son linealmente independientes, la matriz $X = (x_1, x_2)$ debe ser no singular y, por lo tanto, estas dos soluciones serán un conjunto fundamental de soluciones. La solución general en este caso será entonces,

$$x = c_1 e^{r_1 t}\xi^1 + c_2 e^{r_2 t}\xi^2$$

A continuación presentaremos algunos ejemplos que resuelvan el sistema de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 3.2.3 *Resolver el siguiente sistema, obteniendo la solución general*

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Solución

Entonces, lo primero que debemos hacer es encontrar los valores propios de la matriz.

$$\begin{aligned} det(A - rI) &= \begin{vmatrix} 1-r & 2 \\ 3 & 2-r \end{vmatrix} \\ &= r^2 - 3r - 4 \\ &= (r+1)(r-4) \end{aligned}$$

Entonces los valores dados son $r_1 = -1$ y $r_2 = 4$. Ahora encontremos los eigenvectores para cada uno de los valores.

Para $r_1 = -1$ necesitamos resolver lo siguiente

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $2\xi_1 + 2\xi_2 = 0$ y por tanto $\xi_1 = -\xi_2$

Por lo que el eigenvector esta dado por

$$\xi = \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\xi^(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \xi_2 = 1$$

Por otra parte para $r_2 = 4$ necesitamos resolver

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $-3\xi_1 + 2\xi_2 = 0$ y por tanto $\xi_1 = \frac{2}{3}\xi_2$

Por lo que el eigenvector esta dado por

$$\xi = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\xi^(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \xi_2 = 3$$

Por lo tanto la solución general esta dada por

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ahora necesitamos encontrar las constantes $c{-1}$ *y* c_2*. Para ello, solo necesitamos aplicar las condiciones iniciales.*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = x(0) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos las constantes y así obtenemos dos ecuaciones (una para cada fila). Esto da,

$$\begin{aligned} -c_1 + 2c_2 =& 0 \\ c_1 + 3c_2 =& -4 \end{aligned}$$

Entonces

$$c_1 = -\frac{8}{5}, \qquad c_2 = -\frac{4}{5}$$

Por lo tanto la solución es

$$x(t) = -\frac{8}{5} e^{t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ahora veamos que sucede con el retrato fase para el sistema en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.4 *Dibujar el retrato fase para el siguiente sistema*

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x$$

Solución
Del ejemplo anterior tenemos que los eigenvalores y eigenvectores de este sistema son,

$$r_1 = -1 \qquad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = 4 \qquad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Esta es toda la información que necesitaremos para dibujar el campo de dirección. Comenzaremos por dibujar las líneas que sigan la dirección de los dos vectores propios. Esto da,

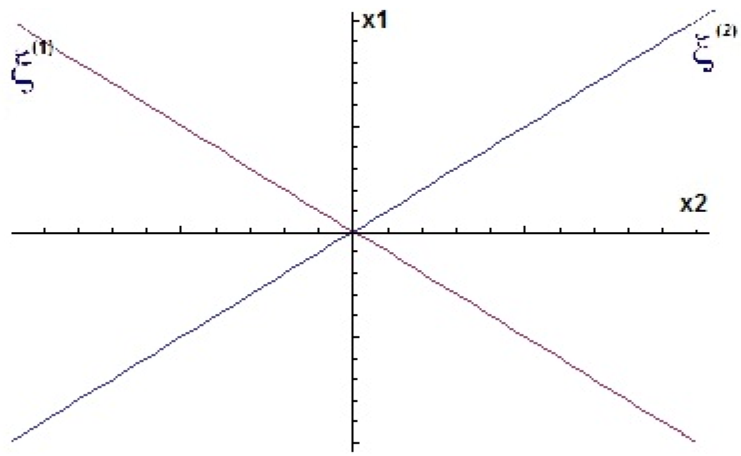


Figura 3.2: Grafica que representa los eigenvectores ξ^1 y ξ^2 .

Ahora, nuestra solución general de nuestro ejemplo anterior es

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si tenemos $c_2 = 0$, entonces la solución es un exponencial multiplicado por un vector y todo lo que hace el exponencial afecta la magnitud del vector y la constante c_1 afectará tanto al signo como a la magnitud del vector . En otras palabras, la trayectoria en este caso será una línea recta que es paralela al vector,$\xi^{(1)}$. También observe que a medida que t aumenta, la exponencial se volverá más y más pequeña y, por lo tanto, la trayectoria se moverá hacia el origen. Si $c_1 > 0$ la trayectoria estará en el Cuadrante II y si $c_1 < 0$ la trayectoria estará en el Cuadrante IV.

Entonces la línea en el gráfico de arriba marcado con $\xi^{(1)}$ será un boceto de la trayectoria correspondiente a $c_2 = 0$ y esta trayectoria se aproximará al origen cuando t se *incrementa.*

Si ahora damos la vuelta a las cosas y observamos la solución correspondiente a tener $c_1 = 0$*, tendremos una trayectoria paralela a* $\xi^{(2)}$*. Además, dado que la exponencial aumentará a medida que t aumente, en este caso la trayectoria se alejará del origen a medida que t se incremente. Denotaremos esto con flechas en las líneas en el siguiente gráfico.*

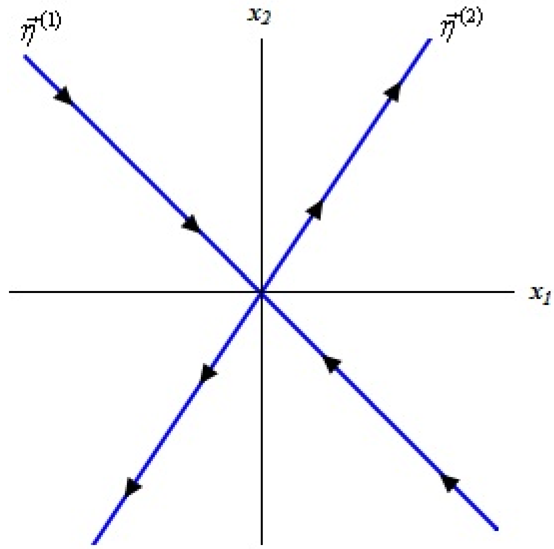


Figura 3.3: Grafica que representa los la direccion de los eigenvectores ξ^1 y ξ^2 a medida que t aumenta.

Notemos que podríamos haber obtenido esta información yendo a la solución. Todo lo que realmente necesitamos hacer es mirar los valores propios. Los valores propios que son negativos corresponderán a soluciones que se moverán hacia el origen a medida que t aumenta en una dirección que es paralela a su vector propio. Del mismo modo, los valores propios que son positivos se alejan del origen cuando t aumenta en una dirección que será paralela a su vector propio.

Si ambas constantes están en la solución, tendremos una combinación de estos comportamientos. Para t negativas grandes, la solución estará dominada por la porción que tiene el eigenvalor negativo ya que en estos casos el exponente será grande y positivo. Las trayectorias para t negativas grandes serán paralelas a $\xi^{(1)}$ *y se moverán en la misma dirección.*

Las soluciones para t positivas grandes estarán dominadas por la porción con el eigenvalor positivo. Las trayectorias en este caso serán paralelas a $\xi^{(2)}$ *y se moverán en la misma dirección.*

En general, parece que las trayectorias comenzarán çerca.[a] $\xi^{(1)}$, se moverán hacia el origen y luego, a medida que se acerquen al origen, comenzarán a moverse hacia adelante a $\xi^{(2)}$ y luego continuarán a lo largo de este vector. Dibujar algunos de estos en dará el siguiente retrato de fase. Aquí hay un boceto de esto con las trayectorias correspondientes a los eigenvalores.

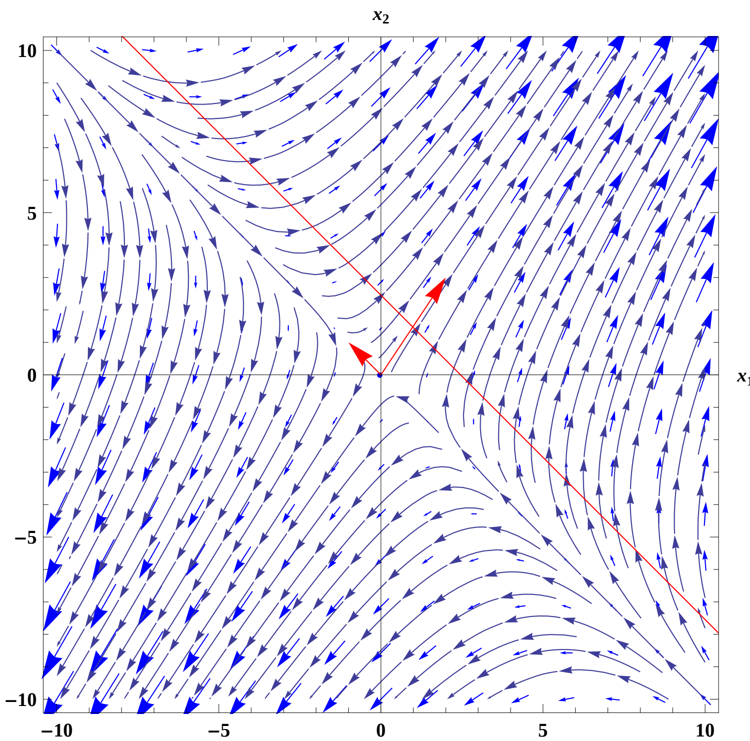


Figura 3.4: Grafica que representa los la direccion de los eigenvectores ξ^1 y ξ^2 a medida que t aumenta.

En este caso, la solución de equilibrio (0,0) se llama punto silla y es inestable. En este caso, inestable significa que las soluciones se alejan de él a medida que t aumenta.

PROGRAMA EN MATEMATHICA

```
In[1]:=
(*-----------------------ESPACIO
 FASE DEL SISTEMA-----------------------*)
(* Este código resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales planas:
        x'= ax + by,  y' = cx + dy,
 en forma exacta para alguna condición inicial dada (x(0),y(0)),
analiza la estabilidad del punto crítico del sistema,
graficar las soluciones temporales de x(t) y y(t)
 y muestra la trayectoria en el espacio fase con diversas
 condiciones iniciales en forma de campo vectorial.
  Por: Oscar Ivan de Jesus Munguía y Jorge Chávez Carlos.    *)
(*--------------------------------------------------------------------------
*)
a =
 1;
b = 2;
c = 3;
d = 2; (* <- Seleción de parámetros {a,b,c,d}*)
x0 = 1; y0 = 0.5; (* <- Condiciones inicales*)
(*Rangos gráficos*)
ti = 0;
tf = 15;
{xl, xr} = {-10, 10};
{yl, yr} = {-10, 10};
(*--------------------------------------------------------------------------
*)
A = {{a, b}, {c, d}};
val = Eigenvalues[A];
vect = Eigenvectors[A];
Δ = Tr[A]^2 - 4 Det[A];
sis[x_, y_] := {a x + b y, c x + d y};
Print[
  "================================================================="];
Print["El Sistema de Ecuaciones Diferenciales es: X̅'=" MatrixForm[A], " X̅"];
Print["El punto crítico es:"];
imCamp = VectorPlot[sis[x, y], {x, xl, xr}, {y, yl, yr},
   VectorStyle → Blue, StreamPoints → Fine, Axes → True, AxesLabel → {x1, x2},
   LabelStyle → Directive[Black, Bold], PlotRange → Automatic];
(*----------Clasificación de estabilidad----------*)
If[Δ ≥ 0, {If[val[[1]] == val[[2]],
     {If[val[[1]] < 0, Print["Nodo Degenerado Atractor"],
       Print["Nodo Degenerado Repulsoror"]], vec1 = vect[[1]],
      vec2 = Transpose[Eigenvectors[A - val[[1]] {{1, 0}, {0, 1}}]][[1]]},
     {If[val[[1]] val[[2]] < 0, Print["Nodo Hiperbólico"],
       If[val[[1]] < 0, Print["Nodo Atractor"], Print["Nodo Repulsor"]]],
      vec1 = vect[[1]], vec2 = vect[[2]]}]},
  {If[Re[val[[1]]] < 0, Print["Nodo Espiral Atractor"], If[Re[val[[1]]] == 0,
      Print["Nodo centro"], Print["Nodo Espiral Repulsor"]]],
   vec1 = Re[vect[[1]]], vec2 = Im[vect[[2]]]}];
Print["Los valores propios del sistema son: ", val];
(*-------Solución de Ecuación Diferencial---------*)
sol = Simplify[DSolve[
     {{x'[t], y'[t]} == sis[x[t], y[t]], x[0] == x0, y[0] == y0}, {x[t], y[t]}, t]];
```

Figura 3.5: Programa que representa a la gráfica del nodo hiperbolico

Vamos a trabajar con otro ejemplo.

Ejemplo 3.2.5 *Resolver el siguiente sistema, obteniendo la solución general*

$$x' = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución

Entonces, lo primero que debemos hacer es encontrar los valores propios de la matriz.

$$\begin{aligned} det(A - rI) &= \begin{vmatrix} -5 - r & 1 \\ 4 & -2 - r \end{vmatrix} \\ &= r^2 + 7r + 6 \\ &= (r + 1)(r + 6) \end{aligned}$$

Entonces los valores dados son $r_1 = -1$ y $r_2 = -6$. Ahora encontremos los eigenvectores para cada uno de los valores.

Para $r_1 = -1$ necesitamos resolver lo siguiente

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $-4\xi_1 + \xi_2 = 0$ *y por tanto* $\xi_2 = 4\xi_1$
Por lo que el eigenvector esta dado por

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ 4\xi_1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \xi_1 = 1$$

Por otra parte para $r_2 = -6$ *necesitamos resolver*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $\xi_1 + \xi_2 = 0$ *y por tanto* $\xi_1 = -\xi_2$
Por lo que el eigenvector esta dado por

$$\xi = \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\xi^(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \xi_2 = 1$$

Por lo tanto la solución general esta dada por

$$x(t) = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^{-6t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora necesitamos encontrar las constantes c_1 *y* c_2*. Para ello, solo necesitamos aplicar las condiciones iniciales.*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora multiplicamos las constantes y así obtenemos dos ecuaciones (una para cada fila). Esto da,

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 &= 1 \\ 4c_1 + c_2 &= 2 \end{aligned}$$

Entonces

$$c_1 = \frac{3}{5}, \qquad c_2 = -\frac{2}{5}$$

Por lo tanto la solución es

$$x(t) = \frac{3}{5}e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}e^{-6t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora encontremos el retrato de fase para este sistema.

Ejemplo 3.2.6 *Dibujar el retrato fase para el siguiente sistema*

$$x' = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} x$$

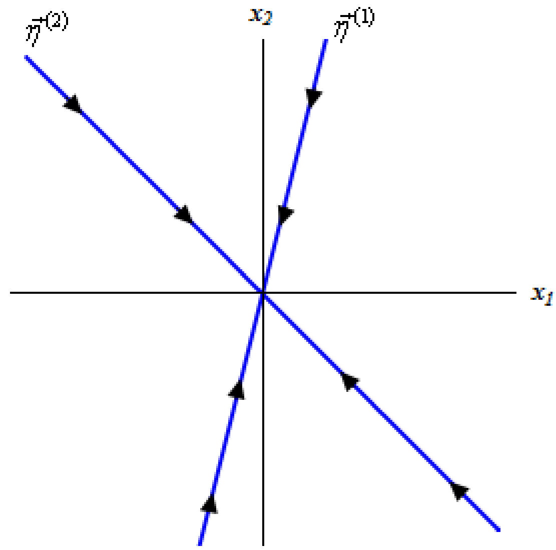
Solución

Del último ejemplo, sabemos que los valores propios y vectores propios de este sistema son,

$$r_1 = -1 \qquad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = -6 \qquad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

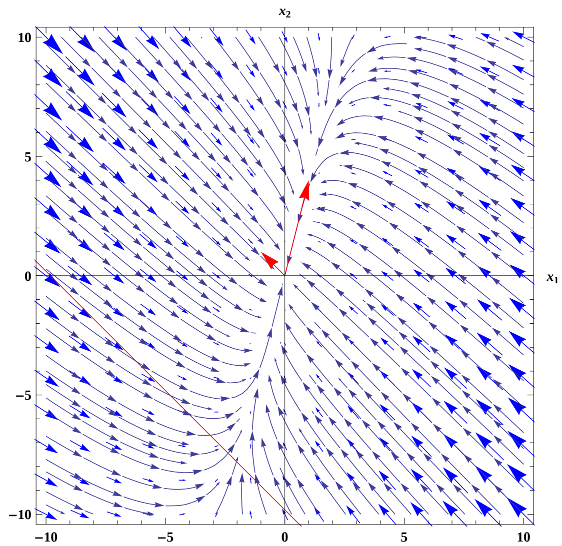
Este es un poco diferente del primero. Sin embargo, comienza de la misma manera. Primero dibujaremos las trayectorias correspondientes a los vectores propios. Nótese también que ambos valores propios son negativos, por lo que las trayectorias de estos se moverán hacia el origen a medida que t aumente. Cuando diseñemos las trayectorias, agregaremos flechas para indicar la dirección que toman a medida que t aumenta. Aquí está el boceto de estas trayectorias.



Ahora, aquí es donde aparece la pequeña diferencia del retrato de la primera fase. Todas las trayectorias se moverán hacia el origen a medida que t aumenta, ya que ambos valores propios son negativos. El problema que tenemos que decidir es cómo lo hacen. Esto es realmente más fácil de lo que parece ser al principio.

El segundo valor propio es más grande que el primero. Para t grande y positivo, esto significa que la solución para este valor propio será más pequeña que la solución para el primer valor propio. Por lo tanto, cuando t aumenta la trayectoria se moverá hacia el origen y lo hará en paralelo a $\xi^{(1)}$.

Del mismo modo, dado que el segundo valor propio es mayor que el primero, esta solución dominará para t grandes y negativas. Por lo tanto, a medida que disminuimos t la trayectoria se alejará del origen y lo hará paralelamente a $\xi^{(2)}$.



En estos casos llamamos a la solución de equilibrio $(0, 0)$ *un nodo y es asintóticamente estable. Las soluciones de equilibrio son asintóticamente estables si todas las trayectorias se mueven hacia ella a medida que aumenta* t*.*

Tenga en cuenta que los nodos también pueden ser inestables. En el último ejemplo, si ambos valores propios hubieran sido positivos, todas las trayectorias se habrían alejado del origen y en este caso la solución de equilibrio habría sido inestable.

3.2.3.2. EIGENVALORES COMPLEJOS

En esta sección veremos soluciones para

$$x' = Ax$$

donde los valores propios de la matriz A son complejos. Con eigenvalores complejos tendremos el mismo problema que tuvimos cuando estábamos buscando ecuaciones diferenciales de segundo orden. Queremos que nuestras soluciones solo tengan números reales, sin embargo, dado que nuestras soluciones a los sistemas son de la forma,

$$x = \xi e^{rt}$$

vamos a tener números complejos en nuestra solución tanto del valor propio como del vector propio. Deshacerse de los números complejos aquí será similar a cómo lo hicimos en el caso de ecuación diferencial de segundo orden, pero esta vez implicará un poco más de trabajo. Es más fácil ver cómo hacer esto en un ejemplo.

Ejemplo 3.2.7 *Resolver el siguiente sistema, obteniendo la solución general*

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} x \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Solución

Primero necesitamos encontrar valores propios y vectores propios para la matriz.

$$\begin{aligned} det(A - rI) &= \begin{vmatrix} 3-r & -9 \\ 4 & -3-r \end{vmatrix} \\ &= r^2 + 27 \end{aligned}$$

Por tanto los valores propios son $r_1 = 3\sqrt{3}i$ *y* $r_2 = -3\sqrt{3}i$. *Ahora encontremos los eigenvectores para cada uno de los valores.*
Para $r_1 = 3\sqrt{3}i$ *necesitamos resolver el siguiente sistema*

$$\begin{pmatrix} 3-3\sqrt{3}i & -9 \\ 4 & -3-3\sqrt{3}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Usando la primera ecuación obtenemos

$$(3 - 3\sqrt{3}i)\xi_1 - 9\xi_2 = 0$$

y por tanto

$$\xi_2 = \frac{1}{3}(1 - \sqrt{3}i)\xi_1$$

Por lo que el primer eigenvector esta dado por

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \frac{1}{3}(1-\sqrt{3}i)\xi_1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1-\sqrt{3}i \end{pmatrix}, \qquad \xi_1 = 3$$

ahora para el eigenvalor $r_2 = -3\sqrt{3}i$ *se obtiene el eigenvector*

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+\sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

Sin embargo, veremos que no necesitaremos este vector propio.

La solución que obtenemos del primer eigenvalue y eigenvector es,

$$x_1(t) = e^{3\sqrt{3}it} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 - \sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

Entonces, como podemos ver, hay números complejos tanto en el exponencial como en el vector que necesitaremos eliminar para usar esto como una solución. Recuerde de la sección de raíces complejas de ecuación diferencial de segundo orden que podemos usar la fórmula de Euler para sacar el número complejo de la exponencial. Hacer esto nos da,

$$x_1(t) = \left(\cos(3\sqrt{3}t + i\sin(3\sqrt{3}t)\right) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 - \sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

El siguiente paso es multiplicar los cosenos y senos en el vector.

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(3\sqrt{3}t + 3i\sin(3\sqrt{3}t) \\ \cos(3\sqrt{3}t + i\sin(3\sqrt{3}t) - \sqrt{3}i\cos(3\sqrt{3}t + \sqrt{3}\sin(3\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

ahora separamos los términos imaginarios de los reales obteniendo lo siguiente

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 3\cos(3\sqrt{3}t \\ \cos(3\sqrt{3}t + \sin(3\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3\sin(3\sqrt{3}t) \\ \sin(3\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\cos(3\sqrt{3}t \end{pmatrix} = u(t) + iv(t)$$

Ahora, se puede mostrar que $u(t)$ y $v(t)$ son dos soluciones linealmente independientes al sistema de ecuaciones diferenciales. Esto significa que podemos usarlos para formar una solución general y ambas son soluciones reales.

Entonces, la solución general a un sistema con raíces complejas es

$$x(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t)$$

donde $u(t)$ y $v(t)$ se encuentran escribiendo la primera solución como

$$x(t) = u(t) + v(t)$$

Para nuestro sistema, entonces, la solución general es,

$$x(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3\cos(3\sqrt{3}t \\ \cos(3\sqrt{3}t + \sin(3\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3\sin(3\sqrt{3}t) \\ \sin(3\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\cos(3\sqrt{3}t \end{pmatrix}$$

Ahora necesitamos aplicar la condición inicial a esto para encontrar las constantes.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Esto lleva a que se resuelva el siguiente sistema de ecuaciones,

$$3\cos(3\sqrt{3}t\cos(3\sqrt{3}t + \sin(3\sqrt{3}t) \Rightarrow c_1 = \frac{2}{3}, c_2 = \frac{14}{3\sqrt{3}}$$

La verdadera solución es entonces,

$$x(t) = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3\cos(3\sqrt{3}t \\ \cos(3\sqrt{3}t + \sin(3\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + \frac{14}{3\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3\sin(3\sqrt{3}t) \\ \sin(3\sqrt{3}t) - \sqrt{3}\cos(3\sqrt{3}t \end{pmatrix}$$

Como en los ejemplos anteriores, haremos los retratos de fase por separado de la solución del sistema.

Ejemplo 3.2.8 *Dibuje el retrato de fase para el sistema.*

$$x(t) = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} x$$

Solución

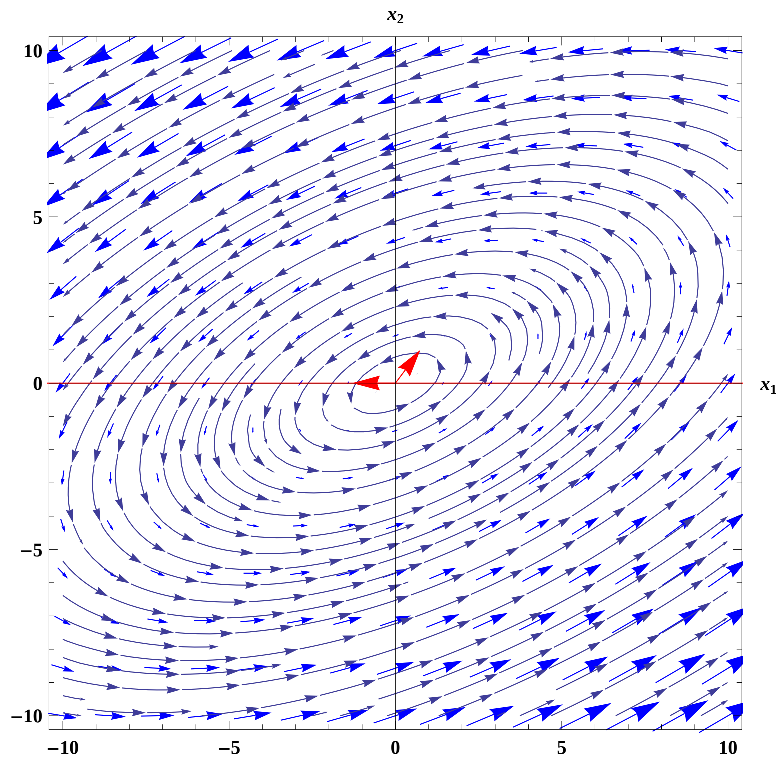
Cuando los valores propios de una matriz A son puramente complejos, como lo son en este caso, las trayectorias de las soluciones serán círculos o elipses centradas en el origen. Lo único que realmente debemos preocuparnos aquí es si giran en sentido a las manecillas del reloj o en contra.

Cuando miramos por primera vez estos retratos de fase en secciones anteriores elegimos un valor de x y lo conectamos a nuestro sistema para obtener un vector que será tangente a la trayectoria en ese punto y apuntando en la dirección en que el la trayectoria está viajando ... Por lo tanto, escojamos el siguiente punto y veamos qué obtenemos.

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, en el punto (1,0) en el plano de fase, la trayectoria apuntará hacia arriba. La única forma en que esto puede ser es si las trayectorias están viajando en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Aquí vemos algunas de las trayectorias para este problema.



La solución de equilibrio en el caso se llama Nodo centro y es estable.

3.2.3.3. EIGENVALORES REPETIDOS

Este es el último caso que debemos analizar. En esta sección volvemos a ver soluciones para el sistema,

$$x' = Ax$$

donde los valores propios son valores propios repetidos. Como vamos a trabajar con sistemas en los que A es una matriz de $2x2$, haremos esa suposición desde el principio. Entonces el sistema tendrá un valor propio doble, r.

$$x_1 = \xi e^{rt}$$

Entonces, necesitamos encontrar una segunda solución. Recuerde que cuando miramos el caso de doble raíz con las ecuaciones diferenciales de segundo orden, encontramos un problema similar. En esa sección simplemente agregamos una t a la solución y obtenemos una segunda solución. Veamos si lo mismo funcionará en este caso también.

$$x = te^{rt}\xi$$

Entonces esta ecuación también es solución.

Para verificar todo lo que tenemos que hacer es conectarlo al sistema. Así obtenemos,

$$\xi e^{rt} + r\xi te^{rt} = A\xi te^{rt}$$

Ahora, tenemos dos funciones aquí en el lado izquierdo, una exponencial en sí misma y una exponencial multiplicada por t. Entonces, para que nuestra conjetura sea una solución necesitaremos requerir,

$$A\xi = r\xi \quad \Rightarrow \quad (A - rI)\xi = 0$$
$$\xi = 0$$

El primer requisito no es un problema, ya que esto solo dice que r es un valor propio y su vector propio es ξ

El segundo sin embargo es un problema. Como es un vector propio, sabemos que no puede ser cero, pero para satisfacer la segunda condición tendría que serlo.

Entonces, nuestra suposición fue incorrecta. El problema parece ser que hay un término único con solo un exponencial, así que veamos si no podemos arreglar nuestra conjetura para corregir eso. Probemos la siguiente suposición.

$$x = te^{rt}\xi + e^{rt}\rho$$

donde ρ es un vector desconocido que necesitaremos determinar. Al igual que con la primera suposición, conectemos esto al sistema y veamos qué obtenemos.

$$\xi e^{rt} + r\xi te^{rt} + r\rho e^{rt} = A(\xi te^{rt} + \rho e^{rt})$$

$$(\xi + r\rho)e^{rt} + r\xi te^{rt} = A\xi te^{rt} + A\rho e^{rt}$$

Ahora establece los coeficientes iguales de nuevo,

$$r\xi = A\xi \quad \Rightarrow \quad (A - rI)\xi = 0$$
$$\xi + r\rho = A\rho \quad \Rightarrow \quad (A - rI)\rho = \xi$$

Al igual que con nuestra primera suposición, la primera ecuación no nos dice nada que no sepamos. Esta vez, la segunda ecuación no es un problema. Toda la segunda ecuación nos dice que ρ debe ser una solución para esta ecuación.

Parece que nuestra segunda suposición funcionó. Por lo tanto,

$$x_2 = te^{rt}\xi + e^{rt}\rho$$

será una solución para el sistema siempre que ρ sea una solución para

$$(A - rI)\rho = \xi$$

Además, esta solución y la primera solución son linealmente independientes, por lo que forman un conjunto fundamental de soluciones, por lo que la solución general en el caso de doble valor propio es

$$x = c_1 e^{rt}\xi + c_2(te^{rt}\xi + e^{rt}\rho)$$

a continuación veremos un ejemplo

Ejemplo 3.2.9 *Resolver el siguiente sistema, obteniendo la solución general*

$$x' = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} x \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución *Primero encuentre los valores propios para el sistema.*

$$\begin{aligned} det(A - rI) &= \begin{vmatrix} 7-r & 1 \\ -4 & 3-r \end{vmatrix} \\ &= r^2 - 10r + 25 \\ &= (r-5)^2 \end{aligned}$$

Entonces $r_1 = 5$ *y* $r_2 = 5$*, así tenemos un valor propio doble. Por supuesto, eso no debería ser demasiado sorprendente dada la sección en la que nos encontramos. Encontremos el vector propio para este valor propio. Entonces*

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces

$$2\xi_1 + \xi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_2 = -2\xi_1$$

Por tanto el vector propio es entonces,

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -2\xi_1 \end{pmatrix} \quad \xi_1 \neq 0$$

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \xi_1 = 1$$

El siguiente paso es encontrar ρ. Para hacer esto, necesitaremos resolver,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$2\rho_1 + \rho_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = 1 - 2\rho_1$$

Tenga en cuenta que esto es casi idéntico al sistema que resolvemos para encontrar el valor propio. La única diferencia es el lado derecho. El ρ más general posible es

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ 1 - 2\rho_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \rho = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad si \quad \rho_1 = 0$$

En este caso, a diferencia del sistema de vectores propios, podemos elegir que la constante sea lo que queramos, por lo que también podríamos elegirla para facilitarnos la vida. Esto generalmente significa elegirlo cero.
Ahora podemos escribir la solución general al sistema.

$$x(t) = c_1 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 \left(e^{5t} t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + e^{5t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Aplicando la condición inicial para encontrar las constantes nos da,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = x(0) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donde,

$$\left. \begin{array}{r} c_1 = 2 \\ -2c_1 + c_2 = -5 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 2, c_2 = -1$$

Por lo tanto la solución es:

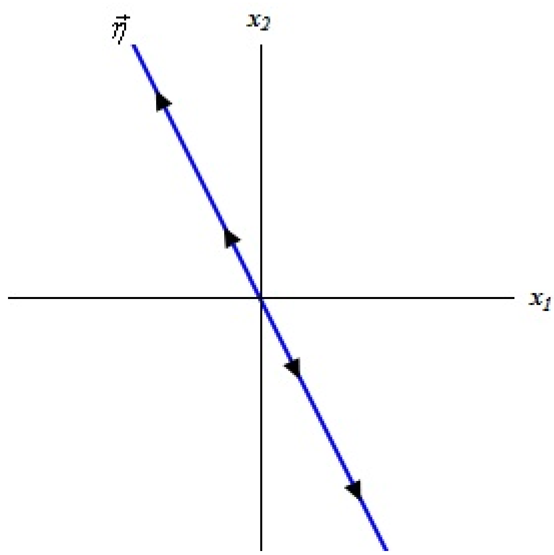
$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2e^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \left(te^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + e^{5t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= e^{5t}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} - te^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} - e^{5t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= e^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} - te^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

En el siguiente ejemplo dibujaremos el retrato fase para el sistema.

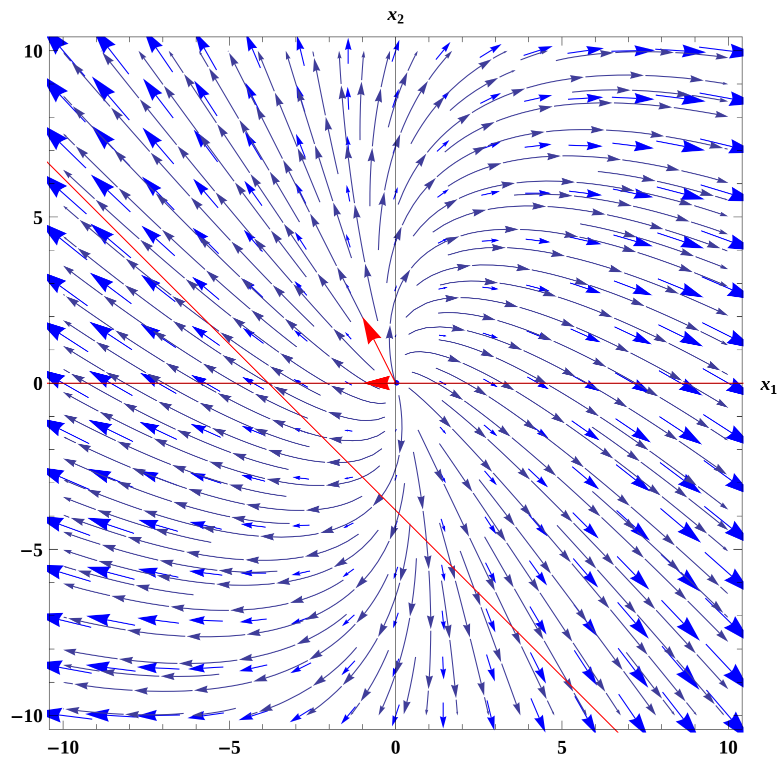
Ejemplo 3.2.10 *Dibujar el retrato fase para el sistema*

$$
x' = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} x
$$

Solución *Estos comenzarán de la misma manera que comienzan los retratos fase reales y distintos de los valores propios. Primero dibujaremos en una trayectoria que sea paralela al vector propio y tengamos en cuenta que, dado que el valor propio es positivo, la trayectoria se alejará del origen.*



Ahora, será más fácil explicar el resto del retrato de fase si realmente tenemos uno frente a nosotros. Así que aquí está el retrato de fase completa con algunas trayectorias más dibujadas.



Las trayectorias en estos casos siempre surgen (o se mueven hacia) el origen en una dirección que es paralela al vector propio. Del mismo modo, comenzarán en una dirección antes de girar y alejarse en la otra dirección. Las direcciones en que se mueven son opuestas dependiendo de qué lado de la trayectoria corresponde al vector propio en el que estamos. Además, a medida que las trayectorias se alejan del origen, deberían comenzar a ser paralelas a la trayectoria correspondiente al vector propio.

Para determinar la dirección de vector hicimos lo mismo que que en el caso complejo. Conectaremos (1,0) al sistema y veremos en qué dirección se mueven las trayectorias en ese punto. Como este punto está directamente a la derecha del origen, la trayectoria en ese punto ya debe haber girado y, por lo tanto, dará la dirección en la que se desplazará después de girar.

Hacer eso para este problema para verificar nuestro retrato de fase da,

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Este vector señalará hacia abajo en el cuarto cuadrante y por lo tanto la trayectoria también debe moverse hacia el cuarto cuadrante. Esto encaja con nuestro retrato de fase.

*En estos casos, el equilibrio se denomina **nodo degenerado repulsor**. Tenga en cuenta que a veces escuchará nodos para el caso de eigenvalores repetidos llamados nodos degenerados o nodos incorrectos.*

PROGRAMA EN MATHEMATICA

```
In[29]:=
(*-----------------------ESPACIO
 FASE DEL SISTEMA-----------------------*)
(* Este código resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales planas:
        x'= ax + by,  y' = cx + dy,
 en forma exacta para alguna condición inicial dada (x(0),y(0)),
analiza la estabilidad del punto crítico del sistema,
graficar las soluciones temporales de x(t) y y(t)
 y muestra la trayectoria en el espacio fase con diversas
 condiciones iniciales en forma de campo vectorial.
  Por: Oscar Ivan de Jesus Munguía y Jorge Chávez Carlos.    *)
(*----------------------------------------------------------------------
*)
a =
 7;
b = 1;
c = -4;
d = 3; (* <- Seleción de parámetros {a,b,c,d}*)
x0 = 1; y0 = 0.5; (* <- Condiciones inicales*)
(*Rangos gráficos*)
ti = 0;
tf = 15;
{xl, xr} = {-10, 10};
{yl, yr} = {-10, 10};
(*----------------------------------------------------------------------
*)
A = {{a, b}, {c, d}};
val = Eigenvalues[A];
vect = Eigenvectors[A];
Δ = Tr[A]^2 - 4 Det[A];
sis[x_, y_] := {a x + b y, c x + d y};
Print[
  "==================================================================="];
Print["El Sistema de Ecuaciones Diferenciales es: x̅'=" MatrixForm[A], " x̅"];
Print["El punto crítico es:"];
imCamp = VectorPlot[sis[x, y], {x, xl, xr}, {y, yl, yr},
   VectorStyle → Blue, StreamPoints → Fine, Axes → True, AxesLabel → {x1, x2},
   LabelStyle → Directive[Black, Bold], PlotRange → Automatic];
(*----------Clasificación de estabilidad----------*)
If[Δ ≥ 0, {If[val[[1]] == val[[2]],
     {If[val[[1]] < 0, Print["Nodo Degenerado Atractor"],
       Print["Nodo Degenerado Repulsoror"]], vec1 = vect[[1]],
      vec2 = Transpose[Eigenvectors[A - val[[1]] {{1, 0}, {0, 1}}]][[1]]},
     {If[val[[1]] val[[2]] < 0, Print["Nodo Hiperbólico"],
       If[val[[1]] < 0, Print["Nodo Atractor"], Print["Nodo Repulsor"]]],
      vec1 = vect[[1]], vec2 = vect[[2]]}]},
  {If[Re[val[[1]]] < 0, Print["Nodo Espiral Atractor"], If[Re[val[[1]]] == 0,
      Print["Nodo centro"], Print["Nodo Espiral Repulsor"]]],
   vec1 = Re[vect[[1]]], vec2 = Im[vect[[2]]]}];
Print["Los valores propios del sistema son: ", val];
(*-------Solución de Ecuación Diferencial---------*)
sol = Simplify[DSolve[
     {{x'[t], y'[t]} == sis[x[t], y[t]], x[0] == x0, y[0] == y0}, {x[t], y[t]}, t]];
```

3.2.4. MATRIZ EXPONENCIAL

Si $x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t)$ son n soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial

$$x' = Ax \tag{3.16}$$

entonces cualquier solución $x(t)$ puede escribirse de la forma

$$x(t) = c_1x^1(t) + c_2x^2(t) + ... + c_nx^n(t) \tag{3.17}$$

Sea $X(t)$ una matriz cuyas columnas son $x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t)$. Entonces es posible escribir la Ecuación (3.17) en la forma concisa $x(t) = X(t)$, donde

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ . \\ . \\ . \\ c_n \end{pmatrix}$$

Definición 3.2.1 *(Matriz Fundamental de Soluciones).*

Una matriz $X(t)$ se denomina **matriz fundamental de soluciones** de (3.16) si sus columnas forman un conjunto de n soluciones linealmente independientes de (3.16)

A continuación mostraremos como calcular la matriz e^{At} directamente a partir de cualquier matriz fundamental de soluciones de (3.16). Consideremos el siguiente teorema

Teorema 3.2.1
Sea $X(t)$ una matriz fundamental de soluciones e la ecuación $x' = Ax$. Entonces

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0) \tag{3.18}$$

En otras palabras, el producto de cualquier matriz fundamental de soluciones de (3.16) y su inversa en $t = 0$ debe dar e^{At}.

Lema 3.2.1
Una matriz $X(t)$ es una matriz fundamental de soluciones de (3.16) si y solo si $X'(t) = AX(t)$ y $detX(0) \neq 0$.

Demostración

Consideremos $x^1(t), ..., x^n(t)$ las n columnas de $X(t)$. Ahora

$$X'(t) = (x'^{(1)}(t), ..., x'^{(n)}(t))$$

y

$$AX(t) = (AX^1(t), ..., Ax^n(t))$$

Por tanto, las n ecuaciones vectoriales $x'^{(1)}(t) = Ax^1(t), ..., x'^{(n)}(t) = Ax^n(t)$ son equivalentes a la ecuación matricial $X'(t) = AX(t)$. Donde $x^1(t), ..., x^n(t)$ son linealmente independientes si y solo si $x^1(0), ..., x^n(0)$ son vectores linealmente independientes. Por lo tanto $X(t)$ es una matriz fundamental de soluciones si y solo si $X(t) = AX(t)$ y $detX(0) \neq 0$.

Lema 3.2.2
La función con valores con valores matriciales $e^{At} \equiv I + AI + a^2t^2/1! + ...$ es una matriz fundamental de soluciones de (3.16)

Demostración
Sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{A}t &= A + A^2t + ... + \frac{a^{n+1}}{n!}t^n + ... \\ &= A[I + At + ... + \frac{a^nt^n}{n!} + ...] \\ &= Ae^{At} \end{aligned} \tag{3.19}$$

por lo tanto , e^{At} es solución de la ecuación diferencial matricial $X'(t) = AX(t)$. Mas aun, su determinante en $t = 0$ es igual a 1, ya que $e^{A0} = I$. Por lo tanto por el lema anterior e^{At} es una matriz fundamental.

Lema 3.2.3
Sean $X(t)$ y $Y(t)$ dos matrices fundamentales de soluciones de (3.16). Entonces, existe una matriz constante C, tal que $Y(t) = X(t)C$.

Demostración.

Por definición, las columnas $x^1(t), x^2(t), ..., x^n(t)$ de $X(t)$ e $y^1(t), y^2(t), ..., y^n(t)$ de $Y(t)$ son conjuntos linealmente independientes de soluciones de (3.16). En particular cualquier columna $Y(t)$ puede escribirse como connacional lineal de las columnas de $X(t)$; es decir, existen constantes $c_1^j, c_2^j, ..., c_n^j$ tales que

$$y^j(t) = c_1^jx^1(t) + c_2^jx^2(t) + ... + c_n^jx^n(t), \quad j = 1, ..., n. \tag{3.20}$$

Sea C la matriz $c^1, c^2, ..., c^n$ donde

$$c^j = \begin{pmatrix} c_1^j \\ . \\ . \\ . \\ c_n^j \end{pmatrix}$$

Entonces las n ecuaciones (3.20) son equivalentes a la ecuación matricial $Y(t) = X(t)C$. mediante estos tres lemas podemos demostrar el teorema de esta sección

demostración del teorema 1 Sea $X(t)$ una matriz fundamental de soluciones de (3.16). Entonces por el lema 2 y 3 , existe una matriz constante tal que

$$e^{At} = X(t)C \tag{3.21}$$

tomando $t = 0$ en (3.21)se obtiene $I = X(0)C$, entonces $C = X^{-1}(0)$. por lo tanto, $e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$.

Ejemplo 3.2.11 *Encontrar e^{At} si*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución *El primer paso es encontrar tres soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial*

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} x$$

Para tal fin se calcula

$$p(r) = det(A - rI) = det \begin{pmatrix} 1-r & 1 & 1 \\ 0 & 3-r & 2 \\ 0 & 0 & 5-r \end{pmatrix} = (1-r)(3-r)(5-r)$$

Por lo que tenemos tres valores característicos $r = 1$,$r = 3$ y $r = 5$.

Entonces para el valor característico $r = 1$ tenemos al vector característico

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto

$$x^1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una solución de (3.16)
Para el valor característico $r = 3$*, buscamos una solución diferente de cero de la ecuación*

$$(A - 3I)v = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $v_3 = 0y$ $v_2 = v_1$*.Por lo tanto*

$$v^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es un vector característico de A. por tanto

$$x^2(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es una segunda solución de (3.16).
Para el valor característico $r = 5$*, buscamos una solución diferente de cero tal que*

$$(A - 5I)v = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto implica que $v_2 = v_3$ *y* $2v_1 = v_2$*, por lo que*

$$v^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es un vector característico de A. Por lo tanto

$$x`3(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es tercera solución para $x' = Ax$. por lo que las tres soluciones son linealmente independientes. Por lo tanto

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} & e^{5t} \\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental de soluciones. Entoces calculando la matriz

$$X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} exp\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} t\right] &= \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} & e^{5t} \\ 0 & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{5t} \\ 0 & e^{3t} & e^{3t} + e^{5t} \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{5t} \\ 0 & e^{3t} & e^{3t} + e^{5t} \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{pmatrix}$$

3.3. APLICACIONES

1. De la novela de Romeo y Julieta, vamos a construir nuestra una version de la historia, donde Romeo ama a Julieta y Julieta es un poco voluble, en cuanto el amor de Romeo es mayor, Julieta quiere huir y esconderse. Pero cuando Romeo se desanima y retrocede, Julieta empieza a encontrarlo extrañamente atractivo. Romeo, por el contrario, tiende a acercarse cuando ella lo ama y se aleja cuando ella lo odia. Sea

$$R(t) = ElAmor/OdioquesienteRomeoporJulietaaltiempot$$

$$J(t) = ElAmor/OdioquesienteJulietaporRomeoaltiempot :$$

Valores positivos de R; J significan amor, negativos significan odio. El modelo de este romance es

$$R = aJ$$

$$J = bR$$

donde los parámetros a y b son positivos para ser consistentes con la historia.

a) Esboce el espacio fase del sistema de la ecuación

b) (Fuego y agua) ¿ Opuestos se atraen? Analice $R = aR + bJ; J = -bR - aJ$.

c) (Chicharros en el ojete) Si Romeo y Julieta son clones románticos $R = aR + bJ; J = bR + aJ$ ¿ su romance estaría lleno de aburrimiento o felicidad ?.

Apéndice A

Más cosas

Bibliografía

[1] Ross, S. L. (1982). Introducción a las ecuaciones diferenciales (No. 517.38 R6Y 1980).

[2] Braun, M. (1992). Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica.

[3] Boyce, W. E. D., Richard, C., Villagómez Velázquez, H. (2004). Elementary differential equations and boundary value problems. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera.

[4] Friedberg, S. H., Insel, A. J., Spence, L. E. (1982). Algebra lineal. Publicaciones Cultural.

[5] Hoffman, K., Kunze, R., Finsterbusch, H. E. (1973). Álgebra lineal. Prentice-Hall Hispanoamericana.

[6] Marsden, J. E., Tromba, A. J., Mateos, M. L. (1998). Cálculo vectorial. Addison-Wesley Longman.

[7] Hirsch, M. W., Smale, S., Pérez, C. F. (1983). Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal. Alianza Editorial.

[8] Nagle, S. Snider. Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de frontera. Cuarta edición. Ed.

[9] https://www.wolfram.com/mathematica/