邏輯入門(第二版)

原作: 辛靜宜 葉秋呈

beamer 投影片製作修訂: 李瑞麟、柯文基、吳子瑜

國立虎尾科技大學
NATIONAL FORMOSA UNIVERSITY

第七章、符號邏輯

Introduction

- 符號邏輯的發展源遠流長，早在17世紀時數學家萊布尼茲就認爲我們是否可以一套語言和一種可以快速計算的運算規則，可以將我們的思考推理像數學運算一樣符號化和規則化。只要人們掌化這套規則，思考就會變得更清楚。
- 邏輯經過布爾 (Boole)，弗列格 (Frege)，羅素 (Russell) 的發展，終於演變成現代的符號邏輯系統。
- 符號邏輯的理念是「符號可以幫我們簡化問題，進而解決問題。此外，符號可以幫我們將事物抽像化，將其精華取出，再應用到更廣大的地方」。
- 本章與第三章的概念蠻相似的，只是這次要以較數學、較抽象的符號來呈現邏輯。

一、符號

- 前面幾章我們已學過什麼是敘述句，符號邏輯的第一步是將敘述句符號化。
- 簡單敘述句，一般來說，可以用大寫的英文字母:P、Q、R、... 等來代表。P、Q、R、... 等稱爲語句符號。
- 連接詞，一般我們只考慮邏輯連接詞: 而且 (與、和)、或者 (或)、如果...則...，不是 (非)。這些連接詞的符號將用以下表格顯示。

關鍵字	符號
且	$\wedge$
或	$\vee$
非	$\neg$
若...，則...。	$\rightarrow$
若且唯若	$\leftrightarrow$

敘述句的符號化

- 以P表示「小丸子喜歡蘭花」,Q表示「小玉喜歡蘭花」, 以下敘述符號化後可以明顯看出其邏輯結構。
- 「小丸子和小玉都喜歡蘭花」, 符號化爲:$P \wedge Q$。
- 「並非小丸子和小玉都喜歡蘭花」, 符號化爲:$\neg(P \wedge Q)$。
- 「小丸子不喜歡蘭花或小玉不喜歡蘭花」, 符號化爲:$(\neg P) \vee (\neg Q)$。
- 「如果小丸子喜歡蘭花, 則小玉也喜歡蘭花」, 符號化爲:$P \rightarrow Q$。
- 「小丸子喜歡蘭花若且爲若小玉也喜歡蘭花」, 符號化爲:$P \leftrightarrow Q$ [1]。

[1]「小丸子喜歡蘭花若且爲若小玉也喜歡蘭花」的意思是「如果小丸子喜歡蘭花, 則小玉也喜歡蘭花; 如果小玉喜歡蘭花, 則小丸子也喜歡蘭花」。也就是說,「小丸子喜歡蘭花」和「小玉喜歡蘭花」這兩句話互爲充分必要條件。

例 7-1

- 若P表『$(x-2)(y-3)=0$』,
  Q表『$x=2$』,
  R表『$y=3$』,
  則P,Q,R之間的關係爲何?
  請以符號邏輯方式表示。

例 7-1

- 若P表『$(x-2)(y-3)=0$』,
  Q表『$x=2$』,
  R表『$y=3$』,
  則P,Q,R之間的關係爲何?
  請以符號邏輯方式表示。
- 「$(x-2)(y-3)=0$」跟「$x=2$或$y=3$」互爲充分必要條件, 所以P, Q, R的邏輯關係可以用符號$P \leftrightarrow (Q \vee R)$來表示。

例7-2

- 若P表『$x=1$』,
  Q表『$y=2$』,
  R表『$z=-1$』,
  則方程式$(x-1)[(y-2)^2+(z+1)^2]=0$
  的解, 該如何利用符號邏輯方式表示?

例7-2

- 若P表『$x=1$』,
  Q表『$y=2$』,
  R表『$z=-1$』,
  則方程式$(x-1)[(y-2)^2+(z+1)^2]=0$
  的解, 該如何利用符號邏輯方式表示?
- 此方程式的解是「$x=1$」或「$y=2$且$z=-1$」, 可用符號表示爲: $P\vee(Q\wedge R)$。

例7-3

- 若P表『$x > 2$』,
  Q表『$x < 1$』,
  則方程式$x^2 - 3x + 2 \leq 0$
  的解, 該如何利用符號邏輯方式表示?

例7-3

- 若P表『$x > 2$』,
  Q表『$x < 1$』,
  則方程式$x^2 - 3x + 2 \le 0$
  的解, 該如何利用符號邏輯方式表示?
- $x^2-3x+2 = (x-2)(x-1) \le 0 \Rightarrow 1 \le x \le 2$。
  P表「$x > 2$」, 所以$\neg P$表示「$x \le 2$」,
  Q表「$x < 1$」, 所以$\neg Q$表示「$x \ge 1$」。
  $1 \le x \le 2$ 可符號化爲:$(\neg Q) \wedge (\neg P)$。

例7-4

- 若P表『某人x住在台灣』,
  Q表『某人x住在新竹縣。』,
  則P、Q之間有何關聯?

例7-4

- 若P表『某人x住在台灣』,
  Q表『某人x住在新竹縣。』,
  則P、Q之間有何關聯?
- 住新竹是住在台灣的充分條件, 所以P, Q的邏輯關係可符號化爲:$Q \to P$。

例7-5

- 若P表『$\triangle ABC$是等腰三角形。』,
  Q表『$\triangle ABC$有兩內角相等。』,
  則P、Q之間有何關聯?

例7-5

- 若P表『$\triangle ABC$是等腰三角形。』,
  Q表『$\triangle ABC$有兩內角相等。』,
  則P、Q之間有何關聯?
- 明顯地,P, Q互爲充分必要條件, 所以符號化爲:$P \leftrightarrow Q$。

符號化練習

- 令:A= 阿草邏輯及格;B= 阿草通過補考;C= 阿草的邏輯重修;D= 阿草作弊。請將下面的推理以邏輯符號表示。
- 「如果阿草邏輯不及格, 則只有通過補考才不致重修。阿草的邏輯不可能及格或者他就是作弊了。如果阿草的邏輯及格, 則不必重修。現在已知他邏輯不必重修。因此, 如果他沒有作弊, 那就是他通過補考了。」

[2]判斷一個推理是不是有效的方法: 檢查如果前提都爲眞的情況下, 結論有沒有可能爲假。結論不可能爲假的話, 則是有效的推理。結論可能爲假的話, 則是無效的推理

符號化練習

- 令:A= 阿草邏輯及格;B= 阿草通過補考;C= 阿草的邏輯重修;D= 阿草作弊。請將下面的推理以邏輯符號表示。
- 「如果阿草邏輯不及格, 則只有通過補考才不致重修。阿草的邏輯不可能及格或者他就是作弊了。如果阿草的邏輯及格, 則不必重修。現在已知他邏輯不必重修。因此, 如果他沒有作弊, 那就是他通過補考了。」
- 1.$\neg A \to (\neg C \to B)$
  2.$\neg A \vee D$
  3.$A \to \neg C$
  4.$\neg C$
  $\therefore \neg D \to B$
- 如何判斷這是一個有效的推理?[2]

[2]判斷一個推理是不是有效的方法: 檢查如果前提都爲眞的情況下, 結論有沒有可能爲假。結論不可能爲假的話, 則是有效的推理。結論可能爲假的話, 則是無效的推理

符化號練習

- 證明前提1、2、3、4都爲眞的話，結論$\neg D \rightarrow B$爲假的可能性不在。[3]
- 如果$\neg D \rightarrow B$爲 F(以下 F 代表假,T 代表眞)，在這種情況下，前件$\neg D$爲 T，後件 B 爲 F。可以看爲D爲 F。
- 因爲前提2. $\neg A \vee D$爲 T，且D爲 F，所以$\neg A$爲 T。因此,A爲 F。
- 因爲前提4. $\neg C$爲 T，而且B爲 F，所以$\neg C \rightarrow B$爲 F(因爲前件 T，後件 F)。
- 所以前提1.$\neg A \rightarrow (\neg C \rightarrow B)$爲 F(因爲前件 T，後件 F)。
- 但是與我們的假設矛盾，因爲之前我們已假設了所有的前提1,2,3,4都爲 T 了。
- 所以結論$\neg D \rightarrow B$不可能爲假。
- 這是一個有效的推理。

[3] 用歸謬法證明結論$\neg D \rightarrow B$爲假的話，會產生矛盾。

二、眞值表

- 在古典邏輯領域裡, 敘述句的意義通常簡化爲單純的眞假意義。敘述句裡, 如果不是簡單敘述句, 就是複合敘述句 (有包含連接詞的)。簡單敘述句的眞假意義很容易判斷, 但是複合敘述句的眞假判斷比較複雜了。
- 利用眞值表, 可以讓我們利用簡單敘述句的眞假值來計算複合敘述語句的眞假值。
- 眞值表的好處在於可以讓我們有效決定敘述句的眞假意義、判斷敘述句之間的同義關係 (即邏輯等價關係) 和判斷一個推理 (論證) 是不是有效的。
- 以下我們介紹如何使用眞值表。

邏輯連接詞的意義(語意規則)

- 利用真值表來計算敘述句的真假要先理解邏輯連接詞的意義規則, 這些語意規則可以用簡單真值表來表示。以下是前面5個邏輯連接詞的真值表。

1. 否定P(寫成$\neg P$):P的真假值與$\neg P$的真假值, 無論如何絕不相同。

P	$\neg P$
T	F
F	T

聯言連接詞

2. P且Q(寫成$P \wedge Q$): 唯有在P與Q均爲眞的狀況下,$P \wedge Q$才爲眞; 其餘狀況,$P \wedge Q$之結果均爲假。

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

選言連接詞

3. P或Q(寫成$P \vee Q$): 唯有在P與Q均爲假的狀況下,$P \vee Q$才是假; 其餘狀況,$P \vee Q$均爲眞。

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

假言連接詞

2. 若P, 則Q(寫成$P \to Q$): 唯有在P爲眞且Q均爲假的狀況下,$P \to Q$才爲假; 其餘狀況,$P \to Q$之結果均爲眞。

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

若且唯若，雙條件句連接詞

2. P若且唯若Q(寫成$P \leftrightarrow Q$): 唯有在P、Q之中有一爲眞，有一爲假的狀況下,$P \leftrightarrow Q$才爲假; 其餘狀況,$P \leftrightarrow Q$之結果均爲眞。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

例7-6

- 試做下列眞值表

(1) $P \vee \neg Q$
(2) $P \to (P \vee Q)$
(3) $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$

例7-6

- 試做下列眞値表

  (1) $P \vee \neg Q$
  (2) $P \to (P \vee Q)$
  (3) $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$

- 以上三句複合句由簡單句P, Q所構成。每一簡單句有眞、假兩種情況。依據乘法原理，共有$2 \times 2 = 2^2$種情況。

計算$P \vee \neg Q$的真值

P	Q	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$
T	T	F	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

計算$P \to (P \vee Q)$的真值

P	Q	$P \vee Q$	$P \to (P \vee Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

計算$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$的真值

- $P \leftrightarrow Q$是$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$的簡寫。從真值表可以看出這它們是同義的。(比較$P \leftrightarrow Q$的真值表)

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$(P \to Q) \wedge (Q \to P)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

例7-7

- 試以眞值表說明 $(\neg(\neg P) \equiv P$。

例7-7

- 試以真值表說明 $(\neg(\neg P) \equiv P$。
- $\equiv$代表邏輯等價 (或者說同義關係)。
- 兩敘述句P, Q是邏輯等價指的是"在任何情況之下, 它們有相同的真假值"。我們用符號$P \equiv Q$來表示。

P	$\neg P$	$\neg(\neg P)$
T	F	T
F	T	F

- 以上真值表證明了雙重否定規則, 即P跟$\neg(\neg P)$是邏輯等價的。真值表的每一列代表各種可能的情況,P跟$\neg(\neg P)$在各種情況下都有相同的真假值。

例7-8, 用眞值表證明笛摩根法則

- 試以眞值表說明

(1) $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$。

(2) $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$。

$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T

- 從眞值表的每一列 (代表每一種可能的情況) 可以看出$\neg(P \wedge Q)$和$\neg P \vee \neg Q$有相同的眞假值, 證明了這兩句話是邏輯等價的。

$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

P	Q	$P \vee Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \wedge \neg Q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

- 從眞值表的每一列 (代表每一種可能的情況) 可以看出$\neg(P \vee Q)$和$\neg P \wedge \neg Q$有相同的眞假值, 證明了這兩句話是邏輯等價的。

例7-9

- 試以真值表說明
  $P \to Q \equiv (\neg Q) \to (\neg P)$。

例7-9

- 試以真值表說明
  $P \to Q \equiv (\neg Q) \to (\neg P)$。

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \to \neg P$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

例7-10

- 試以真值表說明 $P \to Q \equiv (\neg P) \vee Q$。

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

常用的邏輯規則

- 我們由以上的眞值表法證明了一些常用的邏輯規則, 我們將這些規則陳述如下:
  - 雙重否定規則 (Double Negation):$\neg(\neg P) \equiv P$
  - 笛摩根法則 (DeMorgan's Laws):
    $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
    $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
  - 異質換位規則 (Contraposition):$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$
  - 蘊涵句規則 (Implication):$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$
- 不用眞值表, 利用邏輯規則推導出其他邏輯等價的敘述:
  Ex: 證明$\neg(P \to Q) \equiv P \wedge \neg Q$。

Ans. $\neg(P \to Q) \equiv \neg(\neg P \vee Q) \equiv \neg(\neg P) \wedge \neg Q) \equiv P \wedge \neg Q$。

一些基本邏輯的概念: 恆眞句、矛盾句和一致性

- 敘述句裡, 有些語句是不管在什麼樣的情況下都爲眞, 我們稱這種語句爲恆眞句, 恆眞句是永遠爲眞的語句, 不可能爲假。所有的恆眞句邏輯等價於$A \vee \neg A$這種形式的語句。
- 和恆眞句相反的是另一種永遠爲假的語句, 我們稱之爲矛盾句。矛盾句是不可能爲眞的語句, 也就是說不可能成立, 它們都和$A \wedge \neg A$這種形式的語句等價。
- 既不是恆眞句, 也不是矛盾的句的語句, 我們稱之爲適然句, 它們在有些情況爲眞, 有些情況爲假。
- 我們可以用眞值表來明確定義什麼是恆眞句, 什麼是矛盾句。

用眞值表定義恆眞句、矛盾句

- 恆眞句的定義:
  對某複合敘述A, 若不論構成A的所有簡單敘述 ($如P, Q, R, \ldots$) 在眞值表上的眞假情況怎樣 (即簡單敘述句的眞假配對情形),A在眞值表上的每一列都爲眞 (即都爲 T), 則稱A爲恆眞句 。
- 矛盾句的定義:
  對某複合敘述A, 若不論構成A的所有簡單敘述 ($如P, Q, R, \ldots$) 在眞值表上的眞假情況怎樣 (即簡單敘述句的眞假配對情形),A在眞值表上的每一列都爲假 (即都爲 F), 則稱A爲矛盾句 。

例7-12

- 試以眞值表說明
  $P \to (P \vee Q)$ 爲一恆眞句。

例7-12

- 試以真值表說明
  $P \to (P \vee Q)$ 爲一恆眞句。

P	Q	$P \vee Q$	$P \to (P \vee Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

例7-13

- 試説明
  $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ 爲一矛盾句。

例7-13

- 試說明
  $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$ 爲一矛盾句。
- 劃眞值表可以看出此敘述句在眞值表的每一列都爲假 (都是 F)

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	T	F
F	T	F	T	F	T	F
F	F	F	T	T	T	F

- 利用邏輯規則證明:
  因爲$\neg P \vee \neg Q \equiv \neg(P \wedge Q)$, 所以
  $(P \wedge Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \equiv (P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$, 這是$A \wedge \neg A$這種形式的句子, 所以是矛盾句。

日常生活中恆眞句、矛盾句的例子

- 阿美是阿美族或者阿美不是阿美族。

  用P表示「阿美是阿美族」, 則上面的敘述可以用符號表示爲:$P \vee \neg P$。

- 1. 會飛的豬還是豬
  2. 乞丐中的霸主還是乞丐。

  這兩句都有同樣的邏輯結構, 用P表「x是豬」,Q表「x會飛」, 則第1句可符號化爲: $(P \wedge Q) \rightarrow P$。同樣地, 如果我們用$R$表「$x$是乞丐」,$S$表「$x$霸主」, 則第2句符號化也是$(R \wedge S) \rightarrow S$。$(P \wedge Q) \rightarrow P$可用眞值表證明它是是一句恆眞句。

- 任何這種$A \wedge \neg A$形式的日常語句都是矛盾句。

  例如我們用A代表「我現在在左岸咖啡館」, 則說「我現在在左岸咖啡館而且我現在不在左岸咖啡館」, 就是說一句前言不對後語的矛盾句。

第七章第一部份習題

習題1-18(課本144頁到145頁)

三、量詞

- 學習符號邏輯的目的是要用精確、嚴格的符號來分析我們日常所使用的語言的邏輯結構。
- 從敘述句的邏輯結構, 讓我們看出該敘述句由那些最小的意義單位所構成。
  - Ex:「林肯是美國第16任總統, 而且小羅斯福是美國第32任總。」P:「林肯是美國第16任總統」,Q:「小羅斯福是美國第32任總」。該句可用符號表示爲:$P \wedge Q$。
  - Ex:「除非火星上有水, 否則火星上沒有生命存在。」P:「火星上有水」,Q:「火星上有生命存在」。該句可以用符號表示爲:$Q \rightarrow P$或者$\neg P \rightarrow \neg Q$。
- 前一節我們可以看到, 透過敘述句的邏輯結構, 我們可以從最小的意義單位得到全句的意義。也就是從簡單敘述句的眞假值和連接詞的意義得到整句的眞假值。

三、量詞

- 前一節所介紹的概念是屬於命題邏輯的範圍。
- 命題邏輯讓我們初步分析敘述句的邏輯結構。
- 但是我們日常所使用的語言有些不是單靠命題邏輯可以分析的。
  EX:
  - 「所有的學生都愛看韓劇。」、「有些學生不愛看韓劇。」
  - 「只要有心, 人人都是食神。」、「有有心的人不是食神。」
  - 「每個人都愛每個人。」、「每個人都有所愛的人。」
  - 「有些人不愛有些人。」、「有人不愛所有的人。」
- 以上的敘述句都是帶有「量詞」的句子。
  - 「任何的」「所有的」、「全部的」、「每個」. . . 。叫「全稱量詞」。
  - 「有些」、「有」、「至少有」、「至少有一個」. . . 。叫「存在量詞」。
- 這些帶有「量詞」的敘述句無法用前一節所用的符號來分析它們的邏輯結構。
- 符號邏輯有更細緻、精確符號。

量詞符號:∀、∃; 變數與述詞

- 使用量詞來將敘述句符號化會涉及到變數與述詞。
- 通常我們用英文小寫字母:$x, y, z, \ldots$來代表我們談論的事物。
- $P(x), Q(y), R(x,y), L(x,y)\ldots$代表有關$x, y, \ldots$等的相關敘述 (所以叫做述詞)。
  EX:
  - 「x是豬」可用符號$P(x)$來代表。
  - 「y愛看韓劇」可用符號$Q(y)$來代表。
  - 「x背叛y」可用符號$R(x,y)$來代表。
  - 「x喜歡y」用符號$L(x,y)$來代表。
- 我們用符號「∃」表示至少有一個的意思，讀成「存在有」。
  $\exists x$讀成「存在有x」。
- 我們用符號「∀」表示所有的，讀成「對所有的」。
  $\forall x$讀成「對所有的x」

將帶有量詞的敘述句以邏輯符號表示

- 「有豬存在」:
  我們設定我們討論的範圍是所有的東西,x代表我們談論範圍裡的東西,$P(x)$代表「x是豬」。這句話的意義是「有東西是豬」, 也就是「有個x, x是豬」, 符號化爲$\exists xP(x)$。
- 「所有學生愛看韓劇」:
  我們設定我們討論的範圍是所有的學生,y代表我們談論範圍裡的學生,$Q(y)$代表「y愛看韓劇」。這句話的意義是「所有的y, y愛看韓劇」, 符號化爲$\forall yQ(x)$。
- 「每個人都有所愛的人」:
  我們設定我們討論的範圍是所有的人,x, y代表我們談論範圍裡的人, $L(x, y)$代表「x愛y」。這句話的意義是「對所有的人x來說, 有一個人y,x愛y」, 符號化爲$\forall x\exists yL(x, y)$。

例7-14

- 令x表某實數。令$P(x)$表「$|x| \geq 0$」, $Q(x)$表「$(x-3)(x-1)=0$」。在以下二空格, 填入$\forall$或$\exists$, 使該敘述爲眞。
  (1)______ $x, P(x)$
  (2)______ $x, Q(x)$

例7-14

- 令x表某實數。令$P(x)$表「$|x| \geq 0$」, $Q(x)$表「$(x-3)(x-1)$」。在以下二空格, 填入$\forall$或$\exists$, 使該敘述爲眞。
  (1)______ x, P_x。 $\exists xPx$以及$\forall xPx$皆可。
  (2)______ x, Q_x。 $\exists xQx$

例7-15

- 請將下列敘述改用符號邏輯表示。
  (1) 所有的獅子都很兇猛。
  (2) 有一些獅子不喝咖啡。

例7-15(1) 的解法-(1)

- (1) 所有的獅子都很兇猛。
  - (i) 先設定討論的範圍，也就是量詞中的變元(或變數)x所變動的範圍。這也稱爲論域(domain of discourse)。假設論域爲所有獅子。
  - (ii) 令$P(x)$表示:x很兇猛。
    則 (1) 符號化成 $\forall x P(x)$

例7-15(2)

- 請將下列敘述改用符號邏輯表示。
  (2) 有一些獅子不喝咖啡。

例7-15(2) 有一些獅子不喝咖啡

- 解法 (1): 假設論域爲所有獅子。
  令$C(x)$表示:x喝咖啡。因此符號化爲$\exists x(\neg P(x))$。
- 解法 (2): 假設論域爲所有物件。
  令$L(x)$表示:x是獅子。該句的意義是「有東西x, x是獅子而X不喝咖啡」因此符號化爲 $\exists x(L(x) \wedge \neg P(x))$。

例7-16

- 學校有這麼一個選課規定:
  「選修邏輯及英文者, 不得再選德文。」
  請把這個規定用符號邏輯表示。

例7-16

- 學校有這麼一個選課規定:
「選修邏輯及英文者, 不得再選德文。」
請把這個規定用符號邏輯表示。
- 解法: 假設論域爲所有學生。
該句的意義爲「對所有的學生x來說, 如果x選修邏輯和英文的話, 則x不得選德文。」令$L(x)$表示:x修邏輯課,
$E(x)$表示: 修英文課,
$D(x)$表示: 修德文課。
因此符號化爲 $\forall x[(L(x) \wedge E(x)) \rightarrow \neg D(x)]$

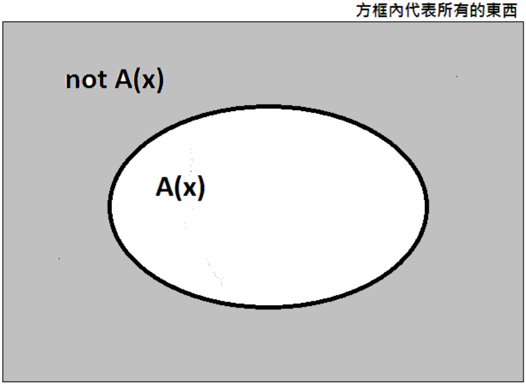
量詞的否定規則

1.「每個人都愛每個人。」、「有些人不愛有些人。」
2.「每個人都有所愛的人。」、「有人不愛所有的人。」
1, 2 項裡各別的兩句話是互爲否定的敘述句, 若不理解量詞的否規則, 將很難看出爲何它們是互爲否定, 互爲矛盾。

- $\neg\forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$
- $\neg\exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$

$\forall x A(x)$

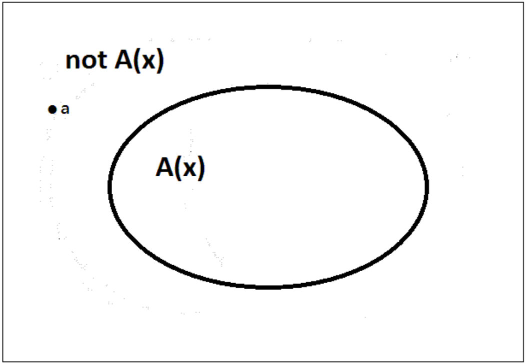
所有東西都在$A(x)$的圓圈内,$\neg A(x)$部份用灰色塗掉代表沒有東西,所以所有東西都是A, $\forall x A(x)$。



$\neg\forall x A(x) \equiv \exists x \neg A(x)$

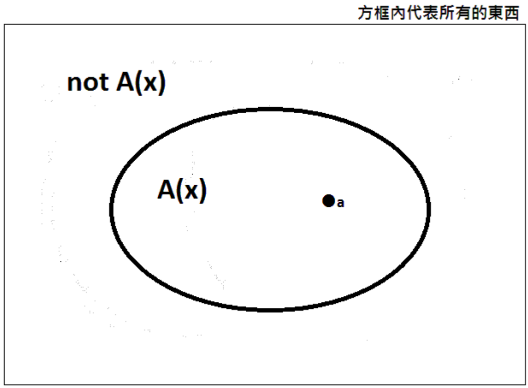
$\neg A(x)$部分有東西a存在, 所以有一點a,a是$\neg A$, $\exists x \neg A(x)$。

方框內代表所有的東西



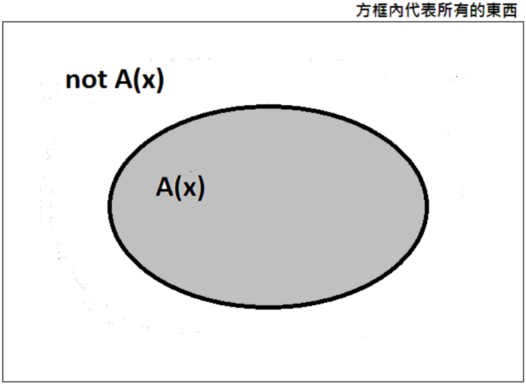
$\exists x A(x)$

$A(x)$的部份有東西存在，所以有一點a,a是$A(x)$，$\exists x A(x)$。



$\neg\exists x A(x) \equiv \forall x \neg A(x)$

所有的東西都在圓圈外$\neg A(x)$的部份,$A(x)$部份用灰色塗掉代表沒有東西，所以所有東西都是$\neg A$, $\forall x \neg A(x)$。



四、量詞否定

3. 「並非所有A都是B」等同於「至少有一個A 不是B」,
   假設x代表A內的元素,
   $B(x)$代表「x是B」的敘述,
   則其符號表示爲:

$$\neg(\forall x B(x)) \equiv \exists x \neg B(x)$$

四、量詞否定(一般的情形)

3. 「並非所有A都是B」等同於「至少有一個A 不是B」,
假設x代表所有的物件,
$A(x)$代表「x是A」的敘述,
$B(x)$代表「x是B」的敘述,
則其符號表示爲:

$$\neg(\forall x(A(x) \to B(x)) \equiv \exists x(A(x) \land \neg B(x))$$

四、量詞否定

4. 「並非至少有一個A是B」等同於「所有A不是B」,
假設x代表A內的元素,
$B(x)$代表「x是B」的敘述,
其符號表示爲:

$$\neg(\exists x B(x)) \equiv \forall x \neg B(x)$$

四、量詞否定(一般的情形)

4. 「並非至少有一個A是B」等同於「所有A不是B」,
   假設x代表所有物件,
   $A(x)$代表「x是A」的敘述,
   $B(x)$代表「x是B」的敘述,
   其符號表示爲:

$$\neg(\exists x(A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x(A(x) \to \neg B(x))$$

例7-17

- 英國大文豪莎士比亞說:
  「並非所有閃爍的都是金子。」
  令x表某物品,
  $P(x)$表:x閃爍,
  $Q(x)$表:x是金子,
  則莎士比亞這句話該如何用符號邏輯表示?

例7-17解答

- 「並非所有閃爍的都是金子。」
  解答: 令x表某物品,
  $P(x)$表:x閃爍,
  $Q(x)$表:x是金子,
  則符號化如下
  $\neg\forall x(P(x) \to Q(x))$
  由量詞否定規則, 得 $\exists x\neg(P(x) \to Q(x))$
  又$\neg(P(x) \to Q(x))$與 $(P(x) \wedge \neg Q(x))$ 邏輯等值, 原句可等同爲$\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$。

例7-18

- 請用符號邏輯表示出
「對每一種動物而言, 都會有一個天敵。」

註: 所謂「天敵」就是有「剋星」之意, 例如: 貓是老鼠的天敵(因貓吃老鼠)。
令$P(x, y)$表示y爲x的天敵。

例7-18解答

- 「對每一種動物而言, 都會有一個天敵。」
  令$P(x, y)$表示y爲x的天敵。符號化如下:

$$\forall x \exists y P(x, y)$$

例7-19

- 令x, y表某非零實數, 令$P(x, y)$表「$xy = 1$。」則下列空格應該填上「$\forall$」還是「$\exists$」, 才能使得整個敘述爲眞?
  (1)$\underline{\qquad\quad} x, \underline{\qquad\quad} y, P(x, y)$。
  (2)$\underline{\qquad\quad} y, \underline{\qquad\quad} x, P(x, y)$。

例7-19解答 (課本有誤)

- 令x, y表某非零實數, 令$P(x, y)$表「$xy = 1$。」則下列空格應該填上「$\forall$」還是「$\exists$」, 才能使得整個敘述爲眞?

  (1)$\forall x \exists x P(x, y)$或$\exists x \exists y P(x, y)$
  (2)$\forall y \exists x P(x, y)$或$\exists y \exists x P(x, y)$

例7-20

- 試將
「所有a的所有b,P均成立」的否定句:
「至少有一個a的至少有一個b, 使得P的否定成立。」
寫成符號邏輯形式。

例7-20

- 試將
  「所有a的所有b,P均成立」的否定句:
  「至少有一個a的至少有一個b, 使得P的否定成立。」
  寫成符號邏輯形式。
  利用量詞否定規則:

$$\neg(\forall a \forall b P) \equiv \exists a \neg(\forall b P) \equiv \exists a \exists b \neg P$$

例7-21

- 試將
  「每一個a的至少有一個b, 使得P成立。」的否定句:
  「至少有一個a的每一個b, 使得P的否定句成立。」
  寫成符號邏輯形式。

例7-21解答

- 試將
  「每一個a的至少有一個b, 使得P成立。」的否定句:
  「至少有一個a的每一個b, 使得P的否定句成立。」
  寫成符號邏輯形式。
  利用量詞否定規則:

$$\neg(\forall a \exists b P) \equiv \exists a \neg(\exists b P) \equiv \exists a \forall b \neg P$$

例7-22

- 試將
「至少有一個a的每一個b, 使得P成立。」的否定句:
「每一個a的至少一個b, 使得P的否定句成立。」
寫成符號邏輯形式。

例7-22解答

- 試將
「至少有一個a的每一個b, 使得P成立。」的否定句:
「每一個a的至少一個b, 使得P的否定句成立。」
寫成符號邏輯形式。
利用量詞否定規則:

$$\neg(\exists a \forall b P) \equiv \forall a \neg(\forall b P) \equiv \forall a \exists b \neg P$$

例7-23

- 試將
  「至少有一個a的至少有一個b, 使得P成立。」的否定句:
  「每一個a的每一個b, 使得P的否定句成立。」
  寫成符號邏輯形式。

例7-23

- 試將
  「至少有一個a的至少有一個b, 使得P成立。」的否定句::
  「每一個a的每一個b, 使得P的否定句成立。」
  寫成符號邏輯形式。
  利用量詞否定規則:

$$\neg(\exists a \exists b P) \equiv \forall a \neg(\exists b P) \equiv \forall a \forall b \neg P$$

第7章習題

1-21

邏輯謎題，例題9-10

- 有三户人家，每家有一個孩子，他們的名字是：小萍 (女)、小紅 (女)、小虎。孩子的爸爸是老王、老張和老陳，媽媽是劉美英、李玲君和方麗華。已知:
  (1) 老王家和李玲君家的孩子都參加了少年女子游泳隊。
  (2) 老張的女兒不是小紅。
  (3) 老陳和方麗華不是一家。
  請問哪三個是一家人?

邏輯謎題，例題9-10

- 有三户人家，每家有一個孩子，他們的名字是：小萍 (女)、小紅 (女)、小虎。孩子的爸爸是老王、老張和老陳，媽媽是劉美英、李玲君和方麗華。已知：
  (1) 老王家和李玲君家的孩子都參加了少年女子游泳隊。
  (2) 老張的女兒不是小紅。
  (3) 老陳和方麗華不是一家。
  請問哪三個是一家人？
- 謎題解答：由 (1) 得知老王和李玲君不是夫妻，但是他們的孩子都是女生。由 (2) 得知老張的孩子是女的 (小萍$\vee$小紅)，但不是小紅 ($\neg$小紅)，所以老張的孩子是小萍 (這用到選言推理)。這也推論出老王的小孩是小紅 (因爲不是小萍)，而且李玲君的小孩是小萍。因此老張，李玲君，小萍是一家人。
  由 (3) 得知老陳的妻子不是方麗華，也不是李玲君 (由前面的推論得知)，所以老陳的妻子是劉美英，而他們的孩子是小虎。因此，老陳，劉美英，小虎是一家人。
  而老王，方麗華，小紅是一家人。

邏輯謎題, 例題9-11

- 四位運動員分別來自台北、台東、花蓮和澎湖, 在游泳、田徑、乒乓球和足球四項運動中, 每人只參加了一項。除此之外, 只知道一些零碎情況:
(1) 阿明是球類運動員, 不是東部人。
(2) 阿志是東部人, 不是球類運動員。
(3) 阿勇和台北運動員、乒乓球運動員同住一個房間。
(4) 阿新不是台北運動員, 年紀比澎湖運動員和游泳運動員都小。
(5) 花蓮運動員沒有參加游泳比賽。
根據這些條件, 請你分析一下: 這四位運動員各來自什麼地方? 各參加什麼運動?

邏輯謎題, 例題9-11

- 謎題解答: 由 (1) 得知: 阿明是玩 (乒乓球∨足球), 台北人∨澎湖人。由 (2) 得知阿志是東部人, 由 (4) 得知阿新不是台北運動員, 也不是澎湖運動員, 所以阿新也是東部人, 因此剩下的阿勇是 (台北人∨澎湖人), 但是由 (3) 得知阿勇非台北人 (¬台北人), 所以阿勇是澎湖人 (選言推理)。這也推論出阿明是台北人, 且從 (3) 也得知, 台北人阿明不玩乒乓球, 所以阿明玩足球。即阿明, 台北人, 玩足球。
  再來考慮阿勇, 是澎湖人 (前面推論得知), 由 (3) 得知不玩乒乓球, 也不玩足球 (前面的推論), 由 (4) 得知不是游泳運動員, 所以阿勇玩田徑。因此, 阿勇, 澎湖人, 玩田徑。
  考慮阿志, 由 (2) 得知, 不玩乒乓球, 不玩足球, 也不玩田徑 (前面的推論), 所以阿志玩游泳。由 (5) 得知阿志不是花蓮人, 所以阿志是台東人。所以阿志, 台東人, 玩游泳。
  最後明顯地推論出, 阿新, 花蓮人, 玩乒乓球。

邏輯謎題, 例題9-12

- 體育館裡正在進行一場精彩的羽毛球雙打比賽, 已知:
  (1) 小關比小李年輕。
  (2) 小趙比他的兩個對手年齡都大。
  (3) 小關比他的伙伴年紀大。
  (4) 小李與小關的年齡差距要比小趙與小張的差距更大一些。
  請分析一下他們四人的年齡順序 (從小到大) , 判斷誰和誰搭檔?

邏輯謎題, 例題9-12

- 謎題解答: 由 (1) 跟 (3) 得知小李不是小關的伙伴, 所以有可能是: 關趙是伙伴或 ($\vee$) 關張是伙伴。
  用歸謬法 (矛盾證法證明關趙不是伙伴): 如果關趙是伙伴, 則他們的對手是李張。根據 (2), 趙的年紀比李張來得大, 又根據 (3), 關的年紀比趙大, 所以從這推論出小關的年紀比小李大, 但是這和 (1) 的條件有矛盾 (即推出矛盾)。所以關趙不是伙伴, 因此關張是伙伴。另一對伙伴是李趙。
  考慮年齡順序, 由 (2)(3) 得知, 年齡上: 小張<小關<小趙。
  由 (1) 得知, 小李比小關大, 所以小李的的年齡有可能在小關和小趙之間, 或者比小趙大, 即
  小張<小關<小李<小趙, 或小張<小關<小趙<小李。
  但是年齡上如果是小張<小關<小李<小趙, 則會變成小李與李關的年齡差距比小趙與小張的差距小, 和 (4) 有矛盾, 所以不可能成立。所以, 年齡上, 小張<小關<小趙<小李。

邏輯謎題, 例題9-13

- 老張、老劉、老李和老趙, 一個是老師, 一個是店員, 一個是工人, 一個公務員。請根據下面零星情況, 判斷每個人的職業是什麼?
(1) 老張和老劉是鄰居, 每天一起騎車去上班。
(2) 老劉比老李年齡大。
(3) 老張正在教老趙打太極拳。
(4) 老師每天步行上班。
(5) 店員的鄰居不是公務員。
(6) 公務員和工人互不相識。
(7) 公務員比店員和工人年齡都大。

邏輯謎題，例題9-13

- 謎題解答：由 (1) 及 (2) 得知老張和老劉都不是老師。可以從老張開始考慮：老張可能是公務員，或者是工人，或者是店員。如果老張是公務員，則由 (6) 得知老劉不是工人，在這種情況下，推論出老劉是店員，但這形成店員和公務員是鄰居，與 (5) 有矛盾。所以老張不是公務員。
如果老張是工人，根據 (6)，老劉不是公務員，所以老劉是店員，在這種情況下，根據 (2)(7)，老李不可能比店員和工人年齡都大，所以老李不是公務員，所以老李是老師，老趙是公務員。可是根據 (3)(6)，會推論出老張 (工人) 教老趙 (公務員) 打太極，可是老張和老趙不相識的矛盾。所以老張是工人這件事是錯的。所以最後，老張只能是店員，以此推論，根據 (6)，老劉不是公務員，所以老劉是工人，根據 (2)(7)，老李不是公務員，所以老李是老師，因此老趙是公務員。

邏輯謎題，例題9-22

- 小張、小王、小李三人談年齡，每人說了三句話，都是兩句是眞話，一句是假話。小張:「我今年才 22 歲。我比小王還小兩歲。我比小李大一歲。」小王:「我不是年齡最小的。我和小李相差三歲。小李 25 歲了。」小李:「我比小張小。小張 23 歲了。小王比小張大三歲。」請你想一想：他們三人各多少歲？

邏輯謎題, 例題9-22

- 謎題解答: 可以從小張和小李的話開始思考。小張說到:「我今年才 22 歲。我比小王還小兩歲。」和小李說到:「小張 23 歲了。小王比小張大三歲。」是 2 句不相容的話, 也就是其中一句爲假 (注意: 有可能同時爲假)。題目提示說每個人說的 3 句話, 只有其中一句爲假。從這我們可以看到如果小張這邊說的是假的, 那小張其中 2 句「我今年才 22 歲。我比小王還小兩歲。」有一句是假的, 因爲只有 1 句假話, 所以如果「我 (小張)22 歲」是假的,「我 (小張) 比小王還小兩歲」爲眞, 則小李這邊說的「小王比小張大三歲」爲假, 而「小張 23 歲」爲眞。
- 同樣的思考方式, 如果小李這邊說的是假的, 那小李其中 2 句「小張 23 歲了。小王比小張大三歲。」只有一句是假的。如果「小張 23 歲了」是假的, 則「小王比小張大三歲。」爲眞, 則小張這邊說的「我 (小張) 比小王還小兩歲」爲假, 而「我 (小張)22 歲」爲眞。
- 整個分析, 我們可以看出,「小張 22 歲」,「小張 23 歲」這 2 句一定是其中一句話爲眞, 其中一句話爲假。

邏輯謎題, 例題9-22

- 用矛盾證法證明「小張22歲」爲假: 如果小張22歲, 則從小李的話「小王比小張大三歲」, 得知小王25歲。從小張的話「我 (小張) 比小李大一歲」, 得知小李21歲。但是在這種情況下, 從小王的話「我不是年齡最小的。我和小李相差三歲。小李25歲了。」,「小李25歲了」爲假, 其他2句爲眞, 因此「我 (小王) 和小李相差三歲」爲眞, 但是這和小王25歲, 和小李21歲有矛盾。因此小張22歲不成立。所以小張是23歲。從小張的話得知, 他比小王小2歲, 所以小王是25歲。比小李大一歲, 所以小李是24歲。