1 Vektorer og trigonometri

hej

1.1 Bevis

Proof. Betragt figur 1.1, hvor en vinkel v er udspændt af vektoren $\vec{x}$ og $\vec{y}$.

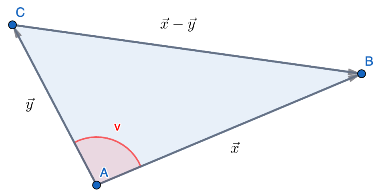

Figure 1: Vinkel udspændt af 2 vektorer.

Vha. af disse vektorer kan vi danne en trekant, hvori vi kan anvende cosinusrelationerne til at lave et generelt udtryk for vinklen udspændt af 2 vektorer. Her kan vi lave et udtryk for den lange side ved at anvende indskudsreglen:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{CB} = -\vec{BC} = \vec{AB} - \vec{AC}$$

Så den trejde side noteres $\vec{x} - \vec{y}$, og vi anvender cosinusrelationen, der siger, at i en trekant, så:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(v)$$

Hvilket i vores tilfælde betyder:

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}| \cdot \cos(v)$$

Nu anvendes det, at $|\vec{x}|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$, det betyder for vores vektor:

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2 \cdot \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Det indsættes i ovenstående:

$$\cancel{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2} - 2 \cdot \vec{x} \cdot \vec{y} = \cancel{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2} - 2|\vec{x}||\vec{y}| \cdot \cos(v)$$

Hvor $\cos(v)$ isoleres:

$$\cos(v) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

□

2 Vektorer og linjer i planen

2.1 Bevis