Indhold

1 Vektorer og trigonometri

Forklar om vektorer i planen og de grundlæggende trigonometriske funktioner.

En vektor er en pil, der har en retning og en vektor.

Når vi regner med vektorer, så anvender vi kartesisk notation.

Nemt at lave vektorer mellem punkter, da kartesisk notation præcis er Δx og Δy.

Modsat polær, så skal vi udregne længden ved $|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Skalarproduktet, der er ikke gange eller dividere, er defineret som $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$.

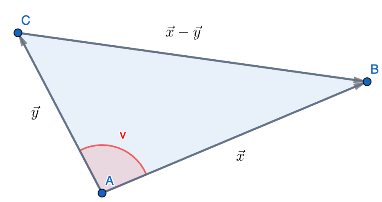
Skalarproduktet af en vektor med sig selv er derfor længden i anden: $\vec{x} \cdot \vec{x} = x_1^2 + x_2^2 = |\vec{x}|^2$

Sinus og cosinus ved enhedscirklen

Cosinusrelationerne

1.1 Bevis

Betragt figur 1.1, hvor en vinkel v er udspændt af vektoren $\vec{x}$ og $\vec{y}$.



Figur 1: Vinkel udspændt af 2 vektorer.

Vha. af disse vektorer kan vi danne en trekant, hvori vi kan anvende cosinusrelationerne til at lave et generelt udtryk for vinklen udspændt af 2 vektorer. Her kan vi lave et udtryk for den lange side ved at anvende indskudsreglen:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{CB} = -\vec{BC} = \vec{AB} - \vec{AC}$$

Så den trejde side noteres $\vec{x} - \vec{y}$, og vi anvender cosinusrelationen, der siger, at i en trekant, så:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(v)$$

Hvilket i vores tilfælde betyder:

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}| \cdot \cos(v)$$

Nu anvendes det, at $|\vec{x}|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$, det betyder for vores vektor:

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2 \cdot \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Det indsættes i ovenstående:

$$\cancel{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2} - 2 \cdot \vec{x} \cdot \vec{y} = \cancel{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2} - 2|\vec{x}||\vec{y}| \cdot \cos(v)$$

Hvor $\cos(v)$ isoleres:

$$\cos(v) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

$\square$

2 Vektorer og linjer i planen

Forklar om vektorer i planen.

En vektor er en pil, der har en retning og en vektor.

Når vi regner med vektorer, så anvender vi kartesisk notation.

Nemt at lave vektorer mellem punkter, da kartesisk notation præcis er Δx og Δy.

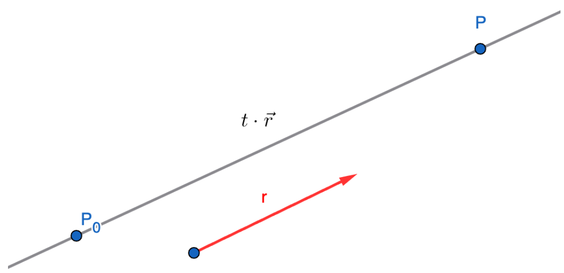
Man kan skalere en vektor ved at gange begge koordinater af en vektor.

Skalarproduktet, der er ikke gange eller dividere, er defineret som $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$.

Når 2 vektorer er ortogonale (normalvektor), hvilket vil sige, at de danner en 90 graders vinkel, så er skalarproduktet 0.

2.1 Bevis af linjens parameterfremstilling

Betragt følgende skitse:



Tager vi afsæt i punktet $P_0(x_0, y_0)$, hvis position kan beskrives med vektoren $\vec{OP}$. Tager vi et skridt langs en vektor, der er parallel med linjen, så vil vores nye position også være på linjen. Derfor må vi ved at gange retningsvektoren med et vilkårligt tal kunne ramme alle punkter på linjen. Så kan vi beskrive vektoren til punktet $P(x, y)$ som vektoren til P_0 plus retningsvektoren skaleret:

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + t \cdot \vec{r}$$

Vi opsplitter $\vec{OP}$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ og $\vec{r}$ i $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$:

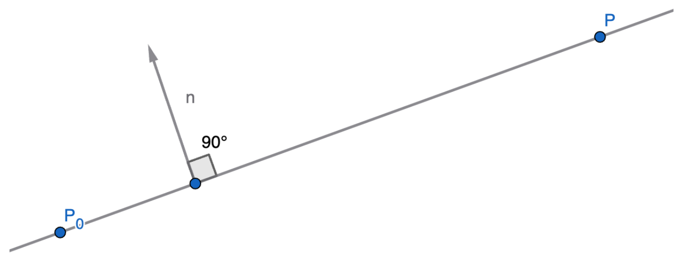
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$\square$

2.2 Bevis af linjens ligning

Betragt nedenstående figur:

Vi kender $P_0(x_0, y_0)$ og normalvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $P(x, y)$ er et vilkårligt punkt langs linjen, som vi vil beskrive. Vi kan lave en ortogonal vektor til $\vec{n}$ ved at lave vektoren $\vec{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$. Tricket er så, at vi har 2 ortogonale vektorer, hvilket betyder, at deres skalarprodukt er 0, derved kan vi opstille følgende udtryk, hvor x og y alle er punkter på linjen:



$$\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$ax + by + c = 0$$

Det er vist, at en linje kan beskrives ud fra et punkt og en normalvektor til linjen.

$\square$

3 Vektorer og vektorfunktioner

Forklar om vektorer og vektorfunktioner, herunder hvordan de differentieres.

En vektor er en pil, der har en retning og en vektor.

Når vi regner med vektorer, så anvender vi kartesisk notation.

Nemt at lave vektorer mellem punkter, da kartesisk notation præcis er Δx og Δy.

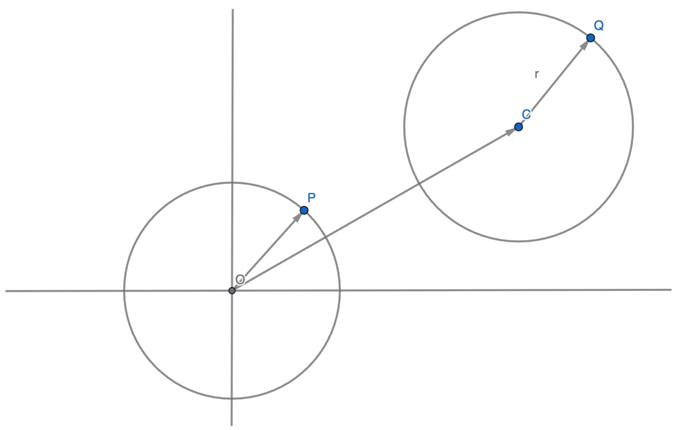
Skalering af vektor ved at gange med konstant på begge koordinater.

Enhedscirklen sinus og cosinus, hvordan defineres de

Vektorfunktioner, giver en vektor til et punkt på grafen, ikke injektive nødvendigvis

Den afledte sker ved differentiering af hver koordinatfunktion, som giver hastighedsvektoren, dvs. hvilken retning funktionen bevæger sig i, når vi bevæger os langs t

3.1 Bevis af cirklens parameterfremstilling



Betragt ovenstående figur, først tager vi tilfældet, hvor cirklen har centrum i origo. Her vil alle punkter på cirkelperifirien kunne beskrives som en skalering af enhedscirklen, derfor:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

For cirklen, der ikke har centrum i origo, er situationen en smule anderledes, men vektoren $\vec{CQ} = \vec{OP}$, da cirklerne har samme radius r. Vi anvender indskudsreglen til at finde:

$$\vec{OQ} = \vec{OC} + \vec{CQ}$$

Disse værdier kender vi, så parameterfremstillingen bliver:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + r \cdot \cos(t) \\ b + r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

$\square$

4 Funktioner og differentialregning

Forklar hvad det betyder, at en funktion er differentiabel.

En funktion er defineret i et interval, i et mindre udsnit eller et mindre interval definerer vi hældningen som ændringen på y-aksen over ændringen på x-aksen. For store Δx er det ret grove approksimationer, men når $\Delta x \to 0$, så er hældningen et godt udtryk for, hvor meget funktionen vokser lige nu.

Det kræver dog, at funktionen er defineret i intervallet og er kontinuer, altså ikke knækker midt i det hele.

Hvis en funktion er det, så kan vi opskrive dens differenskvotient:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Hvis vi lader $h \to 0$, så får vi differentialkvotienten, som vi noterer:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

Den naturlige eksponential funktion er defineret som Eulers tal e opløftet i x:

$$f(x) = e^x$$

Den har samme egenskab som alle andre eksponentielle funktioner, at den går gennem $(0, 1)$. Det som gør den speciel er, at dens hældning også er 1 i $(0, 1)$.

4.1 Bevis af differentialkvotienten for den naturlige eksponentialfunktion

Vi anvender, at $f'(0) = 1$, da vi kan opskrive differenskvotienten i 0 som:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Vi kan også opskrive differenskvotienten for et vilkårligt punkt:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

Når vi lader $h \to 0$, så:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$$

Derved er det bevist, at $\frac{\partial}{\partial x} e^x = e^x$. $\square$

5 Funktioner og differentialregning

Forklar hvad det betyder, at en funktion er differentiabel.

En funktion er defineret i et interval, i et mindre udsnit eller et mindre interval definerer vi hældningen som ændringen på y-aksen over ændringen på x-aksen. For store Δx er det ret grove approksimationer, men når $\Delta x \to 0$, så er hældningen et godt udtryk for, hvor meget funktionen vokser lige nu.

Det kræver dog, at funktionen er defineret i intervallet og er kontinuer, altså ikke knækker midt i det hele.

Hvis en funktion er det, så kan vi opskrive dens differenskvotient:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Hvis vi lader $h \to 0$, så får vi differentialkvotienten, som vi noterer:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

5.1 Bevis af produktreglen

Vi har 2 funktioner f og g, og vi vil finde den afledte af deres produktfunktion, dvs.:

$$(f \cdot g)'(x)$$

For hver funktion kan vi opstille en differenskvotient, som bliver til differentialkvotienter, når vi lader $h \to 0$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} f'(x)$$

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} g'(x)$$

Så opskriver vi differenskvotienten for funktionen $(f \cdot g)(x)$:

$$\frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

Så lægger vi $f(x) \cdot g(x+h)$ til og trækker det fra:

$$\frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

Det ses, at $g(x+h)$ og $f(x)$ kan sættes udenfor parentes:

$$\frac{g(x+h) \cdot (f(x+h) - f(x)) + f(x) \cdot (g(x+h) - \cdot g(x))}{h}$$

Vi opsplitter brøken i 2, og sætter $g(x+h)$ og $f(x)$ udenfor brøkerne:

$$g(x+h) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Så lader vi $h \to 0$:

$$g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Så:

$$(f \cdot g)'(x) = g(x) \cdot f'(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

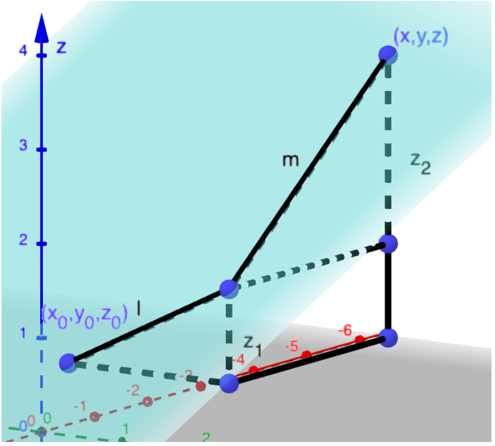
$\square$

6 Funktioner i to variable og differentialregning

Forklar begrebet funktion i en og to variable, herunder partielt afledede.

6.1 Bevis af tangentplanens ligning

Betragt følgende skitse:



På skitsen er et plan, der følger linjerne l og m. Noterer vi hældningen af l som p og hældningen af m som q, så kan vi opstille følgende udtryk for ændringen på z-aksen:

$$\Delta z_1 = p \cdot (x - x_0)$$

$$\Delta z_2 = q \cdot (y - y_0)$$

Derfor må den nye funktionsværdi z i punktet (x, y, z) være:

$$z = z_0 + \Delta z_1 + \Delta z_2 = p \cdot (x - x_0) + q \cdot (y - y_0) + z_0$$

Det vil sige, at alle (x, y, z), der gør nedenstående ligning sand, er punkter i planet tilhørende linje l og m med afsæt i punkt (x_0, y_0, z_0):

$$z = p \cdot (x - x_0) + q \cdot (y - y_0) + z_0$$

Det ovenstående er dog blot for det generelle plan. For en tangent plan, som viser hældningen af en funktion af 2 variable, kan hældningen langs x-aksen beskrives som $f'_x(x_0, y_0)$ og langs y-aksen $f'_y(x_0, y_0)$. Sidst kan z_0 beskrives som $f(x_0, y_0)$, derfor:

$$z = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

Dette er ligningen for tangentplanet for en funktion af 2 variable.

□

7 Integralregning og stamfunktioner

Forklar begreberne stamfunktion og ubestemt integral.

7.1 Bevis af at alle stamfunktioner til $f(x)$ er på form $F(x)+k$

Først vises det, at $F(x)+k$ er en stamfunktion til $f(x)$ da:

$$(F(x)+k)' = F'(x)+k' = f(x)$$

Så vil vi vise, at en anden funktion $G(x) = F(x)+k$ også er stamfunktion, da differensfunktionen mærket er 0:

$$(G(x)-F(x))' = F'(x)+k'-F'(x) = f(x)-f(x) = 0$$

Derfor:

$$G(x)-F(x) = k \Leftrightarrow G(x) = F(x)+k$$

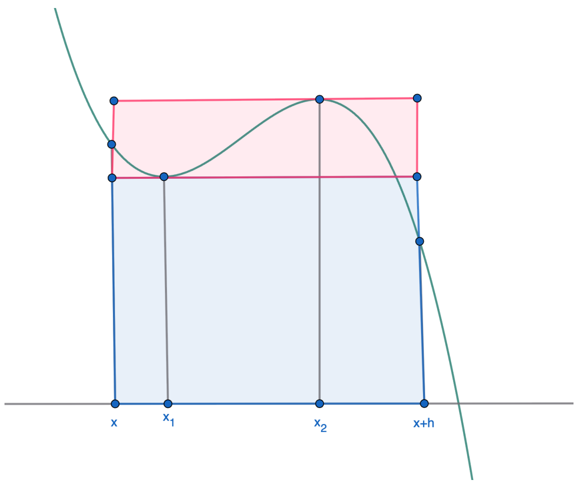
□

8 Integralregning og arealer

Forklar begreberne stamfunktion og bestemt integral.

8.1 Bevis af at arealfunktionen er stamfunktionen

Betragt følgende skitse:



Vi betragter et udsnit af en funktion, hvor vi ønsker at finde arealet mellem funktionen og x-aksen. Vi antager, at en funktion $A(x)$ giver arealet under grafen indtil x-værdien, og at arealet under grafen på udsnittet ville være givet ved:

$$A_{graf} = A(x+h) - A(x)$$

I udsnittet har vi markeret et interval x til $x+h$, indenfor dette interval er der et lokalt minimum og maksimum for funktionen. Arealet under grafen skal være større end eller lig arealet af den blå kasse, som har længde h og højde $f(x_1)$. Og arealet skal også være mindre eller lig arealet af den blå kasse + den røde kasse, hvilket er den kasse, som har længde h og højde $f(x_2)$. Derfor kan vi opstille følgende ulighed, som vi kan regne med:

$$f(x_1) \cdot h \leq A(x+h) - A(x) \leq f(x_2) \cdot h$$

Først dividerer vi med h på alle sider:

$$f(x_1) \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq f(x_2)$$

Og så lader vi $h \to 0$ og deraf:

$$\begin{aligned} x_1 &\to x \\ x_2 &\to x \\ f(x_1) &\to f(x) \\ f(x_2) &\to f(x) \\ \frac{A(x+h) - A(x)}{h} &\to A'(x) \end{aligned}$$

Dette vil sige, at:

$$f(x) \leq A'(x) \leq f(x)$$

Så:

$$f(x) = A'(x)$$

Altså er arealfunktionen af en graf en stamfunktion til funktionen.

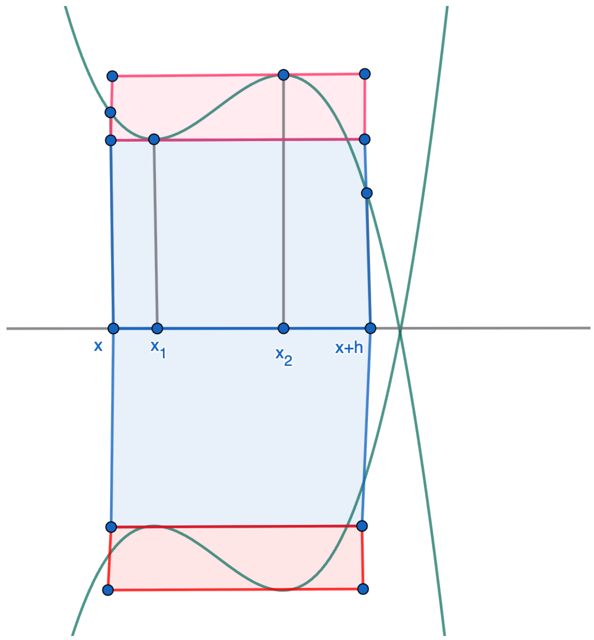
$\square$

9 Integralregning og omdrejningslegeme

Forklar begreberne stamfunktion og bestemt integral.

9.1 Bevis af volumen af omdrejningslegeme

Betragt nedenstående skitse.



Vi kigger igen på et interval x til $x+h$, hvor vi er interesserede i volumnet af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når grafen roteres omkring x-aksen. Vi går igen ud fra, at en funktion $V(x)$ giver volumen af omdrejningslegemet indtil x, så volumnet i intervallet er $V = V(x+h) - V(x)$. Vi antager, at $V(x)$ er differentiabel i intervallet.

Derudover kan vi approksimere volumnet. Som på skitsen så må der i intervallet være et lokalt minimum og maksimum. Volumnet må være større eller lig med volumnet af den cylinder, der har radius $f(x_1)$ og længde h, hvis volumen er udtrykt ved:

$$V_{min} = h \cdot \pi f(x_1)^2$$

Omvendt kan volumnet maksimalt være lig med volumnet af cylinderen, der har højde $f(x_2)$ og længde h, hvis areal er:

$$V_{max} = h \cdot \pi f(x_2)^2$$

Nu kan vi opstille følgende ulighed:

$$h \cdot \pi f(x_1)^2 \leq V(x+h) - V(x) \leq h \cdot \pi f(x_2)^2$$

Vi deler med h:

$$\pi f(x_1)^2 \leq \frac{V(x+h) - V(x)}{h} \leq \pi f(x_2)^2$$

Så lader vi $h \to 0$, deraf:

$$
\begin{aligned}
x_1 &\to x \\
x_2 &\to x \\
f(x_1) &\to f(x) \\
f(x_2) &\to f(x) \\
\frac{V(x+h)-V(x)}{h} &\to V'(x)
\end{aligned}
$$

Så vi får følgende udtryk:

$$\pi f(x)^2 \leq V'(x) \leq \pi f(x)^2$$

Som betyder, at:

$$V'(x) = \pi f(x)^2$$

Vi har vist, at volumen funktionen for det omdrejningslegeme, der fremkommer, kan findes ved at tage integralet af ovenstående udtryk.

□

10 Differentialligninger

Forklar betydning af differentialligning, samt hvad det betyder at en funktion er en løsning til en differentialligning.

10.1 Bevis af f er løsning til forskudt eksponential vækst

Vi skal bevise, at

$$f(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$$

er en løsning til differentialligningen:

$$y' = b - a \cdot y$$

Først differentierer vi f:

$$f'(x) = -a \cdot c \cdot e^{-a \cdot x}$$

Så indsætter vi $f(x)$ i differentialligningen:

$$y' = b - a \cdot \left(\frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x} \right) = b - b + a \cdot c \cdot e^{-a \cdot x} = a \cdot c \cdot e^{-a \cdot x}$$

Så sammenligner vi den differentierede funktion og funktionen indsat i differentialligningen, de ser søreme ens ud. Så f er løsning til y'. □

10.2 Løsning til forskudt eksponential vækst er f

Vi vil bevise, at løsningen til

$$y' = b - a \cdot y$$

er på formen:

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$$

Dette gøres ved at indføre en hjælpe funktion $z(x)$ defineret som:

$$z(x) = b - a \cdot f(x)$$

Som vi differentierer:

$$z'(x) = -a \cdot f'(x)$$

Ifølge differentialligningen indsætter vi så $f'(x) = b - a \cdot f(x)$:

$$z'(x) = -a \cdot (b - a \cdot f(x))$$

Hvilket er det samme som $z(x)$, derfor:

$$z'(x) = -a \cdot z(x)$$

Dette er en differentialligning af typen eksponentiel vækst, hvorved den fuldstændige løsning er givet ved:

$$z(x) = c_1 \cdot e^{-a \cdot x}$$

Det betyder, at:

$$\begin{aligned}
c_1 \cdot e^{-a \cdot x} &= b - a \cdot f(x) \\
&\Updownarrow \\
a \cdot f(x) &= b - c_1 \cdot e^{-a \cdot x} \\
&\Updownarrow \\
f(x) &= \frac{b}{a} - \frac{c_1}{a} \cdot e^{-a \cdot x} \\
&\Downarrow \\
f(x) &= \frac{b}{a} + c_2 \cdot e^{-a \cdot x}
\end{aligned}$$

$\square$

11 Differentialligninger

Forklar betydning af differentialligning og hvad der kendetegner logistisk vækst.

11.1 Bevis af løsning for logistisk vækst

Vi vil vise den fuldstændige løsning for

$$y' = y \cdot (b - a \cdot y)$$

Hvor løsningen $y \neq 0$.

Først opskriver vi f som differentialligningen:

$$f'(x) = f(x) \cdot (b - a \cdot f(x))$$

Så introducerer vi en hjælpe funktion:

$$z(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Som vi differentierer vha. af kædereglen:

$$z'(x) = -\frac{1}{f(x)^2} \cdot f'(x)$$

Her kan vi indsætte differentialligningen:

$$z'(x) = -\frac{1}{f(x)^2} \cdot f(x) \cdot (b - a \cdot f(x))$$

$f(x)$ går ud og vi flytter faktoren op i tælleren:

$$z'(x) = -\frac{b - a \cdot f(x)}{f(x)} = \frac{a \cdot f(x) - b}{f(x)} = a - \frac{b}{f(x)} = a - b \cdot \frac{1}{f(x)}$$

Faktoren på b er den samme som $z(x)$, derfor:

$$z(x) = a - b \cdot z(x)$$

Hvilket er en differentialligning for forskudt eksponentiel vækst, hvis form og løsning er:

$$y' = b - a \cdot y$$
$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-a \cdot x}$$

Dette anvendes på differentialligningen for z og husker, at a og b er omvendte:

$$z(x) = \frac{a}{b} + c_1 \cdot e^{-b \cdot x}$$

Så kan vi opstille følgende ligning:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{a}{b} + c_1 \cdot e^{-b \cdot x}$$

Hvor vi isolerer $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{\frac{a}{b} + c_1 \cdot e^{-b\cdot x}}$$

Denne brøk forlænger vi med $\frac{b}{a}$:

$$f(x) = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{b}{a} \cdot (\frac{a}{b} + c_1 \cdot e^{-b\cdot x})} = \frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a} \cdot c_1 \cdot e^{-b\cdot x}} = \frac{\frac{b}{a}}{1 + c_2 \cdot e^{-b\cdot x}}$$

Derved har vi vist løsningen er på ovenstående form for en differentialligning på nævnte form.

$\square$

11.2 Bevis af løsning af logistisk vækst med bærefaktor

Vi vil vise den fuldstændige løsning for

$$y' = a \cdot y \cdot (M - y)$$

Vi ganger a ind i parentesen:

$$y' = y \cdot (a \cdot M - a \cdot y)$$

Nu har vi faktisk bare en normal logistisk vækst differentialligning, hvor $b = a \cdot M$, hvis fuldstændige løsning er:

$$y = \frac{\frac{a\cdot M}{a}}{1 + c \cdot e^{-a\cdot M\cdot x}} = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a\cdot M\cdot x}}$$

Herved er dette vist.

$\square$

12 Differentialligninger

Forklar betydning af differentialligning, samt hvad det betyder at en funktion er en løsning til en differentialligning.

12.1 Bevis af panserformlen

Vi vil vise den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' + a(x) \cdot y = b(x) \Leftrightarrow y' = -a(x) \cdot y + b(x)$$

Vi introducerer en hjælpe funktion z:

$$z(x) = f(x) \cdot e^{A(x)}$$

Som vi differentierer, vi udnytter at pga. kædereglen, så er nedenstående sandt:

$$\left(e^{A(x)}\right)' = a(x) \cdot e^{A(x)}$$

Og vi husker at anvende produktreglen:

$$z'(x) = f(x) \cdot a(x) \cdot e^{A(x)} + f'(x) \cdot e^{A(x)}$$

Vi indsætter differentialligningen og sætter $e^{A(x)}$ udenfor parentes:

$$z'(x) = e^{A(x)} \cdot (f(x) \cdot a(x) + f'(x)) = e^{A(x)} \cdot (f(x) \cdot a(x) + b(x) - a(x) \cdot f(x)) = b(x) \cdot e^{A(x)}$$

Da vores afledte kun er bestemt med udtryk af x, så kan vi blot integrere den for at finde stamfunktionen:

$$z(x) = \int b(x) \cdot e^{A(x)} \, dx + c$$

Nu kan vi isolere $f(x)$ fra vores første $z(x)$ udtryk:

$$f(x) \cdot e^{A(x)} = \int b(x) \cdot e^{A(x)} \, dx + c$$

Vi deler med $e^{A(x)}$, hvilket svarer til at gange med $e^{-A(x)}$:

$$f(x) = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)} \, dx + c \cdot e^{-A(x)}$$

Så er panserformlen bevist.

$\square$

13 Sandsynlighedsregning og normalfordelingen

Forklar om tætheds- og fordelingsfunktion for en normalfordelt stokastisk variabel.

13.1 Bevis af middelværdien for en normalfordeling

Vi anvender 2 tricks. Det første er, at for en ulige funktion dvs. $f(-x) = -f(x)$, så gælder:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$$

Og at integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$$

For en stokastisk variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$ med tæthedsfunktion $f(x)$, så kan vi lave en funktion for middelværdien. Denne kalder vi $E(x)$, og for alle x-værdier ganger vi med frekvensen (givet af tæthedsfunktionen), hvilket giver os middelværdien. Det gøres ved følgende integrale:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}\,dx$$

Vi substituerer med $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$ og finder et udtryk for x ved $x = t \cdot \sigma + \mu$. Og vi differentierer t med hensyn til x:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{\sigma} \Rightarrow \partial x = \sigma \cdot \partial t$$

Alt dette indsætter vi i integralet:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (t \cdot \sigma + \mu) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\sigma\,dt$$

σ går ud med hinanden, og så sætter vi $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ udenfor integralet, da det bare er en konstant.

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} (t \cdot \sigma + \mu) \cdot \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

Vi ganger ind i parentesen og opsplitter integralet i 2, fordi vi må tage dem hver for sig:

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot \sigma \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mu \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

Hvor vi kan sætte σ og μ udenfor integralerne:

$$E(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$

Det ses, at det første integrale er integralet af en ulige funktion, derfor giver det 0. Det andet integrale er umuligt at løse analytisk og det giver $\sqrt{2\pi}$, derfor:

$$E(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \cdot 0 + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = \mu$$

Middelværdien for en normalfordeling er givet ved μ parameteret i tæthedsfunktionen.

$\square$

14 Kombinatorik og binomialfordelingen

Forklar hvad der kendetegner et binomialeksperiment, og argumenter for formlen for binomialsandsynligheder.

14.1 Bevis for en binomialfordelt stokastisk variabels middelværdi

Vi vil vise, at for $X \sim B(n,p)$, så er $\mu = n \cdot p$. Vi kan udregne sandsynligheden for r successer ved:

$$P(X = r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

X kan kun antage hele antal successer, derfor må middelværdien være summen af hvert antal successer gange sandsynligheden for det antal successer:

$$\mu = \sum_{r=0}^{n} r \cdot P(X = r) = \sum_{r=0}^{n} r \cdot \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

Da vi ganger med r, så er iterationen af $r = 0$ ligegyldig, da den ikke bidrager til summen, derfor indekserer vi fra $r = 1$:

$$\mu = \sum_{r=1}^{n} r \cdot \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

Nu betragter vi $r \cdot \binom{n}{r}$ leddet, hvilket vi kan omskrive:

$$r \cdot \binom{n}{r} = r \cdot \frac{n!}{r!(n-r)!} = r \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 ... n}{1 \cdot 2 \cdot 3 ... r(n-r)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)!((n-1)-(r-1))!}$$

Vi indfører $r' = r - 1$ og $n' = n - 1$, så udtrykket bliver til:

$$r \cdot \binom{n}{r} = n \cdot \frac{n'!}{r'!(n'-r')!} = n \cdot \binom{n'}{r'}$$

Det kan vi nu indsætte i vores sum:

$$\mu = \sum_{r=1}^{n} n \cdot \binom{n'}{r'} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$$

Da n er en konstant, så kan vi sætte den udenfor og vi kan sætte et p udenfor, og i det sidste led må $n - r = n' - r'$, derfor:

$$\mu = n \cdot p \cdot \sum_{r=1}^{n} \binom{n'}{r'} \cdot p^{r'} \cdot (1-p)^{n'-r'}$$

Da hele udtrykket består af r' og n', så anvender vi disse i sumoperatøren i stedet:

$$\mu = n \cdot p \cdot \sum_{r'=0}^{n'} \binom{n'}{r'} \cdot p^{r'} \cdot (1-p)^{n'-r'}$$

Betragter vi en anden stokatisk variabel $Z \sim B(n', p)$, må sandsynligheden for r' antal successer være:

$$P(Z = r') = \binom{n'}{r'} \cdot p^{r'} \cdot (1-p)^{n'-r'}$$

Summen vi tager, som lægger alle sandsynligheder sammen må derfor give 1, og deraf:

$$\mu = n \cdot p \cdot 1 = n \cdot p$$

$\square$