1 Vektorer og trigonometri

1.1 Bevis

Betragt figur 1.1, hvor en vinkel v er udspændt af vektoren $\vec{x}$ og $\vec{y}$.

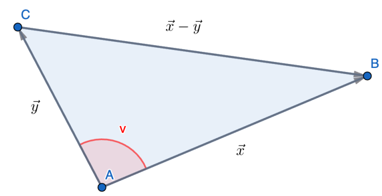


Figure 1: Vinkel udspændt af 2 vektorer.

Vha. af disse vektorer kan vi danne en trekant, hvori vi kan anvende cosinusrelationerne til at lave et generelt udtryk for vinklen udspændt af 2 vektorer. Her kan vi lave et udtryk for den lange side ved at anvende indskudsreglen:

$$\begin{gathered}\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \\ \Downarrow \\ \vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} \\ \Downarrow \\ \vec{CB} = -\vec{BC} = \vec{AB} - \vec{AC}\end{gathered}$$

Så den trejde side noteres $\vec{x} - \vec{y}$, og vi anvender cosinusrelationen, der siger, at i en trekant, så:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(v)$$

Hvilket i vores tilfælde betyder:

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}| \cdot \cos(v)$$

Nu anvendes det, at $|\vec{x}|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$, det betyder for vores vektor:

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2 \cdot \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Det indsættes i ovenstående:

$$\cancel{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2} - 2 \cdot \vec{x} \cdot \vec{y} = \cancel{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2} - 2|\vec{x}||\vec{y}| \cdot \cos(v)$$

Hvor $\cos(v)$ isoleres:

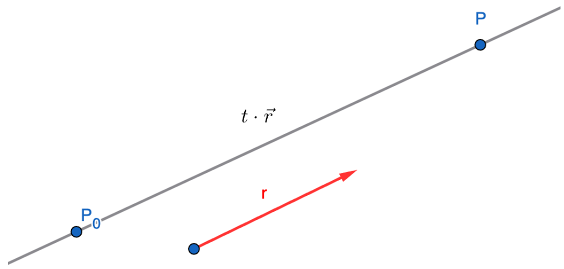
$$\cos(v) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

$\square$

2 Vektorer og linjer i planen

2.1 Bevis af linjens parameterfremstilling

Betragt følgende skitse:



Tager vi afsæt i punktet $P_0(x_0, y_0)$, hvis position kan beskrives med vektoren $\vec{OP}$. Tager vi et skridt langs en vektor, der er parallel med linjen, så vil vores nye position også være på linjen. Derfor må vi ved at gange retningsvektoren med et vilkårligt tal kunne ramme alle punkter på linjen. Så kan vi beskrive vektoren til punktet $P(x, y)$ som vektoren til P_0 plus retningsvektoren skaleret:

$$\vec{OP} = \vec{OP}_0 + t \cdot \vec{r}$$

Vi opsplitter $\vec{OP}$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ og $\vec{r}$ i $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$\square$

2.2 Bevis af linjens ligning

$\square$