1 Vektorer og trigonometri

1.1 Bevis

Betragt figur 1.1, hvor en vinkel v er udspændt af vektoren $\vec{x}$ og $\vec{y}$.

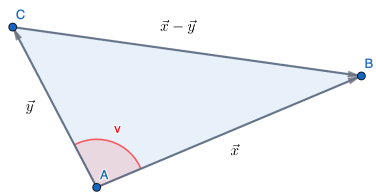


Figure 1: Vinkel udspændt af 2 vektorer.

Vha. af disse vektorer kan vi danne en trekant, hvori vi kan anvende cosinusrelationerne til at lave et generelt udtryk for vinklen udspændt af 2 vektorer. Her kan vi lave et udtryk for den lange side ved at anvende indskudsreglen:

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{CB} = -\vec{BC} = \vec{AB} - \vec{AC}$$

Så den trejde side noteres $\vec{x} - \vec{y}$, og vi anvender cosinusrelationen, der siger, at i en trekant, så:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(v)$$

Hvilket i vores tilfælde betyder:

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}| \cdot \cos(v)$$

Nu anvendes det, at $|\vec{x}|^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$, det betyder for vores vektor:

$$|\vec{x} - \vec{y}|^2 = (\vec{x} - \vec{y}) \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2 \cdot \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Det indsættes i ovenstående:

$$\cancel{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2} - 2 \cdot \vec{x} \cdot \vec{y} = \cancel{|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2} - 2|\vec{x}||\vec{y}| \cdot \cos(v)$$

Hvor $\cos(v)$ isoleres:

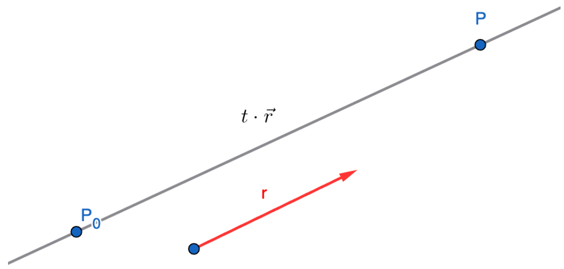
$$\cos(v) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

$\square$

2 Vektorer og linjer i planen

2.1 Bevis af linjens parameterfremstilling

Betragt følgende skitse:



Tager vi afsæt i punktet $P_0(x_0, y_0)$, hvis position kan beskrives med vektoren $\vec{OP}$. Tager vi et skridt langs en vektor, der er parallel med linjen, så vil vores nye position også være på linjen. Derfor må vi ved at gange retningsvektoren med et vilkårligt tal kunne ramme alle punkter på linjen. Så kan vi beskrive vektoren til punktet $P(x, y)$ som vektoren til P_0 plus retningsvektoren skaleret:

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + t \cdot \vec{r}$$

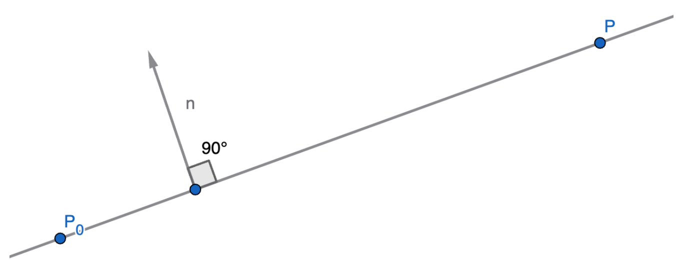
Vi opsplitter $\vec{OP}$ i $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ og $\vec{r}$ i $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$\square$

2.2 Bevis af linjens ligning

Betragt nedenstående figur:



Vi kender $P_0(x_0, y_0)$ og normalvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $P(x, y)$ er et vilkårligt punkt langs linjen, som vi vil beskrive. Vi kan lave en ortogonal vektor til $\vec{n}$ ved at lave vektoren $\vec{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$. Tricket er så, at vi har 2 ortogonale vektorer, hvilket betyder, at deres skalarprodukt er 0, derved kan vi opstille følgende udtryk, hvor x og y alle er punkter på linjen:

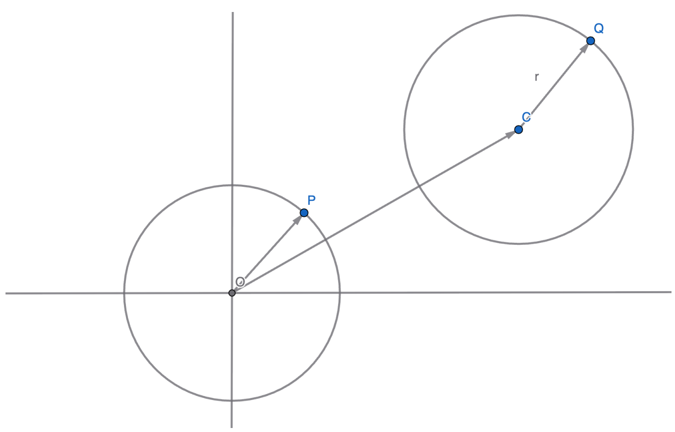
$$\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$
$$\Downarrow$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$ax + by + (-ax_0 - by_0) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$ax + by + c = 0$$

Det er vist, at en linje kan beskrives ud fra et punkt og en normalvektor til linjen.

□

3 Vektorer og vektorfunktioner

3.1 Bevis



Betragt ovenstående figur, først tager vi tilfældet, hvor cirklen har centrum i origo. Her vil alle punkter på cirkelperifirien kunne beskrives som en skalering af enhedscirklen, derfor:

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

For cirklen, der ikke har centrum i origo, er situationen en smule anderledes, men vektoren $\vec{CQ} = \vec{OP}$, da cirklerne har samme radius r. Vi anvender indskudsreglen til at finde:

$$\vec{OQ} = \vec{OC} + \vec{CQ}$$

Disse værdier kender vi, så parameterfremstillingen bliver:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + r \cdot \cos(t) \\ b + r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

□

4 Funktioner og differentialregning

Den naturlige eksponential funktion er defineret som Eulers tal e opløftet i x:

$$f(x) = e^x$$

Den har samme egenskab som alle andre eksponentielle funktioner, at den går gennem $(0, 1)$. Det som gør den speciel er, at dens hældning også er 1 i $(0, 1)$.

4.1 Bevis

Vi anvender, at $f'(0) = 1$, da vi kan opskrive differenskvotienten i 0 som:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Vi kan også opskrive differenskvotienten for et vilkårligt punkt:

$$\frac{\Delta y}{h} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$

Når vi lader $h \to 0$, så:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}$$

$\square$