

GEOFÍSICA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

VOLUMEN FINITO: FLUJO EN UNA FASE EN UN MEDIO POROSO

Luis M. de la Cruz Salas

Departamento de Recursos Naturales

Instituto de Geofísica

Universidad Nacional Autónoma de México



Semestre 2021-I

CONTENIDO

1 ANTECEDENTES

- Propiedades de las rocas
- Propiedades de los fluidos
- Mojabilidad y procesos de desplazamiento
- Propiedades roca/fluido en un yacimiento

2 MODELO CONCEPTUAL

3 MODELO MATEMÁTICO

4 MODELO NUMÉRICO

5 MODELO COMPUTACIONAL

6 CALIBRACIÓN

7 REFERENCIAS

CONTENIDO

1 ANTECEDENTES

- Propiedades de las rocas
- Propiedades de los fluidos
- Mojabilidad y procesos de desplazamiento
- Propiedades roca/fluido en un yacimiento

2 MODELO CONCEPTUAL

3 MODELO MATEMÁTICO

4 MODELO NUMÉRICO

5 MODELO COMPUTACIONAL

6 CALIBRACIÓN

7 REFERENCIAS

POROS : son "diminutos" pasajes interconectados que existen en una roca permeable. Su tamaño va de 1 a 200 μm (10^{-6}m) y se puede ver fácilmente en un escaner de microscopía electrónica. Pueden estar alineados por minerales diagenéticos (arcillas). Las conexiones entre los poros se conocen como *pore throat* y son éstas las que controlan la presión capilar de entrada en un proceso de drenaje.

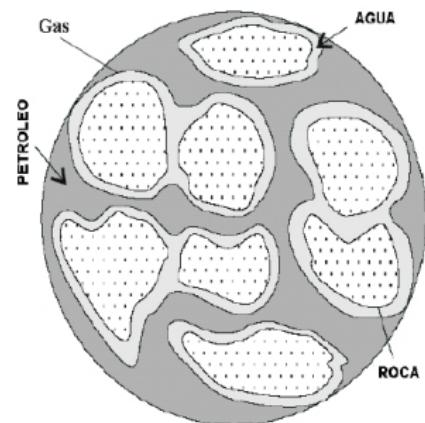
POROSIDAD (ϕ) : es la fracción de una roca que es espacio de poro. Hay dos tipos de porosidades: **Total** incluye poros interconectados y aislados; **Efectiva (ϕ_e)** incluye solo los poros interconectados.

$$\phi = \frac{\text{Volumen del espacio del poro}}{\text{Volumen representativo (VR)}}$$

$$\phi_e = \frac{\text{Volumen del espacio del poro disponible}}{\text{VR}}$$

$$\phi_e \leq \phi$$

$$\phi \approx 0.25 - 0.1.$$



- La porosidad depende de la presión debido a la compresibilidad de la roca, la cual usualmente se asume constante (entre 10^{-6} y 10^{-7} psi $^{-1}$) y se puede definir como:

$$c_R = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \implies \phi = \phi^0 e^{c_R(p - p^0)}$$

donde ϕ^0 es la porosidad a la presión de referencia p^0 (la presión atmosférica).

- Se puede hacer una expansión en series de Taylor de la función e para obtener un modelo lineal aproximado de la porosidad:

$$\phi = \phi^0 \left\{ 1 + c_R(p - p^0) + \frac{1}{2!} c_R^2 (p - p^0)^2 + \dots \right\} \approx \phi^0 (1 + c_R(p - p^0))$$

Este modelo se conoce como *ligeramente compresible*¹.

¹Ligeramente compresible significa que la compresibilidad de la roca c_R es pequeña, por lo tanto, cualquier potencia de c_R se puede despreciar, de tal manera que solo nos quedamos con el término lineal de la expansión.

- Las interacciones entre un fluido y la matriz sólida, en un medio poroso, se toman en cuenta mediante la conductividad hidráulica

$$\underline{\underline{K}} = k_{r\alpha} \underline{\underline{k}} \frac{\rho_\alpha g}{\mu_\alpha}$$

En esta relación $\underline{\underline{k}}$ es la **permeabilidad** intrínseca de la roca y $k_{r\alpha}$ es la permeabilidad relativa de la fase α ². μ_α es la viscosidad de la fase α .

PERMEABILIDAD ($\underline{\underline{k}}$) : es la capacidad de una roca de conducir fluidos a través de sus poros interconectados, generalmente se le llama permeabilidad absoluta. Se mide en milli-darcy (md)

Clasificación	Rango de $\underline{\underline{k}}$ [md]
Mala	1 – 15
Moderada	15 – 20
Buena	50 – 250
Muy buena	250 – 1000
Excelente	> 1000

²Cuando hablamos de fase, nos referimos a un fluido que puede ser agua, gas o aceite (petróleo).

- En un sistema anisotrópico donde el sistema de coordenadas coincide con las direcciones del flujo principales se tiene:

$$\underline{\underline{k}} = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix} \text{ (en 3D)}$$

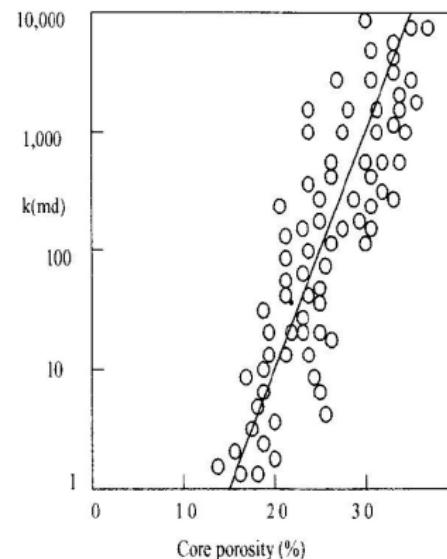
si el medio es isotrópico $k_{11} = k_{22} = k_{33}$.

- Es posible asumir:

- $k_H = k_{11} = k_{22}$
- $k_V = k_{33}$
- $k_H > k_V$

donde k_H representa la permeabilidad horizontal, mientras que k_V es la vertical.

- En muchos sistemas existen correlaciones aproximadas entre $\underline{\underline{k}}$ y ϕ .



FASE : se refiere a la región químicamente homogénea de un fluido que se separa de otras regiones por una interfase. Por ejemplo: aceite (**o**), agua (**w**), gas (**g**), roca (**r**) son cuatro fases diferentes.

COMPONENTE : es una especie química que puede estar presente en una fase. Por ejemplo: la fase aceite puede contener cientos de componentes, C_1 , C_2 , C_3 etc.

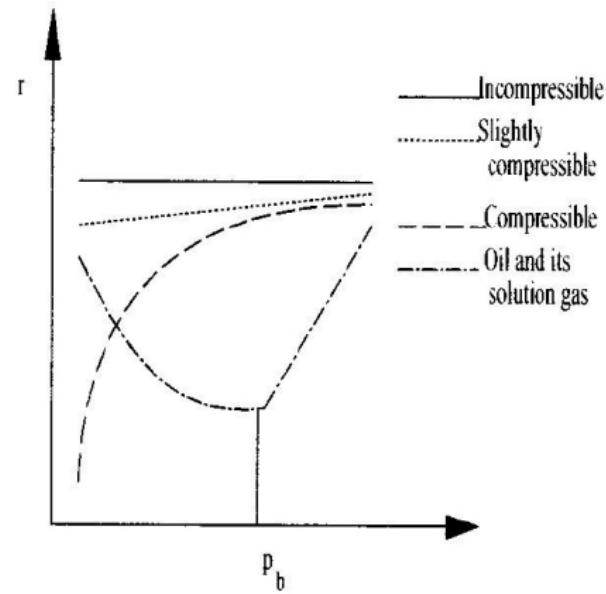
FLUIDO INCOMPRESIBLE : compresibilidad igual a cero, su densidad es independiente de la presión. En algunos casos, el agua y el aceite (sin gas) pueden considerarse incompresibles.

FLUIDO LIGERAMENTE COMPRESIBLE : su compresibilidad está en el rango de 10^{-5} a 10^{-6} psi^{-1} . Ejemplos: a condiciones de yacimiento el agua y el aceite (sin gas) se consideran ligeramente compresibles.

FLUIDO COMPRESIBLE : su compresibilidad está en el rango de 10^{-3} a 10^{-4} psi^{-1} , su densidad se incrementa cuando se aumenta la presión, pero se estabiliza a altas presiones. El gas es compresible.

En la Simulación Numérica de Yacimientos (SNY):

- El agua se considera incompresible o ligeramente compresible.
- El gas se considera compresible.
- Definiendo p_b como la presión de punto de burbuja del aceite y p_{yac} como la presión del yacimiento, tenemos que:
 - Si $p_b > p_{yac}$ el aceite y su solución de gas son tratados como ligeramente compresibles.
 - En el otro caso, $p_b < p_{yac}$, se consideran compresibles.



Relación densidad presión.

COMPRESIBILIDAD c_f : se puede definir en términos del cambio del volumen (V) o de la densidad (ρ) con respecto a la presión:

$$c_f = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_T = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_T \Rightarrow \rho = \rho^0 e^{c_f(p-p^0)}$$

donde ρ^0 es la densidad a la presión de referencia p^0 (la presión atmosférica). Similarmente que en el caso de la roca, se puede obtener un modelo lineal para el fluido como sigue:

$$\rho = \rho^0 \left\{ 1 + c_f(p - p^0) + \frac{1}{2!} c_f^2 (p - p^0)^2 + \dots \right\} \approx \rho^0 (1 + c_f(p - p^0))$$

Este es un modelo de fluido ligeramente compresible.

- Una forma diferente se puede obtener usando la ley de los gases:

$$\rho = \frac{pW}{ZRT} \Rightarrow c_g = \frac{1}{p} - \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial p} \Big|_T$$

donde W es el peso molecular, Z es el factor de compresibilidad del gas y R es la constante universal de los gases. Además se considera $c_g = c_f$.

FACTOR DE SOLUBILIDAD DEL GAS (R_{so}) : es el volumen de gas (medido a condiciones esntándar) disuelto a presión y temperatura del yacimiento en una unidad de volumen de almacenamiento de aceite:

$$R_{so}(p, T) = \frac{V_{Gs}}{V_{Os}} \quad (s \text{ indica condiciones estándar})$$

usualmente se usan SCF/STB (standard cubic feet / stock tank barrels).

$$V_{Os} = \frac{W_O}{\rho_{Os}} \text{ y } V_{Gs} = \frac{W_G}{\rho_{Gs}}$$

donde W_O y W_G son los pesos de las componentes de gas y aceite.

$$\implies R_{so} = \frac{W_G \rho_{Os}}{W_O \rho_{Gs}}$$

FACTORES DE FORMACIÓN DE VOLUMEN : describe la razón del volumen V de un fase medida a condiciones de yacimiento, entre el volumen V_s de la fase medida a condiciones estándar. Se usan unidades RB/STB (RB = reservoir barrels) para líquidos y RB/SCF para gases.

- Para una fase (w, o, g), en términos de la densidad se tiene:

$$B(p, T) = \frac{\rho_s}{\rho}$$

- Para aceite negro

$$B_o = \frac{(W_O + W_G)\rho_{Os}}{W_O\rho_o}$$

donde se tomó en cuenta que el aceite contiene aceite y gas, es decir

$$V_o = (W_O + W_G)/\rho_o$$

DENSIDAD DEL FLUIDO ρ : la densidad de una fase se puede obtener como sigue:

$$B(p, T) = \frac{\rho_s}{\rho} \Rightarrow \rho = \rho_s B$$

- Las fracciones de mas de aceite y solución de gas en la fase aceite son:

$$C_{O_o} = \frac{W_O}{W_O + W_G} = \frac{\rho_{Os}}{B_o \rho_o} \quad C_{G_o} = \frac{W_G}{W_O + W_G} = \frac{R_{so} \rho_{Gs}}{B_o \rho_o}$$

usando $C_{O_o} + C_{G_o} = 1$ obtenemos la densidad de la fase aceite:

$$\rho_o = \frac{R_{so} \rho_{Gs} + \rho_{Os}}{B_o}$$

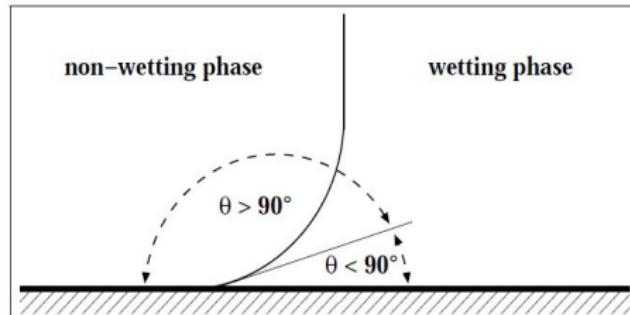
VISCOSIDAD (μ) : es una medida de la energía disipada cuando el fluido está en movimiento resistiendo una fuerza de corte aplicada. (fuerza / area * tiempo, Pa * s \equiv poise).

- Para un gas, las moléculas están “muy” distantes entre sí, por lo tanto tienen poca resistencia a fluir.
- Un fluido muy denso, tiene alta resistencia a fluir, pues sus moléculas están cerca entre sí.
- La viscosidad del agua a condiciones estándar es de 1 cp (centipoise)
- La viscosidad del bitumen puede ser de 4,500,000.00 cp.

Clasificación	Rango de Viscosidad (cp)
Aceite ligero	0.3 – 1
Aceite medio	1 – 6
Aceite moderado	6 – 50
Aceite muy viscoso	50 – 1000
Aceite pesado	> 1000

- La mojabilidad de la roca afecta los proceso de desplazamiento de las fases (fluidos).
- Las fases se dividen en mojadoras (wetting) y no mojadoras (non-wetting).

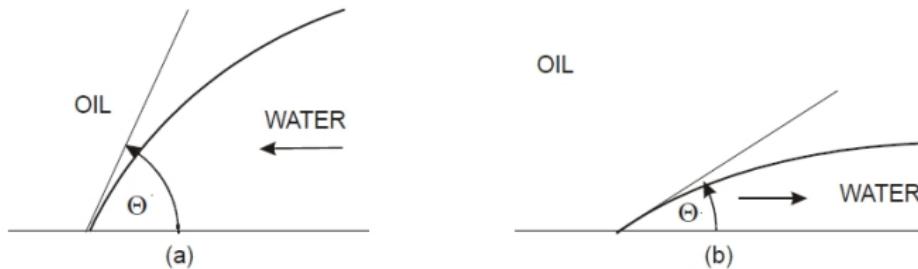
MOJABILIDAD : mide la preferencia de la superficie de una roca a ser mojada por una fase particular. La mojabilidad de un medio poroso determina la forma de las funciones de permeabilidad relativa y presión capilar.



- Agua \Rightarrow fase mojadora y aceite \Rightarrow fase no mojadadora.

IMBIBICIÓN : proceso de desplazamiento de un fluido que ocurre cuando la fase mojadora se incrementa. (*The process of absorbing a wetting phase into a porous rock. The wettability of the rock is determined by which phase imbibes more.*)

DRENAJE : proceso de desplazamiento de un fluido que ocurre cuando la fase no mojadora se incrementa. (*The process of forcing a nonwetting phase into a porous rock. Oil migrates into most reservoirs as the non-wetting phase, so initial charging of the reservoir is a drainage process.*)



(a) Imbibición, (b) Drenaje.

IMBIBICIÓN ESPONTÁNEA : este proceso ocurre cuando una fase mojadora invade un medio poroso en ausencia de fuerzas externas. La fase mojadora invade bajo la acción de fuerzas superficiales.

WATER WET FORMATION : el agua es la fase mojadora, ocupa los poros más pequeños y forma una capa alrededor de la superficie de la roca, aún en los poros que contienen aceite. Una inundación por agua es una imbibición; el agua espontáneamente imbibe dentro de un núcleo que contiene aceite móvil (a S_{or}) y lo desplaza.

OIL WET FORMATION : el aceite es la fase mojadora, ocupa los poros más pequeños y forma una capa alrededor de la superficie de la roca, aún en los poros que contienen agua. Una inundación por agua es un drenaje; el aceite espontáneamente imbibe dentro de un núcleo que contiene agua móvil (a S_{wr}) y la desplaza.

INTERMEDIATE WET FORMATION : la roca es mojable hasta cierto grado tanto por agua como por aceite. Ambas fases pueden imbibir dentro del sistema. (*It is possible for the same rock to imbibe both water and oil, with water imbibing at low in situ water saturation, displacing excess oil from the surface of the rock grains, and oil imbibing at low in-situ oil saturation, displacing excess water.*)

SATURACIÓN S : la saturación de una fase (agua, aceite, gas) es la fracción de el espacio de poro que ésta ocupa. En un sistema de tres fases se tiene:

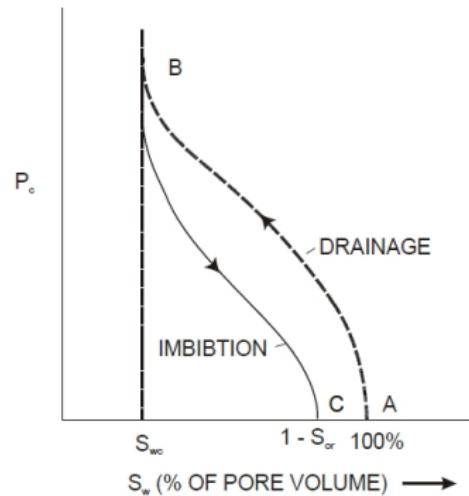
$$S_w + S_o + S_g = 1.$$

i.e. las tres fase juntas llenan el espacio del poro. Presión capilar, permeabilidad relativa, entre otras, dependen fuertemente de la saturación.

SATURACIÓN RESIDUAL $S_{\alpha r}$: la saturación residual de una fase es la cantidad de dicha fase (fracción) que queda atrapada o es irreducible. La fase no mojadora residual, es atrapada en los poros por fuerzas capilares. Típicamente $S_{or} \in [0.2, 0.35]$. La cantidad de fluido atrapado depende de la permeabilidad y mojabilidad de la roca.

PRESIÓN CAPILAR : En un flujo en dos fases, se tiene una discontinuidad en la presión a través de la interfase entre cualquiera dos fluidos inmiscibles (p.ej. agua y aceite). Esto es una consecuencia de la tensión interfacial que existe en dicha interfase. La discontinuidad entre la presión en la fase no mojadura (p_o) y aquella en la fase mojadura (p_w) se refiere como presión capilar $p_c = p_o - p_w$.

- p_c depende de la saturación de la fase mojadura y de la dirección de cambio de ésta (imbibición o drenaje).
- El fenómeno de dependencia de la curva sobre la historia de la saturación se conoce como *histéresis*.



- En general, p_c también depende de la tensión superficial σ , la porosidad ϕ , la permeabilidad k y el ángulo de contacto θ con la superficie de la roca de la fase mojadora, el cual a su vez depende de la temperatura y composición del fluido.
- La *J-function* (Poston 1970, Bear & Bachmat 1991) da una relación para esta dependencia:

$$J(S_w) = \frac{p_c}{\sigma \cos \theta} \sqrt{\frac{k}{\phi}}$$

- Curvas típicas de p_c se pueden obtener a partir de experimentos y usando la *J-function*.
- En un flujo en tres fases, se requieren dos presiones capilares:

$$p_{cow} = p_o - p_w, \quad p_{cgo} = p_g - p_o$$

una tercer presión capilar se puede obtener: $p_{cgw} = p_g - p_w = p_{cow} + p_{cgo}$. donde generalmente se asume que $p_{cow} = p_{cow}(S_w)$ y $p_{cgo} = p_{cgo}(S_g)$.

PERMEABILIDAD RELATIVA ($k_{r\alpha}$) : es una cantidad (fracción) mide la habilidad de una fase para fluir en una formación porosa y en presencia de otras fases. La presencia de más de una fase inhibe el flujo.

MOVILIDAD λ_α : La movilidad de una fase se define como la razón de la permeabilidad relativa entre la su viscosidad:

$$\lambda_w = \frac{k_{rw}}{\mu_w}, \quad \lambda_o = \frac{k_{ro}}{\mu_o}, \quad \lambda_g = \frac{k_{rg}}{\mu_g}$$

FLUJO FRACCIONAL f_α : es una cantidad (fracción) que determina la razón de flujo volumétrico fraccional de una fase bajo un gradiente de presiones dado, en presencia de otra fase:

$$f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda}, \quad f_o = \frac{\lambda_o}{\lambda}, \quad f_g = \frac{\lambda_g}{\lambda}$$

donde $\lambda = \lambda_w + \lambda_o + \lambda_g$ es la movilidad total.

CONTENIDO

1 ANTECEDENTES

- Propiedades de las rocas
- Propiedades de los fluidos
- Mojabilidad y procesos de desplazamiento
- Propiedades roca/fluido en un yacimiento

2 MODELO CONCEPTUAL

3 MODELO MATEMÁTICO

4 MODELO NUMÉRICO

5 MODELO COMPUTACIONAL

6 CALIBRACIÓN

7 REFERENCIAS

MODELO CONCEPTUAL



FLUJO EN UNA FASE EN UN MEDIO POROSO

Se estudiará el flujo en una fase en un medio poroso, con las siguientes características:

① Roca:

- A. La roca tiene solo una porosidad (simple porosidad) : $\phi(p)$.
- B. La roca está completamente saturada por el fluido.
- C. La roca es ligeramente compresible.
- D. La roca tiene solo una permeabilidad (simple permeabilidad), es homogénea e isotrópica y constante : $\underline{k} = \text{cte}$.

② Fluido:

- A. La densidad del fluido ρ se considera constante.
- B. La viscosidad del fluido μ se considera constante.
- C. No hay difusión, es decir $\tau = 0$.
- D. Se considera la Ley de Darcy.
- E. No se consideran los efectos de la fuerza de gravedad.

③ Otros:

- A. No hay fuentes ni sumideros.
- B. Se consideran dominios rectangulares ortogonales en 1D, 2D y 3D.

CONTENIDO

1 ANTECEDENTES

- Propiedades de las rocas
- Propiedades de los fluidos
- Mojabilidad y procesos de desplazamiento
- Propiedades roca/fluido en un yacimiento

2 MODELO CONCEPTUAL

3 MODELO MATEMÁTICO

4 MODELO NUMÉRICO

5 MODELO COMPUTACIONAL

6 CALIBRACIÓN

7 REFERENCIAS

MODELO MATEMÁTICO

FLUJO EN UNA FASE I

La masa del fluido contenido en el medio poroso $B(t)$ se define como

$$M = \int_{B(t)} \phi \rho d\vec{x}, \quad (1)$$

La propiedad intensiva es $\psi = \phi \rho$, por lo tanto, la ecuación de balance local (balance de masa), sin difusión ($\tau = 0$), es (véase [1]):

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u}\rho) = q \quad (2)$$

donde \vec{u} es la velocidad de Darcy definida por $\vec{u} = \phi \vec{v}$, con \vec{v} la velocidad *intersticial* de las partículas de fluido. q es la generación o destrucción de masa (fuente o sumidero).

FLUJO EN UNA FASE II

El término temporal se expande como sigue (véase [10, 11, 21]):

$$\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = \phi\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial\phi}{\partial t} = \phi\frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{d\phi}{dp}\frac{\partial p}{\partial t}. \quad (3)$$

Compresibilidad de la roca (ligeramente compresible):

$$c_R = \frac{1}{\phi} \frac{d\phi}{dp} \Big|_T \implies \phi \approx \phi^0 [1 + c_R(p - p^0)] \implies \frac{d\phi}{dp} \approx \phi^0 c_R.$$

Compresibilidad del fluido: $c_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial p} \Big|_T$.

Sustituyendo $\frac{d\phi}{dp}$ y $\frac{\partial\rho}{\partial p}$ en (3) obtenemos:

$$\implies \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} = \rho\phi c_f \frac{\partial p}{\partial t} + \rho\phi^0 c_R \frac{\partial p}{\partial t}$$

FLUJO EN UNA FASE III

Definiendo la compresibilidad total como $c_T = (c_f + \frac{\phi^0}{\phi} c_R)$, y usando la Ley de Darcy, es decir:

$$\vec{u} = -\frac{1}{\mu} \underline{\underline{\mathbf{k}}} (\nabla p - \rho \vec{g}) \quad (4)$$

tenemos que la ecuación de balance de masa (2) se transforma en:

$$\boxed{\rho \phi c_T \frac{\partial p}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{\rho}{\mu} \underline{\underline{\mathbf{k}}} (\nabla p - \rho \vec{g}) \right) = q} \quad (5)$$

Este es el modelo matemático con el que vamos a trabajar. Resolviendo esta ecuación obtendremos la presión del fluido p (variable dependiente) dentro del medio poroso.

FLUJO EN UNA FASE IV

Tomando en cuenta otras hipótesis del modelo: fluido incompresible, sin fuentes ni sumideros y

$$\underline{\underline{k}} = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

Se obtiene:

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} = \Gamma \nabla^2 p} \quad \text{donde } \Gamma = k/\phi \mu c_T.$$

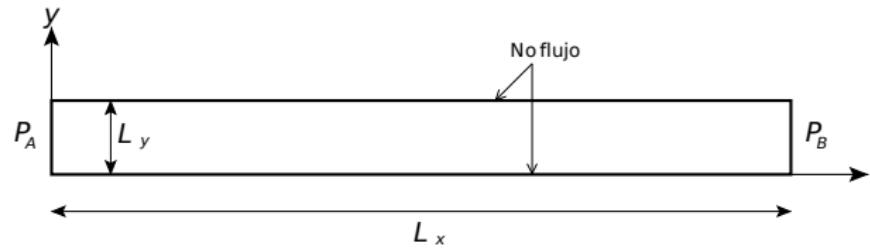
EJEMPLO DE CALIBRACIÓN

Condiciones de frontera

$$p(0, t) = p_A,$$

$$p(L_x, t) = p_B,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \text{ en } y = 0, L_y.$$



Solución analítica en 1D:

$$p(x, t) = p_A + (p_B - p_A) \left(\frac{x}{L_x} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2 k}{L_x^2 \phi \mu c T} t \right) \sin \left(\frac{n \pi x}{L_x} \right) \right).$$

En estado estacionario:

$$p(x) = p_A + (p_B - p_A) \frac{x}{L_x}.$$

CONTENIDO

1 ANTECEDENTES

- Propiedades de las rocas
- Propiedades de los fluidos
- Mojabilidad y procesos de desplazamiento
- Propiedades roca/fluido en un yacimiento

2 MODELO CONCEPTUAL

3 MODELO MATEMÁTICO

4 MODELO NUMÉRICO

5 MODELO COMPUTACIONAL

6 CALIBRACIÓN

7 REFERENCIAS

MODELO

NUMÉRICO

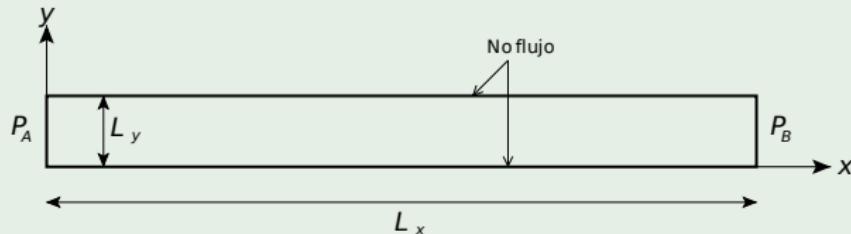
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Ecuación:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \Gamma \nabla^2 p$$

- Dirichlet: $p(0, t) = p_A$, $p(L_x, t) = p_B$,
- Neumann: $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, en $y = 0, L_y$
- C. Inicial: $p(\vec{x}, 0) = f(\vec{x})$.

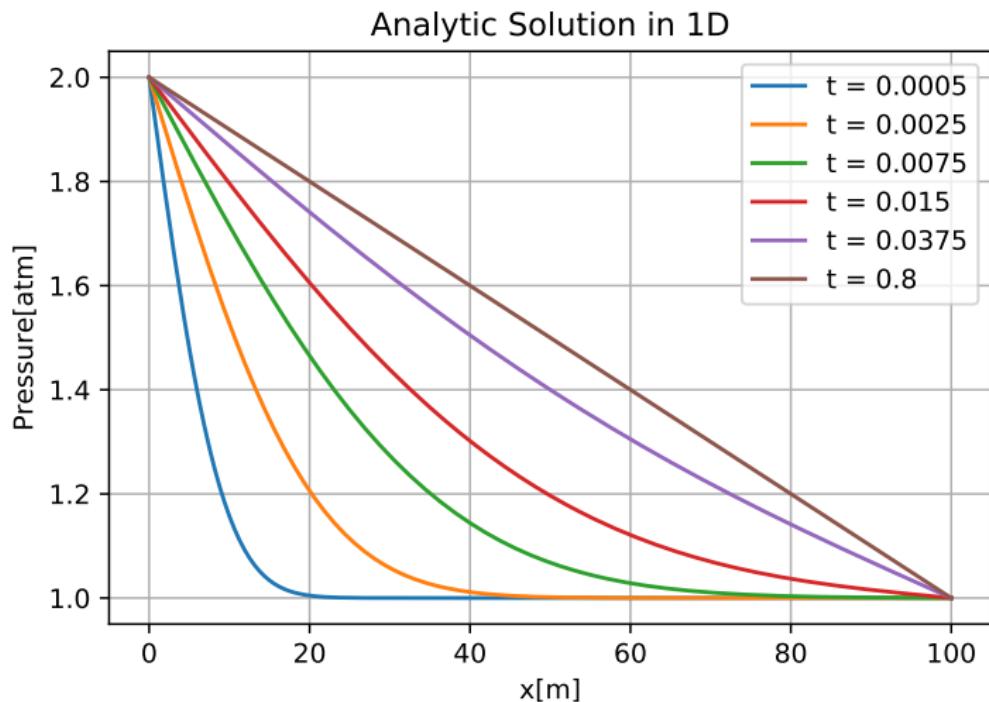
donde $\Gamma = k/\phi\mu c_T$.



Solución analítica:

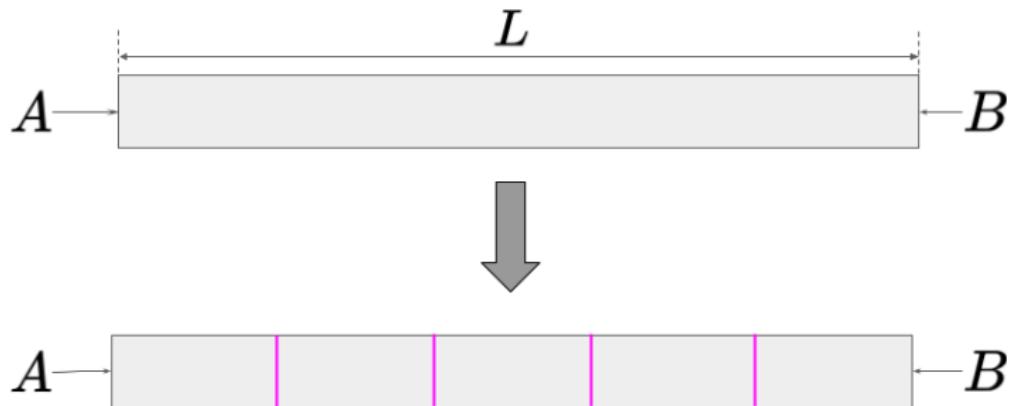
$$p(x, t) = p_A + (p_B - p_A) \left(\frac{x}{L_x} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp \left(-\frac{n^2 \pi^2}{L_x^2} \frac{k}{\phi \mu c_T} t \right) \sin \left(\frac{n \pi x}{L_x} \right) \right).$$

SOLUCIÓN ANALÍTICA



DISCRETIZACIÓN DEL ESPACIO

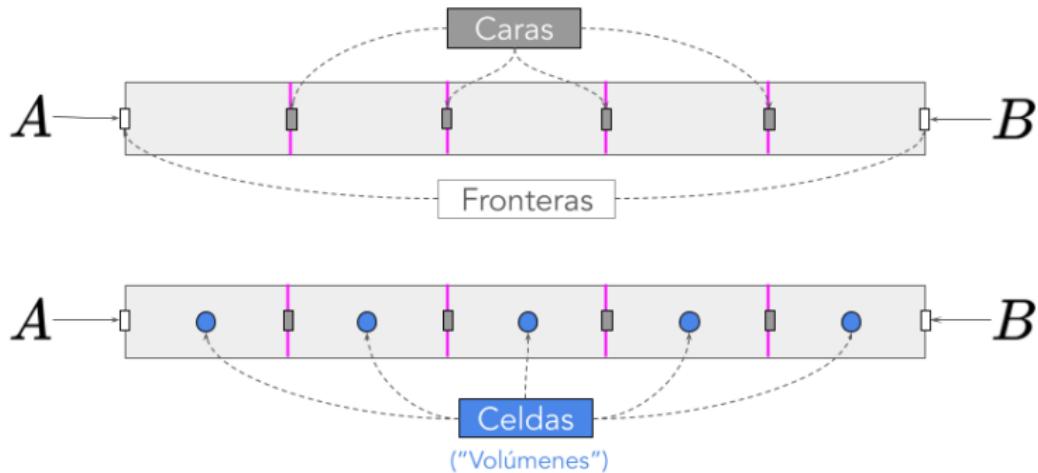
Particionamos nuestro dominio original en varios "subdominios" no traslapados:



A estos subdominios se les conoce como volúmenes o celdas.

DISCRETIZACIÓN DEL ESPACIO

Identificamos las caras de las celdas y los centros de las mismas:



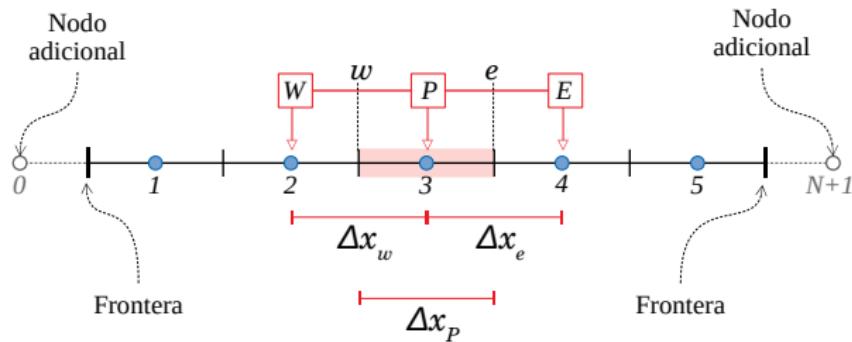
Las caras y los centros de las celdas serán los lugares en donde se realizarán los cálculos.

DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN EN 1D

El problema consiste en encontrar $p(x, t)$ que cumpla:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial p}{\partial x} \right) + q, \quad \text{para } a \leq x \leq b, \quad \text{y} \quad 0 \leq t \leq T_{max}.$$

Para la discretización usaremos el siguiente esquema de caras y celdas:

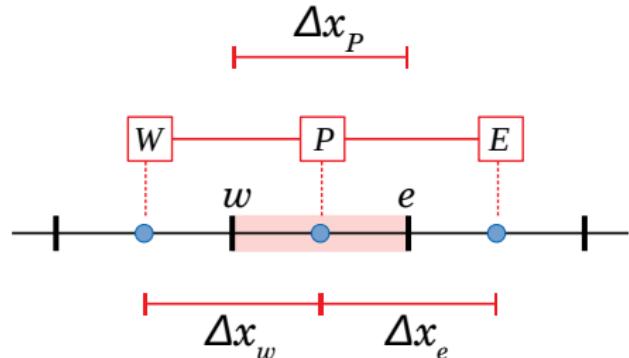


Se tienen 5 celdas y se han colocado dos celdas "fantasma" (en 0 y $N+1$) que serán de utilidad para imponer las condiciones de frontera.

Nótese que este modelo matemático es similar al de conducción de calor.

DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN EN 1D

- Integramos la ecuación en el *volumen de control* etiquetado con P y cuyas *caras* son w y e .
- De igual manera se realiza la integración del instante t al $t + \Delta t$ (de k a $k + 1$).



Esta integración se escribe como sigue:

$$\int_w^e \int_k^{k+1} \frac{\partial p}{\partial t} dt dx = \int_k^{k+1} \int_w^e \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial p}{\partial x} \right) + q \right) dx dt \quad (6)$$

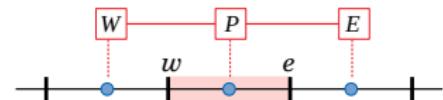
DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN EN 1D

$$\begin{aligned} \int_w^e \int_k^{k+1} \frac{\partial p}{\partial t} dt dx &= \int_w^e \left(p_P^{k+1} - p_P^k \right) dx \\ &= \left(p_P^{k+1} - p_P^k \right) \Delta x_P \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \int_w^e \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial p}{\partial x} \right) + q \right) dx dt &= \int_k^{k+1} \left(\left[\Gamma \frac{\partial p}{\partial x} \right]_e - \left[\Gamma \frac{\partial p}{\partial x} \right]_w + \bar{q} \Delta x_P \right) dt \\ &\approx \int_k^{k+1} \left(-(a_E + a_W)p_P + a_W p_W \right. \\ &\quad \left. + a_E p_E + \bar{q} \Delta x_P \right) dt \end{aligned}$$

donde $a_E = \frac{\Gamma_e}{\Delta x_e}$, $a_W = \frac{\Gamma_w}{\Delta x_w}$ y se utilizaron diferencias centradas para aproximar las derivadas en las caras:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_e \approx \frac{p_E - p_P}{\Delta x_e} \quad \text{y} \quad \left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_w \approx \frac{p_P - p_W}{\Delta x_w}$$



DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN EN 1D

Para aproximar la integral en el tiempo, del instante k al $k + 1$, usaremos el esquema Theta:

$$\int_k^{k+1} \mathcal{F} dt = (\theta \mathcal{F}^{k+1} + (1 - \theta) \mathcal{F}^k) \Delta t, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

Nombre	θ	Fórmula
Explícito (<i>Forward-Euler</i>)	0	$\mathcal{F}^k \Delta t.$
Implícito (<i>Backward-Euler</i>)	1	$\mathcal{F}^{k+1} \Delta t.$
Crank-Nicolson	1/2	$(\mathcal{F}^k + \mathcal{F}^{k+1}) \Delta t / 2.$

Usando el caso implícito $\theta = 1$ y dado que

$\mathcal{F} = -(a_E + a_W)p_P + a_W p_W + a_E p_E + \bar{q}\Delta x_P$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \int_w^e \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial p}{\partial x} \right) + q \right) dx dt &\approx \left(-(a_E + a_W)p_P + a_W p_W + a_E p_E \right. \\ &\quad \left. + \bar{q}\Delta x_P \right)^{k+1} \Delta t \end{aligned} \quad (8)$$

DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN EN 1D

Finalmente, sustituyendo (7) y (8) en (6) obtenemos:

$$\left(p_P^{k+1} - p_P^k \right) \Delta x_P = (- (a_E + a_W) p_P + a_W p_W + a_E p_E + \bar{q} \Delta x_P)^{k+1} \Delta t$$

Rearreglando obtenemos:

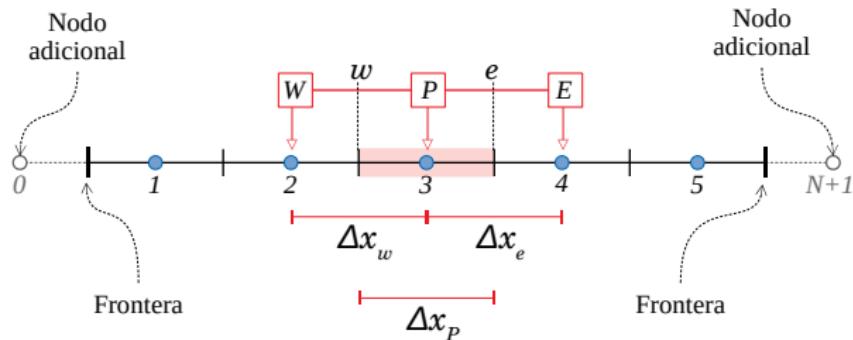
$$-a_W p_W^{k+1} + a_P p_P^{k+1} - a_E p_E^{k+1} = b_P$$

(9)

donde

$$a_P = \left(\frac{\Delta x_P}{\Delta t} + a_E + a_W \right) \quad \text{y} \quad b_P = p_P^k \frac{\Delta x_P}{\Delta t} + \bar{q} \Delta x_P$$

DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN EN 1D



Tomando en cuenta la figura de arriba, escribimos las ecuaciones para las celdas 1, 2, 3, 4 y 5:

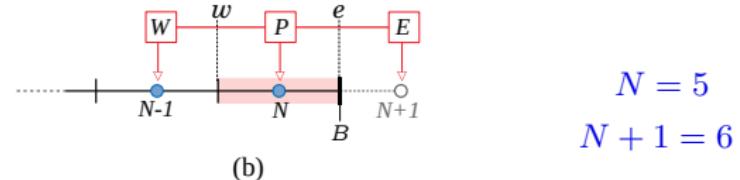
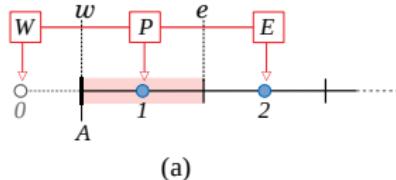
$$\begin{aligned}
 W = 0, P = 1, E = 2 &\implies -a_W^0 p_0 + a_P^1 p_1 - a_E^2 p_2 = b_1 \\
 W = 1, P = 2, E = 3 &\implies -a_W^1 p_1 + a_P^2 p_2 - a_E^3 p_3 = b_2 \\
 W = 2, P = 3, E = 4 &\implies -a_W^2 p_2 + a_P^3 p_3 - a_E^4 p_4 = b_3 \\
 W = 3, P = 4, E = 5 &\implies -a_W^3 p_3 + a_P^4 p_4 - a_E^5 p_5 = b_4 \\
 W = 4, P = 5, E = 6 &\implies -a_W^4 p_4 + a_P^5 p_5 - a_E^6 p_6 = b_5
 \end{aligned}$$

DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN EN 1D

En forma matricial se puede escribir:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc|c} -a_w^1 & a_p^1 & -a_e^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_w^2 & a_p^2 & -a_e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_w^3 & a_p^3 & -a_e^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_w^4 & a_p^4 & -a_e^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_w^5 & a_p^5 & -a_e^5 \end{array} \right) \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix}$$

DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN EN 1D: BC DIRICHLET



$$N = 5$$

$$N + 1 = 6$$

$$\frac{p_0 + p_1}{2} = p_A \implies p_0 = 2p_A - p_1$$

$$\frac{p_5 + p_6}{2} = p_B \implies p_6 = 2p_B - p_5$$

Sustituimos p_0 en:

$$\begin{aligned} -a_W^0 p_0 + a_P^1 p_1 - a_E^2 p_2 &= b_1 \\ \implies -a_W^{*,0} p_0 + a_P^{*,1} p_1 - a_E^2 p_2 &= b_1^* \end{aligned}$$

Con:

$$a_W^{*,1} = 0; a_P^{*,1} = a_P^1 + a_W^1; b_1^* = b_1 + 2a_W^1 p_A$$

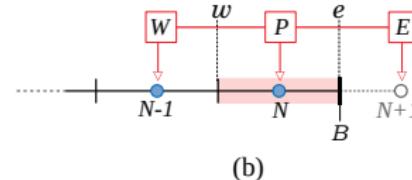
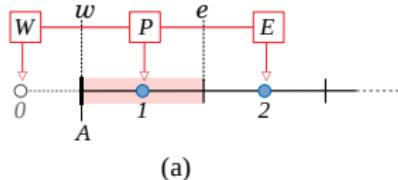
Sustituimos p_6 en:

$$\begin{aligned} -a_W^4 p_4 + a_P^5 p_5 - a_E^6 p_6 &= b_5 \\ \implies -a_W^4 p_4 + a_P^{*,5} p_5 - a_E^{*,6} p_6 &= b_5^* \end{aligned}$$

Con:

$$a_E^{*,6} = 0; a_P^{*,5} = a_P^5 + a_E^5; b_5^* = b_5 + 2a_E^5 p_B$$

DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN EN 1D: BC NEUMMAN



$$N = 5$$

$$N + 1 = 6$$

$$\frac{dp}{dx} \Big|_A = \frac{p_1 - p_0}{\Delta x_w} = f_A \implies p_0 = p_1 - \Delta x_w f_A$$

$$\frac{dp}{dx} \Big|_B = \frac{p_6 - p_5}{\Delta x_e} = f_B \implies p_6 = p_5 + \Delta x_e f_B$$

Sustituimos p_0 en:

$$\begin{aligned} -a_w^0 p_0 + a_P^1 p_1 - a_E^2 p_2 &= b_1 \\ \implies -a_w^{*,0} p_0 + a_P^{*,1} p_1 - a_E^2 p_2 &= b_1^* \end{aligned}$$

Con:

$$a_w^{*,1} = 0; a_P^{*,1} = a_P^1 - a_w^1; b_1^* = b_1 - a_w^1 \Delta x_w f_A \quad a_E^{*,6} = 0; a_P^{*,5} = a_P^5 - a_E^5; b_5^* = b_5 + a_E^5 \Delta x_e f_B$$

Sustituimos p_{N+1} (para $N = 5$) en:

$$\begin{aligned} -a_w^4 p_4 + a_P^5 p_5 - a_E^6 p_6 &= b_5 \\ \implies -a_w^4 p_4 + a_P^{*,5} p_5 - a_E^{*,6} p_6 &= b_5^* \end{aligned}$$

Con:

DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN EN 1D:

Sistema lineal final con las condiciones de frontera integradas es:

$$\begin{pmatrix} a_P^{*,1} & -a_E^1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_W^2 & a_P^2 & -a_E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a_W^3 & a_P^3 & -a_E^3 & 0 \\ 0 & 0 & -a_W^4 & a_P^4 & -a_E^4 \\ 0 & 0 & 0 & -a_W^5 & a_P^{*,5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5^* \end{pmatrix}$$

CONTENIDO

1 ANTECEDENTES

- Propiedades de las rocas
- Propiedades de los fluidos
- Mojabilidad y procesos de desplazamiento
- Propiedades roca/fluido en un yacimiento

2 MODELO CONCEPTUAL

3 MODELO MATEMÁTICO

4 MODELO NUMÉRICO

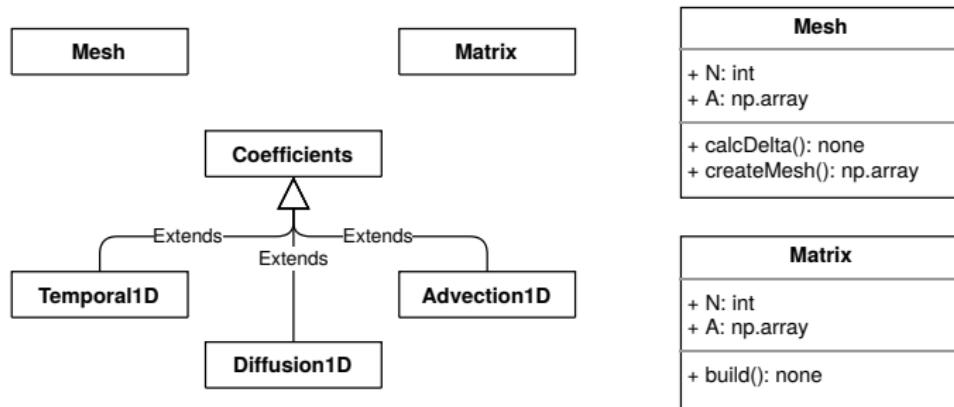
5 MODELO COMPUTACIONAL

6 CALIBRACIÓN

7 REFERENCIAS

MODELO COMPUTACIONAL

PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS

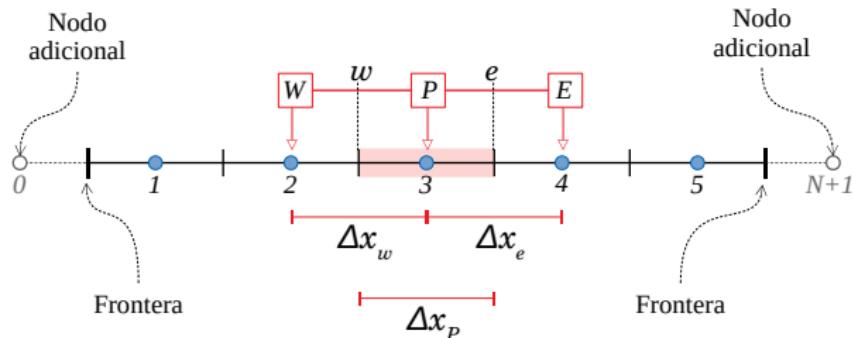


CLASE : Es un tipo de dato, que puede ser definido por el programador, y engloba la definición de atributos (información) y métodos (comportamiento).

OBJETO : Es un ejemplo concreto de una clase (instance), contiene los atributos con valores bien determinados (estado interno).

PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS

Necesitamos una entidad (tipo de dato) que sea capaz de crear y administrar la información de la discretización del dominio.



```
class Mesh():
    def __init__(self, nodes = None, volumes = None, length = None):
        self.__nodes = nodes
        self.__volumes = volumes
        self.__length = length
        self.__delta = 1
        self.adjustNodesVolumes(nodes, volumes)
        self.calcDelta()
    ...
    
```

PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS

(cont.)

```

class Mesh():
    def __del__(self):
        ...
    def adjustNodesVolumes(self, nodes,
                           volumes):
        ...
    def nodes(self):
        return self.__nodes
    def setNodes(self, nodes):
        ...
    def volumes(self):
        return self.__volumes
    def setVolumes(self, volumes):
        ...
    def length(self):
        return self.__length
    def calcDelta(self):
        ...
    def delta(self):
        return self.__delta
    def createMesh(self):
        ...

```

Creación y uso de objetos tipo Mesh.

```

m1 = Mesh()
print(m1.nodes(), m1.volumes())
print('_' * 20)

m1 = Mesh(nodes = 5)
print(m1.nodes(), m1.volumes())

m1 = Mesh(volumes = 5)
print(m1.nodes(), m1.volumes())

m1 = Mesh(5,5)
print(m1.nodes(), m1.volumes())

m1.setNodes(8)
print(m1.nodes(), m1.volumes())

m1.setVolumes(8)
print(m1.nodes(), m1.volumes())

m1 = Mesh(nodes = 5, length = 33)
print(m1.nodes(), m1.volumes(), m1.length())

m1 = Mesh(volumes = 5, length = 33)
print(m1.nodes(), m1.volumes(), m1.length())
m1.createMesh()

```

PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS

Necesitamos calcular y almacenar los coeficientes de las ecuaciones del sistema lineal para cada celda de la malla y para cada tiempo.

$$-a_{\mathbf{W}} p_{\mathbf{W}}^{k+1} + a_{\mathbf{P}} p_{\mathbf{P}}^{k+1} - a_{\mathbf{E}} p_{\mathbf{E}}^{k+1} = b_{\mathbf{P}}$$

donde $a_{\mathbf{E}} = \frac{\Gamma_{\mathbf{E}}}{\Delta x_{\mathbf{E}}}$, $a_{\mathbf{W}} = \frac{\Gamma_{\mathbf{W}}}{\Delta x_{\mathbf{W}}}$, $b_{\mathbf{P}} = p_{\mathbf{P}}^k \frac{\Delta x_{\mathbf{P}}}{\Delta t} + \bar{q} \Delta x_{\mathbf{P}}$ y
 $a_{\mathbf{P}} = \left(\frac{\Delta x_{\mathbf{P}}}{\Delta t} + a_{\mathbf{E}} + a_{\mathbf{W}} \right)$

Recordemos nuestra notación (en 2D):

\mathbf{NB}	id
\mathbf{P}	i, j
\mathbf{E}	$i + 1, j$
\mathbf{W}	$i - 1, j$
\mathbf{N}	$i, j + 1$
\mathbf{S}	$i, j - 1$

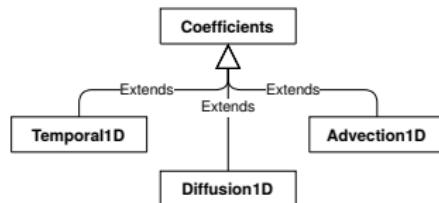
nb	id
e	$i + \frac{1}{2}, j$
w	$i - \frac{1}{2}, j$
n	$i, j + \frac{1}{2}$
s	$i, j - \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} t &\equiv k; \quad t + \Delta t \equiv k + 1 \\ t &= 0, \dots, T_{max} \\ i &= 1, \dots, Nx \\ j &= 1, \dots, Ny \end{aligned}$$

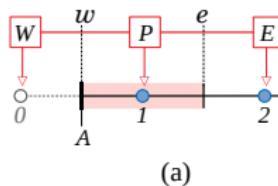
PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS

Cada coeficiente a_{NP} , para $NP = P, W, E, N, S, F, B$ tiene contribuciones del término temporal, difusivo y advectivo según sea el caso:

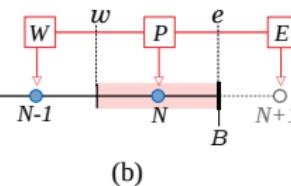
$$\underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial t}}_{\text{Temporal}} + \underbrace{\nabla \cdot (\vec{v} \psi)}_{\text{Advección}} = q + \underbrace{\nabla \left(\cdot \Gamma \vec{\nabla} \psi \right)}_{\text{Difusión}}$$



En este ejemplo no tenemos contribución de la advección.



(a)



(b)

De igual manera, se deben modificar los coeficientes para tomar en cuenta las condiciones de frontera.

PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS

```

class Coefficients():
    __aP = None
    __aE = None
    __aW = None
    ...

    def __init__(self, nvx = None,
                 delta = None):
        ...

    @staticmethod
    def alloc(n):
        ...
        Coefficients.__aP = np.zeros(nvx)
        ...

    def aP(self):
        return Coefficients.__aP

    @staticmethod
    def bcDirichlet(wall, phi):
        ...

    @staticmethod
    def bcNeumann(wall, flux):
        ...

    def printCoefficients(self):
        ...
        ...

```

Contribución de la difusión:

$$a_E = \frac{\Gamma_e}{\Delta x_e} \text{ y } a_W = \frac{\Gamma_w}{\Delta x_w}$$

```

class Diffusion1D(Coefficients):

    def __init__(self, nvx = None,
                 Gamma = None, dx = None):
        super().__init__(nvx, dx)
        self.__nvx = nvx
        self.__Gamma = Gamma
        self.__dx = dx
        ...

    def calcCoef(self):
        aE = self.aE()
        aW = self.aW()
        aP = self.aP()
        aE += self.__Gamma / self.__dx
        aW += self.__Gamma / self.__dx
        aP += aE + aW

```

En esta implementación suponemos que la malla es uniforme, es decir:

$$\Delta x_e = \Delta x_w = \Delta x_P.$$

PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS

Contribución del término temporal:

$$a_P = \left(\frac{\Delta x_P}{\Delta t} + a_E + a_W \right) \text{ y}$$

$$b_P = p_P^k \frac{\Delta x_P}{\Delta t} + \bar{q} \Delta x_P$$

```
class Temporal1D(Coefficients):

    def __init__(self, nvx=None, rho=None,
                 dx=None, dt=None):
        super().__init__(nvx)
        self.__nvx = nvx
        self.__rho = rho
        self.__dx = dx
        self.__dt = dt
    ...

    def calcCoef(self, phi_old):
        aP = self.aP()
        Su = self.Su()
        rho = self.__rho
        dx_dt = self.__dx / self.__dt

        for i in range(1, self.__nvx-1):
            aP[i] += rho * dx_dt
            Su[i] += phi_old[i] * dx_dt
```

Un ejemplo de creación, inicialización y uso de los objetos para administrar los coeficientes, es el siguiente:

```
coef = fvm.Coefficients()
coef.alloc(nvx)

dif = fvm.Diffusion1D(nvx, Gamma = Gamma,
                      dx = delta)
tem = fvm.Temporal1D(nvx, rho = rho,
                      dx = delta, dt=delta_t)

for i in range(1,steps+1):
    coef.cleanCoefficients()

    dif.calcCoef()
    tem.calcCoef(phi)

    coef.bcDirichlet('LEFT_WALL', phi0)
    coef.bcDirichlet('RIGHT_WALL', phiL)
    ...
```

PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS

Finalmente, necesitamos crear una matriz y un RHS para crear el sistema que se debe resolver:

$$\begin{pmatrix} a_{\textcolor{red}{P}}^{*,1} & -a_{\textcolor{blue}{E}}^1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{\textcolor{blue}{W}}^2 & a_{\textcolor{red}{P}}^2 & -a_{\textcolor{blue}{E}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{\textcolor{blue}{W}}^3 & a_{\textcolor{red}{P}}^3 & -a_{\textcolor{blue}{E}}^3 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{\textcolor{blue}{W}}^4 & a_{\textcolor{red}{P}}^4 & -a_{\textcolor{blue}{E}}^4 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{\textcolor{blue}{W}}^5 & a_{\textcolor{red}{P}}^{*,5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5^* \end{pmatrix}$$

Para ello implementamos un tipo de dato llamado **Matrix**.

PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS

```

class Matrix():

    def __init__(self, nvx = None):
        self.__N = nvx - 2
        self.__A = np.eye(self.__N)
...
    def mat(self):
        return self.__A

    def build(self, coefficients = None):
        aP = coefficients.aP()
        aE = coefficients.aE()
        aW = coefficients.aW()
        A = self.__A
        A[0][0] = aP[1]
        A[0][1] = -aE[1]
        for i in range(1, self.__N-1):
            A[i][i] = aP[i+1]
            A[i][i+1] = -aE[i+1]
            A[i][i-1] = -aW[i+1]
        A[-1][-1] = aP[-2]
        A[-1][-2] = -aW[-2]

```

Para crear el sistema lineal y resolverlo haríamos lo siguiente:

```

for i in range(1,steps+1):
    ...
    Su = coef.Su()
    A = fvm.Matrix(malla.volumes())
    A.build(coef)
    phi[1:-1] = np.linalg.solve(A.mat(),
                                 Su[1:-1])
    ...

```

CONTENIDO

1 ANTECEDENTES

- Propiedades de las rocas
- Propiedades de los fluidos
- Mojabilidad y procesos de desplazamiento
- Propiedades roca/fluido en un yacimiento

2 MODELO CONCEPTUAL

3 MODELO MATEMÁTICO

4 MODELO NUMÉRICO

5 MODELO COMPUTACIONAL

6 CALIBRACIÓN

7 REFERENCIAS

PARÁMETROS FÍSICOS

Propiedad	Valor	Unidades
Longitud horizontal(L_x)	100	cm
Longitud vertical(L_y)	10	cm
Longitud en z (L_z)	10	cm
Porosidad(ϕ)	0.2	—
Viscosidad(μ)	1.0	cp
Permeabilidad(k)	1.0	Darcy's
Compresibilidad Total (c_T)	10^{-4}	atm^{-1}
Presión p_A	2.0	atm
Presión p_B	1.0	atm
Presión inicial(p^0)	1.0	atm
Tiempo máximo (Tmax)	0.8	s

PARÁMETROS NUMÉRICOS

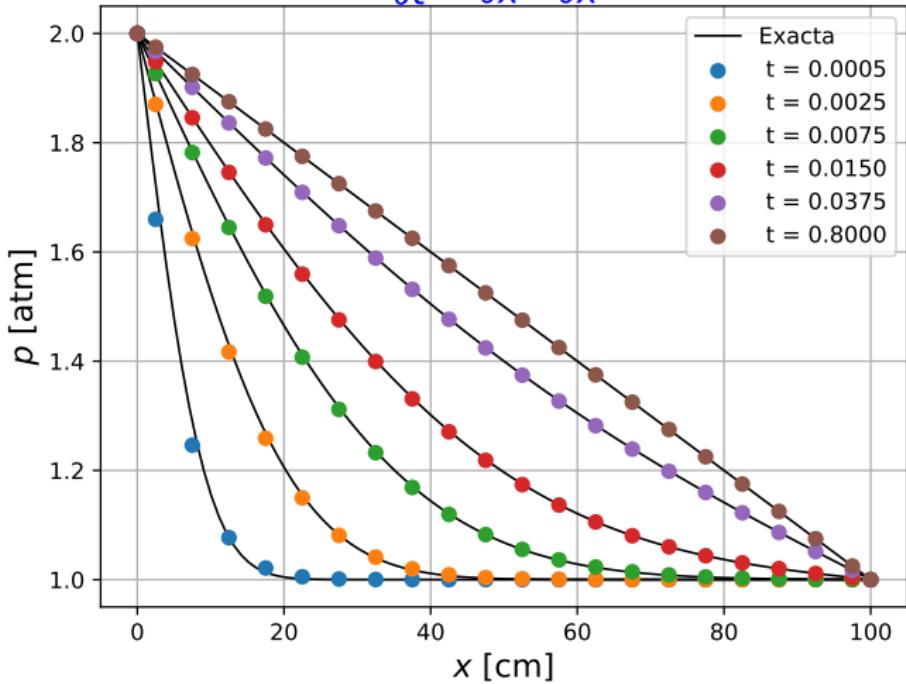
Distribución de nodos: $Nx = 10(2^m) + 1$ y $Ny = 2^m + 1$, véase [21].

m	Nx	Ny	h [m]	$Error$	CPU [s]
1	21	3	5.00000		
2	41	5	2.50000		
3	81	9	1.25000		
4	161	17	0.62500		
5	321	33	0.31250		
6	641	65	0.15625		

El paso de tiempo es: $h_t = 0.0001$.

SOLUCIÓN NUMÉRICA

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (\Gamma \frac{\partial p}{\partial x})$$



CONTENIDO

1 ANTECEDENTES

- Propiedades de las rocas
- Propiedades de los fluidos
- Mojabilidad y procesos de desplazamiento
- Propiedades roca/fluido en un yacimiento

2 MODELO CONCEPTUAL

3 MODELO MATEMÁTICO

4 MODELO NUMÉRICO

5 MODELO COMPUTACIONAL

6 CALIBRACIÓN

7 REFERENCIAS

- [1] I. Herrera and M. B. Allen and G. F. Pinder,
Numerical modeling in science and engineering,
John Wiley & Sons., USA, 1988.
- [2] I. Herrera and G. F. Pinder,
General principles of mathematical computational modeling,
John Wiley, in press.
- [3] R.J. Leveque,
Finite Difference Method for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady State and Time-Dependent Problems ,
Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2007.
- [4] R.J. Leveque,
Finite Volume Method for Hyperbolic Problems,
Cambridge University Press, 2004.
- [5] Y. Saad
Iterative Methods for Sparse Linear Systems.
PWS/ITP 1996.
Online: <http://www-users.cs.umn.edu/~saad/books.html>, 2000

- [6] Richard Burden and J. Douglas Faires
Numerical Analysis
International Thomson Publishing 1997
- [7] R. Barret, *et al.*
Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods
Online: <http://www.siam.org/books>.
- [8] S. V. Patankar.
Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.
McGraw–Hill, 1980.
- [9] H. Versteeg and W. Malalasekera.
An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method.
Longman, 1995.
- [10] Z. Chen and G. Huan and Y. Ma,
Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media, Capítulo 4.
SIAM, 2006.

- [11] Z. Chen,
Reservoir Simulation Mathematical Techniques in Oil Recovery,
SIAM, Philadelphia, USA, 2007.
- [12] C. Fletcher.
Computational Techniques for Fluid Dynamics 1: Specific Techniques for Different Flow Categories.
Springer–Verlag, second edition edition, 1991.
- [13] C. Hirsch.
Numerical Computation of Internal and External Flows Volume 1: Fundamentals of Numerical Discretization.
John Wiley & Sons, 1988.
- [14] C. Hirsch.
Numerical Computation of Internal and External Flows Volume 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows.
John Wiley & Sons, 1988.
- [15] J. B. Scarborough.
Numerical Mathematical Analysis.
4th ed., Johns Hopkins University Press, 1958.

-  [16] T. Han, J. Humphrey, and B. E. Launder.
A comparison of hybrid and quadratic-upstream differencing in high reynolds number elliptic flows.
Comp. Meth. in App. Mech. and Eng., 29:81–95, 1981.
-  [17] T. Hayase, J. Humphrey, and R. Greif.
A consistently formulated quick scheme for fast and stable convergence using finite-volume iterative calculation procedures.
J. of Comp. Phys., 98:108–118, 1992.
-  [18] P. G. Huang, B. E. Launder, and M. A. Leschziner.
Discretization of non-linear convection processes: A broad-range comparison of four schemes.
Comp. Meth. in App. Mech. and Eng., 48:1–24, 1985.
-  [19] B. P. Leonard.
A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation.
Comp. Meth. in App. Mech. and Engineering, 19:59–98, 1979.
-  [20] A. Pollard and A. L. Siu.
The calculation of some laminar flows using various discretization schemes.
Comp. Meth. in App. Mech. and Eng., 35:293–313, 1982.



[21] L. M. de la Cruz,

Flujo en una y dos fases en medios porosos: modelos matemáticos, numéricos y computacionales,

Reportes técnicos del Instituto de Geofísica, 2012-4, Agosto 2012.



Anaconda: The Most Popular Python Data Science Platform.

<https://www.anaconda.com/>



Python Software Foundation.

<https://www.python.org/>



Python Documentation.

<https://docs.python.org/>



The Hitchhiker's Guide to Python

<http://docs.python-guide.org/>



Programa como un Pythonista: Python Idiomático

<http://mundogeek.net/traducciones/python-idiomatico/>



Python 3 Basics Tutorial

<https://www.gitbook.com/book/krother/python-3-basics-tutorial/details>

-  Interactive Python Tutorial
<http://www.learnpython.org/>
-  Spyder is the Scientific PYthon Development EnviRonment:
<https://pythonhosted.org/spyder/>
-  IPython Interactive Computing
<http://ipython.org/>
-  IPython Documentation
<https://ipython.readthedocs.io/>
-  Project Jupyter
<https://jupyter.org/>