2^{do} Examen GeoMaC

Hernández Terán Oscar

a) One-sided-D_{+2}

$A u_{i+2} + B u_{i+1} + C u_i$

Recordamos la serie de Taylor

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$u_i' = A u_{i+2} + B u_{i+1} + C u_i$$

Expandimos

$$u_{i+1} = u_0 + h$$
$$u_{i+2} = u_0 + 2h$$

$$u_{i+1} - u_i = +h$$
$$u_{i+2} - u_i = +2h$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{u_i^1}{1!}(h) + \frac{(h)^2}{2!} u_i^2 + O(h^3)$$

$$u_{i+2} = u_i + \frac{u_i}{1!}(2h) + \frac{(2h)^2}{2!} u_i^2 + O(h^3)$$

Sustituimos:

$$u_i' = A\left(u_i + 2h u_i' + \frac{4h^2}{2} u_i''\right) + B\left(u_i + h u_i' + \frac{h^2}{2} u_i''\right) + C(u_i)$$

$$u_i' = u_i(A+B+C) + h u_i'(2A+B) + h^2 u_i''\left(2A + \frac{B}{2}\right) + O(h^3)$$

$\therefore$

$$A + B + C = 0 \quad \ldots \; 1$$

$$2A + B = \frac{1}{h} \quad \ldots \; 2$$

$$2A + \frac{B}{2} = 0 \quad \ldots \; 3$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La sol. al sistema es:

$A = -\frac{1}{2}h$

$B = \frac{2}{h}$

$C = -\frac{3}{2}h$

$$\boxed{u_i' = \frac{-u_{i+2} + 4u_{i+1} - 3u_i}{2h}}$$

Esta fórmula es de orden 2 ya que en la expansión es necesario llegar a la 2da derivada para poder encontrar los términos. Además usa 2 puntos extras además de u_i.

b) One-sided $-D_{-3}$

$$A u_{i+2} + B u_{i+1} + C u_i + D u_{i-1}$$

Expandimos:

$$u_{i+2} = u_i + 2h u_i' + \frac{(2h)^2}{2!} u_i'' + \frac{(2h)^3}{3!} u_i'''$$

$$u_{i+1} = u_i + h u_i' + \frac{(h)^2}{2!} u_i'' + \frac{(h)^3}{3!} u_i'''$$

$$u_{i-1} = u_i + (-h) u_i' + \frac{(-h)^2}{2!} u_i'' + \frac{(-h)^3}{3!} u_i'''$$

$$u_i' = A\left(u_i + 2h u_i' + \frac{4h^2}{2} u_i'' + \frac{8h^3}{6} u_i'''\right)$$

$$+ B\left(u_i + h u_i' + \frac{h^2}{2} u_i'' + \frac{h^3}{6} u_i'''\right)$$

$$+ C(u_i)$$

$$+ D\left(u_i - h u_i' + \frac{h^2}{2} u_i'' - \frac{h^3}{6} u_i'''\right) + O(h^4)$$

$$u_i' = u_i(A + B + C + D) +$$

$$h u_i'(2A + B - D) +$$

$$h^2 u_i''\left(2A + \frac{B}{2} + \frac{D}{2}\right) +$$

$$h^3 u_i'''\left(\frac{4}{3}A + \frac{1}{6}B - \frac{1}{6}D\right)$$

$\therefore$

$$A+B+C+D=0$$

$$2A+B-D=\frac{1}{h}$$

$$2A+\frac{B}{2}+\frac{D}{2}=0$$

$$\frac{1}{3}A+\frac{1}{6}B-\frac{1}{6}D=0$$

$\therefore$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{h} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La sol. del sistema es:

$$A=-\frac{11.}{6h}$$

$$B=\frac{1}{h}$$

$$C=\frac{-1}{12h}$$

$$D=\frac{-1}{3h}$$

$\therefore$

$$\boxed{u_i'=\frac{-u_{i+2}+6u_{i+1}-3u_i-2u_{i-1}}{6h}}$$

Esta fórmula es de órden 3 ya que en la expansión es necesario llegar a la 3ra derivada para encontrar los términos.

Además usa 3 puntos extras además de u_i.

c) Explicación

Centered - D_0^2

Es posible obtener esta formula aplicando sucesivamente la derivada de primer orden

$$D^2 f(x) = D_+ D_- f(x)$$

Recordemos:

$$D_+ f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$D_- f(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

$$D_+(D_- f(x)) = \frac{1}{h}\left[D_+ f(x+h) - D_- f(x)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left\{\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right] - \left[\frac{f(x) - f(x-h)}{h}\right]\right\}$$

$$= \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

Sustituimos:

$f(x+h) = U_{i+1}$

$f(x) = U_i$

$f(x-h) = U_{i-1}$

Tenemos:

$$\boxed{U_i'' = \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}}$$