Inledande matematisk analys (TATB04)

Uppgifter

David Rule

Anvisningar

Självstudieuppgifter

Självstudieuppgifter är uppgifter man gör på eget initiativ. Man får gärna jobba tillsammans, men ni ordnar själva hur ni vill arbeta. Kom ihåg att ni har många självstudie timmer som räknas som en del av kursen. Var inte oroligt om ni ibland kör fast. Till skillnad från många uppgifter man träffar i gymnasiet kan man inte alltid förvänta sig att lösa de rakt av och det är aldrig fel att satsa tid på ett problem man inte har förstått än. Studenterna förväntas ha jobbat på uppgifterna innan motsvarade lektionen men ställ gärna frågor om uppgifterna i lektionerna!

Grupparbete

Första delen i varje lektionen kommer bestå av *grupparbete*. De är uppgifter man förväntas lösa i små grupper (3–6 personer). Sedan presenterar en grupp eller några grupper sitt arbete fram för alla andra. Ni som lyssnar till presentationer får ställa frågor och ge konstruktiv feedback till de som presenterar. Hur övertygad är ni av deras lösning? Hur tydliga är förklaringarna? Det är ingen tävling för att bestämma vem är bäst, hellre är syftet att alla hjälper varandra att förstå problemet och sitt lösning och lära hur man kommunicerar matematik.

Under kursens gång ska varje student redovisa en lektions grupparbete skriftligt och lämnar in det till sin lektionsledare för att rätta. Det räknas som en av de obligatoriska inlämningsuppgifterne. Se nedan och i kurs-PM för mer information.

Vinjetter

Varje vinjett är en fråga eller en problemställning som är mer öppen i karaktär och ibland är en fortsättning av en grupparbete uppgift. I första hand är det IT studenter som kommer jobba med de i en andra kurs, men jag hoppas även andra studenter är intresserade att studera de på eget initiativ. Vinjetter är inte ett examinerat moment i TATB04 och samlas därför separat i kapitel V.

Repetitionsuppgifter

För att kunna behärska kursens innehåll behöver man kunna med säkerhet manipulera de olika matematiska uttrycken vi träffar i kursen. Många studenter redan ha sådana färdigheter från skolan, så det inte är huvudfokus i föreläsningar eller lektioner. Men vissa studenter vill förbättra deras räknesäkerhet – Det är ju aldrig försent! – så kapitel X är en samling av uppgifter som kan vara hjälpsamt att göra i detta fall. Det är helt valfritt om du göra eller inte göra Repetitionsuppgifter och därför samlas de separat i kapitel X.

Inlämningsuppgifter

I varje modul får man två inlämningsuppgifter att göra, en för varsin avsnitt. Syftet är att de ger både studenter och lärare feedback. Alla inlämningsuppgifterna är obligatoriska.

Inlämningsuppgifterna för varje modul lämnas in till din handledare eller i gruppens fack som ligger i korridoren 2A, B-huset, mellan ingångar 21 och 23. Inlämningsuppgifterna för varje modul har en deadline som finns i både kurs-PM och ovanför själva uppgiften. Glöm inte ditt personligt omslag när du lämnar in dina lösningar (OBS: Omslaget har två sidor!). Du får återkoppling senast två arbetsdagar efter första inlämningsdeadline. Kolla facket om du har inget handledningstillfälle på samma dag! Inlämning av eventuell komplettering samt hämtning av återkoppling skes på samma sätt fram till kompletteringsdeadlinen som också finns i både kurs-PM och ovanför uppgiften.

All referenser till ekvationer, satser, med mera är från *Ge svar på tal* [3] om ingen annan referens ges. Uppgifter markerade med:

- $*$ får ni hoppa över om ni inte hinner;
- † tas helt eller delvis från Henrik Peterssons *Undersökande matematik* [2] och reproduceras här enligt BONUS-avtalet;
- ‡ inspirerades av Mathologer (`https://youtu.be/ZIQQvxSXLhI`).
- $\diamond$ inspirerades av Graham, Knuth & Patashnik [1].

Litteraturförteckning

[1] Roland Graham, Donald Knuth and Oren Patashnik, *Concrete Mathematics* (2nd edition), Addison-Wesley, Massachusetts 1994.

[2] Henrik Petersson, *Undersökande matematik: Differentierade problem*, Studentliteratur AB, Lund 2017.

[3] David Rule, *Ge svar på tal*, Studentliteratur AB, Lund 2021.

[4] *Problem för envar*, Sammanställd vid Matematiska institutionen, 2023.

MODUL A

Logik och aritmetik

A.1 Logik och räkneoperationer

Självstudieuppgifter

A.1-1 Uppgifter 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 och 1.6 från *Ge svar på tal* [3].

∗ A.1-2 Vilka av påståendena i uppgift 1.5 är sanna? Motivera i varje fall ditt svar.

A.1-3 Betrakta equationen

$$(x-4)(x-3)^2 = (x-5)(x^2-5x+7) - \frac{2}{3}. \tag{A.1}$$

(a) Visa att det finns högst en lösning x till (A.1).

(b) Visa att den finns minst en lösning x till (A.1).

(c) Visa att ekvationen

$$(x-4)(x-3)^2 = (x-5)(x^2-5x+8) - \frac{2}{3}.$$

inte har någon lösning x.

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 11:e november 2024.
Komplettering: kl. 12.30, den 9:e december 2024.

A.1-4 Visa att om

(a) n_1 delat med 32 har rest 25, och

(b) n_2 delat med 32 har rest 12,

så har $n_1 n_2$ delat med 32 rest 12.

A.2 Upprepade aritmetiska operationer

Självstudieuppgifter

A.2-1 Uppgifter 1.8, 1.9, 1.10 och 1.11 från *Ge svar på tal* [3].

Grupparbete

A.2-2 Kom ihåg sats 1.13. Den sa att

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{A.2}$$

för varje positiv heltal n. Det är även lätt att räkna

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n. \tag{A.3}$$

Därför ser vi att vi har en formel för att räkna

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\ell} \tag{A.4}$$

i två fall: Fallet $\ell = 0$ (där vi kan använda (A.3)) och fallet $\ell = 1$ (där (A.2) gäller). Syftet av den här uppgiften är att utreda om det är möjligt att hitta en formel för andra positiva heltal ℓ.

Vi börjar med någonting som kan kännas orelaterat.

(a) Skriv ut och sedan förenkla summan

$$\sum_{k=1}^{4} \left((k+1)^3 - k^3\right).$$

(b) Generalisera formeln från (a) till summan

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right). \tag{A.5}$$

Nu försöker vi relatera det vi har lärt oss till själva uppgiften.

(c) Använd (A.2), (A.3) och räkneregler för summor för att visa

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{3n(n+1)}{2} + n \tag{A.6}$$

för alla positiva heltal n.

(d) Med hjälp av (A.6) och formeln för (A.5) ge ett bevis formeln

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}. \tag{A.7}$$

[Ge *inte* ett induktionsbevis!] Observera att (A.7) är en formel för (A.4) när $\ell = 2$!

(oscha050)

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 11:e november 2024.
Komplettering: kl. 12.30, den 9:e december 2024.

A.2-3 För naturliga tal n och m säger man att n är *(jämnt) delbart* med m om resten av n delat med m är 0 (se definition 1.4).

Anta att positiva heltalet n skrivs i det hindu-arabiska talsystemet som $n_k n_{k-1} \dots n_1 n_0$ för siffrorna $n_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ och $i = 0, 1, \dots, k$. Visa att n är jämnt delbart med 5 om och endast om

$$n_0 \text{ är antingen 5 eller 0.}$$

MODUL B

Verktyg för bevisföring

B.1 Mängder, följder och induktion

Självstudieuppgifter

B.1-1 Uppgifter 2.1, *2.2, 2.3, 2.4, 2.5, *2.6 och 2.7 från *Ge svar på tal* [3].

Grupparbete

† B.1-2 Vi kommer här arbeta med ett mått på hur pass delbart ett givet heltal är. Låt $n \geq 2$ vara ett givet heltal. Låt nu $S(n)$ vara summan av alla positiva delare d till n sådana att $d \neq n$. Ett tal n kallas *perfekt* då $S(n) = n$ ($n = 6$ är ett exempel på ett perfekt tal då $S(6) = 1 + 2 + 3 = 6$). Ett tal kallas nu *rikt* då $S(n) > n$, det vill säga då

$$\frac{S(n)}{n} > 1.$$

Att n är rikt innebär att talet har många (stora) delare i förhållande till talets storlek. Inget primtal är rikt, snarare väldigt fattigt, då $S(p) = 1$ för varje primtal p, så $S(n)/n = 1/p < 1$ för varje primtal p. Det här problemet handlar om att undersöka rika tal på formen $2^n 3^m$ där n och m är icke-negativa heltal.

(a) Utred vilka av talen 2, 4 och 8 som är rika.

(b) Utred om 2^{10} är rikt.

(c) Utred vilka tal på formen 2^n, där n är ett positivt heltal, som är rika.

(d) Utred vilka tal på formen 3^n, där n är ett positivt heltal, som är rika.

(e) Utred vilka av talen $3 \cdot 2$, $3 \cdot 2^2$, $3 \cdot 2^3$ som är rika.

(f) Utred vilka tal på formen $3 \cdot 2^n$, där n är ett icke-negativt heltal som är rika.

$*$ (g) Utred vilka tal på formen $3^n \cdot 2^n = 6^n$, där n är ett icke-negativt heltal som är rika.

$*$ (h) Utred möjliga rika tal på formen $3^n \cdot 2^m$ där n och m är incke-negativa heltal.

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 15:e november 2024.
Komplettering: kl. 12.30, den 9:e december 2024.

B.1-3 Bevisa

$$\sum_{k=1}^{m} k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{5}.$$

B.2 Reella tal

Självstudieuppgifter

B.2-1 Uppgifter 2.11, 2.12, 2.13, 2.14 och 2.15 från *Ge svar på tal* [3].

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 15:e november 2024.
Komplettering: kl. 12.30, den 9:e december 2024.

B.2-2 Skriv decimalutvecklingen $x = 0.\overline{125}$ (där siffrorna 125 upprepas i evighet) som ett bråk.

MODUL C

Funktioner och former

C.1 Funktioner: begrepp och egenskaper

Självstudieuppgifter

C.1-1 Uppgifter 2.8, 3.1, 3.2, 3.5, 3.6, 3.7 och 3.8 från *Ge svar på tal* [3].

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 2:e december 2024.
Komplettering: kl. 12.30, den 9:e december 2024.

C.1-2 Hitta ett andragradspolynom p så att

$$p(-1) = 12, \quad p(0) = 5 \quad \text{and} \quad p(1) = 4.$$

C.2 Former, längd och area

Självstudieuppgifter

C.2-1 Uppgifter 3.9, 3.10, 3.11 och 3.12 från *Ge svar på tal* [3].

C.2-2 Gör uppgifter 1.23, 1.24 och 1.25 i *Problem för envar* [4].

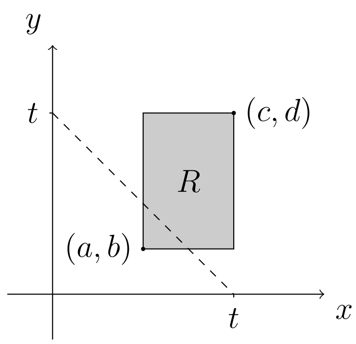
Grupparbete

C.2-3 Betrakta en rektangel R med hörnpunkter i koordinaterna (a, b) och (c, d) med sidor parallella till koordinataxlerna. Beräkna arean $A(t)$ som en funktion av t av snittet mellan R och $\{(x, y)\colon x + y \leq t\}$ i tre följande fall:

(a) $(a, b) = (1, 1)$ och $(c, d) = (4, 4)$;

(b) $a = b$, $c = d$ och $0 < a < c$; och

(c) $(a, b) = (1, 1)$ och $(c, d) = (3, 4)$.



Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 2:e december 2024.
Komplettering: kl. 12.30, den 9:e december 2024.

C.2-4 Bevisa genom lämpliga uppskattningar med enkla mängder att mängden

$$P = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y < x^3 \text{ och } 0 \leq x < h\}$$

har arean $h^4/4$. Formeln i uppgift 2.3(b) kan vara till nytta här.

MODUL D

Kvadratrötter och andra inversa funktioner

D.1 Inversa funktioner och irrationella tal

Självstudieuppgifter

D.1-1 Uppgifter 4.1, 4.2, 4.3 och 4.4 från *Ge svar på tal* [3].

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 2:e december 2024.
Komplettering: kl. 12.30, den 9:e december 2024.

D.1-2 Betrakta funktionen

$$f(x) = x + \frac{81}{x}$$

som är definierad för alla $x \neq 0$.

(a) Ge ett motsägelsebevis att det inte finns något positivt tal x så att $f(x) < 18$.

(b) Hur måste man ändra beviset om man istället betraktar negativa x?

(c) Finns det ett x så att $f(x) = 18$? Ett x så att $f(x) = -18$?

(d) Vad är f:s värdemängd?

D.2 En ny algebraisk operation: rot av tal

Självstudieuppgifter

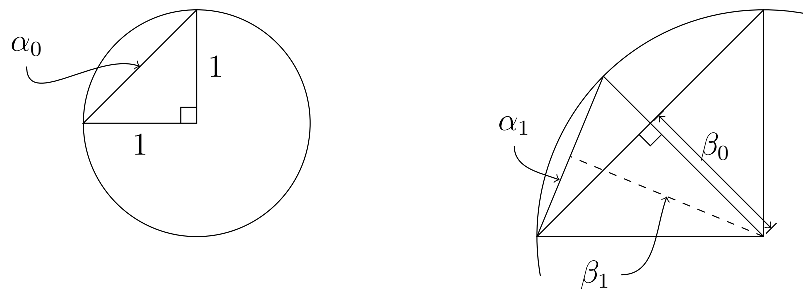
D.2-1 Lös problem 2.1(a), (c) och (d) från *Problem för envar* [4].

D.2-2 Lös problem 2.4 från *Problem för envar* [4].

D.2-3 Uppgifter 4.6 och 4.7 från *Ge svar på tal* [3].

Grupparbete

D.2-4 Betrakta en cirkel med radian 1 och en rätvinklig triangel med en hörnpunkt i cirkelns medelpunkt vems hypotenusa sammanbinder två punkter på cirkeln. Se bilden nedan till vänster.



(a) Vad är längden α_0? Om vi betrakta sidolängd α_0 som triangelns bas vad är triangelns höjd? Vi betecknar höjden β_0.

(b) Nu ritar vi en linje från cirkelns medelpunkt som skär basen α_0 i en rät vinkel och fortsätter linjen till den träffar cirkeln. Linjen både delar triangeln i två lika stora delar och skapar en likbent triangel men bas α_1 och höjd β_1 – se bilden ovan till höger. Den streckade linjen delar även den nya likbenta triangeln i två lika stora delar. Med hjälp av Pythagoras sats (sats 3.17) och symmetri beräkna längderna α_1 och β_1.

(c) Beräkna arean och omkretsen av en regelbunden oktagon vems alla hörn går genom en enhetscirkel.

$*$ (d) Vad är arean och omkretsen av en regelbunden oktagon vems alla hörn går genom en cirkel av radian r.

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 2:e december 2024.
Komplettering: kl. 12.30, den 9:e december 2024.

D.2-5 Betrakta ekvationen

$$\sqrt{4x - 19} = 10 - x \tag{D.1}$$

där $x \in \mathbf{R}$ är okänt.

(a) Hitta två kandidater till lösningar x till (D.1).

(b) Visa att precis en av kandidaterna x du har hittat faktiskt löser (D.1).

(c) Förklara varför det var inte motsägelsefullt att du kom fram till två kandidater x även om bara ett var faktiskt en lösning.

MODUL E

Trigonometri

E.1 Definitioner och formler

Självstudieuppgifter

E.1-1 Uppgifter 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 och 5.5 från *Ge svar på tal* [3].

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 9:e december 2024.
Komplettering: kl. 12.30, den 17:e januari 2025.

E.1-2 Hitta alla lösningar $\theta \in \mathbf{R}$ till ekvationen

$$0 = \cos(2\theta) + \cos\theta.$$

E.2 Olikheter och arcusfunktioner

Självstudieuppgifter

E.2-1 Lös problem 2.46 och 2.47 från *Problem för envar* [4].

E.2-2 Lös problem 2.71 och 2.74 från *Problem för envar* [4].

E.2-3 Uppgifter 5.6, 5.7 och 5.9 från *Ge svar på tal* [3].

Grupparbete

E.2-4 I kapitel 5 har vi med hjälp av geometri beräknat vissa exakta värden för trigonometriska funktioner. I den här uppgiften tar vi en mer algebraisk approach för att beräkna exakta värden för vinkeln $\pi/10$.

(a) Kom ihåg från kapitel 5 att vi har visat

$$\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta.$$

På ett liknande sätt visa att

$$\cos(3\theta) = \cos\theta(1 - 4\sin^2\theta).$$

(b) Visa att $\sin(2\theta) = \cos(3\theta)$ om $\theta = \frac{\pi}{10}$.

(c) Med hjälp av likheterna från (a) och (b) visa att $\theta = \frac{\pi}{10}$ är en lösning till

$$2\sin\theta = 1 - 4\sin^2\theta.$$

(d) Beräkna värdet av $\sin(\pi/10)$.

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 9:e december 2024.
Komplettering: kl. 12.30, den 17:e januari 2025.

E.2-5 Skriv om

$$2\sqrt{3}\cos\theta + 2\sin\theta$$

som ett utryck i $\theta \in \mathbf{R}$ som innehåller högst en trigonometrisk function.

MODUL F

Den naturliga exponentialfunktionen och sin invers

F.1 Exponentialfunktion

Självstudieuppgifter

F.1-1 Uppgifter 6.1, 6.2, 6.3 och 6.4 från *Ge svar på tal* [3].

F.1-2 Vi definierar två funktioner med hjälp av den naturliga exponentialfunktionen:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{och} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{för } x \in \mathbf{R}.$$

Funktonerna kallas för *hyperboliska funktioner* och är nära besläktade med de trigonometriska funktionerna cosinus och sinus.

(a) Visa att de hyperboliska funktionerna lyder följande likheter:

i. $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$;

ii. $\cosh(-x) = \cosh x$; och

iii. $\sinh(-x) = -\sinh x$

för alla $x \in \mathbf{R}$.

(b) Utred om det är möjligt att hitta additionsformler för de hyperboliska funktionerna som motsvarar (5.9) och (5.10) för trigonometriska funktioner.

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 20:e december 2024.
Komplettering: kl. 12.30, den 17:e januari 2025.

F.1-3 Stora numeriska fel kan uppstå när man försöker beräkna (eller närmare sagt uppskatta) $\exp(x) - 1$ på en dator när x är nära 0 eftersom det riktiga svaret är nära 0. Därför implimenterar vissa dator en dedicerad rutin för att beräkna $\exp(x) - 1$. En möjlighet är att använder likheten

$$\exp(x) - 1 = \frac{2\tanh(x/2)}{1 - \tanh(x/2)} \tag{F.1}$$

där tanh är en annan hyperbolisk funktion (jämför med uppgift F.1-2) eftersom högerledet har en bra exakthet på en dator när x är nära 0. *Hyperbolisk tangens* är definierad enligt formeln

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{för alla } x \in \mathbf{R}.$$

Bevisa (F.1).

F.2 Den naturliga logaritmfunktionen och irrationella potenser

Självstudieuppgifter

F.2-1 ∗2.7, 2.8, ∗2.9, 2.11 och ∗2.14 från *Problem för envar.*

F.2-2 Uppgifter 6.5, 6.6 och 6.7 från *Ge svar på tal* [3].

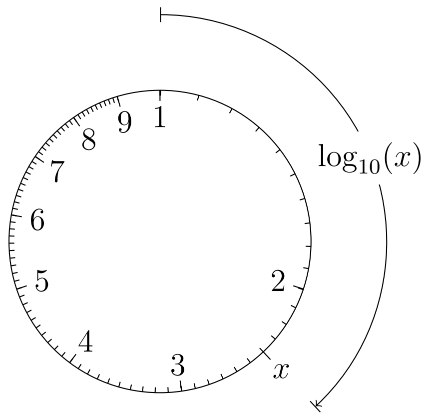
F.2-3 ∗2.28, ∗2.35 och 2.36 från *Problem för envar.*

Grupparbete

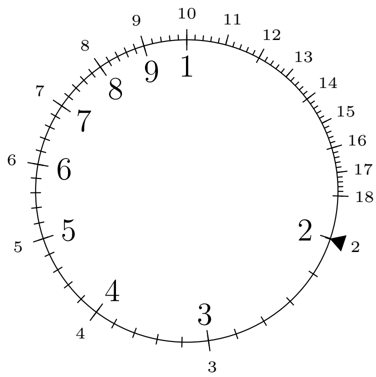
‡ F.2-4 Den här uppgiften handlar om funktionen $\log_{10}$, det vill säga logaritm bas 10 (se uppgift 6.7), så

$$\log_{10}(x) = y \iff 10^y = x.$$

Betrakta en cirkel med en omkrets av längd 1. På cirkelns överstä punkt skriver vi talet 1. Vi placerar andra tal $x > 0$ enligt regeln att avståndet från 1 till x medurs längs omkretsen är $\log_{10}(x)$.[1] I bilden till höger visar vi placeringarna av heltalen 1 till 9 (med icke-heltal naturligtvis däremellan). Placeringen av högre heltal försätter att varva runt cirkeln.



(a) Vilka andra tal läser vi av på samma punkt som talet 1?

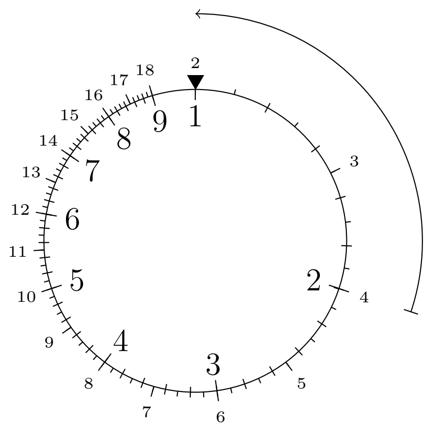


I bilden till vänster har vi ritat en annan varv av skalen på utsidan av cirkeln, den här gången från 2 till 18.

[1] När $\log_{10}(x) < 0$ mätar vi avståndet från 1 moturs istället (på liknande sätt till det vi gör för negativa vinklar).

(oscha050)

I bilden till höger har vi roterat den yttre skalan så att vi läser av måttet 2 på yttre skalen på samma punkt som vi läser av talet 1 på den inre skalan.



(b) Finns det i sista bilden ett samband mellan placeringen av talen på inre skalen och på yttre skalan?

(c) Vad kunde man säga om vi istället roterar yttre skalan så att vi läser av talet 3 på samma plats som talet 1 på inre skalan? Motivera ert svar.

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 20:e december 2024.
Komplettering: kl. 12.30, den 17:e januari 2025.

F.2-5 Visa att $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, som är definierade enligt formeln

$$f(x) = 64e^x - e^{-x} \quad \text{för } x \in \mathbf{R},$$

är en bijektiv funktion. Räkna ut dess invers.

MODUL G

Komplexa tal

G.1 Algebraiska operationer

Självstudieuppgifter

G.1-1 Uppgifter 7.1 och 7.2 från *Ge svar på tal* [3].

G.1-2 1.66, 1.68, 1.69, 1.70 (det vill säga bevisa del (c) av sats 7.6) från *Problem för envar* [4].

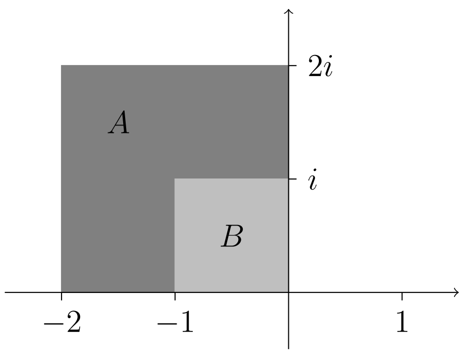
G.1-3 1.71, 1.73, och 1.79 från *Problem för envar* [4].

Grupparbete

† G.1-4 Det här problemet handlar om att undersöker var i det komplexa talplanet rötterna till ekvationen

$$z^2 + 2az + 4 = 0$$

ligger för olika värden på det reella talet a. Genom figuren nedan har vi definerat två områden A och B i den andra kvadranten i det komplexa talplanet. Begränsningslinjerna för de båda omradena, som alla är parallella med koordinataxlarna, tillhör inte respektive område. (Speciellt har A och B inga gemensamma punkter.)



(a) Avgör om ekvationen $z^2 + 2az + 4 = 0$ har någon lösning i område A eller B i fallen då $a = -1, 0, 1$.

(b) Undersök villkor för a så att ekvationen $z^2 + 2az + 4 = 0$ har en lösning med positiv imaginärdel.

(c) Undersök villkor för a så att ekvationen $z^2 + 2az + 4 = 0$ har en lösning med negativ realdel och positiv imaginärdel.

(d) Undersök villkor för a så att ekvationen

$$z^2 + 2az + 4 = 0$$

har en lösning i A respektive i B.

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 20:e december 2024.
Komplettering: kl. 12.30, den 17:e januari 2025.

G.1-5 (a) Hitta alla $w \in \mathbf{C}$ så att $w^2 = -3 + 4i$.

(b) Hitta alla komplexa tal så att $z^2 + (10 + 6i)z + (19 + 26i) = 0$.

G.2 Funktioner och geometri

Självstudieuppgifter

G.2-1 Uppgifter 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7 och 7.8 från *Ge svar på tal* [3].

G.2-2 2.65, 2.66, ∗2.68, ∗2.80, ∗2.81 och 2.82 från *Problem för envar*.

Inlämningsuppgift

Deadlines:

Första inlämning: kl. 12.30, den 20:e december 2024.
Komplettering: kl. 12.30, den 17:e januari 2025.

G.2-3 (a) Bekräfta att sats 1.14 gäller även när r är ett komplex tal.

(b) Förenkla $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} e^{2\pi ik/11}$.

MODUL V

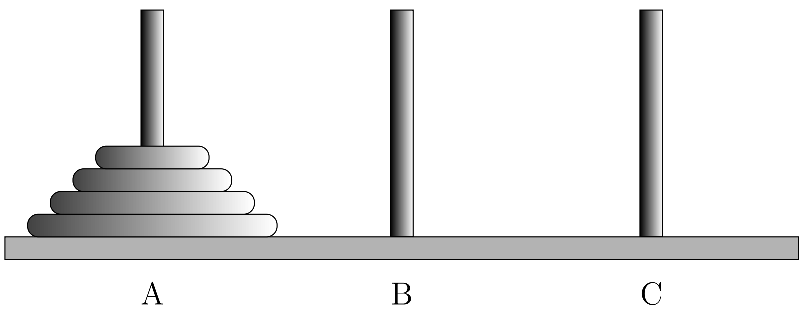
Vinjetter

Grupp 1

V.1-1 *Tornen i Hanoi* är ett matmatiskt spel eller en logisk gåta av fransk matematiker Édouard Lucas. Spelet består av tre vertikala pinnar, A, B och C. På pinne A sitter n stycken cirkulära skivor av olika storlekar och med hål i (i bildan nedan visas fallet $n = 4$). Skivorna är sorterade i storleksordning med den största skivan på bottnen. Spelet går ut på att flytta skivorna från A till C utifrån följande regler:

- varje drag utgörs av att flytta den översta skivan på en pinne till en annan pinne; och
- en större skiva får aldrig läggas på en mindre.

Pinne B kan användas som en hjälppinne. Utförska om det är möjligt att lösa gåtan och i så fall hur många drag tar det?



V.1-2 Vi har sett två bevis av formeln (A.2) för summan av en aritmetisk följd: den första kan beskrivas som observationen att de flesta termer i $(1-r)S_n$ (med notation från beviset av sats 1.14) tar ut varandra; och den andra var en induktionsbevis.

(a) Kan ni hitta (på egen hand eller med hjälp från böcker/internätet) andra bevis för (A.2)?

(b) Betrakta istället summan

$$\sum_{k=1}^{n} kr^k.$$

Kan en av metoderna nämnt ovan för att bevisa (A.2) hjälper oss hitta en formel för summan?

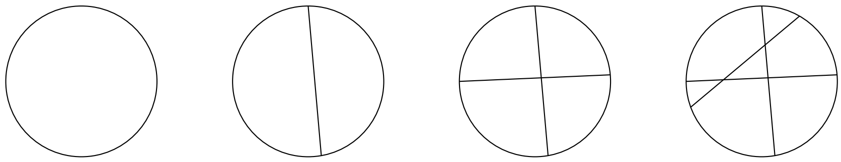
(c) Kan ni hitta en formel för

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 r^k$$

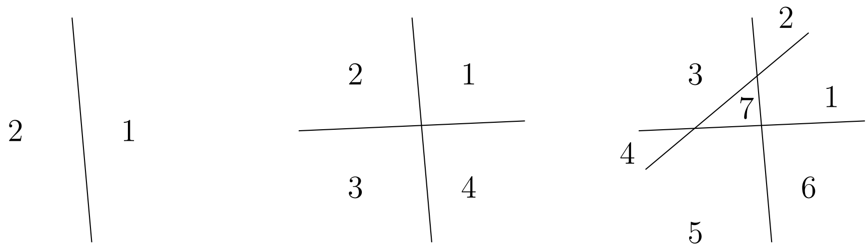
eller andra liknande summor?

Grupp 2

◇ V.2-1 En matematikstudent fick uppdrag från studentkåren att fixa mat till en fest. Han har beställt en pizza och kommer dela upp det bland alla festbesöker genom att skära pizzan i raka linjer. Han bryr sig inte om delarna är lika större eller inte. Första skärningen delar pizzan i två delar, och den andra delar den i fyra. Den tredje kan dela den i 6 eller 7 beroende på hur det görs.

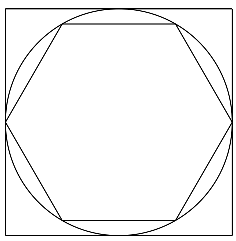


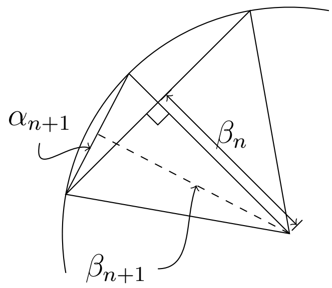
För att förenkla geometrin får man anta att pizzan är hela planet (så varje skärning delar hela planet i två delar). Då ser de sista tre bilderna ut så här:



Hur kan han dela planet i så många bitar som möjligt efter n skärningar? Hur många bitar blir det då?

V.2-2 Använd bilden nedan till vänster för att beräkna grova uppskattningar av π.





Kan ni förbättra underskattningen med hjälp av en oktagon eller andra polygoner, idéer från uppgift D.2-4 och bilden till höger?

Grupp 3

V.3-1 I avsnitt 1.2 såg vi ett par olika talsystem. Alla talsystem har för- och nackdelar och många talsystem är intressanta från ett historiskt perspektiv.

Läs om en eller två andra talsystem på nätet eller i böcker. Sammanfatta det ni upptäcker.

Förslag till talsystem ni kan utreda:

- Babyloniska talsystemet;

- Romerska siffror;
- Mayakulterens talsystem;
- Katovik siffersystem;
- Cisterciens talsystem.

V.3-2 *Josephus problemet* är en matematisk problemställning som handlar om en grupp soldater som belägras i en grotta. Soldaterna väljer självmord över kapitulation, så kommer överens om ett sätt att begå självmord. Problemet har fått sitt namn från den judiske historikern Flavius Josephus och hans beskrivning av det judisk-romerska kriget.

De n soldaterna i grottan står i en cirkel, numrerade från 1 till n. Soldat 1 dödar soldat 2, sedan dödar soldat 3 soldat 4, och sedan dödar soldat 5 soldat 6, och så försätter de runt cirkeln till alla förutom en person är död. Den som överlever får antingen döda sig själv, eller, som det var i Josephus fall, kapitulera till Romarna.

Till exempel, om vi har 10 personer (numrerade 1 till 10), skulle elimineringen fortskrida enligt följande:

- Person 2 elimineras (av person 1).
- Person 4 elimineras (av person 3).
- Person 6 elimineras (av person 5).
- Person 8 elimineras (av person 7).
- Person 10 elimineras (av person 9).
- Person 3 elimineras (av person 1).
- Person 7 elimineras (av person 5).
- Person 1 elimineras (av person 9).
- Person 9 elimineras (av person 5).

Överlevaren i detta fall skulle vara person 5.

Utförska vilken person överlevar som en funktion av n.

Grupp 4

V.4-1 Den här uppgiften är en fortsättning av uppgift A.2-2 och uppgift B.1-3.

(a) Vi har nu sett formler för summan (A.4) i fallen $\ell = 0$, $\ell = 1$ och $\ell = 2$. Kan ni härleda en formel för $\ell = 3$?

(b) …Och vad gäller för andra ℓ?

V.4-2 Definiera

$$k^{\overline{\ell}} = k(k+1)\dots(k+(\ell-1)) = \prod_{j=0}^{\ell-1}(k+j)$$

för $\ell \in \mathbf{Z}_{+}$. I den här uppgiften försöker vi tänka på $k^{\overline{\ell}}$ som en diskret version av den kontinuerliga funktionen x^{ℓ}.

(oscha050)

(a) En diskret version av derivatan är differensen: Vad är

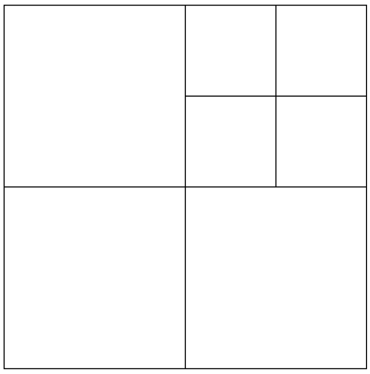
$$k^{\overline{\ell}} - (k-1)^{\overline{\ell}}$$

(b) En diskret version av integration är summation. Skriv om formeln i uppgift B.1-3 med vår nya notation.

(c) Se ni något mönster i era olika versioner av uppgift B.1-3?

Grupp 5

V.5-1 Är det möjligt att dela upp en fyrkant i 10 mindre icke-överlappande fyrkanter? Eller 1000 fyrkanter? Andra antal fyrkanter? Här är ett exempel när en fyrkant är uppdelat i 7 mindre icke-överlappande fyrkanter.



V.5-2 Pascals triangel innehåller många mönster och mycket struktur. Till exempel, summan av den n:e raden av Pascals triangel är lika med 2^n. Det kan uttryckas som

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^k.$$

Ett sätt att se det är att utveckla $(1+1)^n$ med hjälp av binomial satsen. Utforska andra struktur i Pascals triangel. Här är ett par idéer:

(a) Vilka mängder tal förekommer längs triangelns olika diagonaler? Förklara varför de förekommer.

(b) Kan ni motivera formeln

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

med hjälp av Pascals triangel?

Leta gärna på internätet och förklara med egna ord.

MODUL X

Repetitionsuppgifter

X-1 Nega följande påståenden:

(a) ”Det regnar.”
(b) ”Alla katter är svarta.”
(c) ”Det finns en elev som inte är trött.”
(d) ”Alla fåglar kan flyga.”
(e) ”Ingen bil är röd.”

Lösning:

(a) ”Det inte regnar.”

(b) ”Det finns (minst) en katt som inte är svarta.”

(c) ”Alla elever trötta.”

(d) ”Det finns en fågel som inte kan flyga.”

(e) ”Det finns (minst) en bil som är röd”

X-2 Skriv kontrapositionen av dessa påståenden:

- ”Om det regnar, då är marken blöt.”
- ”Om ett tal är jämnt, då är det delbart med 2.”
- ”Om du pluggar hårt, kommer du att klara tentan.”
- ”Om det är kallt ute, då bär jag en jacka.”
- ”Om en person är svensk, då talar de svenska.”
- ”Om katten är hungrig, då mjauar den.”

Lösning:

- ”Om marken inte är blöt regnar det inte.”
- ”Om ett tal inte är (jämnt) delbart med 2 är det inte jämnt.”
- ”Om du inte klara tentan har du inte pluggat hårt.”
- ”Om jag inte bär en jacka är det inte kallt ute.”
- ”Om en person inte talar svenska, är de inte svensk.”

- ”Om katten inte mjauar, är den inte hungrig.”

X-3 Utvärdera följande uttryck:

(a) $2^3 \times 2^4$
(b) $5^6 \div 5^2$
(c) $(3^2)^3$
(d) 4^0
(e) 7^{-2}
(f) $(-2)^4$
(g) $2^3 \times 3^3$
(h) $10^5 \div 2^2$
(i) $(2^3 \times 5^2)^2$
(j) $\frac{2^5 \times 3^2}{2^3 \times 3}$
(k) $\left(\frac{4^3}{2^2}\right)^2$
(l) $\frac{(2^3 \times 5^2)^2}{(2^2 \times 5)^3}$

Lösning:

(a) $2^3 \times 2^4 = 2^7 = 128$
(b) $5^6 \div 5^2 = 5^4 = 625$
(c) $(3^2)^3 = 3^6 = 729$
(d) $4^0 = 1$
(e) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$
(f) $(-2)^4 = 16$
(g) $2^3 \times 3^3 = 6^3 = 216$
(h) $10^5 \div 2^2 = 10^3 \times 5^2 = 25000$
(i) $(2^3 \times 5^2)^2 = (2 \times 10^2)^2 = 40000$
(j) $\frac{2^5 \times 3^2}{2^3 \times 3} = 2^2 \times 3 = 12$
(k) $\left(\frac{4^3}{2^2}\right)^2 = 4^4 = 256$
(l) $\frac{(2^3 \times 5^2)^2}{(2^2 \times 5)^3} = \frac{2^6 \times 5^4}{2^6 \times 5^3} = 5$

X-4 Vänja dig vid sigma notation genom att lösa följande repetitionsuppgifter:

(a) $\sum_{k=1}^{5} k$
(b) $\sum_{k=1}^{5} (k+2)$
(c) $\sum_{k=1}^{3} k^2$
(d) $\sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} (k \cdot j)$
(e) $\sum_{k=1}^{5} 3k$
(f) $\sum_{k=1}^{4} (2k+1)$
(g) $\sum_{k=1}^{3} (k^2 - 1)$
(h) $\sum_{k=2}^{4} k$
(i) $3 \sum_{k=5}^{1} k$
(j) $4 + 2 \sum_{k=1}^{4} k$
(k) $\sum_{k=1}^{3} (k-1)(k+1)$
(l) $\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} (k \cdot j)$

Vissa par av summorna är lika. Är de tillfälligheter eller ligger det något mer allmänt regel bakom det?

Lösning:

(a) $\sum_{k=1}^{5} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

(b) $\sum_{k=1}^{5} (k+2) = (1+2)+(2+2)+(3+2)+(4+2)+(5+2) = 3+4+5+6+7 = 25$

(c) $\sum_{k=1}^{3} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$

(d) $\sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} (k \cdot j) = (1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3) + (2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = (1+2+3)+(2+4+6) = 6 + 12 = 18$

(e) $\sum_{k=1}^{5} 3k = (3 \cdot 1) + (3 \cdot 2) + (3 \cdot 3) + (3 \cdot 4) + (3 \cdot 5) = 45$

(f) $\sum_{k=1}^{4} (2k+1) = (2 \cdot 1+1)+(2 \cdot 2+1)+(2 \cdot 3+1)+(2 \cdot 4+1) = 3+5+7+9 = 24$

(g) $\sum_{k=1}^{3}(k^2-1) = (1^2-1)+(2^2-1)+(3^2-1) = 0+3+8 = 11$

(h) $\sum_{k=2}^{4} k = 2+3+4 = 9$

(i) $3\sum_{k=1}^{5} 3k = 3(1+2+3+4+5) = 3\cdot 15 = 45$

(j) $4+2\sum_{k=1}^{4} k = 4+2(1+2+3+4) = 4+2\cdot 10 = 24$

(k) $\sum_{k=1}^{3}(k-1)(k+1) = (1-1)(1+1)+(2-1)(2+1)+(3-1)(3+1) = 0+1\cdot 3+2\cdot 4 = 11$

(l) $\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}(k\cdot j) = (1\cdot 1+2\cdot 1)+(1\cdot 2+2\cdot 2)+(1\cdot 3+2\cdot 3) = (1+2)+(2+4)+(3+6) = 3+6+9 = 18$

Titta på räknereglerna i sats 1.10 för att bedöma vika likheter inte är bara tillfälligheter.

X-5 (a) Hitta summan av de första 20 termerna i den aritmetiska serien

$$(2, 5, 8, 11, \ldots)$$

(b) Beräkna summan av de första 15 termerna i den aritmetiska serien

$$(7, 10, 13, 16, \ldots)$$

(c) Bestäm summan av de första 30 termerna i den aritmetiska serien

$$(-3, 1, 5, 9, \ldots)$$

(d) Hitta summan av de första 25 termerna i den aritmetiska serien

$$(12, 17, 22, 27, \ldots)$$

(e) Beräkna summan av de första 10 termerna i den aritmetiska serien

$$(4, 9, 14, 19, \ldots)$$

Lösning:

(a)

$$\sum_{k=1}^{20}(3k-1) = 3\left(\sum_{k=1}^{20} k\right) - 20 = 3\frac{20(20+1)}{2} - 20 = 609$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{15}(3k+4) = 3\left(\sum_{k=1}^{15} k\right) - 20 = 3\frac{15(15+1)}{2} + 4\times 15 = 420$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{30}(4k-7) = 4\left(\sum_{k=1}^{30} k\right) - 20 = 4\frac{30(30+1)}{2} - 7\times 30 = 1650$$

(d)

$$\sum_{k=1}^{25}(5k+7) = 5\left(\sum_{k=1}^{25} k\right) - 20 = 5\frac{25(25+1)}{2} + 7 \times 25 = 1800$$

(e)

$$\sum_{k=1}^{10}(5k-1) = 5\left(\sum_{k=1}^{10} k\right) - 20 = 5\frac{10(10+1)}{2} - 5 \times 10 = 265$$

X-6 (a) Find the sum of the first 10 terms of the geometric series:

$$(2, 6, 18, 54, \ldots)$$

(b) Determine the sum of the first 14 terms of the geometric series:

$$(5, 15, 45, 135, \ldots)$$

(c) Find the sum of the geometric series with the first term $a = 4$ and common ratio $r = \frac{1}{2}$ for the first 6 terms.

(d) Find the sum of the first 7 terms of the geometric series:

$$(3, 9, 27, 81, \ldots)$$

(e) Determine the sum of the first 10 terms of the geometric series:

$$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$$

(f) Calculate the sum of the first 6 terms of the geometric series:

$$(10, 30, 90, 270, \ldots)$$

(g) Find the sum of the geometric series with the first term $a = 8$ and common ratio $r = \frac{1}{4}$ for the first 13 terms.

(h) Evaluate the sum of the first 15 terms of the geometric series:

$$(7, -14, 28, -56, \ldots)$$

Lösning:

(a)

$$\sum_{k=1}^{10} 2 \times 3^{k-1} = 2\frac{1-3^{10}}{1-3} = 3^{10} - 1$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{14} 5 \times 3^{k-1} = 5\frac{1-3^{14}}{1-3} = 5\frac{3^{14}-1}{2}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{6} 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 4\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6}{1-\frac{1}{2}} = 8\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right)$$

(d)

$$\sum_{k=1}^{7} 3 \times 3^{k-1} = 3\frac{1-3^7}{1-3} = 3\frac{3^7-1}{2} = 5949$$

(e)

$$\sum_{k=1}^{10} 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right) =$$

(f)

$$\sum_{k=1}^{6} 10 \times 3^{k-1} = 10\frac{1-3^6}{1-3} = 5(3^6-1) =$$

(g)

$$\sum_{k=1}^{13} 8 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = 8\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{13}}{1-\frac{1}{4}} = 2\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{13}}{3} =$$

(h)

$$\sum_{k=1}^{15} 7 \times (-2)^{k-1} = 7\frac{1-(-2)^{15}}{1-(-2)} = 7\frac{1+2^{15}}{3} =$$

X-7 (a) Lös den kvadratiska ekvationen:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

(b) Hitta rötterna till den kvadratiska ekvationen:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

(c) Bestäm värdena på x för vilka den kvadratiska ekvationen är uppfylld:

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

(d) Lös den kvadratiska ekvationen med hjälp av den kvadratiska formeln:

$$3x^2 - 2x - 8 = 0$$

(e) Hitta rötterna till den kvadratiska ekvationen genom att kvadratkomplettera:

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

Lösning:

(a) Faktorisera den kvadratiska ekvationen:

$$(x-2)(x-3) = 0$$

Därför är rötterna:

$$x = 2 \quad \text{eller} \quad x = 3$$

(b) Använd den kvadratiska formeln $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} \\ \iff x &= \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \\ \iff x &= \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \\ \iff x &= \frac{-3 \pm 5}{4} \end{aligned}$$

Därför är rötterna:

$$x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{eller} \quad x = \frac{-8}{4} = -2$$

(c) Faktorisera den kvadratiska ekvationen:

$$(x+2)^2 = 0$$

Därför är roten:

$$x = -2$$

(d) Använd den kvadratiska formeln $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3} \\ \iff x &= \frac{2 \pm \sqrt{4+96}}{6} \\ \iff x &= \frac{2 \pm \sqrt{100}}{6} \\ \iff x &= \frac{2 \pm 10}{6} \end{aligned}$$

Därför är rötterna:

$$x = \frac{12}{6} = 2 \quad \text{eller} \quad x = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3}$$

(e) Skriv om ekvationen som:

$$(x+3)^2 = 0$$

Därför är roten:

$$x = -3$$

X-8 (a) Uttryck följande som en enda logaritm:

$$2\log_a(x) - \frac{1}{2}\log_a(y) + \log_a(z)$$

(oscha050)

(b) Lös för x i följande ekvation:

$$2\ln(x) - \ln(5x-6) = 0$$

(c) Om $\log_k(m) = p$ och $\log_k(n) = q$, uttryck $\log_k\left(\frac{m^2n^3}{\sqrt{m}}\right)$ i termer av p och q.

Lösning:

(a)

$$2\log_a(x) - \frac{1}{2}\log_a(y) + \log_a(z) = \log_a(x^2) - \log_a(y^{1/2}) + \log_a(z) = \log_a\left(\frac{x^2z}{\sqrt{y}}\right)$$

(b)

$$\begin{aligned} 2\ln(x) - \ln(5x-6) = 0 &\iff \ln(x^2) = \ln(5x-6) \\ &\iff x^2 = 5x-6 \iff x^2 - 5x + 6 = 0 \\ &\iff x = 2 \text{ eller } 3 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \log_k\left(\frac{m^2n^3}{\sqrt{m}}\right) &= \log_k(m^2) + \log_k(n^3) - \log_k(m^{1/2}) \\ &= 2\log_k(m) + 3\log_k(n) - \frac{1}{2}\log_k(m) \\ &= 2p + 3q - \frac{1}{2}p = \frac{3}{2}p + 3q \end{aligned}$$

X-9 Utvärdera följande uttryck:

(a) $(3+4i)+(2-5i)$	(d) $(3+4i)(2-5i)$	(g) $\lvert(3+4i)\rvert$	(j) $\mathrm{Arg}(4+4i)$
(b) $(6-i)+(1-3i)$	(e) $(6-i)(1-3i)$	(h) $\lvert(5-12i)\rvert$	(k) $\mathrm{Arg}(\sqrt{3}-i)$
(c) $(7+2i)+(8+9i)$	(f) $(7+2i)(8+9i)$	(i) $\lvert(2-7i)\rvert$	(l) $\arg(-7i)$

Lösning:

(a) $5-i$	(d) $26-7i$	(g) 5	(j) $\frac{\pi}{4}$
(b) $7-4i$	(e) $3-19i$	(h) 13	(k) $-\frac{\pi}{6}$
(c) $15+11i$	(f) $38+79i$	(i) $\sqrt{53}$	(l) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ där $k \in \mathbf{Z}$