Manual de Matemática Moderna para Desenvolvedores

Willams Sousa

20 de abril de 2025

Este é um livro de demonstração criado em LaTeX no VSCode.

https://github.com/osdeving/

Conteúdo

1
Introdução

1.1 Motivação

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Vivamus porta, purus eget laoreet scelerisque, neque libero tincidunt odio, at consequat magna justo id arcu.

Suspendisse potenti. Curabitur ac ligula nec nunc facilisis varius. Donec ut ligula id enim efficitur convallis. Sed euismod, nunc in facilisis tincidunt, nisi nisl aliquet nunc, a bibendum justo nunc non nisi.

1.2 Objetivos

- Objetivo 1
- Objetivo 2
- Objetivo 3
- Objetivo 4

1.3 Sobre o Livro

Este livro está estruturado em capítulos independentes que exploram teoria e aplicações matemáticas.

2

Máximo Divisor Comum (MDC)

Definição

Seja $b \neq 0$. Dizemos que b é um divisor de a se existe um inteiro m tal que $a = mb$. Neste caso:

- b é divisor de a; - a é múltiplo de b.

Utilizamos $\gcd(a, b)$ para denotar o "maior divisor comum" entre a e b: o maior inteiro que divide ambos. Por convenção:

- $\gcd(0, 0) = 0$;
- $\gcd(a, 0) = |a|$ para $a \neq 0$.

Definição formal

Sejam a e b inteiros, e c um inteiro positivo. Dizemos que $c = \gcd(a, b)$ se:

1. c divide a e b;
2. Qualquer outro inteiro que divide a e b também divide c.

Outra forma equivalente:

$$\gcd(a, b) = \max\{k \in \mathbb{Z}^+ \mid k \mid a \wedge k \mid b\}$$

Propriedades:

- $\gcd(a, b) = \gcd(a, -b) = \gcd(-a, b) = \gcd(|a|, |b|)$;
- $\gcd(60, 24) = \gcd(60, -24) = 12$.

Relativamente primos: Dois inteiros a e b são relativamente primos se $\gcd(a, b) = 1$.

- Exemplos: $\gcd(8, 15) = 1$, pois os divisores positivos de 8 são $\{1, 2, 4, 8\}$, e de 15 são $\{1, 3, 5, 15\}$. O único em comum é 1.

Algoritmo de Euclides

Para encontrar $\gcd(a, b)$, utilizamos divisões sucessivas:

1. Suponha $a \geq b > 0$.
2. Divida a por b: $\quad a = q_1 b + r_1, \quad$ com $0 \leq r_1 < b$.
3. Se $r_1 = 0$, então $\gcd(a, b) = b$.
4. Caso contrário, divida b por r_1: $\quad b = q_2 r_1 + r_2$.
5. Continue dividindo: $r_1 = q_3 r_2 + r_3$, etc.
6. O processo termina quando $r_n = 0$. Então:

$$\gcd(a, b) = r_{n-1}$$

Forma geral (sequência de divisões):

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1 \\
b &= q_2 r_1 + r_2 \\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_n r_{n-1} + r_n \\
r_{n-1} &= q_{n+1} r_n + 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \gcd(a, b) = r_n$$

Validação: - O algoritmo é válido porque r_n divide r_{n-1}, que divide r_{n-2}, e assim por diante até a e b. - Qualquer outro divisor comum também divide todos os r_i, então r_n é o maior divisor comum.

Exemplo numérico (valores grandes)

Queremos calcular $\gcd(1160718174,\ 316258250)$.

$$
\begin{aligned}
1160718174 &= 3 \cdot 316258250 + 211943424 \\
316258250 &= 1 \cdot 211943424 + 104314826 \\
211943424 &= 2 \cdot 104314826 + 33237872 \\
104314826 &= 3 \cdot 33237872 + 46701210 \\
&\vdots \\
... &= ... + 1078 \\
\therefore \quad \gcd(1160718174,\ 316258250) &= 1078
\end{aligned}
$$

Resumo do processo: Cada linha da divisão segue o formato:

$$r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$$

E termina quando $r_n = 0$, sendo que r_{n-1} é o resultado.

Importância: O algoritmo de Euclides é simples e extremamente eficiente, sendo fundamental para aplicações em criptografia, especialmente na teoria dos números e em algoritmos de chave pública como RSA.

3

Fundamentos Matemáticos

3.1 Conjuntos e Funções

Definição 3.1 (Conjunto)**.** *Um* ***conjunto*** *é uma coleção de objetos bem definidos.*

Teorema 3.1 (União de conjuntos)**.** *Se A e B são conjuntos, então $A \cup B$ também é um conjunto.*

Exemplo 3.1. *Considere $A = \{1, 2\}$ e $B = \{2, 3\}$. Então $A \cup B = \{1, 2, 3\}$.*

3.2 Fórmulas matemáticas

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{3.1}$$

4

Elementos Avançados

4.1 Listas

1. Item numerado 1

2. Item numerado 2

4.2 Quadros

Texto em destaque com quadro simples.

Nota

Destaque visual com tcolorbox.

4.3 Código-fonte

```
def fatorial(n):
    if n == 0:
        return 1
    return n * fatorial(n-1)
```

Coluna A	Coluna B	Coluna C
Esq	Centro	Dir

Tabela 4.1: Exemplo de tabela simples

4.4 Tabelas

4.5 Inserção de Imagens

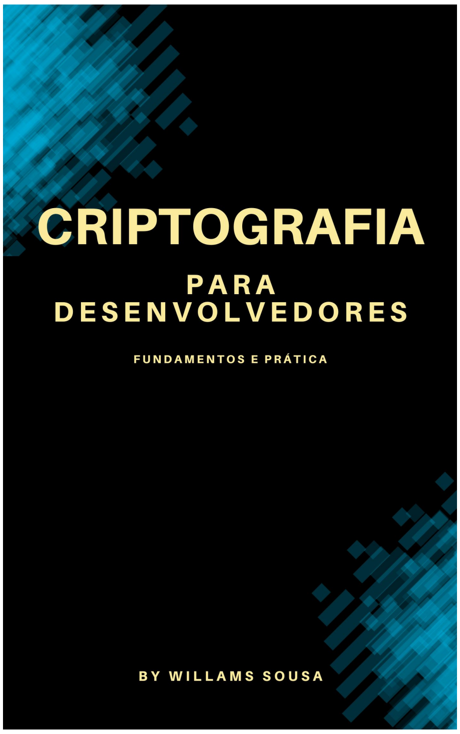

Figura 4.1: Exemplo de imagem

4.6 Links externos e citações

Veja o repositório do projeto em: https://github.com/osdeving/

> "A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo."— Galileu Galilei

Blah blah [?].
Este é um exemplo de nota[1].
Texto com palavra marcada.

[1] Aqui está a nota de rodapé.

A
Códigos-fonte

Conteúdo adicional ou implementações completas.

B
Documentos adicionais

Documentos de apoio, tabelas extensas ou materiais externos.

Índice