ゼミ形式の決定手続きに見る，複数回に渡る同一 2 択投票問題が持つ社会的選択理論的性質

一橋大学経済学部 2117272C 横山彪人

2020 年 12 月 6 日

概要

私の所属するゼミでは，その実施形式をオンラインにするか対面にするかを毎回メンバーによる投票で決めている．これは，複数人の選好を集約して 1 つの選択肢を選び取る社会的選択の問題である．そこで本論文では，このゼミ形式の決定手続きが意見集約としていかなる性質を持っているかを述べる．その足掛かりとして，まずはボルダルールと戦略的操作に関する議論を紹介する．その後，ゼミの実施形式決定手続きの性質について議論する．そこでは，各個人は選択肢に対する強選好を持っており，各回の投票ではその時点で実現可能な選択肢の中で最も好ましいものを実現するような形式に投票するという仮定を置く．その元で，この手続きがペア全敗者を選ばないこと，いかなる 2 人以上の人数と 2 回以上のゼミの回数に対してもボルダ勝者と異なる選択肢を選びうること，そして，回数に関する単峰性が成り立っているときにはその中位の回数に関連の深い選択肢が選ばれることを示す．

目次

1　はじめに

1.1　問題設定の背景

本論文が執筆された 2020 年は，COVID-19 の感染拡大の影響で前期の講義がほぼすべてオンラインに移行した．しかし後期になるとこの制限が緩和されたことで，ゼミに関しては対面形式での実施が可能になった．私の所属するゼミではオンラインと対面を併用し，毎回次のゼミの実施形式のみをオンラインか対面かの 2 択投票で決めることになった．

この手続きは複数人の選好を集約して 1 つの選択肢を選び取る社会的選択の問題と見ることができる．従って，その集約方法がいかなる性質を持っているかを問うことができ，それを探究したいというのが本論文執筆の動機である．

1.2　社会的選択理論とは何か

2 人以上の個人で 1 つの意思決定をする際に，どのように異なる選好同士の折り合いをつけ，意思を 1 つにまとめ上げるのがよいのか，その意見集約方法の理論的性質を分析するのが社会的選択理論の主題の 1 つである．ここで，そのモチベーションを共有するために，意見集約方法の性質が重要になる例を 2 つ述べる．

1 つは多数決による例である．ある中学生のクラスで授業が休みになり，その時間を自由に使ってよい状況を考える．ただし担任の教員には監督責任があるので，クラスの全員が同じ場所にいなければならない．このクラスには全員で 30 人の生徒がおり，18 人は体を動かして遊びたいと思っており，残る少数派の 12 人は教室で静かに読書をしたいと思っている．このとき，「校庭でサッカーをして過ごす」という選択肢と「教室で読書をして過ごす」という選択肢で多数決を行えば，前者が 18 人の指示を得て多数決に勝利する．一方でこの 2 つの選択肢に加えて「体育館でバスケットボールをして過ごす」という選択肢が存在し，体を動かして遊びたい 18 人の生徒がサッカーとバスケットボールの選択肢に半々に割れた場合には，多数決の勝者は「教室で読書をして過ごす」になる．この結果は全体における多数派である，体を動かして遊びたい 18 人にとっては一番望ましくない選択肢であろう．これは似たような選択肢の存在によって票の割れが発生し，結果として少数派の意見が採用される事例である．この場合，多数決は意見集約方法として好ましいだろうか，そうでないならば，他に優れた方法はあるだろうか．

もう 1 つは Malkevitch(1990) によって提示された次の例で，意見集約方法の選択が最終的な結果を変えてしまうものである．まず設定として，55 人の有権者が 5 つの選択肢 a, b, c, d, e について，表 1 のような選好を持っているとし，意見集約方法として次の 4 つを考える．

1 つ目は多数決である．この場合は a が 18 票を得て勝利する．

2 つ目，多数決の勝利者が過半数の指示を得ていない場合は 2 位と決選投票を行う方法を採用すればどうなるだろうか．多数決で 1 位の a が獲得した 18 票は過半数ではないので，2 位の b と決選投票が行われる．表 1 によれば，a を b より好むものは 18 人おり，その逆は 37 人いるので，最終的には b が勝利する．これは多数決と異なる選択肢を選び取っている．

3 つ目は，毎回の多数決で最少票の選択肢を消去していく方法である．すると 1 段回目では 6 票しか集まらなかった e が消去され，2 段回目では 9 票しか集まらなかった d が消去され，3 段回目では 16 票しか集まらなかった b が消去され，最後の段階では 18 票しか集まらなかった a が消去されて c が残る．これは前の 2 つのいずれとも異なる選択肢を選び取っている．

表 1　Malkevitch(1990) の例

	18 人	12 人	10 人	9 人	4 人	2 人
1 位	a	b	c	d	e	e
2 位	b	e	b	c	b	c
3 位	e	d	e	e	d	d
4 位	c	c	d	b	c	b
5 位	b	a	a	a	a	a

4 つ目は，順位ごとに重みづけの得点を与えて，その総得点が一番高いものを選ぶ方法である．ここでは 1 位に 5 点，2 位に 4 点，...，5 位に 1 点を与えることにする．このとき，選択肢を引数にその総得点を返す関数を $p(\cdot)$ と表すと，それぞれの総得点は

$$\begin{aligned}
p(a) &= 5\times 18 \ + \ 4\times 0 \ + \ 3\times 0 \ + \ 2\times 0 \ + \ 1\times 37 = 127\\
p(b) &= 5\times 12 \ + \ 4\times 14 \ + \ 3\times 0 \ + \ 2\times 11 \ + \ 1\times 18 = 156\\
p(c) &= 5\times 10 \ + \ 4\times 11 \ + \ 3\times 0 \ + \ 2\times 34 \ + \ 1\times 0 = 162\\
p(d) &= 5\times 9 \ + \ 4\times 18 \ + \ 3\times 18 \ + \ 2\times 10 \ + \ 1\times 0 = 191\\
p(e) &= 5\times 6 \ + \ 4\times 12 \ + \ 3\times 37 \ + \ 2\times 0 \ + \ 1\times 0 = 189
\end{aligned}$$

のように計算されるので，総得点が一番高いのは d となる．この結果は前の 3 つのいずれとも異なるものである．

この例が示すように，有権者の選好が変わらなくても，その集約方法を変えると最終的な結果も変わってきてしまう．最初の中学生による多数決の例とこの Malkevitch の例が示唆するものは，どの集約方法を採用するべきか，採用される集約方法はどのような性質を満たしているべきかという問題が重要だということである．

1.3　本誌の構成

2 節では意見集約方法のベンチマークとして多数決とボルダルールを取り上げる．特に多数決がペア全敗者を選んでしまうという問題点を抱えていること，ボルダルールはそれを回避するばかりか，他にも様々な優れた性質を持っていることを紹介する．

3 節では意見の集約結果に対する戦略的な操作の可能性について取り上げる．まず有名な不可能性定理であるギバート＝サタスウェイト定理について述べたあと，個々の選好が単峰性という特別な条件を満たすときには，戦略的操作を不可能にするような，非独裁的な集約ルールが存在することを紹介する．

4 節では，2，3 節の内容を踏まえながら，私のゼミが採用している意見集約方法が持つ性質について議論する．具体的にはこの方法がペア全敗者を選ばないこと，2 人以上かつ 2 回以上ならボルダ勝者と異なる選択肢を選びうる選好組が存在すること，そして各々の選好が回数に関する単峰性を持つときには，その回数の中位と関連する選択肢が選ばれることを示す．

2　多数決の問題点とベンチマークとしてのボルダルール

2.1　多数決の問題点

多数決は，恐らく最も有名な意見集約方法の一つである．その方法は，各有権者が 1 つの選択肢に投票し，最多票を得た選択肢が勝者になるというものである．しかしこの多数決がある問題を抱えていることは Borda(1784) が指摘していた．彼が指摘したのは次のようなことである．今，3 つの選択肢 x, y, z に対する 21 人の選好が表 2 のような状況を考える．多数決を行えば x が最多票の 8 票を得て勝者となる．しかしここで 1 対 1，つまりペアごとの多数決を行えば x は y に 8 対 13 で負け，z にも 8 対 13 で負ける．ペアごとの多数決で全敗する x をペア全敗者*1と呼ぶ．多数決にはこのように，ペア全敗者を選びうるという性質がある．

表 2　ペア全敗者を選ぶ多数決

	4 人	4 人	7 人	6 人
1 位	x	x	y	z
2 位	y	z	z	y
3 位	z	y	x	x

2.2　ボルダルール

2.2.1　ボルダルールの定義

多数決がペア全敗者を選びうるという問題を受けて，Borda はボルダルールと呼ばれる次の集計方法を提案した．それは，選択肢が m 個あるときに，それぞれの有権者が 1 位に m 点，2 位に $m-1$ 点，...，m 位に 1 点を与え，その総得点の一番高いものを選び取る方法である．*2 この総得点をボルダ得点，ボルダ得点の一番高い選択肢をボルダ勝者と呼ぶことにする．

選択肢を引数としてそのボルダ得点を返す関数を $p(\cdot)$ と表すと，先の表の 2 における x, y, z のボルダ得点はそれぞれ，

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 3 \times 8 \ + \ 2 \times 0 \ + \ 1 \times 13 = 37 \\
p(y) &= 3 \times 7 \ + \ 2 \times 10 \ + \ 1 \times 4 = 45 \\
p(z) &= 3 \times 6 \ + \ 2 \times 11 \ + \ 1 \times 4 = 44
\end{aligned}
$$

となり，y が選ばれる．

2.2.2　ボルダルールの利点と欠点

ボルダルールには様々な優れた性質がある．ここではそのうちの 5 つを簡単に紹介する．

まず 1 つ目に，ボルダルールはペア全敗者を選ばない．これは多数決がペア全敗者を選んでしまうことを受けて提案された方法としては当然満たして欲しい性質である．証明は次の 2 つ目の性質の系として直ちに導か

*1 この命名は坂井 (2018) に基づく

*2 これは 1.2 で述べた Malkevitch の例の 4 つ目の方法である．

れる．

2 つ目は，1 対 1 の多数決でボルダ勝者が他のある選択肢に負ける場合，少なくとも 1 つの選択肢に 1 対 1 の多数決で勝てるというものである (Okamoto and Sakai 2019).

3 つ目はボルダルールに留まらずスコアリングルール全般に関わる定理である．ここでスコアリングルールとは，より高い順位には高い得点を与えるように重みづけをして，その最終的な総得点の 1 番高いものを選び取るルールのことを指す．Okamoto and Sakai(2019) では，どんな有権者数でもペア全敗者を選ぶことがないスコアリングルールはボルダルールのみであることが示されている．これは無数にあるスコアリングルールの中でボルダルールの唯一性を示す定理と言える．

4 つ目は全員一致までの近さからという観点から集約方法を分析し，これが最も小さくなるのがボルダルールというものである (Farkas and Nitzan 1979).

そして 5 つ目は，1 対 1 での多数決に注目し，その総当たり戦での平均得票率が最大になる選択肢をボルダルールが選び取るというものである．4 つ目と同じでこちらも全員一致までの近さを測っているという見方ができる．しかし 4 つ目は全体のランキング表における選択肢の位置を使用しているのに対して，この 5 つ目はあくまで 1 対 1 の比較に基づいて全員一致までの近さを測っている．

以上見たようにボルダルールには様々な優れた性質があるが，問題点もある．ここではそのうち 2 つを述べる．

まず第一に，ボルダルールは参加者に対してすべての選択肢に対するランクづけを要請する．選択肢が 3 つや 4 つのときには問題ないかもしれないが，選択肢の数がさらに増えたときにはこのランクづけは参加者にとってひどく億劫な作業になる．特に本論文で考えたいゼミの形式決定に関する問題では，ゼミの回数が m 回として選択肢の数は 2^m 個にものぼる．後期のゼミは少なくとも 10 回はあるので選択肢の数は 1000 を超える．このような膨大な量の選択肢に対する選好を表明させるのは現実的ではないので，ボルダルールをそのままゼミの形式決定に適用することはできない．

第二に，ボルダルールは戦略的操作の影響を受ける．これは坂井 (2018) の例を用いて次のように説明される．今，4 つの選択肢 x, y, z, w に対して，3 人の個人が表 3 のような選好を持っているとする．このときの 4 つのボルダ得点はそれぞれ，$p(x) = 10,\ p(y) = 11,\ p(z) = 6,\ p(w) = 3$ となりボルダ勝者は y である．ところがここで，y よりも x を高く順序づけている佐藤が 1 位から順に x, z, w, y という虚偽の選好を表明すれば 4 つのボルダ得点はそれぞれ，$p(x) = 11,\ p(y) = 9,\ p(z) = 7,\ p(w) = 4$ となり，佐藤にとってより望ましい x を実現することができる．

表 3　坂井 (2018) の例

	佐藤	高橋	中野
1 位	x	y	y
2 位	y	x	x
3 位	z	z	z
4 位	w	w	w

今見たように，ボルダルールには，虚偽の選好を表明することで自分にとってより好ましい結果を選ばせることができるような状況が存在する．逆に，いかなる状況，いかなる個人においても，虚偽の選好を表明することで結果をより好ましいものに変えることができないとき，その集約方法は耐戦略性を満たすという．ボル

ダルールは耐戦略性を満たさないということだ．

3　戦略的操作の可能性

3.1　ギバート＝サタスウェイト定理

2.2.2 では，ボルダルールには耐戦略性を満たさないという問題点があると述べた．しかしこの問題点はボルダルールだけでなく，ほぼすべての民主的な集約方法に当てはまることが Gibbard(1973) や Satterthwaite(1975) によって知られている．ここではギバート＝サタスウェイト定理として知られるその成果について述べる．尚，以降定義などで用いる記法は坂井他 (2020) に基づいた．

定義． I を個人の集合，X を選択肢の集合，X 上の選好の集合を $\mathcal{R}$，X 上の強選好の集合を $\mathcal{P}$ とする．各 $i \in I$ の選好を $\succsim_i$ で表す．個人 i が取りうる選好の集合を $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{R}$ と表し，これを選好集合と呼ぶ．個人の選好集合の直積

$$\mathcal{D}_I \overset{\text{def}}{=} \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D} \times \cdots \times \mathcal{D}_n$$

をドメインと呼び，個人の選好組を

$$\succsim \overset{\text{def}}{=} (\succsim_1, \succsim_2, \ldots, \succsim_n) \in \mathcal{D}_I$$

で表す．このとき社会的選択関数（今まで集約方法と呼んでいたもの）は次のように表せる．

$$f \colon \mathcal{D}_{\mathrm{I}} \to \mathrm{X}$$

今定義された言葉を用いて，社会的選択関数の様々な性質もまた定義することができる．まず，先に述べた集約方法の耐戦略性は次のように書ける．

定義 (耐戦略性)**．** 社会的選択関数 f が耐戦略性を満たすとは，すべての $i \in I$，$\succsim \in \mathcal{D}_I$，$\succsim_i' \in \mathcal{D}_i$ について

$$f(\succsim) \succsim_i f(\succsim_i', \succsim_{-i})$$

が成り立つことである．

それから独裁制と全射性についても定義を与える．

定義 (独裁制)**．** 社会的選択関数 f が独裁制であるとは，ある個人 $i \in I$ が存在し，すべての $\succsim \in \mathcal{D}_I$ について

$$f(\succsim) \succsim_i x \quad \forall x \in \mathrm{X}$$

が成り立つことである．この i を独裁者という

定義 (全射性)**．** 社会的選択関数が全射性を満たすとは，任意の $x \in \mathrm{X}$ について，ある $\succsim \in D_{\mathrm{I}}$ が存在して $f(\succsim) = x$ が成り立つことである

以上の定義によって，ギバート＝サタスウェイト定理を述べることができる．

定理 (ギバート＝サタスウェイト定理)**．** $X = A$，$|A| \geq 3$ とする．社会的選択関数 $f \colon \mathcal{P}^I \to X$ が全射性を満たすとき以下が成り立つ．

$$f \text{ は耐戦略性を満たす} \Leftrightarrow f \text{ は独裁制である．}$$

3.2　単峰性と中位選択関数

本論文における耐戦略性の議論は，ボルダルールがこれを満たさないということから始まった．しかし，一般的に言って，社会的選択関数に耐戦略性を要請することは極めて難しいということがギバート＝サタスウェイト定理で示される．

ただし，個人の選好が単峰性という特別な条件を満たすときには，耐戦略性を満たす非独裁的な社会的選択関数が存在することが Black(1948) で指摘されている．ここでは単峰性とその関数に関する議論を紹介し，次節でゼミの形式決定問題に援用する．

定義 (単峰性)**.** 選択肢の集合を $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_l\}$ と表し，各選択肢は区間 $[0,1]$ 内の数値として与えられ，

$$0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_l \leq 1$$

を満たすとする．A 上の選好 $\succsim_i \in \mathcal{R}$ が単峰的であるとは，ベストの選択肢 $b(\succsim_i) \in A$ がただ一つ存在して，任意の $k, k' \in \{1, 2, \ldots, l\}$ について

$$[a_k < a_{k'} < b(\succsim_i) \text{ または } b(\succsim_i) < a_{k'} < a_k] \Rightarrow b(\succsim_i) \succ_i a_{k'} \succ_i a_k$$

を満たすことである．また，A 上の単峰的な選好すべてからなる集合を $\mathcal{T}$ と書く

この単峰性の直観的な理解は次のようなものである．つまり選択肢をなんらかの基準で直線状に並べることができ，その中で最も好ましいものが存在する．各選択肢は，この最も好ましいものから離れれば離れるほど望ましくなくなっていくというものだ．単峰性が成り立ちそうな選択肢の例としては，税率，売り手にとっての商品の値段，部屋の室温などが考えられる．

すべての個人の選好が単峰的であるとき，中位選択関数を定めることができる．

定義 (中位選択関数)**.** 任意の i に対して $\mathcal{D} \subset \mathcal{T}$ であるような選好組 $\succsim \in \mathcal{D}_I$ に対して，$b^m(\succsim)$ を $b(\succsim_1)$，$b(\succsim_2)$，...，$b(\succsim_n)$ における中位の選択肢として定める．つまり，$b^m(\succsim) \in \{b(\succsim_i) : i \in I\}$ かつ

$$|\{i \in I : b(\succsim_i) \leq b^m(\succsim)\}| \geq \frac{n}{2}$$
$$|\{i \in I : b(\succsim_i) \geq b^m(\succsim)\}| \geq \frac{n}{2}$$

が成り立つ．n が偶数の場合は中位が 2 つ存在するケースがあるが，その時は常に左側（または右側）の中位を選ぶことにする．このとき中位選択関数 $f^m \colon \mathcal{D}_I \to X$ を，$f^m(\succsim) \overset{\text{def}}{=} b^m(\succsim)$ と定める

4　ゼミ形式決定問題の性質

4.1　ゼミ形式決定問題の形式化

4.2　ボルダルールとの比較

4.3　単峰性との関連性

5　まとめ

参考文献

[1] 坂井豊貴 (2018)『社会的選択理論への招待』日本評論社.

[2] 坂井豊貴他 (2020)『メカニズムデザイン』ミネルヴァ書房.

[3] Black, D. (1948) On the Rationale of Group Decision-making, Journal of Political Economy, Vol. 56, pp.23-34.

[4] Black, D. (1976) Partial Justification of the Borda Count, Public Choice, Vol. 28, pp. 1-15.

[5] Coughlin, P. (1979) A Direct Characterization of Black's First Borda Count, Economic Letters, Vol. 4, pp. 131-133.

[6] de Borda J-C (1784) Mémoire sur les élections au scrutin, Histoire de l'Académie Royal des Science, pp. 657-664.

[7] Farkas, D. and Nitzan, S. (1979) The Borda Rule and Pareto Stability: A Comment, Econometrica, Vol. 47, pp. 1305-1306.

[8] Gibbard, A. (1973) Manipulation of voting schemes: A general result, Econometrica, Vol. 41, pp. 587-601.

[9] Malkevitch, J. (1990) Mathematical Theory of Elections, Annals of the New York Academy of Science, pp. 89-97.

[10] Okamoto, N. and Sakai, T. (2019) The Borda rule and the pairwise-majority-loser revisited, Review of Economic Design, Springer; Scioety for Economic Design, vol 23(1) , pages 75-89, June.

[11] Satterthwaite, M.A. (1975) Strategy-proofness and Arrow's conditions: Existence and correspondence theorems for voting procedures and social welfare functions, Journal of Economic Theory, Vol. 10, pp. 187-217.