

# Sobre Resolução de Recorrências

## Método da Substituição

Prof. M. Sc. Rodrigo Hagstrom

O método da Substituição é uma  
Prova por Indução

Provar  $T(n) \leq f(n)$  ← chute inicial (escolha)

No passo da indução precisamos provar  
 $f(n)$ , e não  $T(n) \leq 2f(n)$   
ou  $T(n) \leq f(n) + 1$

Como escolher  $f(n)$ ? Experiência, um dos  
outros métodos etc.

### Exemplos

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

escolha:  $O(n^2)$  ← vamos achar c  
então vamos provar  $T(n) \leq c n^2$

base  $n = 1$   $T(1) = 1$  e  $c \cdot 1^2 = c$   
logo  $c \geq 1$

Queremos provar que  $T(n) \leq c n^2$  se  $n \geq 1$   
Hipótese  $T(k) \leq c k^2 \quad \forall \quad 1 \leq k < n$

Sabemos que  $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

Como  $\frac{n}{2} < n$  ( $n > 1$ ) vale pela hipótese

que  $T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c\left(\frac{n}{2}\right)^2 = c\frac{n^2}{4}$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 2\left[c\frac{n^2}{4}\right] + n$$

$$= c\frac{n^2}{2} + n$$

mas  $c\frac{n^2}{2} + n \leq c n^2$  ?

se  $n \leq \frac{cn^2}{2}$ ,  $1 \leq \frac{cn}{2}$  ou  $c \geq 2$

é possível com  
um  $c \geq 2$  pois  
 $2 \leq 2$  sempre que  
 $n > 1$  basta  $c \geq 2$

②  $T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$

escolha:  $T(n)$  e  $O(n)$

Vamos provar por indução  $T(n) \leq c \cdot n$

Base  $n=1$   $T(1) = 1$   $c \cdot 1 = c$   $c \geq 1$

Queremos provar  $T(n) \leq cn$  para  $n \geq 1$

Hipótese:  $T(k) \leq c \cdot k \quad \forall 1 \leq k \leq n$

$$T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1 \quad \text{e} \quad \frac{n}{3} < n \quad \text{se} \quad n \geq 1$$

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1 \leq 3 \left[ c \frac{n}{3} \right] + 1 \\ &= cn + 1 \end{aligned}$$

mas queremos

$$T(n) \leq cn \quad \text{e}$$

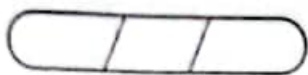
$$n \quad cn + 1$$

Agora  $cn + 1 \leq cn$

impossível

Poderia construir a prova com outra expressão  $O(n)$ , no caso,  $cn + d$





Base:  $n=1$ ,  $T(1)=1$  e  $c \cdot 1 + d =$   
 $c + d$

vale se  $c + d \geq 1$

Queremos provar  $T(n) \leq cn + d$  para  $n > 1$

Hipótese  $T(k) \leq ck + d \quad \forall 1 \leq k \leq n$

Como  $T(n) \leq 3 T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$  e  $\frac{n}{3} < n$

quando  $n > 1$

logo

$$T(n) \leq 3 T\left(\frac{n}{3}\right) + 1 \leq 3 \left[ c \frac{n}{3} + d \right] + 1$$

$$cn + 3d + 1$$

$$cn + 3d + 1 \leq cn$$

vale sempre  $d \leq -\frac{1}{3}$

→ tomando  $d = -\frac{1}{3}$ .

Como  $c + d \geq 1$  (base) tome  $c = \frac{4}{3}$