Sobre Resolução de Recorrências
Método da Substituição

Prof. M. Sc. Rodrigo Hagstrom

O método da Substituição é uma Prova por Indução

chute inicial (escolha)

Provar $T(n) \leq f(n)$

No passo da indução precisamos provar f(n), e não $T(n) \leq 2 f(n)$ ou $T(n) \leq f(n) + 1$

Como escolher f(n)? Experiência, um dos outros métodos etc.

Exemplos

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

escolha: $O(n^2)$ — vamos achar c

então vamos provar $T(n) \leq c\, n^2$

base $n = 1$ $T(1) = 1$ e $c \cdot 1^2 = c$

logo $c \geq 1$

Queremos provar que $T(n) \leq c\, n^2$ se $n > 1$

Hipótese $T(K) \leq cK^2 \quad \forall \ 1 \leq K < n$

Sabemos que $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

Como $\frac{n}{2} < n$ $(n > 1)$ vale pela hipótese

que $T\left(\frac{n}{2}\right) \leq c\left(\frac{n}{2}\right)^2 = c\frac{n^2}{4}$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 2\left[\frac{cn^2}{4}\right] + n$$

$$= \frac{cn^2}{2} + n$$

mas $\frac{cn^2}{2} + n \leq cn^2$?

se $n \leq \frac{cn^2}{2}$, $1 \leq \frac{cn}{2}$ ou $c \geq \frac{2}{n}$

é possível com um $c \geq 2$ pois $\frac{2}{n} < 2$ sempre que $n > 1$ basta $c \geq 2$

(2) $T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$

escolha: $T(n)$ e $O(n)$

Vamos provar por indução $T(n) \leq c \cdot n$

Base $n = 1$ $T(1) = 1$ $c \cdot 1 = c$ $c \geq 1$

Queremos provar $T(n) \leq cn$ para $n > 1$

Hipótese: $T(k) \leq c \cdot k$ $\forall\ 1 \leq k \leq n$

$T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1$ e $\frac{n}{3} < n$ se $n > 1$

$$T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right) + 1 \leq 3\left[\frac{cn}{3}\right] + 1$$

$$= cn + 1$$

mas queremos

$T(n) \leq cn$ e

ñ $cn + 1$

Agora $cn + 1 \leq cn$

impossível

Poderia construir a prova com outra expressão $O(n)$, no caso, $cn + d$

Base: $n=1$, $T(1)=1$ e $c1+d =$
$c+d$
vale se $c+d \geq 1$

Queremos provar $T(n) \leq cn+d$ para $n>1$
Hipótese $T(K) \leq cK+d \quad \forall\ 1 \leq K < n$
Como $T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right)+1$ e $\frac{n}{3} < n$
quando $n>1$
logo

$$T(n) \leq 3T\left(\frac{n}{3}\right)+1 \leq 3\left[c\frac{n}{3}+d\right]+1$$

$cn+3d+1$

$cn+3d+1 \leq cn$
vale sempre $d \leq -\frac{1}{3}$

→ tomando $d=-1$.
Como $c+d \geq 1$ (base) tome $c=2$ //