Sobre Resolução de Recorrências com Teorema Mestre

Prof M. Sc Rodrigo Hagstrom

Solução de Recorrências com Teorema Mestre resolve recorrências do tipo

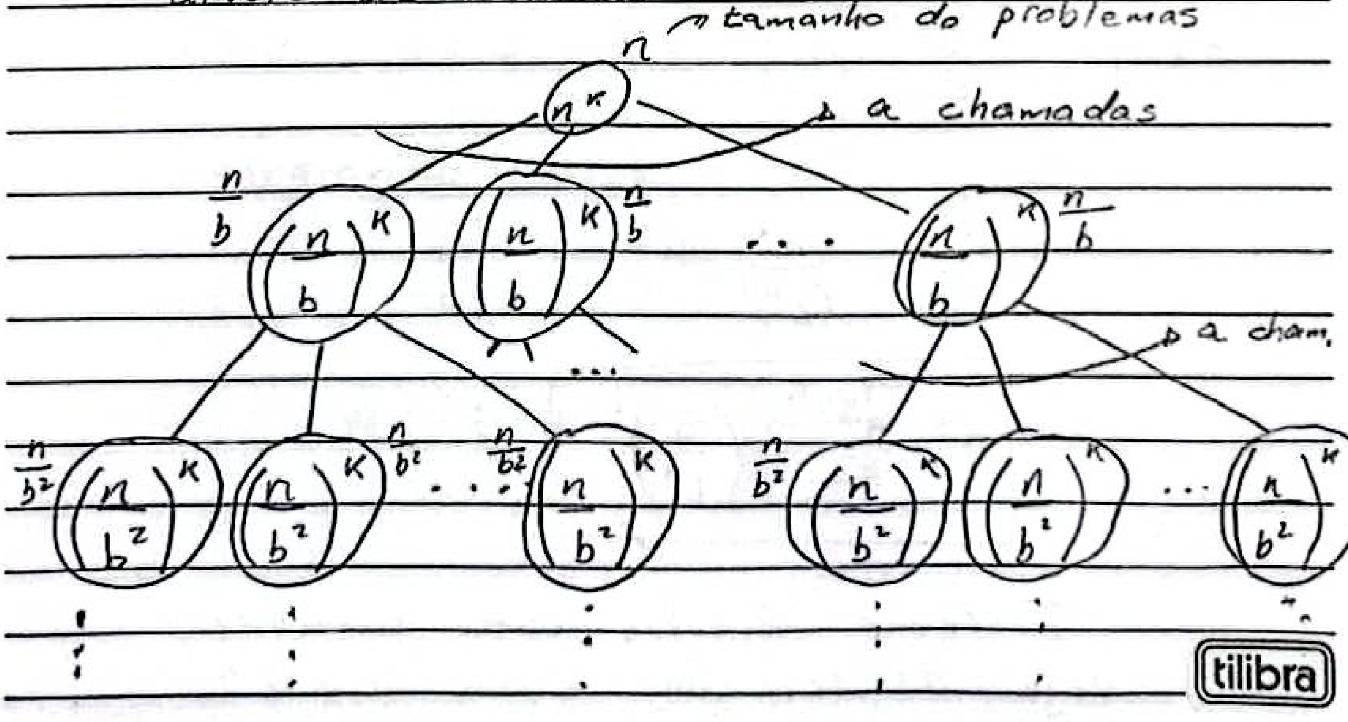
$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^k)$$

com $a \geq 1$, $b > 1$ e $k \geq 0$

Não resolve

$$T(n) = T(n-1) + \dots$$

O que ocorre? Análise cuidadosa da árvore de recursão



Análise da árvore de recursão

Níveis	Tamanho	# nós	Tempo por nó
0	n	1	n^k
1	$\frac{n}{b}$	a	$\left(\frac{n}{b}\right)^k$
2	$\frac{n}{b^2}$	a^2	$\left(\frac{n}{b^2}\right)^k$
⋮			
i	$\frac{n}{b^i}$	a^i	$\left(\frac{n}{b^i}\right)^k$
⋮			
?	1	$a^{\log_b n}$ ou $n^{\log_b a}$	1^k

$\to \log_b n$

$\frac{n}{b^x} = 1 \Rightarrow b^x = n = \log_b n$

Tempo: $\displaystyle\sum_{i=0}^{\log_b n} \overbrace{\left(\frac{n}{b^i}\right)^k a^i}^{\text{tempo do nível}}$

$$\sum_{i=0}^{\log_b n} \frac{n^k}{(b^k)^i} a^i$$

$$\boxed{n^k \sum_{i=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^k}\right)^i}$$

Teorema Resolve este somatório veja as relações entre a e b^k.

Teorema Mestre

Sejam $a \geq 1$, $b > 1$ e $K > 0$ constantes.
Para

$$T(n) = a\,T\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^K)$$

(1) Se $a > b^K$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

(2) Se $a = b^K$, então $T(n) = \Theta(n^K \log n)$

(3) Se $a < b^K$, então $T(n) = \Theta(n^K)$

Exemplos

① $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$a = 2 \quad b = 2 \quad K = 1$

comparando a com $b^K \Rightarrow 2 = 2^1$

temos o caso (2)

$$\Theta(n^K \log n) = \Theta(n \log n)$$

② $T(n) = 4T\left(\frac{n}{10}\right) + 5\sqrt{n}$

$a = 4 \quad b = 10 \quad K = 1/2$

$4 > \sqrt{10}$

$\rightarrow$ raiz de 16

$T(n) = \Theta\left(n^{\log_{10} 4}\right) \simeq \Theta\, n^{0{,}6}$ //

③ $T(n) = 5T\left(\frac{3n}{4}\right) + 10n^3$

$a = 5 \qquad b = 4/3 \qquad K = 3$

comparar 5 e $\left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \simeq 2{,}37$

$a > b^K \Rightarrow$ caso 1

$T(n) = \Theta\left(n^{\log_{4/3} 5}\right) = \Theta\, n^{5{,}6}$

(4) $T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \log n$

neste caso, não conseguimo um n^k diretamente mas

$$n \leq n \log n \leq n^2$$

então podemos ter

$$T'(n) = 3T'\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

e

$$T''(n) = 3T''\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$$

Resolvendo $T'(n)$

$a = 3$, $b = 4$ e $k = 1$ caso (3)

$$T'(n) = \Theta(n)$$

Resolvendo $T''(n) = \Theta(n^2)$

$$c_1 \cdot n \leq T'(n) \leq T(n) \leq T''(n) \leq c\, n^2$$

$\Omega(n)$ e $O(n^2)$ //

⑤ $T(n) = 2T(n-1) + \sqrt{n}$

↳ obviamente não temos como aplicar o Teorema Mestre aqui.

⑥ $T(n) = T\left(\frac{n}{3}\right) + T\left(\frac{2n}{3}\right) + \sqrt{n}$

→ Mais um caso de uso com limitante

→ Mas qual o limitante superior entre

$$T'(n) = 2T'\left(\frac{n}{3}\right) + \sqrt{n}$$

$$T''(n) = 2T''\left(\frac{2n}{3}\right) + \sqrt{n}$$

→ No problema original árvore desbalanceada ($T\left(\frac{2n}{3}\right)$ é mais profunda

então

$$T(n) \leq T(n) \leq T''(n)$$

deixo ao leitor o complemento da resolução.

tilibra