Sobre Resolução de Recorrências - Teorema Mestre (Versão Não Simplificada) - Parte 2

Prof. M. Sc. Rodrigo Hagstrom / São Paulo 31/01/25

Seja:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

com $a \geq 1$, $b > 1$;

$f(n)$ assintoticamente positiva;

A fração $\frac{n}{b}$ é $\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$ ou $\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil$.

Caso 1: Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$, $\epsilon > 0$ então

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

Caso 2: Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ então

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$$

Caso 3: Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$, $\epsilon > 0$ e se $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq cf(n)$ para alguma constante $c < 1$ e todos os n suficientemente grandes, então $T(n) = \Theta(f(n))$

/ /

Exemplos:

① $T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n$

$a = 9$, $b = 3$ e $f(n) = n$

Verificar o caso para $f(n)$

$f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$
$f(n) = O(n^{\log_3 9 - \epsilon})$
$f(n) = O(n^{2 - \epsilon})$ escolhemos um $\epsilon = 1$
$f(n) = O(n^{2 - 1})$
$f(n) = O(n)$
$n = O(n)$? sim, então estamos no caso 1

Logo
$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
$T(n) = \Theta(n^{\log_3 9})$
$\therefore T(n) = \Theta(n^2)$ //

tilibra

(2) $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$

$a = 1$, $b = \frac{3}{2}$ e $f(n) = 1$

Verificar para caso 1

$f(n) = O(n^{\log_{3/2} 1 - \epsilon})$
$f(n) = O(n^{0-\epsilon})$

$\hookrightarrow$ não temos um ϵ positivo possível logo $1 = O(n^{-\epsilon})$ é falso, não estamos no caso 1.

Verificar para o caso 2

$f(n) = \Theta(n^{\log_{3/2} 1})$
$1 = \Theta(n^0)$
$1 = \Theta(1) \rightarrow$ verdadeiro

Logo

$T(n) = \Theta(n^{\log_{3/2} 1} \cdot \log n)$
$T(n) = \Theta(\log n)$ //

③ Exemplo que é caso 3

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{4}\right) + n \log n$$

$a = 3$, $b = 4$ e $f(n) = n \log n$

→ Geralmente quando temos um $f(n) > a \cdot \left(\frac{n}{b}\right)$ já podemos inferir que cai no caso 3. Na dúvida basta proceder os testes de cada caso.

Verificando caso 3

$$f(n) = \Omega(n^{\log_4 3 + \epsilon})$$
$$f(n) = \Omega(n^{0,79 + \epsilon})$$

escolhemos ϵ igual ao restante para termos $\lceil 0,79 \rceil$

$$f(n) = \Omega(n)$$
$$n \log n = \Omega(n)$$

No caso 3 precisamos provar regularidade.

Provando:

$$a\,f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c\,f(n)$$

$$3\left(\frac{n}{b}\log\left(\frac{n}{b}\right)\right) \leq c\,f(n)$$

$$\frac{3n}{4}\cdot\log\left(\frac{n}{4}\right) \leq \underbrace{c}\cdot f(n)$$

escolhemos um $c < 1$ e a

$$\frac{3n}{4}\log\left(\frac{n}{4}\right) \leq \frac{3}{4}\,n\log n$$

condição está satisfeita!!!

Logo,

$$T(n) = \Theta(n\log n)\ //$$