

# Introduction au Compressed Sensing

## Applications à l'IRM (Image par résonance magnétique)

C. Baraille, O. Sebbouh

ENSAE

March 20, 2018

- 1 Introduction
- 2 IRM et Compressed Sensing
  - Positionnement du problème
  - La parcimonie implicite des IRM
  - L'importance de l'échantillonnage incohérent
  - La reconstruction parcimonieuse de l'image
  - Parcimonie et stratégie de sous-échantillonnage
- 3 Expériences et Simulations
  - Des masques adaptés pour sous-échantillonner le k-space
  - Des algorithmes de reconstruction de l'image
- 4 Références

## 1 Introduction

## 2 IRM et Compressed Sensing

- Positionnement du problème
- La parcimonie implicite des IRM
- L'importance de l'échantillonnage incohérent
- La reconstruction parcimonieuse de l'image
- Parcimonie et stratégie de sous-échantillonnage

## 3 Expériences et Simulations

- Des masques adaptés pour sous-échantillonner le k-space
- Des algorithmes de reconstruction de l'image

## 4 Références

- L'IRM est un des outils d'imagerie médicale les plus utilisés aujourd'hui : permet de quantifier les caractéristiques métaboliques et physiologiques des tissus, plus sûre que la scannographie
- Mais la vitesse d'imagerie est limitée : exige une sédation ou une anesthésie, limites sur les parties du corps qui bougent avec la respiration, nombre de patients limité
- Limiter le nombre de données nécessaires pour restituer l'image est donc souhaitable : sous-échantillonner le  $k$ -space
- Mais alors le critère de Nyquist n'est pas respecté

Plusieurs méthodes ont été développées pour pallier ce problème :

- Les méthodes exploitant la redondance dans le  $k$ -space (imagerie parallèle)
- Les méthodes générant des artefacts incohérents ou moins visuellement apparents
- Les méthodes exploitant la redondance spatiale ou temporelle ou les deux

Nous cherchons ici à exploiter la parcimonie implicite des IRM et à développer une approche combinant les éléments des deux dernières approches, afin de limiter le nombre de mesures nécessaires à la restitution d'une image de qualité.

## 1 Introduction

## 2 IRM et Compressed Sensing

- Positionnement du problème
- La parcimonie implicite des IRM
- L'importance de l'échantillonnage incohérent
- La reconstruction parcimonieuse de l'image
- Parcimonie et stratégie de sous-échantillonnage

## 3 Expériences et Simulations

- Des masques adaptés pour sous-échantillonner le k-space
- Des algorithmes de reconstruction de l'image

## 4 Références

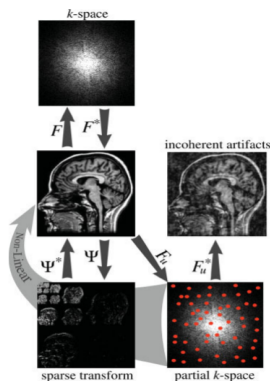
Le compressed sensing permet de reconstruire certains signaux et images à partir d'un petit nombre de mesures, inférieur au critère de Nyquist, en exploitant :

- la parcimonie, qui concerne les signaux d'intérêt : l'IRM a une représentation parcimonieuse dans une base  $\psi$  appelée base de représentation
- l'incohérence, qui se rapporte à la modalité de détection : les signaux échantillonnés ont une représentation extrêmement dense dans la base  $\psi$  (pas exactement vérifiée en IRM : incohérence asymptotique)

On cherche donc à exploiter ces notions de parcimonie et d'incohérence pour concevoir des protocoles d'acquisition de signaux efficaces qui échantillonnent de façon non adaptative le signal dans le  $k$ -space pour reconstruire l'IRM à partir d'un petit nombre de mesures.

L'application des méthodes du compressed sensing aux IRM exige donc que :

- Les images aient une représentation parcimonieuse dans une base de représentation  $\psi$  (base d'ondelettes).
- Le k-space soit échantillonné de façon incohérente dans la base  $\psi$ .
- On dispose d'une procédure de reconstruction non linéaire pour assurer à la fois la parcimonie de la représentation de l'image et la cohérence avec les données acquises.





# Positionnement du problème

On veut reconstruire un signal  $f \in \mathbb{C}^n$  à partir de  $m$  vecteurs de mesure  $\phi_1 \dots \phi_m$  et des observations  $\hat{f}_1 \dots \hat{f}_m$  définies par :

$$\hat{f}_k = \langle f, \phi_k \rangle \text{ pour } k = 1 \dots m \quad (1)$$

Plus précisément, étant donnés un signal  $f \in \mathbb{C}^n$  et un ensemble de fréquences  $M \subset \{1, \dots, N\}$  où  $|M| = m$ , on souhaite reconstruire  $f$  à partir des coefficients de Fourier  $\{\hat{f}_k : k \in M\}$ . Pour fixer les notations, on introduit la matrice de Fourier (transformée de Fourier discrète) :

$$\Gamma : \begin{cases} \mathbb{C}^n & \rightarrow \mathbb{C}^n \\ f & \rightarrow \Gamma f = \hat{f} \end{cases} \quad (2)$$

où  $\Gamma = \left( \frac{w^{(p-1)(q-1)}}{\sqrt{n}} \right)$  et  $w = \exp(-2i\pi/n)$ . On note  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  les vecteurs lignes de  $\Gamma$ , et on a bien :  $\hat{f}_k = \langle \Gamma_k, f \rangle$  (ici  $\phi_k = \Gamma_k$ ).

# Positionnement du problème

On cherche à reconstruire les coefficients de Fourier d'un signal  $f \in \mathbb{C}^n$  à partir des données  $\hat{f} = \Gamma_M f$ , où  $\Gamma_M$  est la matrice obtenue en extrayant les lignes d'indices  $M$  de la matrice de Fourier  $\Gamma \in \mathbb{C}^{n \times n}$  :

$$\Gamma_M : \begin{cases} \mathbb{C}^n & \rightarrow \mathbb{C}^m \\ f & \rightarrow \hat{f}_k : k \in M \end{cases} \quad (3)$$

et où  $m = |M| \ll n$

Une reconstruction de  $f$  de bonne qualité est-elle possible à partir de  $m \ll n$  mesures seulement ? (problème hautement sous-déterminé :  $m$  équations linéaires à  $n$  inconnues)

# La parcimonie implicite des IRM

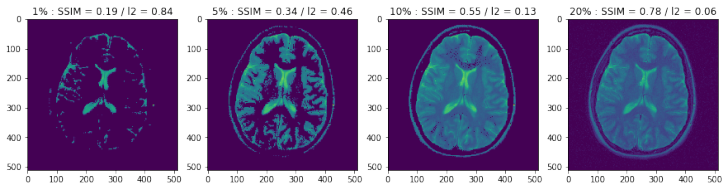
Les images admettent une représentation parcimonieuse dans une base d'ondelettes  $\psi$ . Le signal  $f \in \mathbb{C}^n$  est exprimé dans une base orthonormale (une base d'ondelettes ici)  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  :

$$f = \sum_{i=1}^n x_i \psi_i \text{ où } x_i = \langle f, \psi_i \rangle \quad (4)$$

On peut réécrire  $f = \psi x$  où  $\psi \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est la matrice formée par les  $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$  en colonnes.

On considère  $f_s = \psi x_s$  où  $x_s$  est formé des  $s$  plus grands coefficients de  $x$  et de 0.  $x_s$  est sparse par définition. Si  $x$  est sparse ou compressible alors  $x$  peut être approximé par  $x_s$  et donc, l'erreur  $\|f - f_s\|_2$  est faible.

# La parcimonie implicite des IMR



**FIGURE 1** – Représentation parcimonieuse des images dans le domaine de transformée d'ondelettes en fonction du pourcentage du nombre de coefficients utilisés

On utilise deux mesures de similarité pour comparer l'image originale à sa reconstruction :

- La SSIM : compare la différence de structure
- La différence en norme 2 normalisée : comparaison pixel à pixel

Deux images similaires ont une SSIM proche de 1 et une différence en norme 2 normalisée proche de 0.

# L'importance de l'échantillonnage incohérent

## Définition : Cohérence de deux bases orthormales

Soient  $\phi$  et  $\psi$  deux bases orthonormales de  $\mathbb{C}^n$ . On définit lors la cohérence entre la base de mesures  $\phi$  et la base de représentation  $\psi$  par :

$$\mu(\phi, \psi) = \sqrt{n} \times \max_{1 \leq k, j \leq n} |\langle \phi_k, \psi_j \rangle|$$

- La première base  $\phi$  est utilisée pour mesurer le signal  $f$ , comme dans (1) : on choisit  $m$  vecteurs parmi les  $n$  vecteurs de mesure de  $\phi = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ . La base  $\phi$  est donc appelée la base de mesures.
- La seconde base,  $\psi$  (qui est ici une base d'ondelettes) est la base dans laquelle le signal  $f$  a une représentation parcimonieuse. La base  $\psi$  est donc appelée la base de représentation.

# L'importance de l'échantillonnage incohérent

- La cohérence mesure la plus grande corrélation entre deux éléments de  $\psi$  et  $\phi$  (si  $\phi$  et  $\psi$  sont très corrélés, la cohérence est grande, et inversement)
- $\mu(\phi, \psi) \in [1, \sqrt{n}]$   
En effet, par Cauchy-Schwarz  $|\langle \phi_k, \psi_j \rangle| \leq \|\phi_k\|_2 \|\psi_j\|_2 = 1$ , et par Parseval,  $\forall j, \sum_k |\langle \phi_k, \psi_j \rangle|^2 = \|\psi_j\|_2^2 = 1$ , et on a donc  $\forall j$ ,  $\max_k |\langle \phi_k, \psi_j \rangle|^2 \geq \frac{1}{n}$
- En compressed sensing, on veut trouver des paires  $(\phi, \psi)$  qui affichent une faible cohérence (cf théorème) : un signal sparse dans une base de représentation  $\psi = \psi_1, \dots, \psi_n$  (le signal est dit localisé en fréquence) doit être étalé dans la base de mesures  $\phi = \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ . Les vecteurs de mesure  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$  ont donc une représentation bien étalée dans la base dans laquelle est exprimée la parcimonie
- Les matrices aléatoires  $\phi$  présentent une forte incohérence avec tout type de matrices fixes  $\psi$

# L'importance de l'échantillonnage incohérent

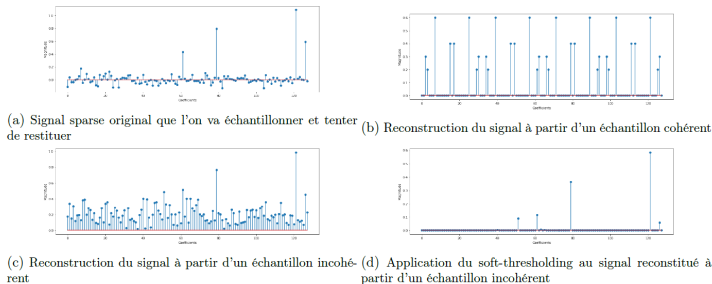


FIGURE 2 – Illustration de l'importance de l'échantillonnage incohérent pour reconstruire le signal

# La reconstruction parcimonieuse de l'image

On dispose de  $m$  données  $\hat{f}_k = \langle \Gamma_k, f \rangle$  pour  $k = 1, \dots, m$  avec  $m \ll n$  à partir desquelles nous cherchons à reconstruire le signal par minimisation de la norme  $l_1$ . Le signal reconstruit  $f^*$  s'écrit  $f^* = \psi x^*$  où  $x^*$  est la solution du programme d'optimisation convexe suivant :

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \|x\|_1 \text{ s.c. } \hat{f}_k = \langle \Gamma_k, \psi x \rangle, \forall k \in M \quad (5)$$

Parmi toutes les solutions s'écrivant  $\tilde{f} = \psi \tilde{x}$  compatibles avec les données, on choisit celle qui a la plus petite norme  $l_1$ . Cet algorithme est l'algorithme de *Basis Pursuit*.



# La reconstruction parcimonieuse de l'image

## Théorème

Soit  $f \in \mathbf{R}^n$ . On suppose que la représentation de  $f$  dans la base  $\psi$  est  $s$ -parcimonieuse, c'est-à-dire qu'on suppose que  $x$  est  $s$ -sparse où  $f = \psi x$ . On sélectionne  $m$  mesures dans la base de mesure  $\phi$  selon une loi uniforme. Alors, si pour tout  $\delta > 0$  :

$$m \geq C \cdot \mu^2(\phi, \psi) \cdot s \cdot \log\left(\frac{n}{\delta}\right)$$

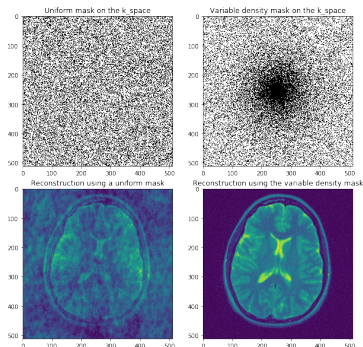
pour une certaine constante  $C$ , la solution du problème (5) est exacte avec probabilité supérieure à  $1 - \delta$ .

Le rôle de l'incohérence est clair : plus l'incohérence est grande, plus  $\mu(\phi, \psi)$  est faible, et moins de mesures sont nécessaires pour reconstruire le signal. Si l'incohérence entre les deux bases est maximale (égale à 1),  $s \log(n)$  mesures suffisent à reconstruire le signal.

# La reconstruction parcimonieuse de l'image

- Certaines matrices aléatoires pourraient dès lors apparaître comme une bonne stratégie de mesure, puisque étant donnée une base, avec grande probabilité, le vecteur aléatoire est incohérent avec les éléments de cette base
- Cohérent avec les résultats du cours : avec grande probabilité, les matrices aléatoires gaussiennes vérifient la propriété RIP d'ordre  $s$  pour le nombre optimal de mesures en  $m \sim s \log(\frac{en}{s})$  et permettent donc de reconstruire tout vecteur  $s$ -sparse par la procédure du *Basis Pursuit*
- Si l'on avait toute liberté de choisir les mesures, et aucune contrainte physique, l'intuition suggérerait donc de choisir des mesures aléatoires gaussiennes
- Cependant, dans le cadre de l'IRM, nous ne sommes pas libres de choisir les types de mesures que nous utilisons pour acquérir un signal : Notion d'incohérence asymptotique

# La reconstruction parcimonieuse de l'image



**FIGURE 3** – Illustration de l'importance de l'échantillonnage selon une variable dont la densité diminue en s'éloignant de l'origine : dans la première colonne, un échantillonnage aléatoire, dans la seconde, un échantillonnage du k-space selon une densité variable qui décroît quand la distance au centre du k-space augmente

- L'article de M. Lustig propose de sous-échantillonner le k-space selon une fonction de distribution qui est une fonction décroissante de la distance par rapport au centre du k-space.

$$P(x, y) = [1 - \frac{\sqrt{2}}{n} \sqrt{x^2 + y^2}]^4, \text{ où } x, y \in [-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]$$

- Justification heuristique : les coefficients de Fourier au centre du k-space contiennent la plus grande partie de l'information sur l'image (basses fréquences décrites par les ondelettes à échelle grossière)
- Structure de parcimonie particulière de l'IRM exploitée dans *Breaking the coherence barrier : A new theory for compressed sensing*

# Parcimonie et stratégie de sous-échantillonnage

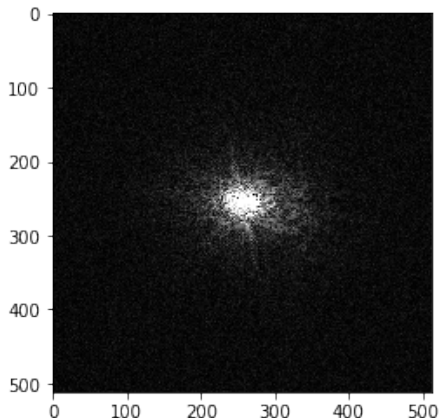


FIGURE 4 – Les coefficients de Fourier au centre du k-space contiennent la plus grande partie de l'information sur l'image

# Parcimonie et stratégie de sous-échantillonnage

- On réutilise la définition de la cohérence rencontrée plus tôt :

$$\mu(U) = \sqrt{n} \max_{1 \leq i, j \leq n} |u_{ij}|$$

où  $U = (u_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$  avec  $u_{ij} = \langle \phi_j, \psi_i \rangle$  ( $\psi$  et  $\phi$  étant des bases orthonormales,  $U = \phi\psi^{-1}$  est une isométrie)

- Si  $f$  est  $s$ -sparse dans la base  $(\psi)_i=1^n$ , on utilise la propriété d'incohérence de la matrice  $U$  afin de prendre un nombre minimal de mesures  $m$  de l'ordre  $s$
- Mais si la cohérence est très forte, il n'y a aucune chance de reconstruire le signal avec un petit nombre de mesure : *barrière de la cohérence*
- Or cette barrière est bien présente dans notre problème où la matrice  $U = \phi\psi^{-1}$  est cohérente
- Mais la cohérence diminue lorsque les fréquences de Fourier sont hautes (loin du centre du  $k$ -space)

## Définition : Parcimonie asymptotiquement incohérente

Soit  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une isométrie. Alors  $U$  est asymptotiquement incohérente si :

$$\lim_{\substack{K, n \rightarrow \infty \\ K < n}} \mu(UP_K^\perp) = \lim_{\substack{K, n \rightarrow \infty \\ K < n}} \mu(P_K^\perp U) = 1$$

où  $P_K \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est la matrice de projection orthogonale sur  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_K)$  où  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ .

Une matrice  $U$  est dite asymptotiquement incohérente si, en s'éloignant des premières lignes de la matrice, les matrices constituées des dernières lignes deviennent de plus en plus incohérentes

# Parcimonie et stratégie de sous-échantillonnage

- Nouvelle stratégie de sous-échantillonnage pour prendre en compte les différents degrés de cohérence : Prendre toutes les mesures dans les régions cohérentes (car sinon il est impossible de trouver une matrice de mesure dense dans ces régions) et mesurer de façon aléatoire dans les régions les moins cohérentes (où le rôle de l'aléatoire a été mis en évidence plus haut)
- Pour simplifier le problème, on considère le cas extrême où, pour un certain  $K \in \{1, \dots, n\}$ , nous avons  $\mu(P_K^\perp U) = 1$  et  $\mu(P_{K^c}^\perp U) = \sqrt{N}$  (et dans ce cas,  $K$  est petit). La matrice formée des  $K$  premières lignes est alors parfaitement cohérente, et celle formée des  $K$  dernières lignes est parfaitement incohérente
- Cela suggère la définition d'une stratégie optimale à deux niveaux



## Définition : Stratégie optimale à deux niveaux

Soient  $\mathbf{N} = (N_1, n) \in \mathbb{N}^2$  avec  $1 \leq N_1 < n$  et  $\mathbf{m} = (N_1, N_2)$  avec  $N_2 \leq n - N_1$ .

Soient alors  $\Omega_1 \subset \{1, \dots, N_1\}$  et  $\Omega_2 \subset \{N_1 + 1, \dots, n\}$  choisis de manière aléatoire et uniforme tels que  $|\Omega_1| = N_1$  et  $|\Omega_2| = N_2$ .

Alors on appelle  $(\mathbf{N}, \mathbf{m})$  - Stratégie à Deux Niveaux (SODN)

l'ensemble :  $\Omega = \Omega_{\mathbf{N}, \mathbf{m}} = \Omega_1 \cup \Omega_2$

- La définition précédente peut être étendue à une stratégie à plusieurs niveaux (et non seulement 2)
- On peut remarquer que  $\Omega_1$  n'est pas réellement choisi de façon aléatoire. Ainsi, la SDN correspond à une stratégie où l'on échantillonne totalement les  $N_1$  premières lignes de notre matrice, mais de façon aléatoirement uniforme les autres lignes.

## Définition : Parcimonie à deux niveaux

Soient  $\mathbf{M} = (M_1, n) \in \mathbb{N}^2$  et  $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{N}^2$  tels que :  $s_1 \leq M_1$  et  $s_2 < n - M_1$ . On définit :

$$\Delta_1 = \text{supp}(x) \cap \{1, \dots, M_1\}$$

$$\Delta_2 = \text{supp}(x) \cap \{M_1 + 1, \dots, n\}$$

On dit alors que  $x$  est  $(\mathbf{s}, \mathbf{M})$ -sparse si  $|\Delta_1| \leq s_1$  et  $|\Delta_2| \leq s_2$

- La définition précédente peut être étendue à une parcimonie à plusieurs niveaux
- Le signal n'est pas sparse dans les ondelettes à basse résolution, mais il l'est dans celles à résolution plus fine. On note  $f = \sum_{i=1}^n x_i \psi_i$  et  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . On peut considérer que  $f$  est parcimonieux à plusieurs (2) étapes

# Parcimonie et stratégie de sous-échantillonnage

- Résumons l'idée derrière les trois définitions que l'on a exposées : le nombre de mesures  $N_k (k = 1, 2)$  nécessaires dans chaque bloc  $\Omega_k$  est déterminé par la parcimonie de  $f$  dans  $\Delta_k$  et par la cohérence asymptotique de  $U$
- Énonçons maintenant le théorème principal de *"Breaking the coherence barrier : A new theory for compressed sensing"*, qui détermine le nombre de mesures nécessaires pour reconstruire le signal à l'aide de la procédure de minimisation  $l_1$  en utilisant une SDN comme stratégie de sous-échantillonnage

# Parcimonie et stratégie de sous-échantillonnage

**Théorème :** Nombre de mesures nécessaires à la reconstruction du signal avec la procédure de minimisation  $l_1$  en utilisant une SDN

Soit  $U \in \mathbb{C}^{N \times N}$  une isométrie et  $x \in \mathbb{C}^N$   $(s, \mathbf{M})$ -sparse. On suppose que :

$$N_2 \gtrsim (N - N_1).(\log(s\epsilon^{-1}) + 1).\mu_{N_1}.s_2.\log N$$

où  $\mu_{N_1} = \mu(P_{N_1}^\perp)$  est la cohérence de la matrice formée des  $N - N_1$  dernières lignes de  $U$ . Si l'on utilise la stratégie  $\Omega = \Omega_{\mathbf{N}, \mathbf{m}}$  définie précédemment, et en notant  $x^*$  le résultat de la procédure de minimisation  $l_1$  :

$$\min_{\tilde{x} \in \mathbb{C}^n} \|\tilde{x}\|_1 \text{ s.c : } P_\Omega U \tilde{x} = P_\Omega \hat{f}$$

où  $\hat{f} = Ux$ , alors,  $\forall \delta \in [0, 1]$ , avec probabilité supérieure à  $1 - \delta$ ,  $x^*$  est unique et  $x^* = x$ .

En résumé :

- Dans une première étape, nous effectuons un échantillonnage complet en utilisant  $N_1$  mesures pour reconstruire les  $M_1$  premiers coefficients
- Dans une seconde étape, il nous faut au moins  $(N - N_1) \cdot \mu_{N_1} \cdot s_2$  mesures (à des facteurs logarithmiques près) pour échantillonner les  $s_2$  coefficients restants

Au total, nous avons donc besoin de  $N_1 + N_2 \gtrsim N_1 + (N - N_1) \cdot \mu_{N_1} \cdot s_2$  mesures.

## Revenons à l'article de M. Lustig

- Il est clair que la fonction de distribution choisie, que l'on a présentée au début de cette section, opère un échantillonnage qui se rapproche de celui préconisée par le théorème que nous venons d'énoncer
- En effet, nous pouvons considérer que le  $k$ -space est sparse à deux niveaux (le premier étant le centre du  $k$ -space, et le deuxième étant le reste du  $k$ -space) et qu'il est asymptotiquement incohérent
- La stratégie consistant à échantillonner de façon soutenue autour du centre du  $k$ -space puis de façon moins soutenue en dehors du centre est assez similaire à la SDN que nous avons présentée précédemment

## 1 Introduction

## 2 IRM et Compressed Sensing

- Positionnement du problème
- La parcimonie implicite des IRM
- L'importance de l'échantillonnage incohérent
- La reconstruction parcimonieuse de l'image
- Parcimonie et stratégie de sous-échantillonnage

## 3 Expériences et Simulations

- Des masques adaptés pour sous-échantillonner le k-space
- Des algorithmes de reconstruction de l'image

## 4 Références

Nous présentons maintenant des méthodes que nous avons élaborées pour reconstruire le  $k$ -space. Il s'agit de :

- Masques adaptés pour sous échantillonner le  $k$ -space
- Algorithmes de reconstruction de l'image



# Des masques adaptés pour sous-échantillonner le k-space

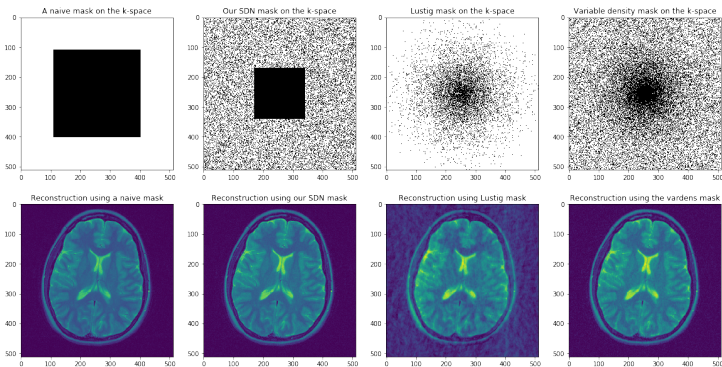


FIGURE 5 – Différents masques utilisés pour sous-échantillonner le k-space

# Des masques adaptés pour sous-échantillonner le k-space

Mask	SSLIM	l2 error	% coefficients
-----	-----	-----	-----
Naïve mask	0.901	0.035	32
SDN mask	0.903	0.031	33
Lustig mask	0.680	0.237	10
Vardens mask	0.902	0.023	33

FIGURE 6 – Performance des différents masques utilisés pour sous-échantillonner le k-space

# Des algorithmes de reconstruction de l'image

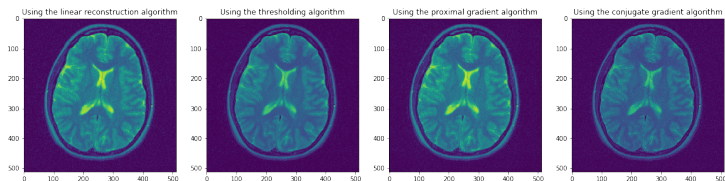


FIGURE 7 – Reconstruction de l'image en utilisant différents algorithmes






# Des algorithmes de reconstruction de l'image

Algorithm	SSLIM	12 error
-----	-----	-----
Linear reconstruction	0.902	0.023
Thresholding	0.899	0.028
Proximal gradient	0.893	0.028
Conjugate gradient	0.998	0.006

FIGURE 8 – Performance des différents algorithmes utilisés pour reconstruire l'image

- 1 Introduction
- 2 IRM et Compressed Sensing
  - Positionnement du problème
  - La parcimonie implicite des IRM
  - L'importance de l'échantillonnage incohérent
  - La reconstruction parcimonieuse de l'image
  - Parcimonie et stratégie de sous-échantillonnage
- 3 Expériences et Simulations
  - Des masques adaptés pour sous-échantillonner le k-space
  - Des algorithmes de reconstruction de l'image
- 4 Références

# Références

-  MICHAEL LUSTIG DAVID L. DONOHO, JUAN M. SANTOS, JOHN M. PAULY — *Compressed Sensing MRI*, IEE Signal Processing Magazine, March 2008.
-  MICHAEL LUSTIG DAVID L. DONOHO, JOHN M. PAULY — *Sparse MRI : The Application of Compressed Sensing for Rapid MR Imaging*, Magnetic Resonance in Medicine, 2007.
-  EMMNUEL J. CANDÈS, MICHAEL B. WALKIN — “*People Hearing Without Listening*” : *An Introduction to Compressive Sampling*, IEE Signal Processing Magazine, March 2008.
-  EMMNUEL J. CANDÈS, JUSTIN ROMBERG — *Sparsity and Incoherence in Compressive Sampling*, IOP Publishing 2007.
-  BEN ADCOCK, ANDERS C. HANSEN, CLARICE POON, BOGDAN ROMAN — *Breaking the coherence barrier : A new theory for compressed sensing*, 2013.



NICOLAS CHAUFFERT, PHILIPPE CIUCIU, PIERRE WEISS —  
*Variable Density Compressed Sensing In MRI : Theoretical vs  
Heuristic Sampling Strategies*, SBI - 10th International Symposium  
on Biomedical Imaging, San Francisco, 2013.



<https://www.imaio.com/fr/e-Cours/e-MRI>