

Introduction au Compressed Sensing

Applications à l'IRM (Image par résonance magnétique)

Chloé Baraille, Othmane Sebbouh

25 mars 2018

Résumé

L'imagerie par résonance magnétique (IRM) est un outil d'imagerie médicale avec un processus d'acquisition de données intrinsèquement lent. L'application du compressed sensing, qui a pour but de reconstruire des signaux et des images à partir d'un nombre de mesures limité, apparaît alors essentielle pour réduire le temps d'acquisition des données, avec des avantages clairs pour les patients et une économie des soins de santé. La structure parcimonieuse des IRM dans une base de représentation appropriée permet l'application de la théorie du compressed sensing. Il s'agit alors de trouver une base de mesure optimale pour sous-échantillonner le k-space qui garantisse une récupération d'image exacte à partir de mesures incomplètes. La distribution d'échantillonnage optimale doit respecter un critère d'éparpillement, formalisé par la notion d'incohérence entre les bases de représentation et de mesure. Les matrices aléatoires apparaissent alors comme un bon choix de mesures. Cependant, les propriétés physiques de l'IRM ne permettent pas une totale liberté dans le choix des mesures. Pour pallier ce problème, on introduit la notion d'incohérence asymptotique de parcimonie asymptotique. De ces définitions découle alors une stratégie optimale d'échantillonnage, qui implique de mesurer complètement le centre du k-space.

Table des matières

1	Introduction : L'utilisation du compressed sensing, déterminante en IRM	2
2	IRM et Compressed Sensing	2
2.1	Positionnement du problème	3
2.2	La parcimonie implicite des IRM	4
2.3	L'importance de l'échantillonnage incohérent	5
2.4	La reconstruction parcimonieuse de l'image	6
2.5	Parcimonie et stratégie de sous-échantillonnage	8
2.5.1	Incohérence et parcimonie asymptotiques	8
3	Expériences et simulations	10
A	Les méthodes exploitant la redondance dans le k-space	11
B	Le fonctionnement et la physique de l'IRM	11
B.1	La résonance magnétique nucléaire	11
B.2	Signal RMN et contraste de base	11
B.3	Le codage spatial du signal	12
B.4	La formation de l'image IRM	13

1 Introduction : L'utilisation du compressed sensing, déterminante en IRM

L'IRM est un des outils d'imagerie médicale les plus utilisés aujourd'hui. Sa capacité à fournir des contrastes entre les tissus est inégalée par la plupart, sinon toutes les autres modalités d'imagerie. L'IRM permet d'étudier et de quantifier les caractéristiques métaboliques et physiologiques des tissus, fournissant ainsi des informations précieuses sur les processus pathologiques qui seraient difficiles à évaluer de manière non invasive. L'IRM n'expose pas les patients à des rayonnements dangereux, ce qui la rend plus sûre que la scannographie, la modalité concurrente de l'IRM. Ces propriétés contribuent à faire de l'IRM l'outil d'imagerie le plus polyvalent à la disposition des médecins.

Cependant, un obstacle majeur à l'IRM dans de nombreuses applications est la vitesse d'imagerie limitée. Les IRM sont donc sensibles aux artefacts liés au mouvement, ce qui peut exiger une sédation ou une anesthésie. La durée nécessaire à l'acquisition des mesures limite l'IRM sur les parties du corps qui bougent avec la respiration, comme dans l'imagerie abdominale et cardiaque. En outre, ces longues durées de mesure augmentent les coûts et limitent le nombre de patients pour lesquels l'IRM est disponible.

Puisqu'il semble impossible d'augmenter la rapidité d'acquisition des mesures, limiter le nombre de données nécessaires pour restituer l'image apparaît comme une solution souhaitable. Dans le cadre de l'IRM, réduire le nombre de données à acquérir signifie sous-échantillonner le k-space. Toutefois, dans un tel cas, le critère de Nyquist¹ n'est pas respecté. Les reconstructions par transformée de Fourier introduisent des artefacts qui empêchent la restitution de l'image. Plusieurs méthodes ont été développées pour réduire les effets de ces artefacts, que l'on peut diviser en trois groupes :

- Les méthodes exploitant la redondance dans le k-space²
- Les méthodes générant des artefacts incohérents ou moins visuellement apparents
- Les méthodes exploitant la redondance spatiale ou temporelle ou les deux

Nous cherchons ici à exploiter la parcimonie implicite des IRM et à développer une approche combinant les éléments des deux dernières approches, afin de limiter le nombre de mesures nécessaires à la restitution d'une image de qualité.

2 IRM et Compressed Sensing

Le compressed sensing permet de reconstruire certains signaux et images à partir d'un petit nombre de mesures, inférieur au critère de Nyquist. Il repose sur deux principes : la parcimonie, qui concerne les signaux d'intérêt, et l'incohérence, qui se rapporte à la modalité de détection. Le compressed sensing permet d'abord de tirer parti de la parcimonie, qui peut être implicite, de l'objet étudié. La parcimonie implicite signifie ici que l'objet que nous nous efforçons de reconstruire, une IRM, a une représentation parcimonieuse dans un domaine connu et fixe, déterminé par une base correctement choisie ψ . Certaines images médicales, telles que les angiogrammes, sont sparses dans leur représentation naturelle, c'est-à-dire en pixels. Les images médicales plus complexes, dont les IRM, ne sont pas sparses dans la représentation en pixels, mais elles ont une représentation parcimonieuse en termes de coefficients d'ondelettes. Ensuite,

1. Selon le critère de Nyquist, l'échantillonnage d'un signal exige un nombre d'échantillons par unité de temps supérieur au double de l'écart entre les fréquences minimale et maximale qu'il contient.

2. Voir l'appendice pour plus de précisions.

l'incohérence prolonge la notion de dualité entre le temps et la fréquence et exprime l'idée que les objets ayant une représentation parcimonieuse dans un domaine ψ doivent être répartis dans le domaine dans lequel ils sont acquis. Autrement dit, l'incohérence indique que, contrairement au signal d'intérêt, les signaux échantillonnés ont une représentation extrêmement dense dans la base ψ . Cette hypothèse n'est pas exactement vérifiée dans le cadre des IRM, comme nous le verrons plus tard quand nous introduirons la notion d'incohérence asymptotique.

On cherche donc à exploiter ces notions de parcimonie et d'incohérence pour concevoir des protocoles d'acquisition de signaux efficaces qui échantillonnent de façon non adaptative le signal dans le k-space à un faible débit, et qui reconstruisent ensuite l'IRM à partir de ce qui semble être un ensemble incomplet de mesures. L'IRM mesurant les coefficients de Fourier des signaux enregistrés, et non des pixels, la question est donc de savoir s'il est possible de sous-échantillonner le k-space de façon incohérente et d'exploiter la parcimonie des images dans les bases d'ondelettes pour reconstruire l'image sans dégrader sa qualité.

L'application des méthodes du compressed sensing aux IRM exige donc que :

- Les images aient une représentation parcimonieuse dans une base de représentation ψ (qui est ici une base d'ondelettes).
- Le k-space soit échantillonné de façon incohérente dans la base ψ .
- On dispose d'une procédure de reconstruction non linéaire pour assurer à la fois la parcimonie de la représentation de l'image et la cohérence avec les données acquises.

La figure 1 illustre les relations entre ces trois conditions, que nous détaillerons dans la suite de l'exposé.

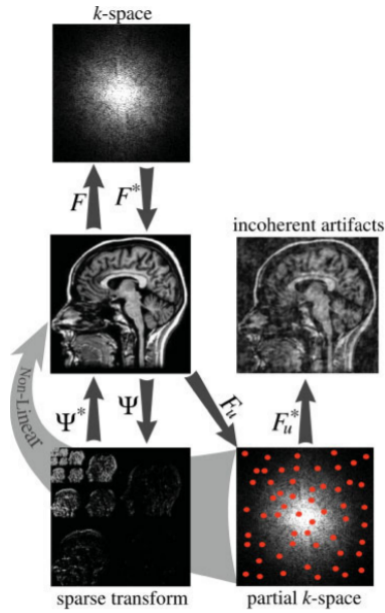


FIGURE 1 – Illustration des domaines et des opérateurs utilisés ainsi que des exigences du compressed sensing : parcimonie implicite, incohérence des artefacts de sous-échantillonnage, reconstruction non linéaire pour assurer la parcimonie

2.1 Positionnement du problème

On s'intéresse ici au problème de compressed sensing suivant : on veut reconstruire un signal f à partir de m vecteurs de mesure $\phi_1 \dots \phi_m$ et des observations $\hat{f}_1 \dots \hat{f}_m$ définies par :

$$\hat{f}_k = \langle f, \phi_k \rangle \text{ pour } k = 1 \dots m \quad (1)$$

Nous nous limitons ici, par souci de simplicité, à des signaux discrets : $f \in \mathbb{C}^n$. Positionner le problème ainsi est une façon de corrélérer l'objet que nous souhaitons acquérir avec les formes d'onde ϕ_k . Si par exemple les formes d'onde ϕ_k sont des fonctions δ de Dirac, alors \hat{f} est un vecteur de valeurs de f échantillonnées dans le domaine temporel ou spatial. Si les formes d'onde de détection sont sinusoïdales, comme c'est le cas des ondes enregistrées en IRM, alors \hat{f} est un vecteur de coefficients de Fourier.

Plus précisément, étant donné un signal $f \in \mathbb{C}^n$ et un ensemble de fréquences $M \subset \{1, \dots, N\}$ où $|M| = m$, on souhaite reconstruire f à partir des coefficients de Fourier $\{\hat{f}_k : k \in M\}$. Pour fixer les notations, on introduit la matrice de Fourier (transformée de Fourier discrète) :

$$\Gamma : \begin{cases} \mathbb{C}^n & \rightarrow \mathbb{C}^n \\ f & \rightarrow \Gamma f = \hat{f} \end{cases} \quad (2)$$

où $\Gamma = \left(\frac{w^{(p-1)(q-1)}}{\sqrt{n}} \right)$ et $w = \exp(-2i\pi/n)$. On note $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ les vecteurs lignes de Γ , et on a bien : $\hat{f}_k = \langle \Gamma_k, f \rangle$ (ici $\phi_k = \Gamma_k$). On cherche à reconstruire les coefficients de Fourier d'un signal $f \in \mathbb{C}^n$ à partir des données $\hat{f} = \Gamma_M f$, où Γ_M est la matrice obtenue en extrayant les lignes d'indices M de la matrice de Fourier $\Gamma \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$\Gamma_M : \begin{cases} \mathbb{C}^n & \rightarrow \mathbb{C}^m \\ f & \rightarrow \hat{f}_k : k \in M \end{cases} \quad (3)$$

et où le nombre $m = |M|$ de mesures disponibles est beaucoup plus petit que la dimension n du signal f . En effet, la lenteur du processus d'acquisition des données en IRM impose un petit nombre de mesures disponibles en pratique. Une reconstruction de f de bonne qualité est-elle possible à partir de $m \ll n$ mesures seulement ? Ce problème est hautement sous-déterminé puisqu'il s'agit de résoudre un problème d'équations linéaires à m équations et n inconnues.

2.2 La parcimonie implicite des IRM

L'hypothèse de parcimonie est centrale en compressed sensing. Les images ne sont pas sparses mais elles admettent une représentation parcimonieuse dans une base d'ondelettes. La transformée en ondelettes est une représentation multi-échelle de l'image. Les coefficients d'ondelettes à échelle grossière représentent les composantes d'image à basse résolution et les coefficients d'ondelette à échelle fine représentent les composantes à haute résolution. Chaque coefficient d'ondelette porte des informations sur la position spatiale et sur la fréquence spatiale. Un petit nombre seulement de coefficients d'ondelettes contient l'essentiel de l'information contenue dans l'image. Formellement, le signal $f \in \mathbb{C}^n$ est exprimé dans une base orthonormale (une base d'ondelettes ici) $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$:

$$f = \sum_{i=1}^n x_i \psi_i \text{ où } x_i = \langle f, \psi_i \rangle \quad (4)$$

On peut réécrire $f = \psi x$ où $\psi \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est la matrice formée par les $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ en colonnes. On considère $f_s = \psi x_s$ où x_s est formé des s plus grands coefficients de x et de 0. x_s est sparse par définition. Si x est sparse ou compressible alors x peut être approximé par x_s et donc, l'erreur $\|f - f_s\|_2$ est faible (ψ étant une base orthonormale, on a bien $\|x - x_s\|_2 = \|f - f_s\|_2$). On peut alors ne garder qu'une partie des coefficients d'ondelettes sans dégrader la qualité de l'image à reconstruire.

Nous illustrons avec la figure 2 la parcimonie implicite des images IRM. La parcimonie d'une image correspond au pourcentage du nombre de coefficients d'ondelettes permettant de reconstruire l'image sans trop dégrader sa qualité. Nous utilisons deux mesures de similarité pour comparer l'image originale à sa reconstruction : la SSIM, qui compare la différence de structure, et la différence en norme 2 normalisée, qui

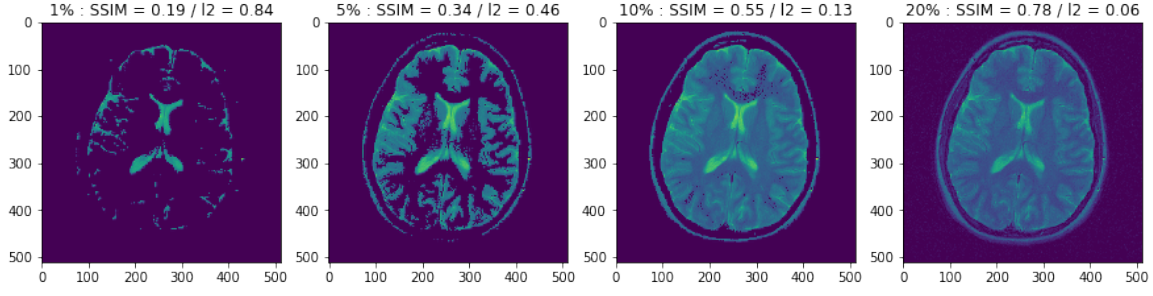


FIGURE 2 – Représentation parcimonieuse des images dans le domaine de transformée d'ondelettes en fonction du pourcentage du nombre de coefficients utilisé

est une comparaison pixel à pixel. Deux images similaires ont une SSIM proche de 1 et une différence en norme 2 normalisée proche de 0.

2.3 L'importance de l'échantillonnage incohérent

Procéder à un échantillonnage incohérent du signal dans le domaine de transformation parcimonieux est une des clés essentielles pour l'application des méthodes de compressed sensing. Plus formellement, soient ϕ et ψ deux bases orthonormales de \mathbb{C}^n . La première base ϕ est utilisée pour mesurer le signal f , comme dans (1) : on choisit m vecteurs parmi les n vecteurs de mesure de $\phi = (\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$. La base ϕ est donc appelée la base de mesures. La seconde base, ψ (qui est ici une base d'ondelettes) est la base dans laquelle le signal f a une représentation parcimonieuse. La base ψ est donc appelée la base de représentation. On définit lors la cohérence entre la base de mesures ϕ et la base de représentation ψ par :

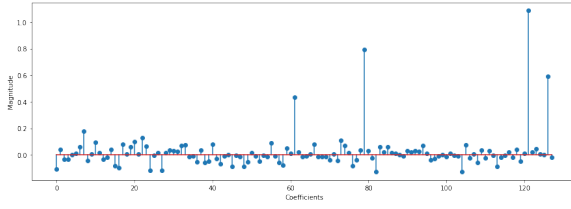
$$\mu(\phi, \psi) = \sqrt{n} \times \max_{1 \leq k, j \leq n} |\langle \phi_k, \psi_j \rangle|$$

La cohérence mesure ainsi la plus grande corrélation entre deux éléments de ψ et ϕ (si ϕ et ψ sont très corrélés, la cohérence est grande, et inversement). On peut observer que $\mu(\phi, \psi) \in [1, \sqrt{n}]$. En effet, par Cauchy-Schwarz $|\langle \phi_k, \psi_j \rangle| \leq \|\phi_k\|_2 \|\psi_j\|_2 = 1$, et par Parseval, $\forall j, \sum_k |\langle \phi_k, \psi_j \rangle|^2 = \|\psi_j\|_2^2 = 1$, et on a donc $\forall j, \max_k |\langle \phi_k, \psi_j \rangle|^2 \geq \frac{1}{n}$.

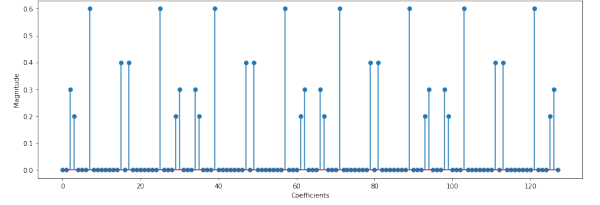
En compressed sensing, on veut trouver des paires (ϕ, ψ) qui affichent une faible cohérence. Pour le comprendre, on se référera au théorème 3.3. L'idée derrière cette notion est la suivante : un signal sparse dans une base de représentation $\psi = \psi_1, \dots, \psi_n$ (le signal est dit localisé en fréquence) doit être étalé dans la base de mesures $\phi = \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Les vecteurs de mesure $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ ont donc une représentation bien étalée dans la base dans laquelle est exprimée la parcimonie.

Les matrices aléatoires ϕ présentent une forte incohérence avec tout type de matrices fixes ψ . Au contraire, il est impossible reconstruire des vecteurs sparses dans la base canonique en choisissant des mesures dans la base canonique, car la cohérence de la base canonique avec elle-même est forte (elle est même maximale).

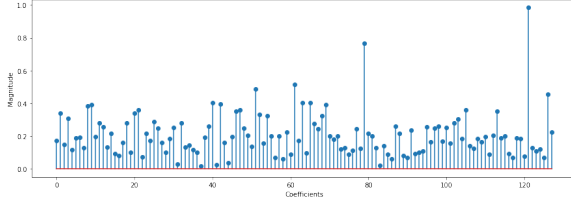
C'est ce que l'on illustre dans la figure 3. On crée un vecteur 5-sparse dans une base ψ de \mathbb{R}^{128} , illustré par la figure 3a, et on lui applique une transformée de Fourier. On dispose ainsi d'un signal que l'on mesure dans $\phi = \Gamma_1, \dots, \Gamma_{128}$. On cherche à reconstruire le signal original à partir de 32 coefficients de Fourier (soit le quart des coefficients), et à le reconstruire dans ψ en lui appliquant une transformée de Fourier inverse. Pour ce faire, on met au point deux stratégies : la première consiste à échantillonner de façon déterministe les coefficients de Fourier, en choisissant un coefficient sur 4 ; la seconde stratégie consiste à tirer selon une loi uniforme 32 coefficients de Fourier. Nous voyons sur la figure 3b que la première stratégie échoue à reconstituer le signal : on obtient une superposition de répliques décalées du signal, et reconstituer le signal original devient impossible car il n'est pas possible de faire la distinction entre le signal original et



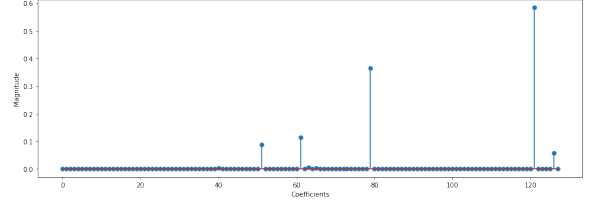
(a) Signal sparse original que l'on va échantillonner et tenter de restituer



(b) Reconstruction du signal à partir d'un échantillon cohérent



(c) Reconstruction du signal à partir d'un échantillon incohé-



(d) Application du soft-thresholding au signal reconstitué à partir d'un échantillon incohérent

FIGURE 3 – Illustration de l'importance de l'échantillonnage incohérent pour reconstruire le signal

ses répliques (qui sont toutes également probables). Le tirage aléatoire conduit à une situation différente. Nous pouvons observer que sur la figure 3c la reconstruction du signal par l'inverse de la transformée de Fourier fait apparaître des artefacts incohérents qui se comportent comme un bruit. Malgré les apparences, les artefacts ne sont pas du bruit et sont au contraire déterministes. Le sous-échantillonnage provoque une fuite d'énergie à partir de chaque coefficient non nul du signal original. Cette énergie apparaît dans d'autres coefficients de signaux reconstruits, y compris ceux qui étaient nuls dans le signal d'origine. En appliquant une fonction de soft-thresholding au signal obtenu, nous pouvons reconstruire le signal original, comme cela est illustré sur la figure 3d. Cet exemple illustre donc l'importance de l'incohérence pour reconstruire des signaux sparses. Utiliser les matrices aléatoires, qui présentent une forte incohérence avec tout type de matrices fixes, apparaît alors comme une bonne stratégie. Nous verrons que les matrices aléatoires ne peuvent pas être utilisées dans le cadre des IRM, mais le critère d'incohérence qu'elles vérifient reste d'une importance cruciale.

2.4 La reconstruction parcimonieuse de l'image

Nous décrivons maintenant le processus non linéaire de reconstruction d'image approprié pour appliquer les méthodes de compressed sensing. On dispose de m données $\hat{f}_k = \langle \Gamma_k, f \rangle$ pour $k = 1, \dots, m$ avec $m \ll n$ à partir desquelles nous cherchons à reconstruire le signal par minimisation de la norme l_1 . Le signal reconstruit f^* s'écrit $f^* = \psi x^*$ où x^* est la solution du programme d'optimisation convexe suivant :

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \|x\|_1 \text{ s.c. } \hat{f}_k = \langle \Gamma_k, \psi x \rangle, \forall k \in M \quad (5)$$

Parmi toutes les solutions s'écrivant $\tilde{f} = \psi \tilde{x}$ compatibles avec les données, on choisit celle qui a la plus petite norme l_1 . Cet algorithme est l'algorithme de *Basis Pursuit*. On s'intéresse maintenant aux conditions pour obtenir une reconstruction exacte de f par cette procédure de minimisation de la norme l_1 , qui favorise la parcimonie.

Theorem 2.1. *Soit $f \in \mathbf{R}^n$. On suppose que la représentation de f dans la base ψ est s -parcimonieuse, c'est-à-dire qu'on suppose que x est s -sparse où $f = \psi x$. On sélectionne m mesures dans la base de mesure ϕ selon une loi uniforme. Alors, si pour tout $\delta > 0$:*

$$m \geq C \cdot \mu^2(\phi, \psi) \cdot s \cdot \log\left(\frac{n}{\delta}\right)$$

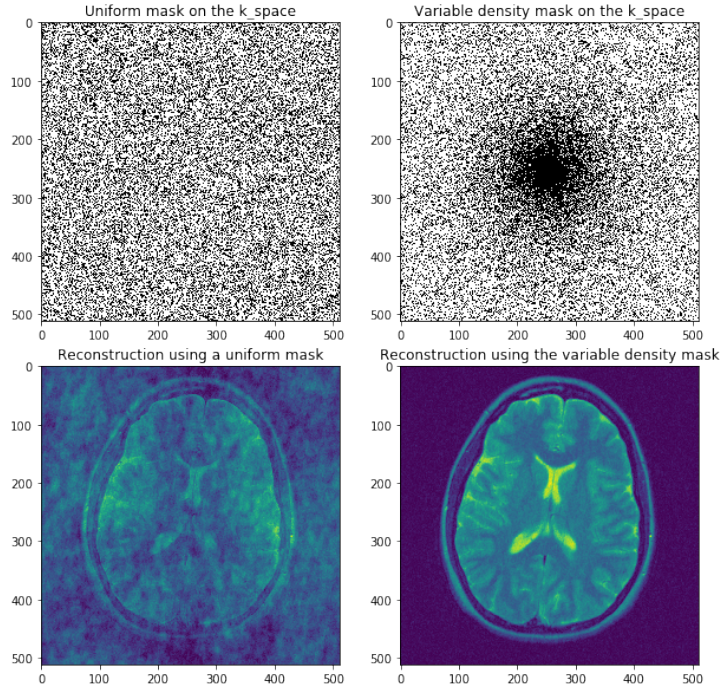


FIGURE 4 – Illustration de l’importance de l’échantillonnage selon une variable dont la densité diminue en s’éloignant de l’origine : dans la première colonne, un échantillonnage aléatoire, dans la seconde, un échantillonnage du k-space selon une densité variable qui décroît quand la distance au centre du k-space augmente

pour une certaine constante C , la solution du problème (5) est exacte avec probabilité supérieure à $1 - \delta$.

Le rôle de l’incohérence est clair à travers ce théorème : plus l’incohérence est grande, plus $\mu(\phi, \psi)$ est faible, et nous avons besoin de moins de mesures pour reconstruire le signal. Si l’incohérence entre les deux bases est maximale (égale à 1), $s \log(n)$ mesures suffisent à reconstruire le signal.

Certaines matrices aléatoires pourraient dès lors apparaître comme une bonne stratégie de mesure, puisque étant donnée une base, avec grande probabilité, le vecteur aléatoire est incohérent avec les éléments de cette base. Cela est cohérent avec les résultats du cours, où nous avons montré, qu’avec grande probabilité, les matrices aléatoires gaussiennes vérifient la propriété RIP d’ordre s pour le nombre optimal de mesures en $m \sim s \log(\frac{en}{s})$ et permettent donc de reconstruire tout vecteur s -sparse par la procédure du *Basis Pursuit*. Si l’on avait toute liberté de choisir les mesures, et aucune contrainte physique, l’intuition suggérerait donc de choisir des mesures aléatoires gaussiennes. Cependant, dans le cadre de l’IRM, nous ne sommes pas libres de choisir les types de mesures que nous utilisons pour acquérir un signal. Des propriétés physiques des noyaux atomiques sont exploitées pour collecter des échantillons dans le domaine de Fourier d’un objet d’intérêt à deux ou trois dimensions. Bien que nous ayons un contrôle sur les coefficients de Fourier échantillonnés, les mesures sont intrinsèquement basées sur la fréquence.

Nous illustrons ce phénomène dans la figure 4. La première image est obtenue en sous-échantillonnant le k-space de façon complètement aléatoire. On obtient une SSIM de 0.55 et une erreur de norme 2 de 0.51. La seconde image est obtenue en sous-échantillonnant le k-space selon une densité variable qui décroît quand la distance au centre du k-space augmente. On obtient une SSIM de 0.90 et une erreur de norme 2 de 0.02. Dans les deux cas, nous utilisons un tiers des coefficients.

Pour pallier ce problème, nous introduisons la notion d’incohérence asymptotique dans la partie suivante.

2.5 Parcimonie et stratégie de sous-échantillonnage

L'article de M. Lustig propose de sous-échantillonner le k-space selon une fonction de distribution qui est une fonction décroissante de la distance par rapport au centre du k-space.

$$P(x, y) = [1 - \frac{\sqrt{2}}{n} \sqrt{x^2 + y^2}]^4, \text{ où } x, y \in [-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]$$

La justification heuristique de ce choix se situe dans le fait que les coefficients de Fourier au centre du k-space contiennent la plus grande partie de l'information sur l'image. En effet les IRM sont sparses dans les bases d'ondelettes : seuls les coefficients correspondant aux ondelettes à échelle grossière, qui décrivent les basses fréquences, sont significativement grands ; les coefficients associés aux résolutions plus fines, qui décrivent elles les hautes fréquences, sont, pour la plupart, nuls. Les fréquences basses, qui se situent au centre du k-space, contiennent ainsi l'essentiel de l'information contenue dans l'image.

Cette dernière remarque est d'un intérêt particulier car elle suggère que la parcimonie de la représentation de l'image dans la base d'ondelettes a une *structure* particulière. L'article de M. Lustig suggère l'existence d'une telle structure, et en tire parti par la méthode de sous-échantillonnage utilisée. Dans la prochaine section, nous nous proposons de définir cette structure de parcimonie. Nous présentons les résultats de *Breaking the coherence barrier : A new theory for compressed sensing* qui reposent sur cette hypothèse, ainsi qu'une stratégie de sous-échantillonnage que nous rapprochons de celle utilisée par Lustig dans *Sparse MRI*. Le but est d'apporter un fondement théorique à la démarche de M. Lustig dans *Sparse MRI*.

2.5.1 Incohérence et parcimonie asymptotiques

Breaking the coherence barrier : A new theory for compressed sensing développe l'idée de parcimonie asymptotique dont nous allons nous inspirer pour définir une parcimonie structurée à deux niveaux. Le point de départ de cet article est que l'hypothèse d'incohérence faite en compressed sensing est rarement rencontrée en pratique. C'est ce qui explique que des stratégies de sous-échantillonnage totalement aléatoire entraînent une mauvaise reconstruction des signaux.

On réutilise ici la définition de la cohérence rencontrée plus tôt en notant $U = (u_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{C}^{n \times n}$, où $u_{ij} = \langle \phi_j, \psi_i \rangle$, et la cohérence de U : $\mu(U) = \sqrt{n} \max_{1 \leq i, j \leq n} |u_{ij}|$ (ψ et ϕ étant des bases orthonormales, $U = \phi\psi^{-1}$ est une isométrie).

L'approche classique en compressed sensing consiste à supposer que f est s -sparse dans la base $(\psi)_{i=1}^n$ et d'utiliser la propriété d'incohérence de la matrice U afin de prendre un nombre minimal de mesures m de l'ordre s . Le problème est que si la cohérence est très forte, il n'y a aucune chance de reconstruire le signal avec un petit nombre de mesure. C'est ce que les auteurs de l'article appellent *la barrière de la cohérence*. Or cette barrière est bien présente dans notre problème où la matrice $U = \phi\psi^{-1}$ est cohérente.

Une observation empirique va alors guider les nouvelles définitions que nous présentons : la cohérence diminue lorsque les fréquences de Fourier sont hautes (loin du centre du k-space), ou lorsque les échelles des ondelettes augmentent. Il en découle la définition suivante de l'incohérence asymptotique :

Definition 2.1. Soit $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une isométrie. Alors U est asymptotiquement incohérente si :

$$\lim_{\substack{K, n \rightarrow \infty \\ K < n}} \mu(UP_K^\perp) = \lim_{\substack{K, n \rightarrow \infty \\ K < n}} \mu(P_K^\perp U) = 1$$

où $P_K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est la matrice de projection orthogonale sur $\text{Vect}(e_1, \dots, e_K)$ où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{C}^n .

Ainsi, une matrice U est dite asymptotiquement incohérente si, en s'éloignant des premières lignes de la matrice, les matrices constituées des dernières lignes deviennent de plus en plus incohérentes. Cela suggère donc une façon différente d'opérer le sous-échantillonnage selon la cohérence des différentes régions de la matrice. De façon heuristique, il faudrait prendre toutes les mesures dans les régions cohérentes (car il est impossible de trouver une matrice de mesure dense dans ces régions) et mesurer de façon aléatoire dans les régions les moins cohérentes (où le rôle de l'aléatoire a été mis en évidence plus haut).

Pour simplifier le problème nous allons considérer le cas extrême où, pour un certain $K \in \{1, \dots, n\}$, nous avons $\mu(P_K^\perp U) = 1$ et $\mu(P_{K^c}^\perp U) = \sqrt{N}$ (et dans ce cas, K est petit). La matrice formée des K premières lignes est alors parfaitement cohérente, et celle formée des K dernières lignes est parfaitement incohérente. Cela suggère alors la définition d'une stratégie optimale à deux niveaux :

Definition 2.2. Soit $\mathbf{N} = (N_1, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq N_1 < n$ et $\mathbf{m} = (N_1, N_2)$ avec $N_2 \leq n - N_1$.

Soient alors $\Omega_1 \subset \{1, \dots, N_1\}$ et $\Omega_2 \subset \{N_1 + 1, \dots, n\}$ choisis de manière aléatoire et uniforme tels que $|\Omega_1| = N_1$ et $|\Omega_2| = N_2$.

Alors on appelle (\mathbf{N}, \mathbf{m}) - Stratégie à Deux Niveaux (SDN) l'ensemble : $\Omega = \Omega_{\mathbf{N}, \mathbf{m}} = \Omega_1 \cup \Omega_2$

La définition précédente peut être étendue à une stratégie à plusieurs niveaux (et non seulement 2). On peut remarquer que Ω_1 n'est pas réellement choisi de façon aléatoire. Ainsi, la SDN correspond à une stratégie d'échantillonnage où l'on échantillonne totalement les N_1 premières lignes de notre matrice, mais de façon aléatoirement uniforme les autres lignes.

Nous définissons enfin la parcimonie asymptotique, qui peut être illustrée par la décomposition d'un signal en base d'ondelettes : dans les ondelettes à basse résolution, le signal n'est pas sparse, alors que dans celles à résolution plus fine, il l'est. Là encore, pour être clair et exposer les idées simplement, nous allons nous restreindre, au lieu de la parcimonie asymptotique, à une parcimonie à deux niveaux. On considère le signal f . On définit sa décomposition dans une base $(\psi)_{i=1}^n$ par $f = \sum_{i=1}^n x_i \psi_i$ et on note $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Definition 2.3. Soient $\mathbf{M} = (M_1, n) \in \mathbb{N}^2$ et $\mathbf{s} = (s_1, s_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que : $s_1 \leq M_1$ et $s_2 < n - M_1$. On définit :

$$\Delta_1 = \text{supp}(x) \cap \{1, \dots, M_1\}$$

$$\Delta_2 = \text{supp}(x) \cap \{M_1 + 1, \dots, n\}$$

On dit alors que x est (\mathbf{s}, \mathbf{M}) -sparse si $|\Delta_1| \leq s_1$ et $|\Delta_2| \leq s_2$

Comme précédemment, la définition ci-dessus peut être étendue à une parcimonie à plusieurs niveaux. Les signaux qui sont parcimonieux à deux niveaux sont des candidats idéaux pour la SDN que nous avons définie précédemment. Résumons l'idée derrière les trois définitions que l'on a exposées : le nombre de mesures $N_k (k = 1, 2)$ nécessaires dans chaque bloc Ω_k est déterminé par la parcimonie de f dans Δ_k et par la cohérence asymptotique de U . Ces définitions étant fixées, nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de "Breaking the coherence barrier : A new theory for compressed sensing", qui détermine le nombre de mesures nécessaires pour reconstruire le signal à l'aide de la procédure de minimisation l_1 en utilisant une SDN comme stratégie de sous-échantillonnage.

Theorem 2.2. Soit $U \in \mathbb{C}^{N \times N}$ une isométrie et $x \in \mathbb{C}^N$ (\mathbf{s}, \mathbf{M}) -sparse. On suppose que :

$$N_2 \gtrsim (N - N_1) \cdot (\log(s\epsilon^{-1}) + 1) \cdot \mu_{N_1} \cdot s_2 \cdot \log N$$

où $\mu_{N_1} = \mu(P_{N_1}^\perp)$ est la cohérence de la matrice formée des $N - N_1$ dernières lignes de U . Si l'on utilise la stratégie $\Omega = \Omega_{\mathbf{N}, \mathbf{m}}$ définie précédemment, et en notant x^* le résultat de la procédure de minimisation l_1 :

$$\min_{\tilde{x} \in \mathbb{C}^n} \|\tilde{x}\|_1 \text{ s.c. : } P_\Omega U \tilde{x} = P_\Omega f$$

où $\hat{f} = Ux$, alors, $\forall \delta \in [0, 1]$, avec probabilité supérieure à $1 - \delta$, x^* est unique et $x^* = x$.

En résumé :

- Dans une première étape, nous effectuons un échantillonnage complet en utilisant N_1 mesures pour reconstruire les M_1 premiers coefficients
- Dans une seconde étape, il nous faut au moins $(N - N_1) \cdot \mu_{N_1} \cdot s_2$ mesures (à des facteurs logarithmiques près) pour échantillonner les s_2 coefficients restants

Au total, nous avons donc besoin de $m = N_1 + N_2 \gtrsim N_1 + (N - N_1) \cdot \mu_{N_1} \cdot s_2$ mesures.

Pour revenir à l'article de M. Lustig, il est clair que la fonction de distribution choisie, que l'on a présentée au début de cette section, opère un échantillonnage qui se rapproche de celui préconisée par le théorème que nous venons d'énoncer. En effet, nous pouvons considérer que le k-space est sparse à deux niveaux (le premier étant le centre du k-space, et le deuxième étant le reste du k-space) et qu'il est asymptotiquement incohérent. La stratégie consistant à échantillonner de façon soutenue autour du centre du k-space puis de façon moins soutenue en dehors du centre est assez similaire à la SDN que nous avons présentée précédemment.

D'autres travaux tirent avantage de la structure de parcimonie asymptotique et de l'incohérence asymptotique, dont *Variable Density Compressed Sensing in MRI : Theoretical VS Heuristic Sampling Strategies*, dont nous présentons les résultats en appendice pour alléger le rapport.

3 Expériences et simulations

Voir le notebook joint avec ce rapport.

A Les méthodes exploitant la redondance dans le k-space

Ces approches tirent parti de la redondance inhérente dans les images IRM, où les points individuels dans le k-space ne proviennent pas d'emplacements spatiaux distincts. Des exemples de cette stratégie incluent la reconstruction partielle de Fourier et l'imagerie parallèle. Cette dernière approche a connu un grand succès en IRM. Elle exploite le fait que des signaux collectés simultanément à partir de bobines avec différentes sensibilités spatiales apportent des informations distinctes sur la localisation spatiale complétant le codage spatial conventionnel. L'imagerie parallèle permet ainsi de limiter le nombre d'échantillons à acquérir pour chaque bobine. Cependant, dans la pratique, il est impossible de multiplier par deux la vitesse d'acquisition des mesures sans une dégradation sensible de la qualité de l'image.

B Le fonctionnement et la physique de l'IRM

B.1 La résonance magnétique nucléaire

Le noyau de l'atome d'hydrogène est composé d'un proton qui possède des propriétés magnétiques. On peut décrire le mouvement magnétique sous la forme d'un vecteur en rotation sur lui-même, que l'on appelle spin. Les vecteurs ont une orientation aléatoire au repos, mais soumis à un champ magnétique B_0 , ils s'orientent dans l'axe du champ : dans le même sens (parallèle) ou dans le sens contraire (antiparallèle). Les premiers sont plus nombreux que les seconds, ce qui conduit à une aimantation tissulaire dans l'axe et le même sens que B_0 . Les spins ont une fréquence de précession³ proportionnelle à l'intensité du champ magnétique. C'est ce que décrit l'équation de Larmor : $\omega_0 = \gamma B_0$. Le moment magnétique des protons peut être décomposé en une composante longitudinale et une composante transversale le long de l'axe longitudinal.

Une onde de radiofréquence de la même fréquence provoque un phénomène de résonance : il y a un transfert d'énergie à l'origine d'une bascule de l'aimantation tissulaire. C'est ce que l'on appelle la phase d'excitation. L'angle de bascule est variable et dépend de l'intensité, de l'enveloppe et du temps pendant lequel l'onde de radiofréquence est appliquée. La phase d'excitation et la bascule se traduisent par :

- Une diminution de l'aimantation longitudinale
- L'apparition d'une aimantation transversale

Le phénomène de relaxation traduit le retour à l'équilibre de l'aimantation tissulaire. Il se décompose en :

- Une repousse de l'aimantation longitudinale, dans l'axe du champ B_0 , qui suit une courbe exponentielle que l'on caractérise par le temps T1 (temps nécessaire pour que l'aimantation longitudinale ait retrouvé 63% de son amplitude initiale, après avoir été basculée de 90°)
- Une chute de l'aimantation transversale, liée au déphasage des spins qui n'ont plus exactement la même fréquence, qui suit une courbe exponentielle décroissante caractérisée par le temps T2 (délai pour que le tissu revienne à 37% de son aimantation transversale après une onde RF de 90°)

B.2 Signal RMN et contraste de base

Seules les variations de l'aimantation transversale peuvent être enregistrées sous forme d'un signal radiofréquence par les antennes de l'IRM. En effet, elles ne peuvent enregistrer que des moments magnétiques en mouvement, et l'antenne est placée de manière parallèle à B_0 . On ne peut donc pas enregistrer directement la repousse longitudinale.

On cherche maintenant à mesurer les temps T1 et T2 des tissus constituant l'image IRM. Une impulsion RF (radiofréquence) de 90° entraîne une bascule du vecteur d'aimantation tissulaire global correspondant à une disparition de l'aimantation longitudinale et à l'apparition d'une aimantation transversale. Après

3. Le mouvement de précession décrit le mouvement de rotation des spins autour de l'axe B_0 .

arrêt de l'impulsion RF, survient le phénomène de relaxation, c'est-à-dire une chute de l'aimantation transversale et une repousse de l'aimantation longitudinale. Cependant, deux tissus différents récupèrent leur aimantation longitudinale lors de la repousse à des vitesses différentes. Si on laisse l'aimantation longitudinale repousser complètement avant une autre impulsion RF, grâce à un TR (temps de répétition) long, la décroissance de la composante transversale du vecteur d'aimantation globale est identique pour les deux tissus car leur aimantation longitudinale basculée est la même. En revanche, si l'on répète rapidement l'onde RF 90° pour faire basculer de nouveau le vecteur d'aimantation globale, on remarque que la composante transversale du vecteur d'aimantation globale est plus importante pour le tissu avec le T1 le plus faible au début de la deuxième relaxation. L'image est dite "pondérée T1" et non pas purement T1 et simplement, car la différence de signal est due majoritairement à la différence d'aimantation longitudinale, mais aussi à la différence de relaxation de l'aimantation transversale entre les tissus. La pondération T2 d'une image est plus facile à comprendre : il faut appliquer un TR long pour ne pas avoir de pondération T1 et il faut employer un TE long pour avoir le temps d'enregistrer un signal différent du à la différence d'aimantation transversale.

Pour résumer :

- Un TR court et un TE court donnent une image pondérée T1
- Un TR long et un TE long donnent une image pondérée T2
- Un TR long et un TE court donnent une image pondérée en densité de proton (DP ou rho), c'est-à-dire peu influencée par le T1 comme par le T2.

Le signal RMN d'un tissu varie donc selon ses caractéristiques T1, T2 et sa densité protonique. Pour obtenir une image en IRM, il faut obtenir un contraste entre les différents tissus. Ce contraste s'obtient par comparaison des signaux de différents tissus en séquences pondérées T1, T2 ou en densité protonique. Sur la console, les images seront interprétées en fonction des contrastes entre différents tissus. L'intensité du signal est traduite en niveaux de gris en fonction de la fenêtre de visualisation. Un signal très faible ou nul correspond à un gris foncé ou noir. Un signal très élevé se traduit par un gris clair voire du blanc pour les signaux les plus élevés. Ces informations sont interprétées en fonction de la pondération de la séquence.

B.3 Le codage spatial du signal

Le codage magnétique repose sur l'application successive de gradients de champ magnétique. On utilise d'abord un gradient de champ de coupe, qui permet de sélectionner le volume anatomique qui va être exploré. A l'intérieur de ce volume, la position sera codée verticalement et horizontalement par l'application d'un gradient de codage par phase et d'un gradient de codage par fréquence. Ces gradients de champ magnétique sont caractérisés par leur intensité (variation de champ plus ou moins grande pour la même unité de distance), leur amplitude, leur direction et le moment et la durée de leur application. L'intensité du champ magnétique varie de façon régulière suivant l'axe d'application du gradient.

Le gradient de sélection de coupe (GSC) permet de modifier la fréquence de précession des protons afin qu'une onde de RF ayant la même fréquence puisse les faire basculer (résonance). La bande passante et l'amplitude du gradient de sélection déterminent l'épaisseur de coupe. Le gradient de sélection de coupe est appliqué simultanément à l'ensemble des ondes de RF.

Le gradient de codage de phase (GCP) permet de différencier les "lignes". Pendant son application, il modifie les fréquences de précession des spins, ce qui induit un décalage des phases, lequel persiste après son interruption. Les protons situés sur la même ligne, perpendiculaire à la direction du gradient, ont tous la même phase. Lors du recueil du signal, chaque ligne de protons aura un décalage de phase, qui se traduira par un décalage plus ou moins important de leurs signaux. Le GCP est incrémenté régulièrement, autant de fois qu'il y a de lignes à recueillir afin d'entraîner des décalages de phase différents.

Le gradient de codage par la fréquence (GCF) permet de différencier les "colonnes". Il est appliqué pendant le recueil du signal selon la direction horizontale, et il modifie les fréquences de précession pendant la durée de son application. L'ensemble de ces informations est mélangé dans le signal RF recueilli simul-

tanément à l'application du GCF (encore appelé gradient de lecture). Tous les signaux d'une même coupe sont enregistrés dans une matrice puis traités pour former une image du plan de coupe.

B.4 La formation de l'image IRM

Le codage spatial de l'image IRM est réalisé à l'aide de gradients qui vont permettre de coder sous forme fréquentielle la position des voxels. Ces données fréquentielles sont stockées dans le k-space. Le remplissage de l'k-space est effectué de telle manière à ce qu'il corresponde à un plan de Fourier. La transformée de Fourier 2D inverse permet de convertir ces données fréquentielles en informations spatiales pour donner une image interprétable.

La position des données dans le k-space est déterminée par les gradients. En l'absence d'effet des gradients de codage de phase et de fréquence, on se situe au centre de l'k-space. Plus l'intensité du gradient est élevée et/ou plus on l'applique longtemps, plus on s'éloigne du centre, dans la direction du gradient concerné. Les gradients sont bipolaires (négatifs ou positifs), ce qui permet de se déplacer dans les 2 directions opposées à partir du centre (du centre vers la droite ou la gauche et du centre vers le haut ou le bas). Chaque point du k-space code donc pour une composante de l'image entière, et chaque point de l'image est codé par l'ensemble du k-space.

Le centre du k-space code pour les basses fréquences spatiales. La majorité du signal RMN (résonnance magnétique nucléaire) est contenue dans les basses fréquences spatiales : ce sont elles qui codent pour le contraste et la forme générale de l'image. Les bords du k-space ne correspondent pas aux bords de l'image : ils représentent les hautes fréquences spatiales. Plus les fréquences spatiales sont hautes, plus elles codent pour des détails, c'est-à-dire la résolution spatiale.

C Autre méthode d'échantillonnage du k-space

L'article de M. Lustig propose d'utiliser une fonction de distribution qui est une fonction décroissante de la distance par rapport au centre. Un bon exemple de telles fonctions est la suivante :

$$P(x, y) = [1 - \frac{\sqrt{2}}{n} \sqrt{x^2 + y^2}]^4, \text{ où } x, y \in [-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}]$$

Ce choix est motivé par le fait qu'empiriquement, cette distribution donne les meilleurs résultats en termes de Peak Signal-to-Noise Ratio. Partant de ce constat, nous nous demandons s'il existe une distribution *théoriquement* optimale selon laquelle nous pouvons effectuer le sous-échantillonnage du k-space, *quel que soit le signal représenté par le k-space*. En d'autres termes, existe-t-il une distribution uniformément optimale pour le sous-échantillonnage du k-space ? C'est une telle distribution qu'essaie de révéler l'article *Variable Density Compressed Sensing in MRI : Theoretical VS Heuristic Sampling Strategies*.

L'élément central sur lequel repose l'article est le théorème suivant, présenté dans *Rauhut, "Compressive Sensing and Structured Random Matrices"*. Nous présentons d'abord quelques notations. Soient :

- $\psi \in \mathbb{C}^{n \times n}$ une transformée d'ondelettes orthogonale et ϕ la transformée de Fourier.
- $A_0 = \phi\psi \in \mathbb{O}^{n \times n}$
- $P = (P_1, \dots, P_n)$ une mesure de probabilités discrète
- On définit le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ par :

$$\langle x, y \rangle_p = \sum_{i=1}^n x_i y_i P_i$$

- $\bar{A}_0 \in \mathbb{C}^{n \times n}$ définie par : $(\bar{A}_0)_{ij} = \frac{(A_0)_{ij}}{\sqrt{P_i}}$. Alors les colonnes de cette matrice sont orthogonales par rapport à $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$
- $K(P) = \sup_{1 \leq i \leq n} (\bar{A}_0)_{ij} = \sup_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\|a_i\|_\infty}{\sqrt{P_i}}$, où les a_i sont les lignes de la matrice A_0

Alors le théorème suivant donne le nombre de mesures nécessaires pour reconstruire tout vecteur s-sparse à partir de tirages indépendants selon une loi de probabilités P.

Theorem C.1. Soit m le nombre d'indices tirés selon la loi P et $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ la matrice composées des lignes de \tilde{A}_0 correspondant à ces indices. Alors si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\frac{m}{\log(m)} \geq CK(P)^2 s \log^2(s) \log(n)$
- $m \geq DK(P)^2 s \log(\epsilon^{-1})$

alors avec probabilité supérieure à $1 - \epsilon$, tout vecteur sparse $x \in \mathbb{C}^n$ peut être reconstruit à partir des observations $y = Ax$ en résolvant la procédure de minimisation l_1 .

L'approche naturelle pour déterminer la distribution optimale, au sens du théorème précédent, est de minimiser, par rapport à P , la borne inférieure du nombre de mesures à prendre. Cela revient à minimiser $K(P)$, ce qui justifie la proposition suivante :

Proposition C.1. La distribution optimale $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ est donnée par :

$$\pi_i = \frac{\|a_i\|_\infty}{L} \text{ avec } L = \sum_{i=1}^n \|a_i\|_\infty^2$$

Démonstration. Soit $q = (q_1, \dots, q_n)$ une distribution de probabilité discrète différente de π , alors il existe nécessairement un $j \in 1, \dots, n$ tel que : $q_j < \pi_j$. D'où :

$$K(q) \geq \|a_j\|_\infty / \sqrt{q_j} > \|a_j\|_\infty / \sqrt{\pi_j} = K(\pi)$$

□

Cette approche présente l'avantage d'avoir un fondement théorique que n'a pas la distribution P présentée en début de ce chapitre, mais la comparaison des performances de π et de P en termes de PSNR sont largement à l'avantage de P . La raison la plus évidente à ce stade est le fait que l'image que nous essayons de reconstruire n'est pas réellement sparse dans la base d'ondelettes, puisqu'elle ne l'est pas dans la famille des ondelettes à basse fréquence. Comme le design de P a justement pour but de prendre davantage d'échantillons au centre du k -space, où se concentrent les transformées des coefficients d'ondelettes à basses fréquences, il est naturel que P ait un PSNR plus fort que π .

Pour pallier le défaut de π au centre du k -space, la partie suivante développe une approche en deux étapes.

C.0.1 Sous-échantillonnage optimal en deux étapes

La méthode développée vise à décomposer la représentation en base d'ondelettes en deux parties : la première formée des basses fréquences, dans laquelle l'image n'est pas sparse, et la deuxième des hautes fréquences, dans laquelle est l'est plus.

Quelques définitions pour formaliser cette nouvelle approche :

- On note n_1 le nombre d'ondelettes à basse fréquence

- On définit $\Omega = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \text{supp}(\phi * \Psi_i)$

- $x_\Omega = \Psi^* F y_\Omega$, où $y = Ax$

Alors $x_{\Omega^c} = x - x_\Omega$ est sparse puisqu'il ne contient pas de coefficients d'ondelettes à basses fréquences.

Comme on va totalement échantillonner x_Ω , on ne s'intéresse maintenant qu'à x_{Ω^c} , les coefficients de l'image dans la famille des ondelettes à haute fréquence seulement.

La procédure d'échantillonnage en deux étapes, que nous appelons Two-stage π Sampling ($2S\pi S$) est alors définie par :

- Première étape : on échantillonne totalement Ω
- Seconde étape : on sous-échantillonne selon la loi π^* définie par :

$$\pi = \begin{cases} \|a_i\|_\infty / L^* & \text{si } i \in \Omega^c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{où } L^* = \sum_{i \in \Omega^c} \|a_i\|_\infty^2$$

L'étude empirique de la performance du sous-échantillonnage selon la stratégie ($2S\pi S$) montre qu'elle est moins bonne que l'utilisation de la distribution P utilisée par M. Lustig. Cela indiquerait que la borne que l'on minimise afin d'obtenir la distribution optimale π n'est peut-être pas optimale. Néanmoins, l'utilisation d'une stratégie en deux étapes, conformément aux hypothèse d'incohérence asymptotique et de parcimonie asymptotique, donne de meilleurs résultats que l'utilisation simple de π comme distribution d'échantillonnage.

Références

- [1] MICHAEL LUSTIG DAVID L. DONOHO, JUAN M. SANTOS, JOHN M. PAULY — *Compressed Sensing MRI*, IEE Signal Processing Magazine, March 2008.
- [2] MICHAEL LUSTIG DAVID L. DONOHO, JOHN M. PAULY — *Sparse MRI : The Application of Compressed Sensing for Rapid MR Imaging*, Magnetic Resonance in Medicine, 2007.
- [3] EMMNUEL J. CANDÈS, MICHAEL B. WALKIN — “*People Hearing Without Listening*” : *An Introduction to Compressive Sampling*, IEE Signal Processing Magazine, March 2008.
- [4] EMMNUEL J. CANDÈS, JUSTIN ROMBERG — *Sparsity and Incoherence in Compressive Sampling*, IOP Publishing 2007.
- [5] BEN ADCOCK, ANDERS C. HANSEN, CLARICE POON, BOGDAN ROMAN — *Breaking the coherence barrier : A new theory for compressed sensing*, 2013.
- [6] NICOLAS CHAUFFERT, PHILIPPE CIUCIU, PIERRE WEISS — *Variable Density Compressed Sensing In MRI : Theoretical vs Heuristic Sampling Strategies*, SBI - 10th International Symposium on Biomedical Imaging, San Francisco, 2013.
- [7] <https://www.imaios.com/fr/e-Cours/e-MRI>