



**STUDIO DELLA DINAMICA DI UN ROBOT SPAZIALE E
DELLA SINTESI DI UN ESALATERO GENERATORE DI
FUNZIONE**

Dipartimento di Ingegneria Industriale
Corso di Sistemi Meccanici e Modelli

Homework 3

Pierfrancesco Oselin - Mat. 202199
pierfrancesco.oselin@studenti.unitn.it

Indice

1	Dinamica di un robot spaziale	3
1.1	Introduzione	3
1.2	Equazioni del moto con il metodo di Lagrange	6
1.3	Moto del sistema con condizioni al contorno	9
1.4	Determinazione delle condizioni e del tipo di equilibrio	11
1.5	Linearizzazione delle equazioni nell'intorno della posizione di equilibrio	13
2	Sintesi di un esalatero generatore di funzione	17
2.1	Procedura per l'analisi di posizione	19
2.1.1	Risoluzione del primo quadrilatero	20
2.1.2	Risoluzione del secondo quadrilatero	21
2.2	Parametri di progetto	23
2.3	Funzione desiderata e funzione realizzata	24
2.4	Funzione penalità pesata	26
2.5	Aggiunta di termini penalizzanti per le lunghezze	28
2.6	Sintesi per diverse configurazioni	32

1 Dinamica di un robot spaziale

1.1 Introduzione

Viene richiesto di studiare la dinamica del robot spaziale proposto in figura

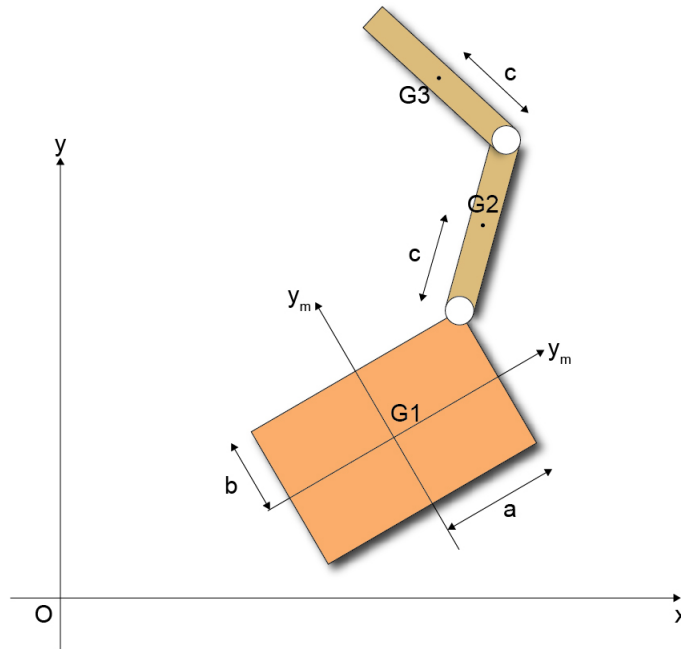


Figura 1: Robot spaziale

In particolare individuando

1. Le equazioni del moto con il metodo di Lagrange.
2. Il moto del sistema partendo da una posizione iniziale in cui la terna mobile è coincidente con quella fissa e il braccio ABE allineato con x_m , con $M_1 = k \sin(\omega t)^2$ e $M_2 = -k \sin(\omega t)^2$

3. Le condizioni per cui la posizione iniziale detta è una posizione di equilibrio e stabilire la natura della posizione di equilibrio.
4. Linearizzare le equazioni nell'intorno della posizione di equilibrio

Vengono inoltre forniti i parametri del meccanismo

Parametro	Valore
m_1	100 kg
m_2	10 kg
m_3	10 kg
a	1 m
b	$4/10 \text{ m}$
c	$5/10 \text{ m}$
J_1	$m_1 (1/2)^2 \text{ kg m}^2$
J_2	$m_2 (1/4)^2 \text{ kg m}^2$
J_3	$m_3 (1/4)^2 \text{ kg m}^2$
k	$1/10$
ω	1

e viene detto che il sistema è posto in orbita, per cui il potenziale ad esso associato è costante

$$V = \gamma \quad (1)$$

Come si può osservare, il sistema è composto da tre corpi distinti

- Corpo 1 di massa m_1 e inerzia J_1 il quale funge da base
- Corpo 2 di massa m_2 e inerzia J_2 il quale funge da braccio
- Corpo 3 di massa m_3 e inerzia J_3 il quale funge da avambraccio

I tre corpi sono collegati tra loro attraverso coppie *rotoïdali di classe* c_1 . Richiamando la formula di Grübler è possibile calcolare i gradi di libertà del sistema

$$nGdL = 3(n - 1) - 2c_1 - c_2 \quad (2)$$

In particolare, considerando il corpo 1 come telaio, si ottiene

$$3(3 - 1) - 2 \cdot 2 - 0 = 2 GdL$$

Mentre considerando come telaio il suolo (il pianeta Terra) si ottiene

$$3(4 - 1) - 2 \cdot 2 - 0 = 5 GdL$$

È importante notare che i due risultati sono equivalenti: attraverso il primo approccio si ottengono i *gradi relativi* del sistema, mentre con il secondo metodo si ottengono i *gradi di libertà rispetto a un terzo corpo* (Terra). In particolare, i gradi relativi corrispondono alla rotazione del corpo 2 rispetto al corpo 1 e alla rotazione del corpo 3 rispetto al corpo 2. I gradi di libertà assoluti corrispondono invece alle rotazioni dei 3 corpi rispetto al telaio e alla posizione dell'intero sistema rispetto ad esso.

Oltre a questo, è importante notare che il numero delle *coordinate lagrangiane* (variabili indipendenti libere) rimane lo stesso in entrambi i casi: i due angoli che esprimono la rotazione relativa sommati ai gradi di libertà di un sistema in due dimensioni (*coordinata x*, *coordinata y* e rotazione) sono pari ai 5 gradi di libertà ottenuti con la seconda interpretazione della formula.

Infine, non essendovi vincoli che insistono sugli stessi gradi di libertà, i risultati ottenuti sono considerabili validi. Quindi riassumendo le coordinate lagrangiane del sistema sono

- *Coordinata x*
- *Coordinata y*
- *Rotazione del corpo 1* q_1 rispetto all'asse x
- *Rotazione del corpo 2* q_2 rispetto all'asse x
- *Rotazione del corpo 3* q_3 rispetto all'asse x

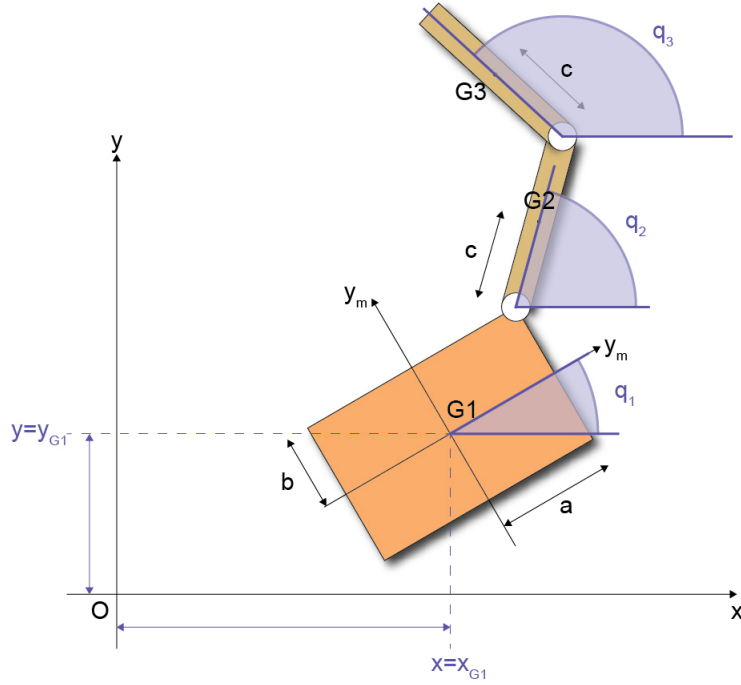


Figura 2: Coordinate lagrangiane

1.2 Equazioni del moto con il metodo di Lagrange

Risolvere le equazioni del moto con il metodo di Lagrange significa risolvere le equazioni di Lagrange associate al sistema.

In particolare, la generica equazione di Lagrange è così formulata

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_k} - \frac{\delta L}{\delta q_k} = Q_k^{nc} \quad (3)$$

con q_k generica coordinata libera, pari in numero ai gradi di libertà del sistema, Q_k^{nc} l'insieme delle componenti delle forze generalizzate non conservative secondo la coordinata q_k mentre L corrispondente alla funzione di Lagrange, così definita

$$L = T - V \quad (4)$$

con T energia cinetica totale del sistema e V energia potenziale totale del sistema.

NOTA 1: il fatto che Q_k^{nc} comprenda solamente le forze generalizzate non conservative è coerente con l'equazione (3), in quanto quelle conservative sono state considerate all'interno dell'energia potenziale, infatti

$$Q_k^c = -\frac{\delta V}{\delta q_k} \quad (5)$$

NOTA 2: Q_k^{nc} può anche essere interpretato come il lavoro delle forze generalizzate non conservative rapportato alla grandezza δq_k .

Si procede quindi alla risoluzione delle equazioni di Lagrange. Per prima cosa è necessario calcolare l'energia cinetica totale del sistema. Questo può essere fatto sommando tutti i contributi delle energie cinetiche dei vari corpi, nel caso specifico

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}G_1^2 + \dot{y}G_1^2) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 \quad (6)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}G_2^2 + \dot{y}G_2^2) + \frac{1}{2} J_2 \dot{\theta}_2^2 \quad (7)$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}G_3^2 + \dot{y}G_3^2) + \frac{1}{2} J_3 \dot{\theta}_3^2 \quad (8)$$

Per cui

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \quad (9)$$

Il valore dell'energia potenziale, dato il posizionamento in orbita del sistema, è stato definito nell'equazione (1).

L'interpretazione fornita nella NOTA 2 permette di calcolare Q_k^{nc} , come rapporto tra il lavoro compiuto dalle forze non conservative rispetto alla grandezza δq_k . Dato che la variazione infinitesima non è legata al tempo, il lavoro in questione è un lavoro virtuale.

Sul sistema non sono applicate forze generalizzate esterne, mentre data la presenza di due motori, rispettivamente in A e B , due momenti M_1 e M_2 possono essere applicati. Per i tre corpi questi momenti risultano essere

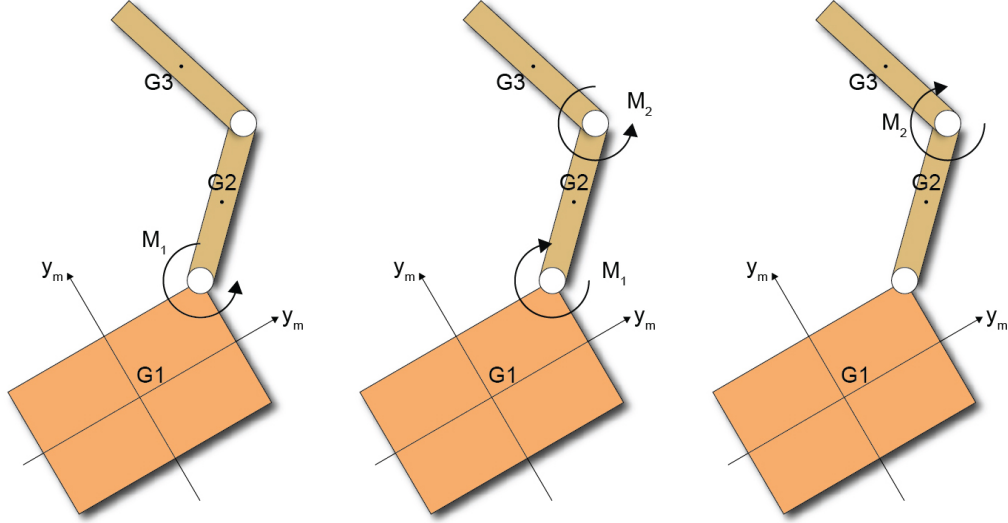


Figura 3: Momenti rispetto al corpo 1 (sinistra), corpo 2 (centro) e corpo 3 (destra).

Il lavoro virtuale è quindi scrivibile come

$$\delta W = M_1 \delta \theta_1 - M_1 \delta \theta_2 + M_2 \delta \theta_2 - M_2 \delta \theta_3 \quad (10)$$

Derivando secondo le cinque coordinate lagrangiane si ottiene

$$Q_1 = \frac{\delta W}{\delta \theta_1} = M_1 \quad (11)$$

$$Q_2 = \frac{\delta W}{\delta \theta_2} = -M_1 + M_2 \quad (12)$$

$$Q_3 = \frac{\delta W}{\delta \theta_3} = -M_2 \quad (13)$$

$$Q_4 = \frac{\delta W}{\delta x} = 0 \quad (14)$$

$$Q_5 = \frac{\delta W}{\delta y} = 0 \quad (15)$$

Le equazioni di Lagrange risultano quindi essere

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_1} - \frac{\delta L}{\delta q_1} = Q_1 \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_2} - \frac{\delta L}{\delta q_2} = Q_2 \quad (17)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_3} - \frac{\delta L}{\delta q_3} = Q_3 \quad (18)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{x}} - \frac{\delta L}{\delta x} = Q_4 \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta L}{\delta \dot{y}} - \frac{\delta L}{\delta y} = Q_5 \quad (20)$$

1.3 Moto del sistema con condizioni al contorno

Nel caso in questione vengono assegnati i valori dei momenti M_1 e M_2 . In particolare

$$M_1 = k \sin(\omega t)^2 \quad (21)$$

$$M_2 = -k \sin(\omega t)^2 \quad (22)$$

e viene affermato che per l'istante $t = 0$ il corpo parte nella condizione in cui la terna mobile solidale al corpo 1 coincida con quella assoluta e che il braccio articolato sia disposto parallelamente all'asse x fisso. Queste condizioni possono essere riassunte così

$$\begin{array}{l} x(0) = 0 \quad \left| \quad y(0) = 0 \quad \left| \quad q_1(0) = 0 \quad \left| \quad q_2(0) = 0 \quad \left| \quad q_3(0) = 0 \right. \right. \right. \\ \dot{x}(0) = 0 \quad \left| \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \left| \quad \dot{q}_1(0) = 0 \quad \left| \quad \dot{q}_2(0) = 0 \quad \left| \quad \dot{q}_3(0) = 0 \right. \right. \right. \end{array}$$

dove $x(t) = x_{G_1}$ corrisponde alla coordinata x del baricentro del corpo 1 e $y(t) = y_{G_1}$ corrisponde alla coordinata y

Applicare queste condizioni significa poter risolvere il sistema differenziale costituito dalle 5 equazioni di Lagrange trovate precedentemente. In particolare, dalla risoluzione di questo si ottengono le coordinate lagrangiane in funzione del tempo.

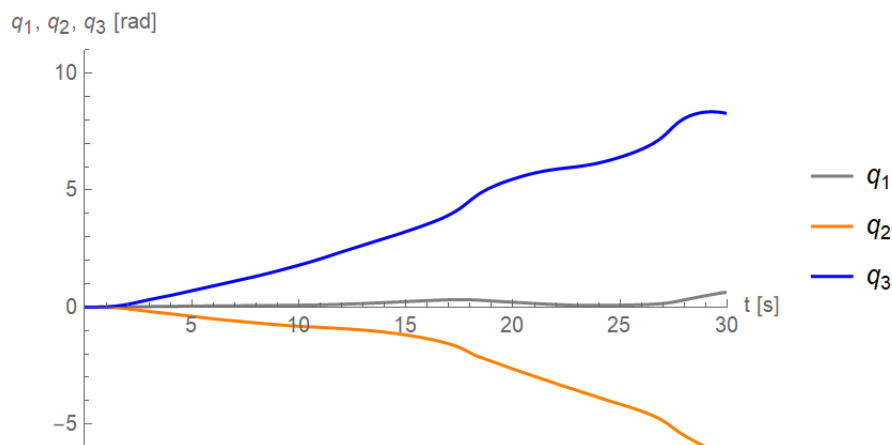


Figura 4: q_1 , q_2 , q_3 in funzione del tempo.

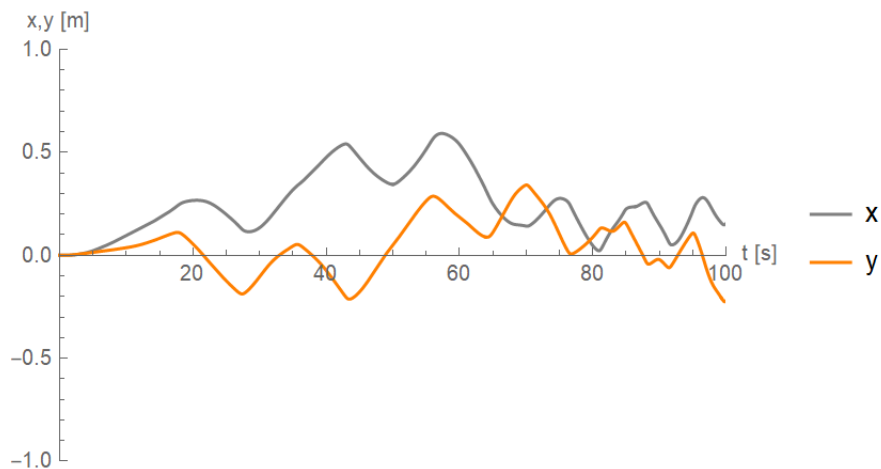


Figura 5: x , y in funzione del tempo.

NOTA: le coordinate x e y qui sopra plottate oscillano in un intorno prossimo allo zero. In particolare, se fossero state plottate le coordinate degli altri baricentri si sarebbe osservato un andamento simile (in un intorno più ampio). Questo era aspettato, in quanto non essendovi forze generalizzate esterne agenti sul sistema il baricentro complessivo di questo rimane fisso nello spazio e pertanto i corpi 1, 2 e 3 vi ruotano attorno.

Nell'animazione proposta sul file Mathematica è stato rappresentato anche il baricentro del sistema (pallino verde) le cui coordinate possono essere ricavate come

$$x_G = \frac{m_1 x_{G1} + m_2 x_{G2} + m_3 x_{G3}}{m_1 + m_2 + m_3} \quad \left| \quad y_G = \frac{m_1 y_{G1} + m_2 y_{G2} + m_3 y_{G3}}{m_1 + m_2 + m_3} \right.$$

1.4 Determinazione delle condizioni e del tipo di equilibrio

Ricercare le condizioni di equilibrio del sistema significa identificare i valori delle grandezze in gioco tale per cui il sistema risulta in equilibrio, esso sia statico o dinamico.

Si parla di equilibrio statico se le forze generalizzate risultanti sono nulle e il sistema è in quiete (velocità nulle).

Si parla di equilibrio dinamico se le forze generalizzate risultanti sono nulle e il sistema si muove a velocità costante. È inoltre possibile effettuare una seconda classificazione dell'equilibrio

- *Equilibrio stabile*: in queste condizioni se piccole variazioni perturbano il sistema, esso tenderà a tornare nelle condizioni iniziali (*buca di potenziale*)
- *Equilibrio instabile*: in queste condizioni se piccole variazioni perturbano il sistema, esso divergerà dal punto di riposo (*vetta di potenziale*)
- *Equilibrio indifferente*: in queste condizioni se piccole variazioni perturbano il sistema, il potenziale non cambia. Il sistema non tenderà a tornare nelle condizioni iniziali e la nuova condizione diventerà un nuovo punto di riposo.

Si prova quindi a risolvere il sistema formato dalle 5 equazioni di Lagrange con delle *soluzioni di tentativo* delle coordinate lagrangiane, in modo da far rispettare l'equilibrio

$$q_1(t) = q_{10} \quad \left| \quad q_2(t) = q_{20} \quad \left| \quad q_3(t) = q_{30} \quad \left| \quad x(t) = x_0 \quad \left| \quad y(t) = y_0 \right. \right. \right.$$

Si noti che i valori imposti sono costanti, per cui

$$\dot{q}_1(t) = 0 \mid \dot{q}_2(t) = 0 \mid \dot{q}_3(t) = 0 \mid \dot{x}(t) = 0 \mid \dot{y}(t) = 0$$

$$\ddot{q}_1(t) = 0 \mid \ddot{q}_2(t) = 0 \mid \ddot{q}_3(t) = 0 \mid \ddot{x}(t) = 0 \mid \ddot{y}(t) = 0$$

Risolvendo il sistema si ottiene

$$M_1 = 0 \mid M_2 = 0$$

In particolare le equazioni diventano

$$0 = M_1 \mid M_1 = M_2 \mid M_2 = 0 \mid True \mid True$$

NOTA: Si noti che su 5 equazioni solo due forniscono un risultato mentre tre restituiscono un'identità. Questo è corretto e combacia con la condizione del sistema: essendo esso posto in orbita e quindi a potenziale costante, il sistema risulta *indifferente* rispetto ai suoi tre gradi di libertà, ovvero *qualsiasi posizione e rotazione esso assuma l'equilibrio è garantito*.

Volendo stabilire formalmente il tipo di equilibrio, è possibile applicare il test dell'Hessiana al potenziale in modo da capire la natura della situazione appena trovata. La matrice Hessiana H è pari a

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\delta^2 V}{\delta q_1^2} & \frac{\delta}{\delta q_1} \frac{\delta V}{\delta q_2} & \frac{\delta}{\delta q_1} \frac{\delta V}{\delta q_3} & \frac{\delta}{\delta q_1} \frac{\delta V}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta q_1} \frac{\delta V}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta q_2} \frac{\delta V}{\delta q_1} & \frac{\delta^2 V}{\delta q_2^2} & \frac{\delta}{\delta q_2} \frac{\delta V}{\delta q_3} & \frac{\delta}{\delta q_2} \frac{\delta V}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta q_2} \frac{\delta V}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta q_3} \frac{\delta V}{\delta q_1} & \frac{\delta}{\delta q_3} \frac{\delta V}{\delta q_2} & \frac{\delta^2 V}{\delta q_3^2} & \frac{\delta}{\delta q_3} \frac{\delta V}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta q_3} \frac{\delta V}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta x} \frac{\delta V}{\delta q_1} & \frac{\delta}{\delta x} \frac{\delta V}{\delta q_2} & \frac{\delta}{\delta x} \frac{\delta V}{\delta q_3} & \frac{\delta^2 V}{\delta x^2} & \frac{\delta}{\delta x} \frac{\delta V}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} \frac{\delta V}{\delta q_1} & \frac{\delta}{\delta y} \frac{\delta V}{\delta q_2} & \frac{\delta}{\delta y} \frac{\delta V}{\delta q_3} & \frac{\delta}{\delta y} \frac{\delta V}{\delta x} & \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} \end{bmatrix} \quad (23)$$

Essendo l'energia potenziale costante, qualsiasi derivata è nulla e la matrice risulta degenere.

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si può concludere quindi che l'equilibrio è di tipo indifferente, confermando la conclusione dedotta precedentemente.

1.5 Linearizzazione delle equazioni nell'intorno della posizione di equilibrio

Si è dimostrato precedentemente come qualsiasi posizione e rotazione il sistema assuma l'equilibrio è garantito. Linearizzare le equazioni di Lagrange nell'intorno della posizione di equilibrio corrisponde quindi a linearizzare le equazioni in un generico punto. Per comodità si decide di effettuare ciò nel punto $(0,0)$ e per gli angoli $q_1 = 0$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$.

Viene ora eseguito lo sviluppo di Taylor della funzione L rispetto ad ogni coordinata lagrangiana fino al secondo ordine. In questo modo una volta inserita nell'equazione di Lagrange, gli elementi del secondo ordine diventeranno del primo (linearizzazione). Sviluppando inoltre per spostamenti infinitesimi, le velocità in gioco saranno infinitesimi dello stesso ordine, per cui lo sviluppo avviene anche per un intorno di esse. Data la complessità della funzione, durante l'espansione si generano anche elementi del terzo e quarto ordine, i quali andranno successivamente trascurati perché differenziali di infinitesimo superiore.

Applicando l'equazione di Lagrange (3) rispetto a ciascuna variabile della funzione L sviluppata in Taylor si ottiene

$$\frac{241 \ddot{q}_1(t)}{5} + 15 \ddot{q}_2(t) + 5 \ddot{q}_3(t) + 20 \ddot{y}(t) = 8 \ddot{x}(t) + \frac{\sin^2(t)}{10} \quad (24)$$

$$15 \ddot{q}_1(t) + \frac{105 \ddot{q}_2(t)}{8} + \frac{1}{2} (10 \ddot{q}_3(t) + 30 \ddot{y}(t)) + \frac{\sin^2(t)}{10} = -\frac{1}{10} \sin^2(t) \quad (25)$$

$$5 \ddot{q}_1(t) + 5 \ddot{q}_2(t) + \frac{25 \ddot{q}_3(t)}{8} + 5 \ddot{y}(t) - \frac{1}{10} \sin^2(t) = 0 \quad (26)$$

$$8 \ddot{q}_1(t) = 120 \ddot{x}(t) \quad (27)$$

$$20 \ddot{q}_1(t) + 15 \ddot{q}_2(t) + 5 \ddot{q}_3(t) + 120 \ddot{y}(t) = 0 \quad (28)$$

Le equazioni ottenute risultano essere molto più semplici rispetto a quelle non linearizzate. Questo conferma il senso dell'applicazione di questa procedura: linearizzare le equazioni ha come obiettivo semplificare le espressioni che governano un sistema (e quindi ottenere un'approssimazione), in modo da controllarlo o predire il suo comportamento più facilmente. Inoltre è importante ricordare che gli strumenti matematici per manipolare equazioni lineari sono ben più potenti e numerosi rispetto a quelli per equazioni non lineari, per cui l'analisi risulta più rapida e robusta.

Risolviendo quindi il sistema formato dalle cinque equazioni linearizzate si ottiene

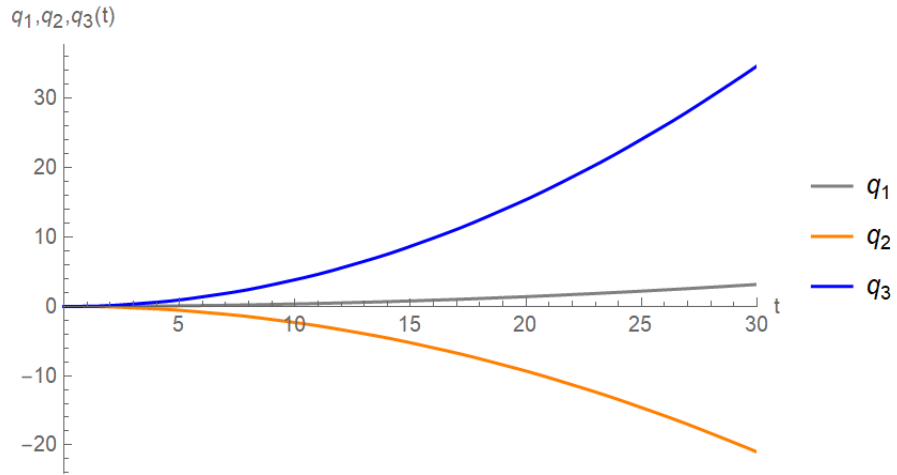


Figura 6: q_1 , q_2 , q_3 linearizzate in funzione del tempo.

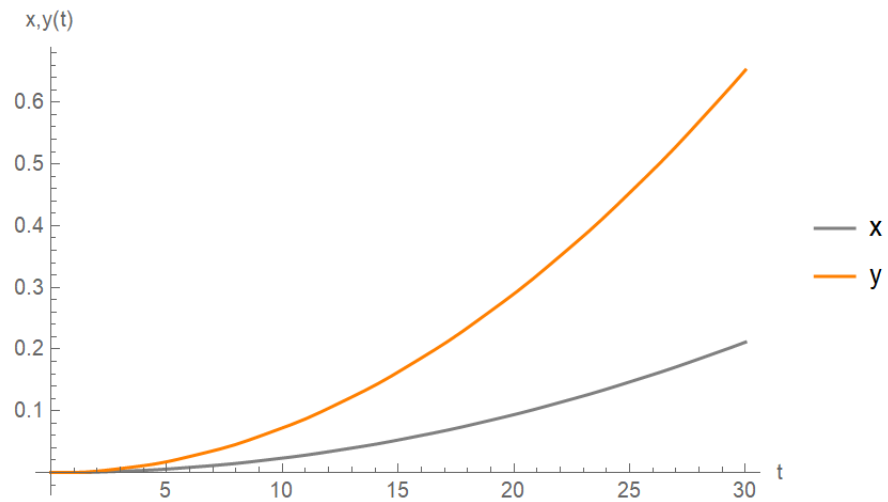


Figura 7: x, y linearizzate in funzione del tempo.

Il risultato della linearizzazione è presto osservabile

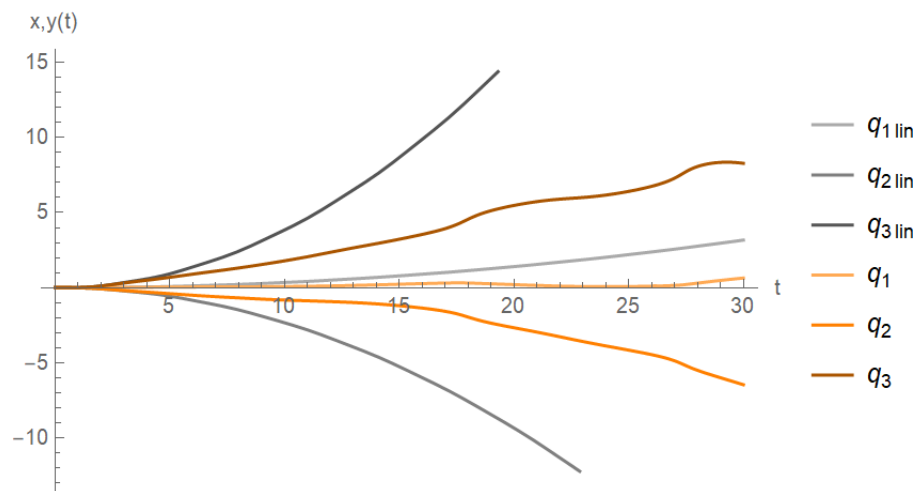


Figura 8: Confronto q_1, q_2, q_3 linearizzate e meno in funzione del tempo.

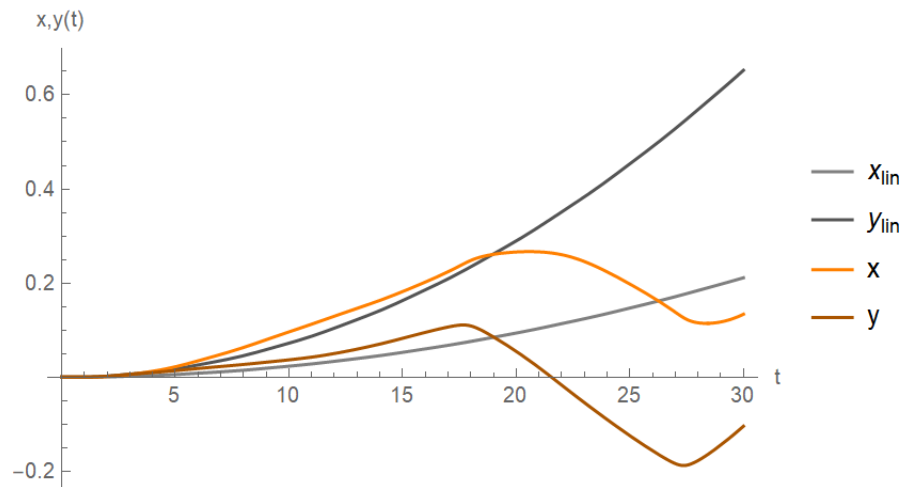


Figura 9: Confronto di x , y linearizzate e meno in funzione del tempo.

NOTA; É possibile notare che le coordinate x e y linearizzate del sistema divergono a $+\infty$ mentre quelle non linearizzate oscillano in un intorno di zero. Questo è dovuto alla linearizzazione svolta nell'intorno. Si può osservare che per tempi molto brevi gli andamenti sono pressoché identici a quelli originali, mentre man mano che ci si allontana dall'intorno considerato i risultati linearizzati perdono la loro affidabilità e il risultato diverge.

2 Sintesi di un esalatero generatore di funzione

Viene richiesto di effettuare la sintesi dell'esalatero generatore di funzione proposto in figura

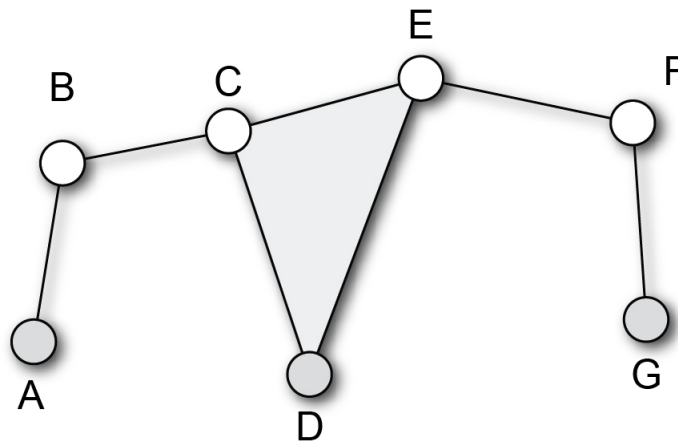


Figura 10: Esalatero generatore di funzione

In particolare

1. Scrivere una procedura per la analisi di posizione, per un esalatero di Watt del tipo indicato in figura (movente manovella di sinistra, cedente manovella di destra) e scomponendo l'esalatero in due quadrilateri in cascata.
2. Indicare quanti e quali parametri di progetto si possono avere.
3. Assumere la seguente funzione desiderata, che vale 0 per q fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ e fra $\frac{3\pi}{2}$ e 2π , e che raggiunge il valore 1 per $q = \pi$. Nell'intervallo $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ assumere la funzione $\cos^2(q)$.
4. Scrivere una funzione penalità in modo tale da dare più importanza al tratto costante, mentre nel tratto in cui la funzione varia è importante solo raggiungere il valore 1 al centro (ma scostamenti significativi sono tollerati nei tratti di raccordo (nei quali si lascia libertà di scegliere l'espressione da usare).

5. Aggiungere termini che penalizzano aste di lunghezza maggior di 2 e minore di 0.1.
6. Fare la sintesi per diverse configurazioni e scegliere una configurazione (eventualmente esaminando diversi modi di assemblaggio dei quadrilateri) e fare le considerazioni del caso.

Il meccanismo proposto è facilmente riconducibile a un esalatero di Watt in quanto

- Sono presenti sei corpi in totale (incluso il telaio) e due di essi sono corpi ternari (triangolo CDE e telaio)
- I corpi ternari sono collegati direttamente attraverso una coppia rotoideale di classe c_1 , per cui viene escluso l'esalatero di Stephenson

In particolare, il numero di gradi di libertà del meccanismo rispecchia la natura dell'esalatero, confermando 1 GdL.

$$nGdL = 3(n - 1) - 2c_1 - c_2 \quad (29)$$

ottenendo

$$nGdL = 3(6 - 1) - 2 \cdot 7 - 0 = 1 GdL$$

Prima di procedere allo svolgimento dei punti richiesti, si definisce formalmente il processo di sintesi.

Il processo di sintesi consiste nello studiare un meccanismo al fine di stabilirne il tipo o il numero di membri necessari (*sintesi strutturale*) oppure per determinare la posizione e le dimensioni dei membri del meccanismo stesso (*sintesi dimensionale*).

La seconda tipologia cerca solitamente di rispettare dei vincoli assegnati: si tratta dunque di un processo di ottimizzazione che si traduce in un processo di minimizzazione di funzioni. In questo caso eseguire la sintesi altro non corrisponde che a minimizzare l'errore tra il generico meccanismo da dimensionare e il comportamento desiderato.

2.1 Procedura per l'analisi di posizione

Si può subito osservare che l'esaltero proposto può essere scomposto in due quadrilateri equivalenti posti in cascata

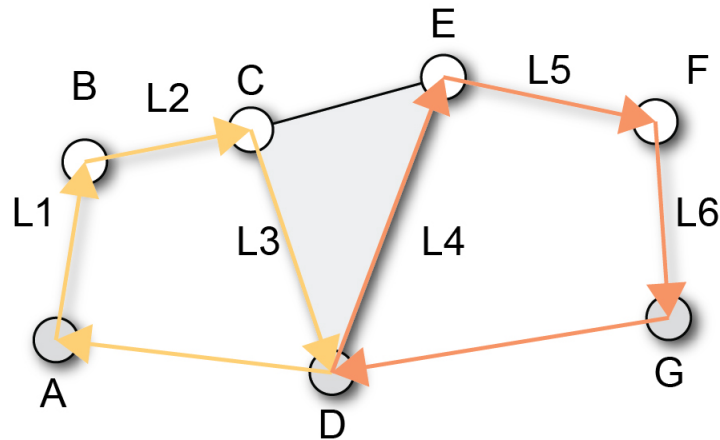


Figura 11: Scomposizione dell'esaltero in due quadrilateri equivalenti

L'analisi di posizione può essere pertanto suddivisa in due parti: nella prima viene risolto il quadrilatero di sinistra mentre nella seconda quello di destra. Importante ricordare che il testo dell'esercizio indica il movente del meccanismo (manovella AB) e il cedente interesse dell'analisi (bilanciere GF).

In particolare gli angoli che identificano il meccanismo sono

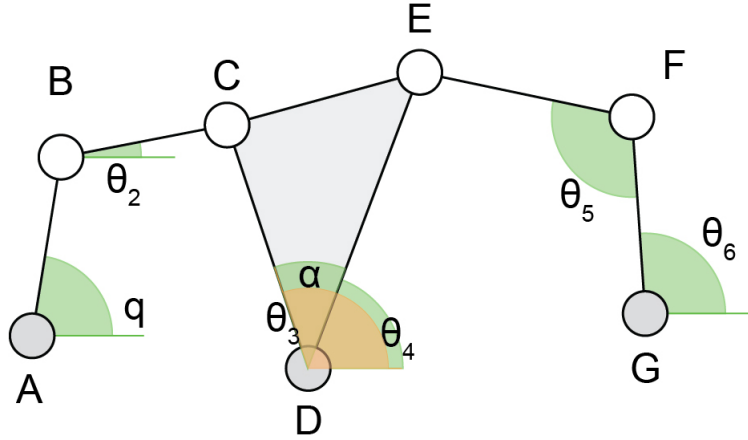


Figura 12: Angoli del meccanismo

Infine si assume che i punti di ancoraggio al telaio (rispettivamente A , D e G) siano noti.

2.1.1 Risoluzione del primo quadrilatero

Si consideri il quadrilatero di sinistra: data la coordinata del punto A , la coordinata di B può essere individuata attraverso

$$\begin{cases} x_B = x_A + L_1 \cos(q) \\ y_B = y_A + L_1 \sin(q) \end{cases} \quad (30)$$

L'angolo θ_2 può invece essere individuato considerando due diversi angoli: θ_{DBC} e θ_{BDH} .

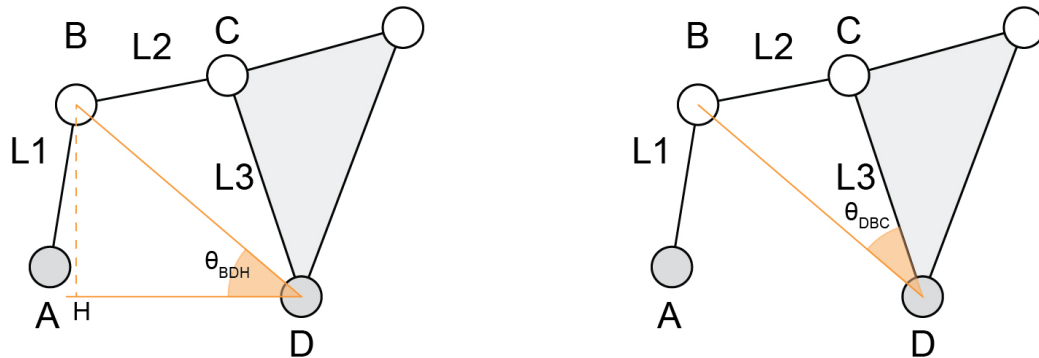


Figura 13: Angoli intermedi considerati per il quadrilatero di sinistra

Innanzitutto il lato L_{BD} può essere ottenuto come

$$L_{BD} = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2} \quad (31)$$

mentre i due angoli proposti in figura sono calcolabili rispettivamente attraverso il teorema del coseno e utilizzando l'arcotangente.

$$\theta_{DBC} = \text{ArcCos} \left(\frac{L_{BD}^2 + L_2^2 - L_3^2}{2 L_{BD} L_2} \right) \quad (32)$$

$$\theta_{BDH} = \text{ArcTan} \left(\frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} \right) \quad (33)$$

In particolare, a seconda del modo di assemblaggio, l'arcotangente può restituire due valori diversi, per cui θ_2 può essere ottenuto come

$$\theta_2 = \theta_{BDH} \pm \theta_{DBC} \quad (34)$$

In questo modo il punto C è identificabile, attraverso

$$\begin{cases} x_C = x_B + L_2 \cos(\theta_2) \\ y_C = y_B + L_2 \sin(\theta_2) \end{cases} \quad (35)$$

Infine, noto il punto C , l'angolo θ_3 può essere facilmente individuato attraverso l'arcotangente

$$\theta_3 = \text{ArcTan} \left(\frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} \right) \quad (36)$$

Il quadrilatero di sinistra è quindi completamente risolto.

2.1.2 Risoluzione del secondo quadrilatero

Si consideri ora il quadrilatero di destra.

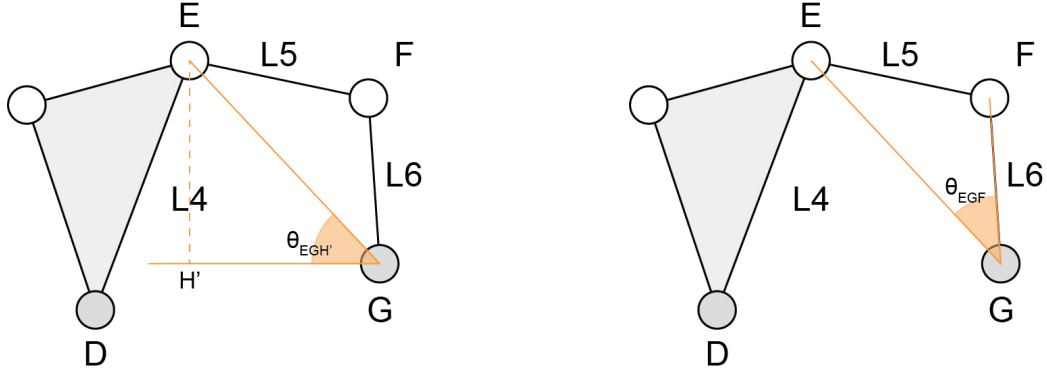


Figura 14: Angoli intermedi considerati per il quadrilatero di destra

In accordo con la figura 11 l'angolo θ_4 è individuabile come

$$\theta_4 = \theta_3 - \alpha \quad (37)$$

Per cui, noto il punto D , il punto E è pari a

$$\begin{cases} x_E = x_D + L_4 \cos(\theta_4) \\ y_E = y_D + L_4 \sin(\theta_4) \end{cases} \quad (38)$$

Analogamente alla procedura precedentemente illustrata, anche in questo caso verrà utilizzato il teorema del coseno, per cui è necessario calcolare il segmento L_{EG}

$$L_{EG} = \sqrt{(x_E - x_G)^2 + (y_E - y_G)^2} \quad (39)$$

Come in precedenza gli angoli θ_{EGF} e $\theta_{EGH'}$ possono essere individuati come

$$\theta_{EGF} = \text{ArcCos} \left(\frac{L_{EG}^2 + L_6^2 - L_5^2}{2 L_{EG} L_6} \right) \quad (40)$$

$$\theta_{EGH'} = \text{ArcTan} \left(\frac{y_E - y_G}{x_E - x_G} \right) \quad (41)$$

Anche l'angolo θ_5 può essere identificato utilizzando il teorema del coseno

$$\theta_5 = \text{ArcCos} \left(\frac{L_5^2 + L_6^2 - L_{EG}^2}{2 L_5 L_6} \right) \quad (42)$$

Anche in questo caso l'arcotangente, a seconda del modo di assemblaggio, può restituire 2 valori diversi, per cui

$$\theta_6 = \theta_{EGH'} \pm \theta_{EGF} \quad (43)$$

Infine anche il punto F può essere identificato attraverso

$$\begin{cases} x_F = x_G + L_6 \cos(\theta_6) \\ y_F = y_G + L_6 \sin(\theta_6) \end{cases} \quad (44)$$

Anche il secondo quadrilatero è stato risolto completamente.

NOTA: Date le due possibilità di assemblaggio per entrambi i quadrilateri, l'esalatero presenta 4 configurazioni diverse.

2.2 Parametri di progetto

I parametri di progetto corrispondono alle grandezze che durante il movimento del meccanismo rimangono costanti nel tempo, tuttavia a seconda del valore ad essi assegnato fanno variare il comportamento e le prestazioni del meccanismo stesso.

In questo caso particolare i parametri di progetto sono

- Le lunghezze delle aste L_1 e L_2
- La geometria del corpo ternario, identificata attraverso le lunghezze L_3 , L_4 e l'angolo α
- Le lunghezze delle aste L_5 e L_6
- Due punti di ancoraggio al telaio. Nel caso specifico vengono scelti i punti D e G

NOTA: Dalla geometria piana, sapendo che per due punti passa una e una sola retta, si può affermare che certamente due vincoli a telaio saranno allineati e varierà solamente la distanza tra essi. Per cui non sarebbe sbagliato imporre la coordinata y di un secondo vincolo a telaio pari a quella del punto A e lasciare libera la coordinata x . In questo modo si imporrebbe che i due punti si allineino parallelamente all'asse x .

2.3 Funzione desiderata e funzione realizzata

Viene assegnato dal testo dell'esercizio la funzione desiderata, la quale rimane costante e pari a zero negli intervalli $[0; \frac{\pi}{2}]$ e $[\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$ mentre cresce come un $\text{Cos}^2(x)$ in $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$. Attraverso il comando *Piecewise* la funzione a tratti così fatta può essere facilmente realizzata

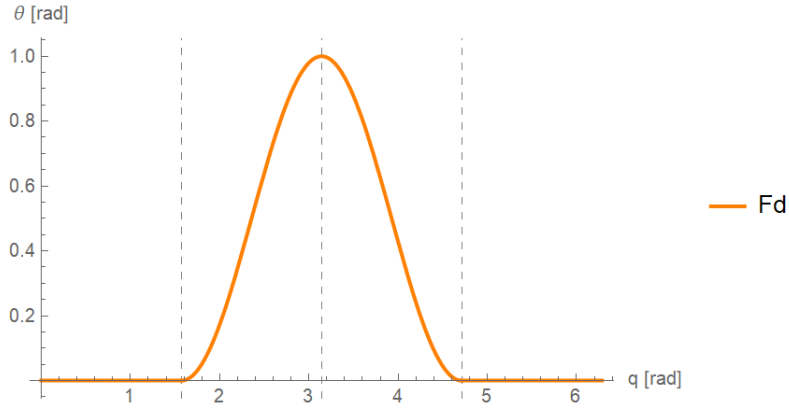


Figura 15: Funzione desiderata

La funzione realizzata può essere facilmente individuata nell'andamento dell'angolo θ_6 , il quale identifica la rotazione del cedente GF .

Inserendo come parametri i seguenti valori, al fine di rendere il meccanismo simmetrico, la funzione realizzata F_r è della seguente forma

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} x_A = 0 & y_A = 0 & x_D = 2 & y_D = 0 & x_G = 4 & y_G = 0 \\ L_1 = 1 & L_2 = 2 - \text{Cos}(75) & L_3 = 1.04 & L_4 = 1.04 & L_5 = 2 - \text{Cos}(75) & L_6 = 1 \end{array}$$

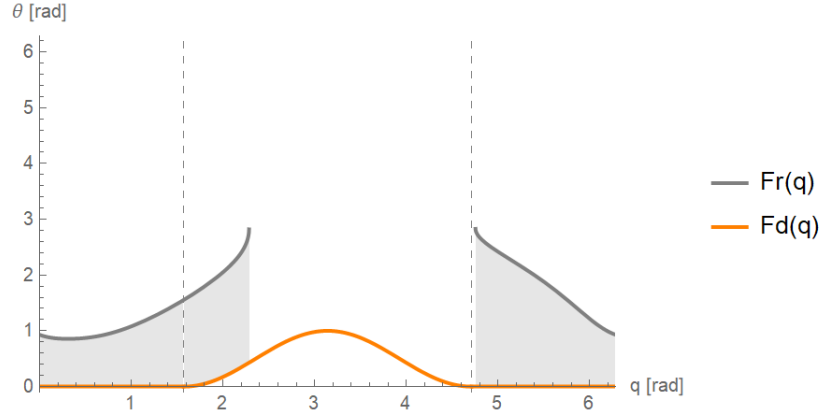


Figura 16: Andamento della funzione realizzata nel caso di meccanismo simmetrico (primo tentativo)

É chiaro come vadano ricercati i valori corretti dei parametri affinché la funzione realizzata rispecchi efficacemente quella desiderata.

Viene quindi introdotta una funzione rappresentante l'errore medio, costituita dalla media della differenza tra la funzione desiderata e quella realizzata. Affinché essa sia il più affidabile possibile, l'errore considerato viene preso in quadratura, in modo da far pesare maggiormente gli errori più grandi: questa funzione è anche nota come *norma L_2 o funzione penalità*.

$$L_2 = \frac{1}{\delta_{max} - \delta_{min}} \int_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} \|f_d - f_r\|^2 d\delta \quad (45)$$

La cui versione approssimata corrisponde a

$$\tilde{L}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|f_d(\delta_i) - f(\delta_i)\|^2 \quad (46)$$

Si decide pertanto di considerare 101 punti e i relativi 100 intervalli su cui mappare la funzione penalità. Un primo tentativo di sintesi può essere effettuato andando a minimizzare questa funzione. In particolare, viene adottato l'algoritmo *Nelder Mead*.

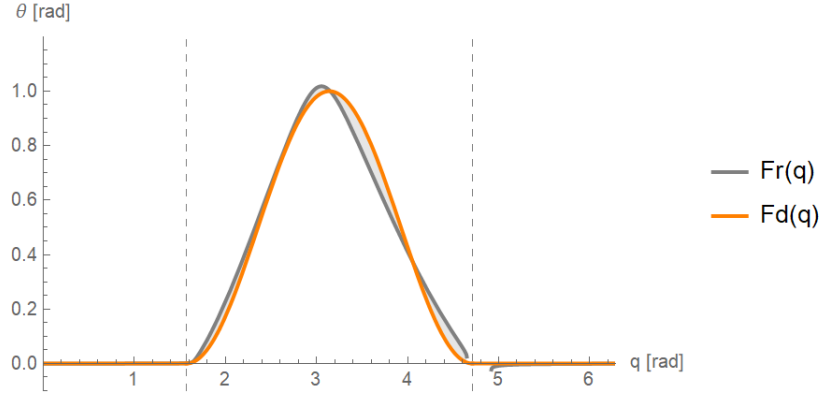


Figura 17: Andamento della funzione realizzata dopo il primo tentativo di sintesi

I parametri trovati dopo il processo di sintesi sono

$x_A = 0$	$y_A = 0$	$x_D = -0.131384$	$y_D = 1.82381$
$x_G = -1.16549$	$y_G = 0.249939$	$L_1 = 0.287252$	$L_2 = 0.286203$
$L_3 = 1.82733$	$L_4 = 0.465925$	$L_5 = 1.82194$	$L_6 = 0.0951234$
$\alpha = 0.695243$			

NOTA: per il processo di sintesi appena svolto e per i successivi verranno introdotti i seguenti vincoli

- tutte le lunghezze non dovranno essere degeneri, per cui $L_i > 0 \forall i \in [1, 6]$
- l'angolo α non sia inferiore a 10° in modo che il corpo ternario non degeneri ad una biella (e sia visivamente apprezzabile).

2.4 Funzione penalità pesata

Volendo dare un peso maggiore ai tratti in cui la funzione realizzata deve seguire maggiormente quella desiderata e rinunciando all'esattezza negli altri tratti, si può moltiplicare la funzione penalità per una funzione, la quale assumerà valore unitario nei tratti ad accuratezza massima e valori pressoché nulli nel resto degli intervalli.

Una funzione così definita può essere rappresentata dal seguente sistema

$$\begin{cases} 1 & q \leq \frac{\pi}{2} \\ e^{-a(q-\frac{\pi}{2})^4} + e^{-b(q-\pi)^4} + e^{-a(q-\frac{3\pi}{2})^4} & \frac{\pi}{2} < q \leq \frac{3\pi}{2} \\ 1 & q > \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (47)$$

In particolare i parametri a e b scelti per modellare la funzione sono

$$a = 200 \mid b = 200$$

Graficamente la *funzione peso* risulta pari a

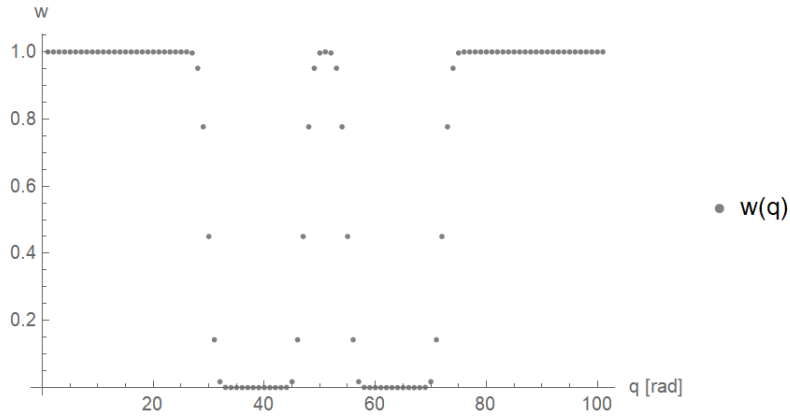


Figura 18: Funzione pesi

La funzione penalità \tilde{L}_2 può quindi essere ridefinita come

$$\tilde{L}_2 = \frac{1}{W} \sum_{i=1}^N w_i^2 \|f_d(\delta_i) - f(\delta_i)\|^2 \quad (48)$$

con $W = \sum_{i=1}^N w_i^2$.

Viene quindi effettuato nuovamente il processo di sintesi, andando a minimizzare \tilde{L}_2 . Il risultato ottenuto è il seguente

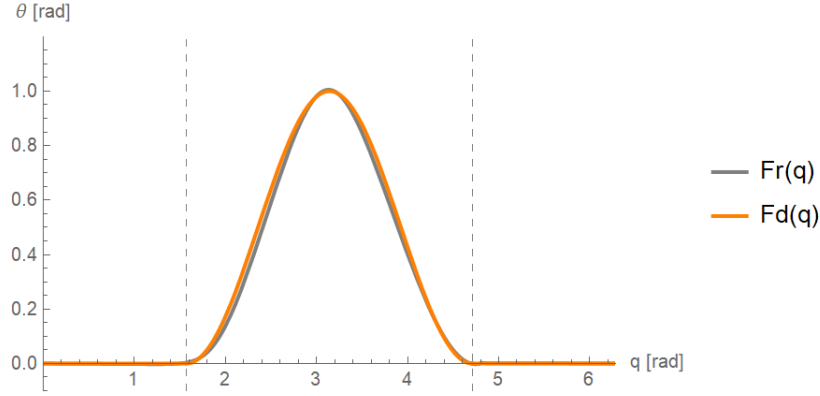


Figura 19: Andamento della funzione realizzata dopo il secondo tentativo di sintesi, introducendo un coefficiente di peso.

e i parametri restituiti dopo il processo di minimizzazione sono

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 x_A = 0 & y_A = 0 & x_D = -0.26742 & y_D = 1.94563 \\
 x_G = -0.704475 & y_G = -0.982822 & L_1 = 0.953763 & L_2 = 0.946802 \\
 L_3 = 1.95814 & L_4 = 1.17261 & L_5 = 1.839 & L_6 = 0.938371 \\
 \alpha = 0.174533 & & &
 \end{array}$$

2.5 Aggiunta di termini penalizzanti per le lunghezze

Viene ora richiesto di aggiungere dei termini che vadano a penalizzare soluzioni i cui parametri di lunghezza delle aste siano maggiori di 2 m e minori di 0.1 m .

L'aggiunta di questa penalità può essere facilmente implementata sfruttando la funzione massimo $Max()$.

Lo schema logico è il seguente

Penalità per lunghezze maggiori di $2\,m$	<ul style="list-style-type: none"> • <i>if</i> $(L - 2) > 0$: penalità (pesata) • <i>else</i>: nessuna penalità
Penalità per lunghezze minori di $0.1\,m$	<ul style="list-style-type: none"> • <i>if</i> $(0.1 - L) > 0$: penalità (pesata) • <i>else</i>: nessuna penalità

La funzione che può essere realizzata sarà quindi della seguente forma

$$penalties = \sum_{i=1}^6 \text{Max}[L_i - 2, 0] + \text{Max}[0.1 - L_i, 0] \quad (49)$$

In questo modo se i vincoli non vengono rispettati, le differenze (rispettivamente $L - 2$ e $0.1 - L$) saranno maggiori di zero, per cui la funzione massimo selezionerà tali differenze, permettendo di ottenere un peso proporzionale. Nel caso contrario, le differenze saranno minori di zero, per cui la funzione *penalties* varrà zero e non darà nessun contributo a \tilde{L}_2 .

$$\tilde{L}_2 = \tilde{L}_2 + 0.2 \cdot penalties \quad (50)$$

con 0.2 coefficiente per ridurre l'influenza di *penalties* in \tilde{L}_2 .

Si esegue quindi il processo di minimizzazione della funzione penalità al fine di trovare i valori dei parametri del meccanismo (*sintesi*).

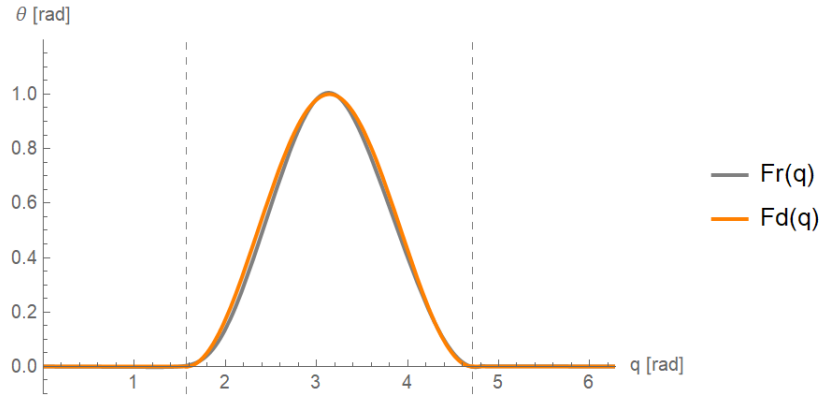


Figura 20: Andamento della funzione realizzata dopo il terzo tentativo di sintesi, introducendo un secondo elemento di vincolo

I parametri di progetto ottenuti da questo procedimento sono

$x_A = 0$	$y_A = 0$	$x_D = -0.176466$	$y_D = 1.81948$
$x_G = -0.987254$	$y_G = -0.639423$	$L_1 = 0.16562$	$L_2 = 0.170277$
$L_3 = 1.82335$	$L_4 = 1.81037$	$L_5 = 0.749407$	$L_6 = 0.1$
$\alpha = 0.367618$			

Per evitare di raggiungere le configurazioni singolari e la successiva rottura del meccanismo, è possibile aggiungere un ulteriore vincolo alla funzione penalità. In particolare questo può essere effettuato andando a limitare il coseno dei seguenti angoli

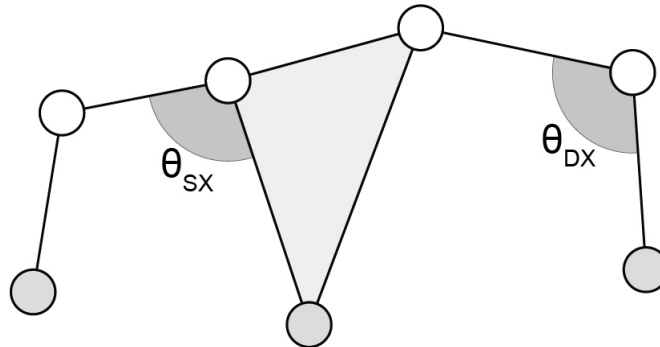


Figura 21: Angoli da limitare per le configurazioni singolari

per cui

$$\text{Cos}(\theta_{SX}) < 0.94 \mid \text{Cos}(\theta_{DX}) < 0.94$$

Questo nuovo vincolo può essere mappato sugli n punti introdotti precedentemente: sfruttando l'algoritmo utilizzato per la funzione *penalties* è possibile creare una funzione G da aggiungere a \tilde{L}_2 .

$$G = \text{Max}[\text{Cos}(\theta_{SX}) - 0.94, 0] + \text{Max}[\text{Cos}(\theta_{DX}) - 0.94, 0] \quad (51)$$

E quindi

$$\tilde{L}_2 = \tilde{L}_2 + G \quad (52)$$

Una nuova ottimizzazione può essere effettuata andando a ricercare i nuovi valori dei parametri in gioco

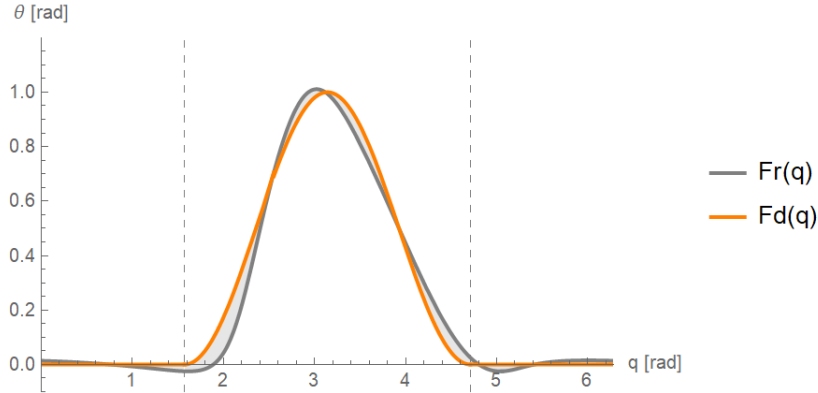


Figura 22: Andamento della funzione realizzata dopo il quarto tentativo di sintesi, introducendo un terzo elemento di vincolo, ovvero la lontananza dalle configurazioni singolari

I parametri di progetto ottenuti da questo procedimento sono

$x_A = 0$	$y_A = 0$	$x_D = -0.489104$	$y_D = 0.828999$
$x_G = -1.67089$	$y_G = -1.49471$	$L_1 = 0.503634$	$L_2 = 0.575812$
$L_3 = 0.911525$	$L_4 = 1.08931$	$L_5 = 1.2919$	$L_6 = 0.754248$
$\alpha = 0.488676$			

NOTA: l'errore tra le due funzioni risulta aumentato rispetto alla terza minimizzazione, tuttavia tutti i vincoli sono stati ampiamente rispettati e la funzione F_r è continua.

2.6 Sintesi per diverse configurazioni

Viene ora eseguita la sintesi per le 4 diverse modalità di assemblaggio

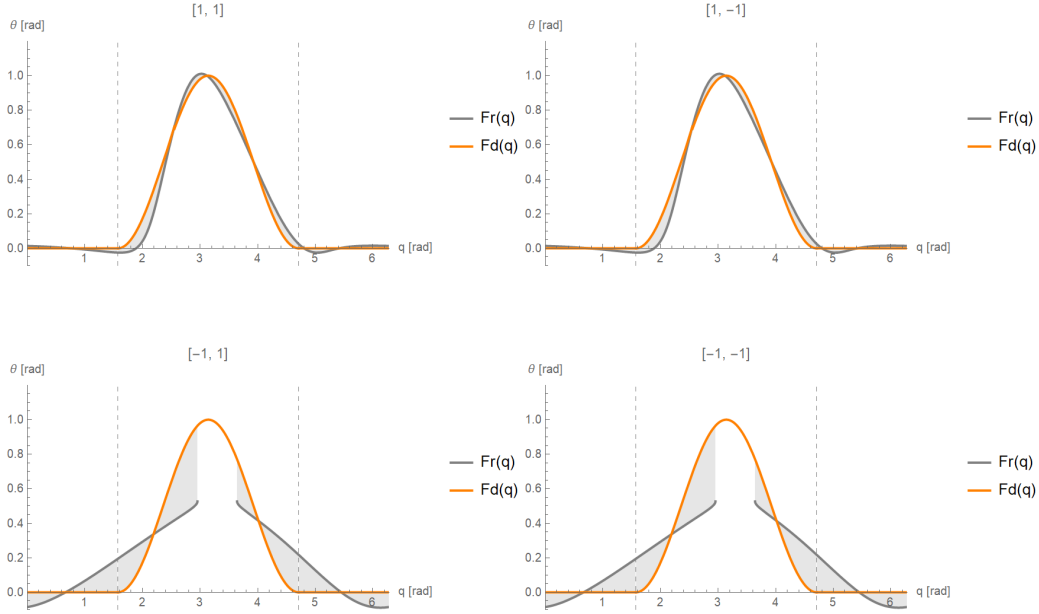


Figura 23: Risultati della sintesi per i quattro modi di assemblaggio del meccanismo

L'errore minimo è ottenuto rispettivamente con le configurazioni $[1, 1]$ e $[1, -1]$. Queste corrispondono allo stesso modo di assemblaggio del movente, differendo sul cedente. In particolare i due errori sono gli stessi e i due meccanismi risultano del tutto equivalenti.

Con i vincoli introdotti durante l'affinamento della funzione penalità, i due risultati rispettano le condizioni imposte dal problema e la continuità della funzione è soddisfatta.