



UNIVERSITÀ  
DI TRENTO

**STUDIO DI UN MECCANISMO DI SPINTA E DI UN  
MECCANISMO DI STERZO**

*Dipartimento di Ingegneria Industriale*  
Corso di Sistemi Meccanici e Modelli

Homework 1

Pierfrancesco Oselin - Mat. 202199  
pierfrancesco.oselin@studenti.unitn.it

# Indice

<b>1</b>	<b>Nota introduttiva</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Meccanismo di spinta</b>	<b>3</b>
2.1	Analisi di posizione . . . . .	5
2.2	Analisi di velocità . . . . .	7
2.3	Analisi di accelerazione . . . . .	8
2.4	Analisi dei punti morti . . . . .	8
2.5	Calcolo dei tempi di andata e ritorno . . . . .	10
2.6	Calcolo delle configurazioni singolari . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Meccanismo di sterzo</b>	<b>14</b>
3.1	Calcolo dell'angolo di sterzo $q$ . . . . .	15
3.2	Calcolo del rapporto di velocità $\tau$ . . . . .	19
3.3	Calcolo dei centri di istantanea rotazione . . . . .	20

# 1 Nota introduttiva

In questa relazione tutte le grandezze sono funzione del tempo. Tuttavia per la maggior parte delle equazioni questo verrà sottinteso in modo da alleggerire la notazione già sufficientemente pesante.

Molte equazioni inoltre sono talmente piccole da risultare difficilmente leggibili: nel file *Mathematica* sono riportate le stesse formule ma a carattere più grande: si consultino quelle per una miglior comprensione.

## 2 Meccanismo di spinta

Viene richiesto di studiare il meccanismo di spinta s centrato proposto in figura

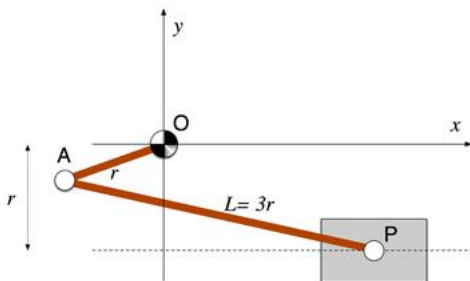


Figura 1: Meccanismo di spinta

In particolare individuando le seguenti proprietà

1. La posizione  $x$  del pistone in funzione dell'angolo di manovella  $q$ . Rappresentare graficamente  $x(q)$  per  $q \in [0, 4\pi]$ . Realizzare una animazione del meccanismo.
2. Calcolare la velocità del pistone  $\dot{x}(q)$  e rappresentarla graficamente insieme a  $x(q)$ .
3. Determinare la accelerazione del pistone  $\ddot{x}(q)$  e rappresentarla graficamente insieme a  $x(q)$ .

4. Determinare numericamente i punti morti inferiore e superiore e la durata (in tempo) di andata e ritorno. Suggerimento: usare le funzioni *FindMinimum/FindMaximum*.
5. Determinare le configurazioni singolari e la lunghezza  $L$  in modo che le configurazioni singolari siano raggiungibili.

Segue quindi la trattazione dell'analisi di posizione, velocità e accelerazione del meccanismo di spinta proposto nell'esercizio. È necessario tuttavia assegnare alle costanti  $r$  e  $L = 3r$  un valore numerico al fine di poter rappresentare graficamente il sistema. Viene inoltre detto che l'angolo  $q(t)$  varia di velocità costante pari a  $\omega$ . Vengono pertanto assunti i seguenti valori:

$$r = 1 \mid L = 3r = 3 \mid \omega = \Omega = 1$$

Si osserva il meccanismo. Esso è composto da una manovella (corpo  $OA$ ), una biella (corpo  $AP$ ) e un pattino (corpo  $P$ ): in totale sono 3 corpi più il telaio. Questi sono collegati tra di loro attraverso giunzioni diverse. Tra il telaio e  $OA$ , tra  $OA$  e  $AP$  e tra  $AP$  e  $P$  è presente una *coppia rotoidale*, che blocca i gradi di libertà relativi allo spostamento, mantenendo la possibilità di rotazione. Tra il corpo  $P$  e il telaio vi è presente una *coppia prismatica* che elimina lo spostamento solamente in una direzione ma blocca la rotazione.

In particolare, considerando il meccanismo in due dimensioni

- Ogni corpo presenta  $3 \text{ GdL}$
- Una coppia rotoidale comporta  $2 \text{ GdV}$  (elimina 2 GdL)
- Una coppia prismatica comporta  $2 \text{ GdV}$  (elimina 2 GdL)

È possibile conoscere i gradi di libertà dell'intero meccanismo attraverso la *Formula di Grübler*

$$n^{\circ} \text{ GdL} = 3(n - 1) - 2c_1 - c_2 \quad (1)$$

dove  $n$  è il numero di corpi totali costituenti il meccanismo,  $c_1$  è il numero di giunti di classe C1 mentre  $c_2$  è il numero di giunti di classe C2.

In particolare in questo meccanismo si ha

$$3(4 - 1) - 2 \times 4 - 0 = 1 \text{ GdL} \quad (2)$$

Non vi sono vincoli che insistono sugli stessi gradi di libertà (vincoli ridondanti) per cui l'esito della formula di Grübler è corretto. Essendovi complessivamente  $1 \text{ GdL}$  il meccanismo può essere descritto da un'unica grandezza: la manovella  $AP$  verrà assunta come *movente* della catena cinematica.

## 2.1 Analisi di posizione

Il meccanismo di spinta può essere analizzato come una catena cinematica chiusa composta da quattro membri: si parla quindi di quadrilatero. L'equazione caratteristica di chiusura del meccanismo può essere descritta come

$$OA + AP - CP - OC = 0 \quad (3)$$

I lati del quadrilatero, descritti in coordinate cartesiane (componenti rispettivamente lungo  $x$  e  $y$ ), sono

$$\begin{aligned} OA &= r \begin{bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{bmatrix} & AP &= L \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \\ CP &= r \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \end{bmatrix} & OC &= x \begin{bmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si può quindi rappresentare la catena cinematica in forma matriciale, sostituendo i valori appena definiti

$$\begin{bmatrix} L \cos(\theta) + r \cos(q) - x \\ L \sin(\theta) + r \sin(q) + r \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

con  $x$ ,  $\theta$  e  $q$  tutte in funzione del tempo.

Si considera il movente della catena cinematica: è stato precedentemente mostrato come sia  $OA$  a ricoprire questo ruolo nel meccanismo. Tuttavia questo corpo ha lunghezza costante e a variare è solamente la sua disposizione nello spazio. Per cui si indica con  $q$  l'angolo di manovella (unica variabile indipendente) mentre  $x = x(q)$  e  $\theta = \theta(q)$ , i *cedenti*, costituiscono le variabili dipendenti. Si noti come il sistema sia riconducibile a un sistema lineare in 2 equazioni e 3 variabili: è possibile risolverlo ottenendo

$$\begin{cases} x(q) \rightarrow r \cos(q) - \sqrt{L^2 - r^2 \sin^2(q) - 2r^2 \sin(q) - r^2} \\ \theta(q) \rightarrow \tan^{-1} \left( -\frac{\sqrt{L^2 - r^2 \sin^2(q) - 2r^2 \sin(q)}}{L}, -\frac{r(\sin(q)+1)}{L} \right) + 2\pi c_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(q) \rightarrow \sqrt{L^2 - r^2 \sin^2(q) - 2r^2 \sin(q) - r^2} + r \cos(q) \\ \theta(q) \rightarrow \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{L^2 - r^2 \sin^2(q) - 2r^2 \sin(q)}}{L}, -\frac{r(\sin(q)+1)}{L} \right) + 2\pi c_1 \end{cases}$$

È importante notare come siano presenti due coppie di soluzioni che risolvono il sistema. Viene tuttavia considerata solo la seconda coppia in quanto la prima non rappresenta adeguatamente il meccanismo proposto (meccanismo assemblato nel terzo quadrante del piano). Imponendo inoltre  $c_1 \rightarrow 0$  si esclude la periodicità dalla soluzione.

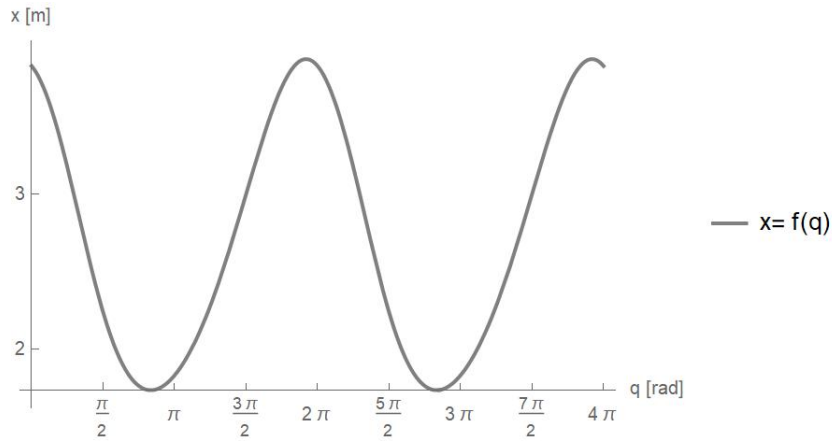
La posizione  $x(q)$  risulta quindi essere:

$$x(q) \rightarrow \sqrt{L^2 - r^2 \sin^2(q) - 2r^2 \sin(q) - r^2} + r \cos(q) \quad (5)$$

mentre  $\theta(q)$

$$\theta(q) \rightarrow \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{L^2 - r^2 \sin^2(q) - 2r^2 \sin(q)}}{L}, -\frac{r(\sin(q) + 1)}{L} \right) \quad (6)$$

Il grafico della posizione di  $x(q)$ , per  $q \in [0, 4\pi]$  è quindi



Nel *file Mathematica* allegato a questa relazione è presente un'animazione del meccanismo di spinta proposto.

## 2.2 Analisi di velocità

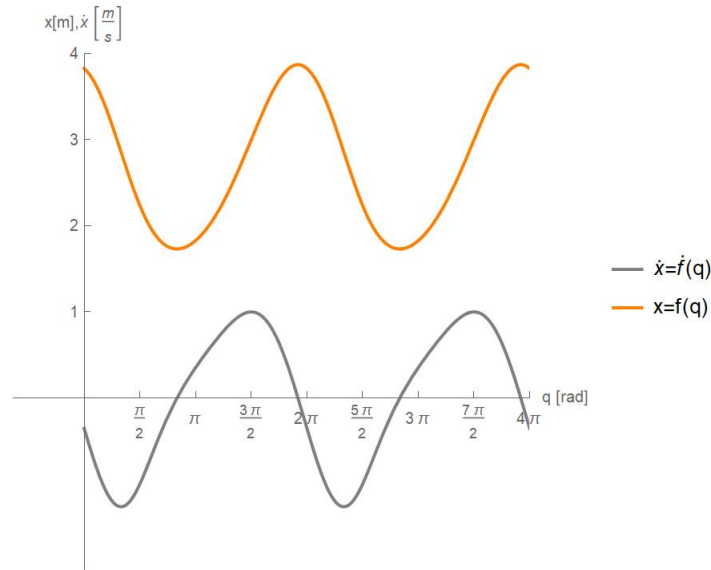
Per trattare le velocità del sistema è necessario ricondursi a un'equazione di chiusura per le velocità. Questo può essere fatto derivando nel tempo l'equazione di chiusura precedentemente introdotta. Derivando si ottiene quindi

$$\begin{bmatrix} -L \theta' \sin(\theta) - r q' \sin(q) - x' \\ L \theta' \cos(\theta) + r q' \cos(q) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Il sistema risulta ancora di due equazioni e 3 variabili. Risolvendo in  $\dot{x}$  e  $\dot{\theta}$  si trova

$$\begin{cases} \dot{x}(q) \rightarrow \frac{Lr\omega \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{L^2-r^2 \sin^2(q)-2r^2 \sin(q)-r^2}}{L}, -\frac{r(\sin(q)+1)}{L}\right)-q\right)}{\sqrt{L^2-r^2 \sin^2(q)-2r^2 \sin(q)-r^2}} \\ \dot{\theta}(q) \rightarrow -\frac{r\omega \cos(q)}{\sqrt{L^2-r^2 \sin^2(q)-2r^2 \sin(q)-r^2}} \end{cases}$$

Per rappresentare graficamente le velocità è necessario applicare le condizioni al contorno introdotte precedentemente, in modo da eliminare tutte le variabili presenti nella definizione di  $\dot{x}$ , fuorché la variabile indipendente  $q$ . Pertanto, applicando la definizione di  $\theta(q)$  e  $\dot{q} = \omega = \Omega$ . Il grafico della velocità  $\dot{x}(q)$ , rappresentato insieme a quello della posizione, risulta quindi essere per  $q \in [0, 4\pi]$



## 2.3 Analisi di accelerazione

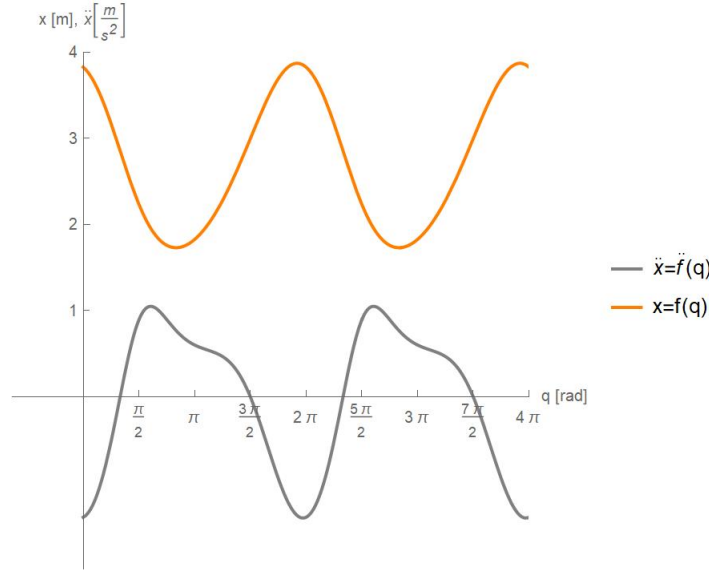
Anche in questo caso per calcolare le accelerazioni  $\ddot{x}(q)$  e  $\ddot{\theta}(q)$  sarà necessario derivare l'equazione di chiusura della velocità, oppure derivare due volte l'equazione di chiusura di posizione. Risolvendo per  $\ddot{x}$  e  $\ddot{\theta}$  si ottiene quindi

$$\begin{cases} \ddot{x}(q) \rightarrow -\frac{Lr\left(\omega^2\left((L^2-r^2\sin^2(q)-2r^2\sin(q)-r^2)\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{L^2-r^2\sin^2(q)-2r^2\sin(q)-r^2}}{r\sin(q)+L}\right)-q\right)+Lr\cos^2(q)\right)-\frac{1}{2}q''(2L^2-4r^2\sin(q)+r^2\cos(2q)-3r^2)\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{L^2-r^2\sin^2(q)-2r^2\sin(q)-r^2}}{r\sin(q)+L}\right)-q\right)\right)}{(L^2-r^2\sin^2(q)-2r^2\sin(q)-r^2)^{3/2}} \\ \ddot{\theta}(q) \rightarrow \frac{r(2\omega^2(2(L^2-2r^2)\sin(q)+r^2\cos(2q)-3r^2)-2q''\cos(q)(2L^2-4r^2\sin(q)+r^2\cos(2q)-3r^2))}{\sqrt{2}(2L^2-4r^2\sin(q)+r^2\cos(2q)-3r^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Per rappresentare il grafico dell'accelerazione è necessario anche in questo caso imporre le condizioni al contorno, per cui  $\omega = \Omega$  e le definizioni di  $\dot{\theta}$  e  $\theta$ . Il testo dell'esercizio afferma inoltre che la manovella si muove di velocità angolare costante, per cui

$$\ddot{q} = \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad (8)$$

Il grafico dell'accelerazione  $\ddot{x}(q)$ , rappresentato insieme a quello della posizione, per  $q \in [0, 4\pi]$  risulta quindi essere



## 2.4 Analisi dei punti morti

Un punto morto è per definizione un punto la cui velocità è nulla. In questo meccanismo, considerando  $x(q)$ , si può facilmente intuire che i punti a velo-



cità nulla corrispondano agli istanti in cui il sistema passa da un'azione di spinta a una di tiro e viceversa.

Ricordando la definizione di velocità

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad (9)$$

per calcolare questi punti è necessario derivare nel tempo la posizione  $x(q(t))$  trovata precedentemente e imporla uguale a zero.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-2r^2\omega \cos(q) - 2r^2\omega \sin(q) \cos(q)}{2\sqrt{L^2 - r^2 \sin^2(q)} - 2r^2 \sin(q) - r^2} - r\omega \sin(q) = 0 \quad (10)$$

Si osservi che utilizzando la definizione di  $\theta(t)$  la funzione dipende solo da  $\dot{q}(t) = \omega$  e  $q(t)$ . Seppur applicando le condizioni al contorno, la soluzione del sistema in  $q$  risulta eccessivamente complicata.

Un'alternativa a questo procedimento è tener presente che imporre la derivata pari a zero vuol dire ricercare i punti di massimo, flesso orizzontale e minimo nell'intervallo considerato. In particolare, dal grafico di  $\dot{x}(q)$  precedentemente illustrato, si osserva come la funzione non presenti punti di flesso orizzontale: ciò implica che qualora si ponesse  $\dot{x} = 0$ , essa coinciderebbe sicuramente con un punto di massimo o di minimo. Inoltre la funzione  $x(q(t))$  è continua nell'intervallo chiuso e limitato  $[0, 4\pi]$ ; il *teorema di Weierstrass* assicura che la funzione abbia un minimo e un massimo assoluto nel dominio. È quindi sufficiente ricercare questi punti per ottenere i valori desiderati

$$pm_{inf} = \text{Min}[x(q)] \mid pm_{sup} = \text{Max}[x(q)]$$

Per la determinazione numerica dei punti morti è necessario applicare le condizioni al contorno. Si ottiene quindi

$$pm_{inf} = 2.62 \text{ rad} \mid pm_{sup} = -0.25 \text{ rad}$$

Per conoscere i valori di  $x(q)$  corrispondenti ai punti morti, è sufficiente applicare una semplice sostituzione, ottenendo

$$x_{inf} = x(q = pm_{inf}) = 1.73 \text{ m} \mid x_{sup} = x(q = pm_{sup}) = 3.87 \text{ m}$$

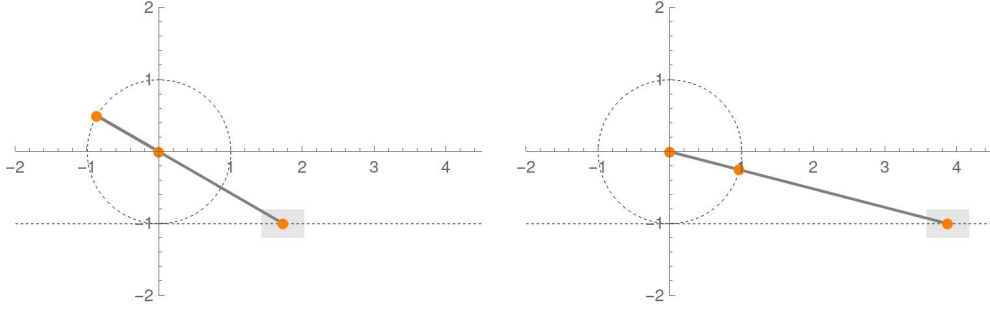


Figura 2: punto morto inferiore e punto morto superiore

## 2.5 Calcolo dei tempi di andata e ritorno

In maniera analoga si calcolino i punti corrispondenti ad accelerazioni nulle: si derivi pertanto due volte la posizione  $x(q)$  e si ricerchino i punti di massimo e minimo

$$a_{inf} = 1.04 \text{ rad} \mid a_{sup} = -1.57 \text{ rad}$$

I valori di  $x(q)$  corrispondenti sono

$$x_{inf,a} = x(q = a_{inf}) = 2.86 \text{ rad} \mid x_{sup,a} = x(q = a_{sup}) = 3.00 \text{ rad}$$

Si può osservare che i punti ad accelerazione nulla non combaciano: ci si aspetta quindi che il meccanismo non abbia un movimento simmetrico: i tempi di andata e di ritorno non saranno pertanto uguali. Si parla in questo caso di meccanismi a rapida andata o a rapido ritorno.

Per calcolare il tempo di ritorno è necessario ricordare la definizione di velocità angolare

$$\omega = \frac{dq}{dt} \quad (11)$$

Integrando l'equazione ( $\omega = \text{cost}$  per ipotesi iniziale) si ottiene

$$q_1 - q_0 = \omega(t_1 - t_0) \quad (12)$$

con  $t_0 = 0$ ,  $q_0$  e  $q_1$  punti morti. Isolando  $t$  si ricava

$$\tau_{rit} = 2.87 \text{ s}$$

Il tempo di andata corrisponde invece alla differenza tra il periodo di oscillazione della manovella e il tempo di ritorno. Per cui

$$\tau_{and} = \left( \frac{2\pi}{\omega} \right) - \tau_{rit} = 3.41 \text{ s} \quad (13)$$

Il meccanismo è dunque a rapido ritorno.

## 2.6 Calcolo delle configurazioni singolari

È stato mostrato precedentemente come l'equazione di chiusura sia riscrivibile in forma matriciale. È stato inoltre affrontato il calcolo della velocità come derivazione dell'equazione di chiusura: in particolare, isolando le variabili dipendenti da un lato dell'equazione e la variabile indipendente dall'altro, ci si riconduce a una forma del tipo

$$\begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{d\theta} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{d\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dq} \\ \frac{df_2}{dq} \end{bmatrix} \dot{q} \quad (14)$$

La matrice quadrata sulla sinistra altro non è che la *Jacobiana dell'equazione di chiusura*. È quindi possibile risolvere  $\dot{x}$  e  $\dot{\theta}$  solamente se la matrice  $J$  è invertibile. Ci si riconduce in caso a una forma del tipo

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = [J]^{-1} [B] \dot{q} \quad (15)$$

Si ricorda che l'inversa di una matrice  $2 \times 2$  è

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{cof } A)^T \quad (16)$$

con  $\text{cof } A$  matrice dei cofattori. Affinché  $J$  risulti invertibile il determinante deve essere non nullo.

Nel caso di determinante nullo invece le velocità tenderebbero a un valore infinito: si parla quindi di *configurazioni singolari*.

Per ricercare queste configurazioni, come è facile intuire, si impone

$$\Delta = \det[J] = 0 \quad (17)$$

Le soluzioni di questa equazione sono

$$L = 0 \mid \cos \theta = 0$$

Il primo caso è chiaro, tuttavia esso risulta degenerare: la lunghezza  $L$  non può essere nulla, altrimenti non si tratterebbe più di meccanismo di spinta. Il secondo risultato invece impone

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \mid \theta = \frac{\pi}{2}$$

a meno di una periodicità.

Queste sono le configurazioni singolari per  $q$  movente del meccanismo. Nel caso in cui il movente fosse stato un'altra grandezza, ad esempio  $x$ , le configurazioni singolari sarebbero state diverse, in quanto la Jacobiana sarebbe cambiata.

Infine, per poter sapere per quale valore di  $L$  siano raggiungibili queste configurazioni, è necessario imporre le condizioni appena trovate (una alla volta) nell'equazione di chiusura della catena cinematica.

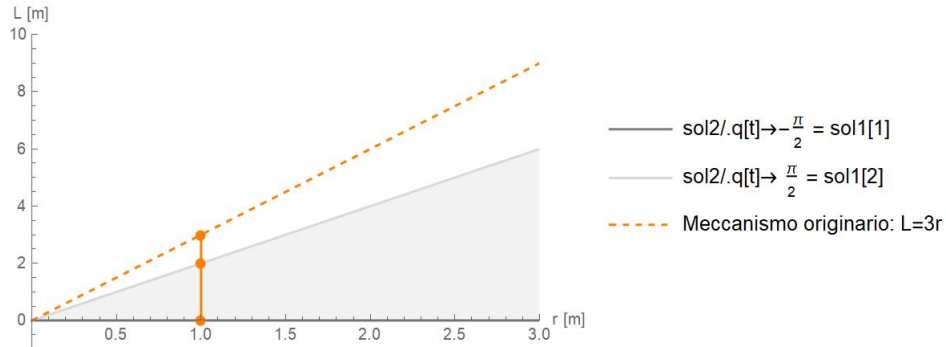
Escludendo i casi degeneri ( $L \leq 0$ ) i valori di  $L$  ammissibili sono

$$L = 2r \text{ per } q = \frac{\pi}{2} \mid L = r(\sin(q) + 1) \text{ per } \cos(q) \neq 0$$

Unendo le due soluzioni si ottiene

$$0 < L \leq 2r \quad (18)$$

per  $q \in [0, 4\pi]$ .



In particole

- per  $L = 2r$  il meccanismo raggiunge la configurazione singolare
- per  $0 < L < 2r$  il meccanismo si rompe

Per cui l'unico risultato accettabile risulta  $L = 2r$ . Riassumendo

Configurazione singolare	Raggiungibile
$L = 0$	Sì ma il meccanismo perde significato
$\theta = \frac{\pi}{2}$	Sì, raggiungibile per $L = 2r$
$\theta = -\frac{\pi}{2}$	Sì, raggiungibile per $L = 2r$

### 3 Meccanismo di sterzo

Viene richiesto di studiare il meccanismo di sterzo di un muletto per lo spostamento di pallet, la cui struttura è rappresentata in figura

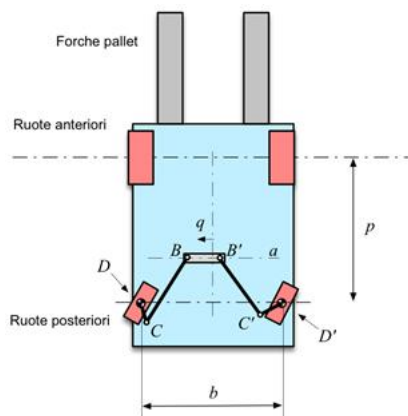


Figura 3: Meccanismo di sterzo

In particolare viene richiesto

1. Adattare la procedura per la risoluzione del quadrilatero e calcolare le rotazioni delle manovelle  $|CD|$  e  $|C'D'|$  rispetto alla posizione che hanno quando la cremagliera è al centro (sterzata delle ruote). Rappresentare graficamente gli angoli di sterzo della ruota di sinistra e di destra in funzione della corsa della cremagliera.
2. Calcolare il rapporto di velocità fra la corsa della cremagliera e gli angoli di sterzo.
3. Determinare il centro di istantanea rotazione del veicolo secondo la ruota di sinistra e secondo la ruota di destra. Calcolare la distanza fra i due centri in funzione dell'angolo di sterzo medio. Suggerimento: il centro di istantanea rotazione è l'intersezione fra l'asse delle ruote anteriori e l'asse della ruota posteriore considerata.

Segue quindi la trattazione dell'analisi delle grandezze del meccanismo di sterzo proposto. In questo caso non è necessario imporre valori alle variabili in quanto tutti i dati sono noti. In particolare

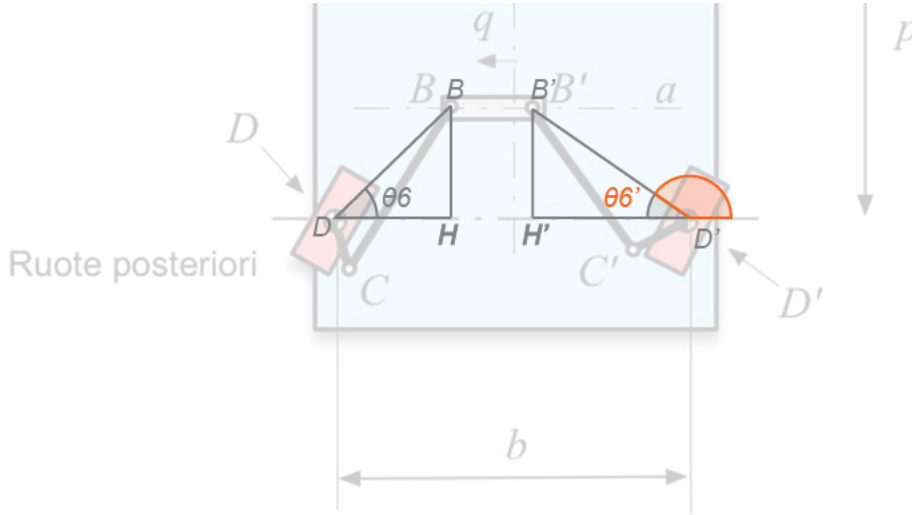
$$|BB'| = 0.1 \text{ m} \quad |BC| = |B'C'| = 0.5 \text{ m} \quad |CD| = |C'D'| = 0.2 \text{ m}$$

Viene inoltre riportato il passo del muletto, pari a  $p = 1.8 \text{ m}$  e la distanza tra i due assi pari a  $ab = 0.05 \text{ m}$ .

Si osserva il meccanismo. Esso è formato da 6 corpi: bilancieri  $DC$  e  $D'C'$ , bielle  $CB$  e  $B'C'$ , cremagliera  $BB'$  e telaio. I giunti sono tutte coppie rotoidali (in  $D, C, B, B', C'$  e  $D'$ ) mentre  $BB'$  è connessa al telaio attraverso una coppia prismatica. In particolare, il telaio e la cremagliera realizzano 3 collegamenti ciascuno (*corpi ternari*): essendo questi due corpi connessi direttamente tra di loro, il meccanismo proposto forma un *esalatero di Watt*: esso avrà quindi 1 *GdL* e la formula di Grübler lo conferma.

### 3.1 Calcolo dell'angolo di sterzo $q$

Gli angoli di sterzo possono essere facilmente ricavato attraverso semplici passaggi trigonometrici.



Si consideri il triangolo  $DBH$ . Il segmento  $DB$  può essere ricavati attraverso il *teorema di Pitagora*, con  $BH = ab$  e

$$DH = \frac{b}{2} - \frac{BB'}{2} + q \quad (19)$$

con  $q$  *scostamento relativo* della cremagliera. In questo caso lo scostamento viene sommato in quanto per  $q < 0$   $DH$  diminuisce in modulo, per  $q > 0$

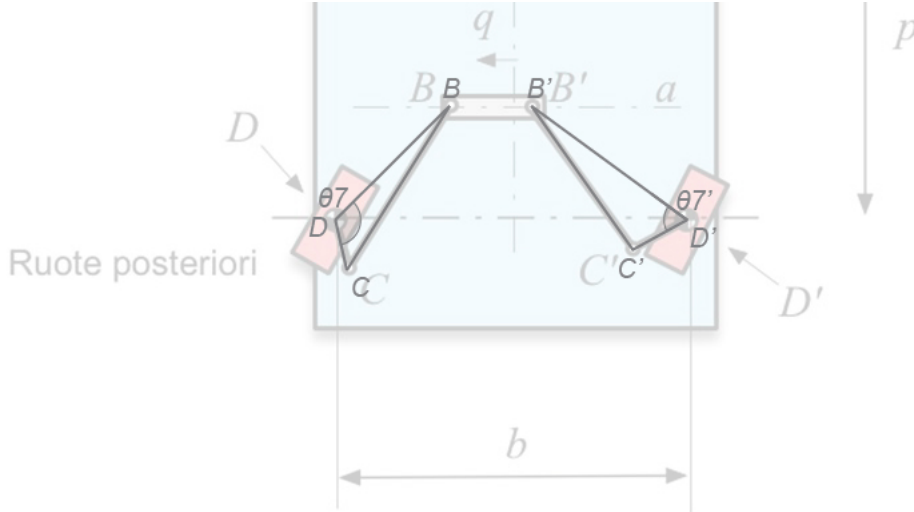
$DH$  aumenta in modulo. Per il movimento puramente rettilineo del muletto,  $q = 0$ .

É possibile inoltre ricavare l'angolo  $\theta 6$  come

$$\theta 6 = \text{ArcTan} \left( \frac{BH}{DH} \right) \quad (20)$$

Per quanto riguarda il triangolo  $D'B'H'$ , è possibile ricavare in maniera del tutto analoga il segmento  $D'B'$  e l'angolo  $\theta 6'$ . Lo scostamento andrà tuttavia sottratto al cateto e non sommato.

Si consideri ora il triangolo  $DBC$ .



É possibile ricavare l'angolo  $\theta 7$  attraverso il *teorema del Coseno*. Per un generico triangolo  $ABC$ , di lati rispettivamente  $a, b, c$ , si ha

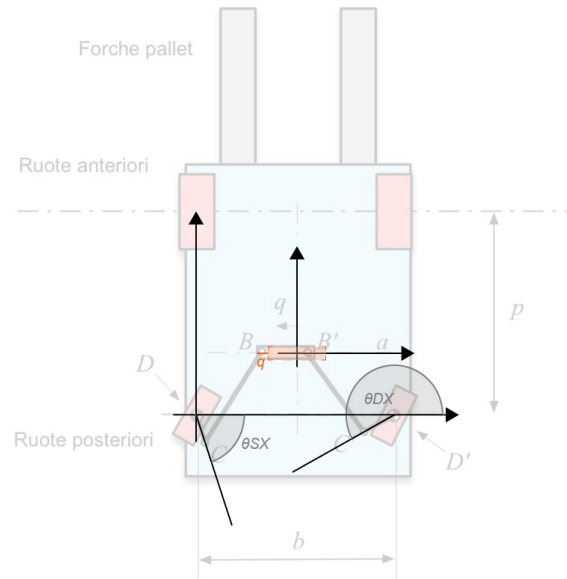
$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (21)$$

con  $\alpha$  angolo opposto ad  $a$ . Applicandolo a  $DBC$  si ottiene

$$\theta 7 = \text{ArcCos} \left( \frac{DC^2 + DB^2 - CB^2}{2DCDB} \right) \quad (22)$$

Anche in questo caso in maniera del tutto analoga è possibile ricavare l'angolo  $\theta 7'$ .



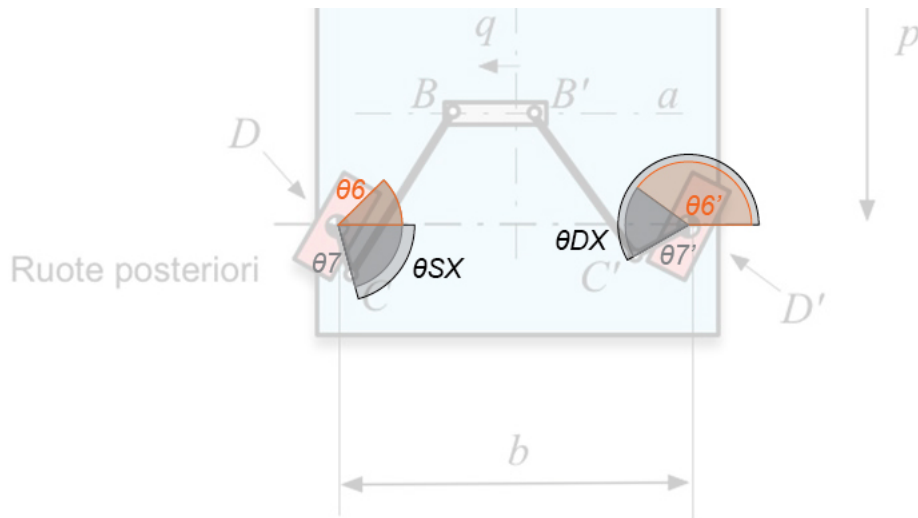


L'angolo  $\theta_{SX}$  è quindi ottenibile dalla differenza di  $\theta_7$  e  $\theta_6$  appena ricavati

$$\theta_{SX} = \theta_7 - \theta_6 < 0 \quad (23)$$

secondo il sistema di riferimento. Per l'angolo  $\theta_{DX}$  è necessario invece sommare un termine correttivo affinché i due angoli  $\theta_{SX}$  e  $\theta_{DX}$  siano descrivibili con lo stesso sistema di riferimento. Si ottiene quindi

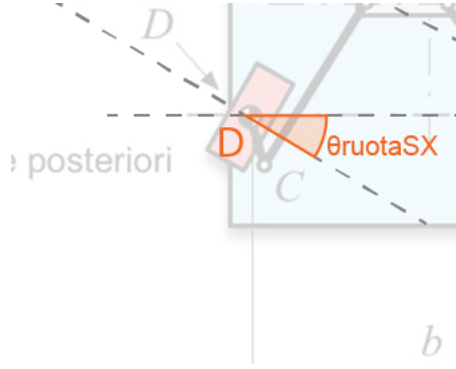
$$\theta_{DX} = \pi + \theta_7' - \theta_6' \quad (24)$$



In particolare, nel caso in cui le ruote posteriori sono allineate con quelle anteriori (movimento rettilineo),  $q = 0$  e gli angoli dei bilanciari risultano pari a

$$\theta_{SX_0} = -1.26 \text{ rad} \quad | \quad \theta_{DX_0} = 4.40 \text{ rad}$$

È ora possibile rappresentare un'ulteriore coppia di angoli chiamati angoli di sterzo delle ruote. Essi sono definiti come l'inclinazione della retta normale alle ruote rispetto all'asse x mostrato in figura.



Come si può facilmente intuire, questi angoli sono proporzionali agli angoli di bilanciare, scostati di uno sfasamento pari rispettivamente a  $\theta_{SX_0}$  e a  $\theta_{DX_0}$ . Si deriva quindi

$$\theta_{ruotaSX} = \theta_{SX} - \theta_{SX_0} \quad | \quad \theta_{ruotaDX} = \theta_{DX} - \theta_{DX_0}$$

In particolare

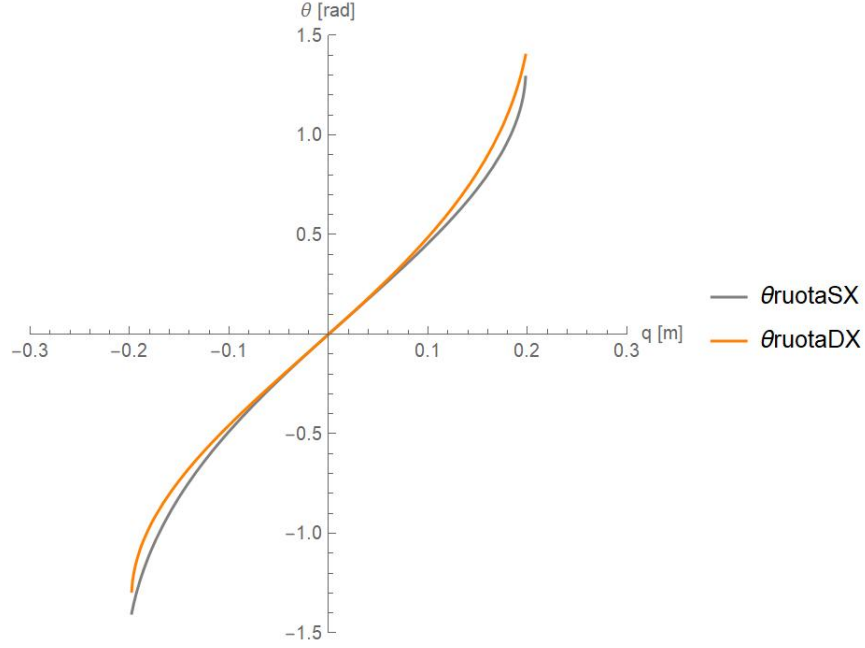
$$\theta_{ruotaSX} = \tan^{-1} \left( \frac{b}{2} - \frac{BB1}{2} + q(t), ab \right) - \tan^{-1} \left( \frac{b}{2} - \frac{BB1}{2}, ab \right) - \cos^{-1} \left( \frac{ab^2 + \left( \frac{b}{2} - \frac{BB1}{2} + q(t) \right)^2 - CB^2 + DC^2}{2DC \sqrt{ab^2 + \left( \frac{b}{2} - \frac{BB1}{2} + q(t) \right)^2}} \right) + \cos^{-1} \left( \frac{ab^2 + \left( \frac{b}{2} - \frac{BB1}{2} \right)^2 - CB^2 + DC^2}{2DC \sqrt{ab^2 + \left( \frac{b}{2} - \frac{BB1}{2} \right)^2}} \right) \quad (25)$$

$$\theta_{ruotaDX} = -\tan^{-1} \left( \frac{b}{2} - \frac{BB1}{2} - q(t), ab \right) + \tan^{-1} \left( \frac{b}{2} - \frac{BB1}{2}, ab \right) + \cos^{-1} \left( \frac{ab^2 + \left( \frac{b}{2} - \frac{BB1}{2} - q(t) \right)^2 - B1C1^2 + C1D1^2}{2C1D1 \sqrt{ab^2 + \left( \frac{b}{2} - \frac{BB1}{2} - q(t) \right)^2}} \right) - \cos^{-1} \left( \frac{ab^2 + \left( \frac{b}{2} - \frac{BB1}{2} \right)^2 - B1C1^2 + C1D1^2}{2C1D1 \sqrt{ab^2 + \left( \frac{b}{2} - \frac{BB1}{2} \right)^2}} \right) \quad (26)$$

Trovati questi due angoli si può inoltre definire un *angolo di sterzo medio*, banalmente imponendo

$$\theta_{sterzomedio} = \frac{\theta_{ruotaDX} + \theta_{ruotaSX}}{2} \quad (27)$$

Infine la rappresentazione grafica di questi angoli funzione dello scostamento della cremagliera  $q$  è



### 3.2 Calcolo del rapporto di velocità $\tau$

Il rapporto di velocità  $\tau$  è definito come rapporto tra le velocità dell'angolo di sterzo  $\theta_{ruotaSX}$  (e rispettivamente  $\theta_{ruotaDX}$ ) e dello spostamento di cremagliera  $q$ .

$$\tau_x = \frac{\dot{\omega}_x}{\dot{q}} \quad (28)$$

con  $x$  corrispondente a destro o sinistro. Derivando nel tempo l'angolo si ottiene

$$\omega_{SX} = \frac{q'(t)(B-BB1+2q(t))(4ab^2+B^2+4(B-BB1)q(t)-2BBB1+BB1^2+4CB^2-4DC^2+4q(t)^2)}{2DC(4ab^2+4(B-BB1)q(t)+(B-BB1)^2+4q(t)^2)^{3/2} \sqrt{1 - \frac{(ab^2 + \frac{1}{4}(B-BB1+2q(t))^2 - CB^2 + DC^2)^2}{4DC^2(ab^2 + \frac{1}{4}(B-BB1+2q(t))^2)}}} - \frac{abq'(t)}{ab^2 + \frac{1}{4}(B-BB1+2q(t))^2} \quad (29)$$

$$\omega_{DX} = \frac{q'(t)(B-BB1-2q(t))(4ab^2+B^2-4(B-BB1)q(t)-2BBB1+4B1C1^2+BB1^2-4C1D1^2+4q(t)^2)}{2C1D1(4ab^2-4(B-BB1)q(t)+(B-BB1)^2+4q(t)^2)^{3/2} \sqrt{1 - \frac{(ab^2 + \frac{1}{4}(-B+BB1+2q(t))^2 - B1C1^2 + C1D1^2)^2}{4C1D1^2(ab^2 + \frac{1}{4}(-B+BB1+2q(t))^2)}}} - \frac{abq'(t)}{ab^2 + \frac{1}{4}(-B+BB1+2q(t))^2} \quad (30)$$

in  $\left[\frac{rad}{s}\right]$ . I rapporti di velocità risultano quindi

$$\tau_{SX} = \frac{(B-BB1+2q(t))(4ab^2+B^2+4(B-BB1)q(t)-2BBB1+BB1^2+4CB^2-4DC^2+4q(t)^2)}{2DC(4ab^2+4(B-BB1)q(t)+(B-BB1)^2+4q(t)^2)^{3/2}} \sqrt{1 - \frac{(ab^2+\frac{1}{4}(B-BB1+2q(t))^2-CB^2+DC^2)^2}{4DC^2(ab^2+\frac{1}{4}(B-BB1+2q(t))^2)}} - \frac{ab}{ab^2+\frac{1}{4}(B-BB1+2q(t))^2} \quad (31)$$

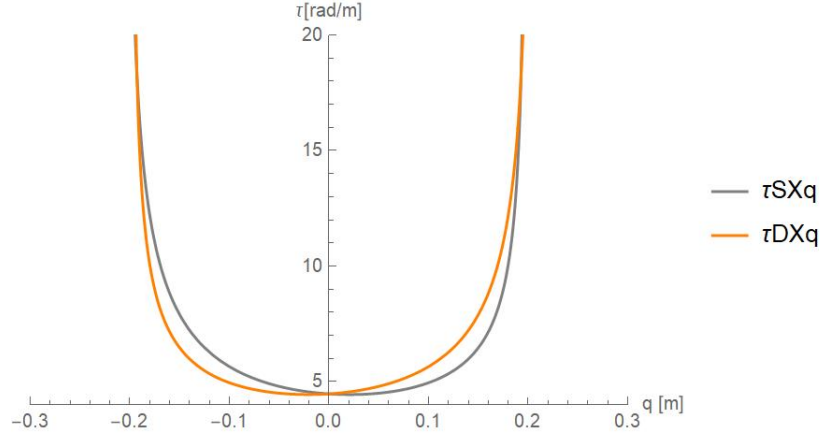
$$\tau_{DX} = \frac{(B-BB1-2q(t))(4ab^2+B^2-4(B-BB1)q(t)-2BBB1+4B1C1^2+BB1^2-4C1D1^2+4q(t)^2)}{2C1D1(4ab^2-4(B-BB1)q(t)+(B-BB1)^2+4q(t)^2)^{3/2}} \sqrt{1 - \frac{(ab^2+\frac{1}{4}(-B+BB1+2q(t))^2-B1C1^2+C1D1^2)^2}{4C1D1^2(ab^2+\frac{1}{4}(-B+BB1+2q(t))^2)}} - \frac{ab}{ab^2+\frac{1}{4}(-B+BB1+2q(t))^2} \quad (32)$$

Attenzione: in questo caso i rapporti di velocità non sono adimensionali, bensì in  $\left[\frac{rad}{m}\right]$  o  $\left[\frac{1}{m}\right]$ , essendo la velocità di sterzo in  $rad/s$  e la velocità di cremagliera in  $m/s$ . Imponendo i vincoli geometrici a questi rapporti, si ottiene

$$\tau_{SX} = \frac{2.5(2q+1.)(4q^2+4.q+1.85)}{(4q^2+4.q+1.01)^{3/2}} \sqrt{1 - \frac{6.25\left(\frac{1}{4}(2q+1.)^2-0.2075\right)^2}{\frac{1}{4}(2q+1.)^2+0.0025}} - \frac{0.05}{\frac{1}{4}(2q+1.)^2+0.0025} \quad (33)$$

$$\tau_{DX} = \frac{2.5(4q^2-4.q+1.85)(1.-2q)}{(4q(t)^2-4.q+1.01)^{3/2}} \sqrt{1 - \frac{6.25\left(\frac{1}{4}(2q-1.)^2-0.2075\right)^2}{\frac{1}{4}(2q-1.)^2+0.0025}} - \frac{0.05}{\frac{1}{4}(2q-1.)^2+0.0025} \quad (34)$$

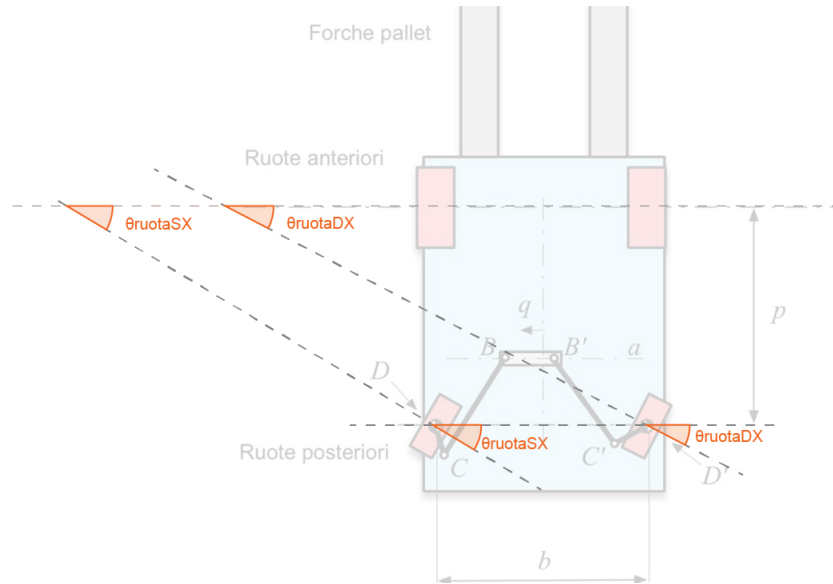
Il grafico dei rapporti di velocità in funzione dello scostamento  $q$  è quindi



### 3.3 Calcolo dei centri di istantanea rotazione

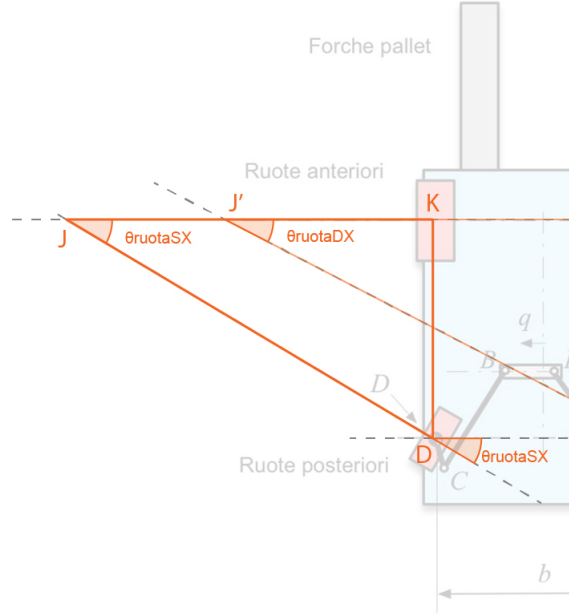
Il *centro di istantanea rotazione* per un veicolo si ottiene come intersezione tra l'asse delle ruote anteriori (posto a distanza  $p$ ) e l'asse della ruota considerata.

Se in una vettura il centro calcolato utilizzando l'asse di una ruota coincide perfettamente con quello calcolato utilizzando l'altra si osserva una pura rotazione del mezzo. Nel caso in cui i due centri non coincidano, nella sterzata oltre alla rotazione avviene anche uno strisciamento. Un esempio del primo caso è la motocicletta, del secondo un generico veicolo a 4 ruote.



Facendo riferimento alla relazione appena introdotta, si può osservare che gli angoli di sterzo precedentemente calcolati sono congruenti agli angoli individuati tra l'asse anteriore e l'asse della rispettiva ruota (*angoli corrispondenti*).

Si ricorda che la distanza tra gli assi è nota: con una semplice analisi trigonometrica si possono ottenere facilmente i *CIR*.



Si consideri il triangolo DJK. È possibile trovare la lunghezza del segmento DJ attraverso

$$r_{SX} = \frac{DK}{\sin(\theta_{\text{ruotaSX}})} \quad (35)$$

La coordinata  $x$  del centro di rotazione è quindi

$$CIR_{SX} = -r_{SX} \cos(\theta_{\text{ruotaSX}}) \quad (36)$$

In maniera del tutto analoga è possibile calcolare il centro di rotazione destro. Bisogna tener presente tuttavia che la ruota destra non è situata nell'origine del sistema di riferimento ma è posta a una distanza  $b$ . Si ottiene dunque

$$r_{DX} = \frac{D'K'}{\sin(\theta_{\text{ruotaDX}})} \quad (37)$$

La coordinata  $x$  del centro di rotazione è quindi

$$CIR_{DX} = b - r_{DX} \cos(\theta_{\text{ruotaDX}}) \quad (38)$$

Osservando entrambi i passaggi matematici, ci si accorge di avere sostanzialmente diviso la distanza  $P$  per la tangente dell'angolo considerato. Questo

metodo è stato preferito nel foglio di Mathematica in quanto provocava meno errori di approssimazione.

$$CIR_{SX} = \left[ \frac{p}{\tan(\theta_{ruotaSX})}, p \right] \mid CIR_{DX} = \left[ b + \frac{p}{\tan(\theta_{ruotaDX})}, p \right]$$

Si ottiene quindi

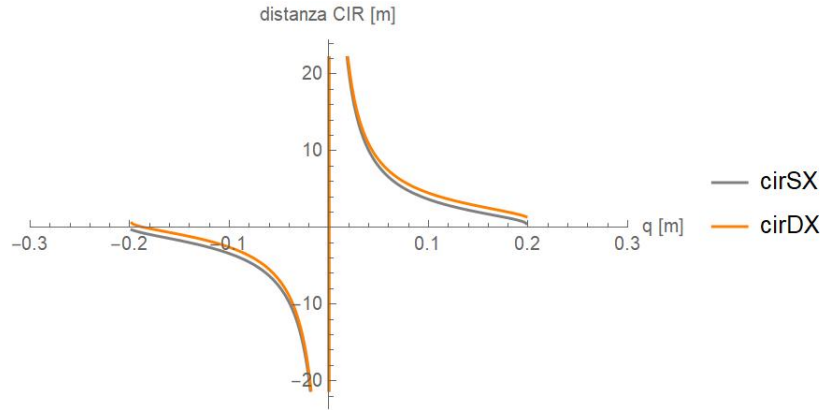
$$CIR_{SX} = \left[ p \cot \left( \tan^{-1}(B - BB1 + 2q(t), 2ab) - \tan^{-1}(B - BB1, 2ab) + \cos^{-1} \left( \frac{4ab^2 + b^2 - 2BB1 + BB1^2 - 4CB^2 + 4DC^2}{4DC\sqrt{4ab^2 + (B - BB1)^2}} \right) - \cos^{-1} \left( \frac{ab^2 + \frac{1}{4}(B - BB1 + 2q(t))^2 - CB^2 + DC^2}{2DC\sqrt{ab^2 + \frac{1}{4}(B - BB1 + 2q(t))^2}} \right) \right), p \right] \quad (39)$$

$$CIR_{DX} = \left[ B - p \cot \left( \tan^{-1}(B - BB1 - 2q(t), 2ab) - \tan^{-1}(B - BB1, 2ab) + \cos^{-1} \left( \frac{4ab^2 + b^2 - 2BB1 - BB1^2 + 4CB^2 + 4DC^2}{4DC\sqrt{4ab^2 + (B - BB1)^2}} \right) - \cos^{-1} \left( \frac{ab^2 + \frac{1}{4}(B - BB1 - 2q(t))^2 - BB1^2 + DC^2}{2DC\sqrt{ab^2 + \frac{1}{4}(B - BB1 - 2q(t))^2}} \right) \right), p \right] \quad (40)$$

In particolare per ruote allineate ( $q = 0$ ) i centri di istantanea rotazione sono

$$CIR_{SX_0} = [-6.82651 \times 10^{15}, 1.8] \mid CIR_{DX_0} = [6.82651 \times 10^{15}, 1.8]$$

Si osserva che per  $q = 0$  i  $CIR$  sono rispettivamente  $\sim -10^{15}$  e  $\sim 10^{15}$ , una rappresentazione di  $-\infty$  e  $\infty$  da parte del calcolatore. Questo conferma la scelta di considerare l'angolo di sterzo come individuato dalla normale alle ruote: per scostamento della cremagliera nullo, si hanno  $CIR$  a distanza infinita per cui movimento puramente traslatorio. Il grafico dei centri di rotazione è il seguente



Essendo i due centri di rotazione delle coppie di coordinate, la loro distanza è pari a

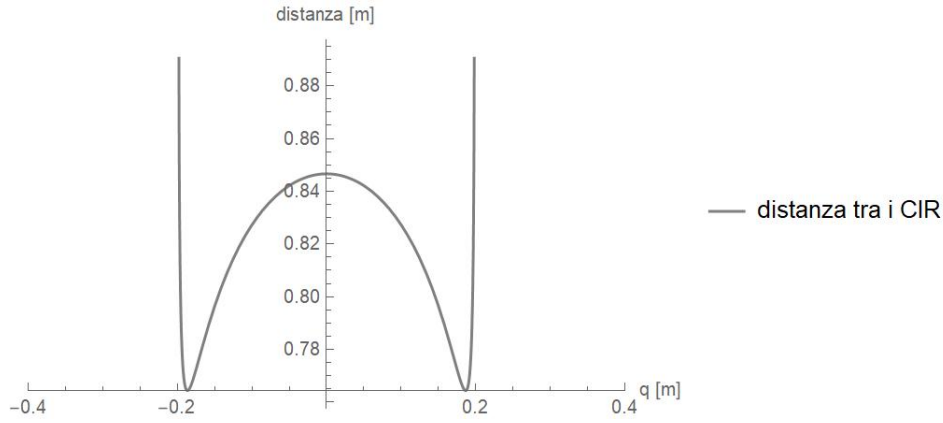
$$\text{dist} = \sqrt{(\text{cirDX}_x - \text{cirSX}_x)^2 + (\text{cirDX}_y - \text{cirSX}_y)^2} \quad (41)$$

e si ottiene

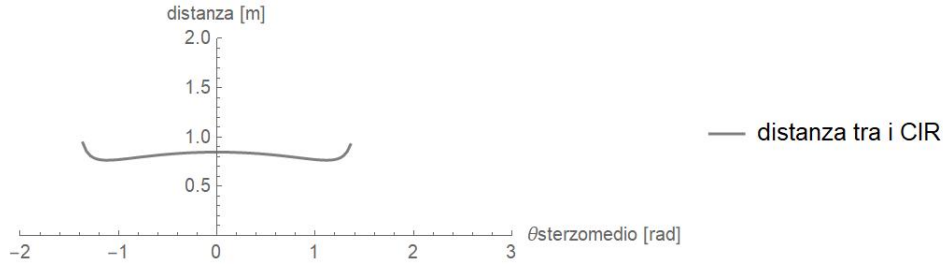
$$\text{dist} = \sqrt{\left( -\text{prior}\left( \tan^{-1}(\theta - \text{BB1} - 2q(1,2)h) - \tan^{-1}(\theta - \text{BB1}, 2)h) + \cos^{-1}\left( \frac{b^2 + b^2 - 2b^2 \cos(\theta - \text{BB1}, 2)h)}{2b^2} \right) - \cos^{-1}\left( \frac{b^2 + b^2 - 2b^2 \cos(\theta - \text{BB1}, 2)h)}{2b^2} \right) \right)^2 + \left( -\text{prior}\left( \tan^{-1}(\theta - \text{BB1} + 2q(1,2)h) - \tan^{-1}(\theta - \text{BB1}, 2)h) + \cos^{-1}\left( \frac{b^2 + b^2 - 2b^2 \cos(\theta - \text{BB1}, 2)h)}{2b^2} \right) - \cos^{-1}\left( \frac{b^2 + b^2 - 2b^2 \cos(\theta - \text{BB1}, 2)h)}{2b^2} \right) \right)^2} \quad (42)$$

Nel foglio di lavoro vengono proposte delle animazioni del meccanismo e dei centri di rotazione.

La rappresentazione grafica della distanza dei *CIR* in funzione dello scostamento  $q$  è la seguente



mentre il grafico della distanza in funzione dell'angolo di sterzo medio è



Come si può osservare, la distanza tra i due centri di istantanea rotazione non è mai nulla: come anticipato precedentemente, questo vuol dire che durante lo sterzo del veicolo non avverrà una pura rotazione ma si verificherà anche dello strisciamento. Questo è dovuto principalmente alla distanza  $b$  che vi è tra le due ruote: più aumenta, più la distanza tra i centri sarà maggiore e più aumenterà il fenomeno di strisciamento.