



## STUDIO DI UN MECCANISMO DI SPINTA

*Dipartimento di Ingegneria Industriale*  
Corso di Sistemi Meccanici e Modelli

### Homework 2

Pierfrancesco Oselin - Mat. 202199  
pierfrancesco.oselin@studenti.unitn.it

# Indice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduzione</b>   | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Analisi cinematica del meccanismo</b>                    | <b>5</b>  |
| 2.1      | Analisi di posizione . . . . .                              | 5         |
| 2.2      | Analisi di velocità . . . . .                               | 6         |
| 2.3      | Analisi di accelerazione . . . . .                          | 7         |
| <b>3</b> | <b>Equazioni di Newton - Eulero</b>                         | <b>7</b>  |
| 3.1      | Newton - Eulero per il corpo 1 . . . . .                    | 8         |
| 3.2      | Newton - Eulero per il corpo 2 . . . . .                    | 9         |
| 3.3      | Newton - Eulero per il corpo 3 . . . . .                    | 10        |
| <b>4</b> | <b>Calcolo del momento motore</b>                           | <b>10</b> |
| <b>5</b> | <b>Calcolo delle reazioni vincolari in A e in P</b>         | <b>13</b> |
| <b>6</b> | <b>Calcolo della forza di attrito e della forza normale</b> | <b>15</b> |
| 6.1      | Calcolo nell'ipotesi di vincolo bilatero . . . . .          | 15        |
| <b>7</b> | <b>Calcolo dei lavori</b>                                   | <b>18</b> |
| 7.1      | Lavoro del momento motore . . . . .                         | 18        |
| 7.2      | Lavoro della forza $F_0$ . . . . .                          | 19        |
| 7.3      | Lavoro delle forze peso . . . . .                           | 20        |
| 7.4      | Lavoro della forza di attrito . . . . .                     | 21        |
| 7.5      | Lavoro motore, resistente e dissipato . . . . .             | 21        |

# 1 Introduzione

Viene richiesto di studiare il meccanismo di spinta s centrato proposto in figura

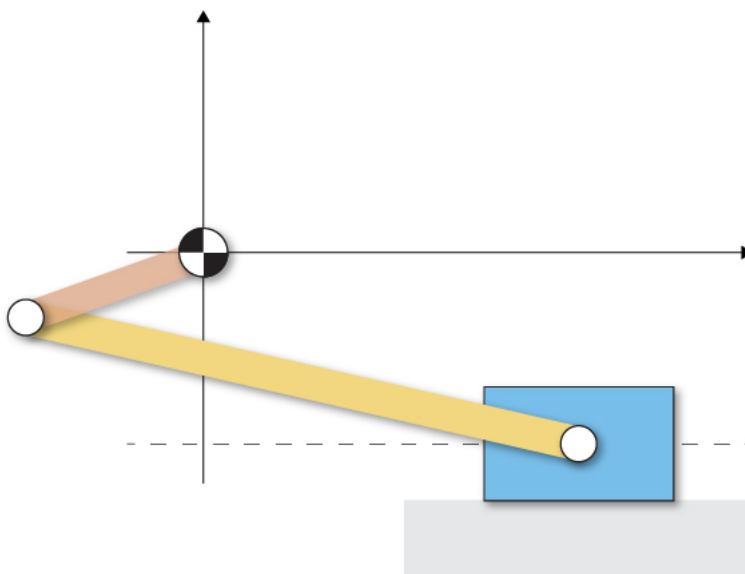


Figura 1: Meccanismo proposto

In particolare individuando

1. Le *equazioni di Newton-Eulero* per il sistema meccanico (considerando l'attrito).
2. Il *momento motore*  $M$  in funzione dell'angolo  $q$  di manovella e rappresentarlo graficamente nell'intervallo  $q \in [0, 2\pi]$ .
3. Le *reazioni vincolari* in  $A$  e  $P$  rappresentandole in funzione del tempo per un intervallo corrispondente a un intero giro della manovella.
4. La *forza normale* e la *forza di attrito* fra cilindro e pistone, durante il movimento rappresentandole in funzione del tempo per un intervallo corrispondente a un intero giro della manovella. Commentare il grafico e le discontinuità. Come andrebbe svolto l'esercizio se la guida prismatica fosse bilaterale e non ci fosse la forza  $F_0$ ?

5. Il *lavoro motore*, il *lavoro resistente* e il *lavoro dissipato* dalla macchina (per il calcolo del lavoro si assume che non ci sia alcuna forza in direzione  $x$  applicata al cedente pistone).

Come si può osservare dalla Figura 1, il meccanismo proposto è composto da 4 corpi distinti, aventi specifiche proprietà

- *Corpo 1*: manovella  $OA$  di baricentro  $G1$ , massa  $m_1$  e lunghezza  $r$
- *Corpo 2*: biella  $AP$  di baricentro  $G2$ , massa  $m_2$  e lunghezza  $L = 3r$
- *Corpo 3*: pistone  $P$  di baricentro  $G3$ , massa  $m_3$  e posto a distanza  $r$  dal vincolo a telaio
- *telaio*, che svolge il ruolo di cilindro nel sistema cilindro-pistone

Viene inoltre specificato che il sistema non è ideale, per cui è presente una forza di attrito tra il pistone e il cilindro. Infine è presente una forza esterna  $F_0$  agente perpendicolarmente al pistone stesso.

A differenza del meccanismo proposto nel primo *homework*, vengono indicati i parametri fisici del sistema da analizzare

| Parametro | Valore                   |
|-----------|--------------------------|
| $\Omega$  | $150 \text{ rad/s}$      |
| $F_0$     | $30000 \text{ N}$        |
| $r$       | $0.1 \text{ m}$          |
| $m_1$     | $1 \text{ kg}$           |
| $I_1$     | $\frac{m_1 r^2}{12}$     |
| $m_2$     | $3 \text{ kg}$           |
| $I_2$     | $\frac{1}{12} (m_2 L^2)$ |
| $m_3$     | $5 \text{ kg}$           |
| $I_3$     | $\frac{1}{10} (m_3 r^2)$ |
| $f_c$     | $\frac{1}{10}$           |
| $f_a$     | $\frac{1}{2}$            |

In maniera analoga al meccanismo studiato in precedenza, viene riportato il calcolo dei gradi di libertà attraverso la formula di Grübler

$$GdL = 3(n - 1) - 2c_1 - c_2 \quad (1)$$

con  $c_1$  numero di coppie di *classe*  $C_1$  e  $c_2$  numero di coppie di *classe*  $C_2$ . In particolare gli accoppiamenti presenti sono

- *Coppia rotooidale* tra telaio e corpo 1
- *Coppia rotooidale* tra corpo 1 e corpo 2
- *Coppia rotooidale* tra corpo 2 e corpo 3
- *Coppia prismatica* tra corpo 3 e telaio

Essendo le coppie elencate tutte di *classe*  $C_1$ , il meccanismo presenta

$$3(4 - 1) - 2 \cdot 4 - 0 = 1 \text{ } GdL$$

Il meccanismo presenta un grado di libertà: è possibile dunque esprimere tutte le grandezze dipendenti del sistema in funzione dell'unica grandezza indipendente, detta *movente*. Identificando l'angolo di manovella come tale, si può risolvere l'analisi di posizione, velocità e accelerazione del meccanismo.

**NOTA:** tutte le variabili presentate in questa discussione sono in funzione del tempo tuttavia, per alleggerire la notazione, la dipendenza verrà sottintesa.

**NOTA 2:** Il problema proposto in questo esercizio è di tipo *dinamica inversa* ossia, assegnato il moto del meccanismo, vengono indagate le cause che lo originano quali coppie e forze.

## 2 Analisi cinematica del meccanismo

### 2.1 Analisi di posizione

In maniera del tutto analoga al precedente studio, è necessario impostare l'equazione di chiusura della catena cinematica. Identificando la proiezione del punto  $P$  sull'*asse*  $x$  come punto  $C$ , la catena risulta

$$\text{OA} + \text{AP} - \text{CP} - \text{OC} = 0 \quad (2)$$

con

$$\begin{aligned} \text{OA} &= r \begin{bmatrix} \cos(q) \\ \sin(q) \end{bmatrix} & \text{AP} &= L \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix} \\ \text{CP} &= r \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \end{bmatrix} & \text{OC} &= x \begin{bmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il meccanismo si riconduce a un sistema lineare in due equazioni e tre incognite. Ricordando che  $q(t)$  è la variabile indipendente, è possibile ricavare  $x(q)$  e  $\theta(q)$

$$x \rightarrow \sqrt{L^2 - r^2 \sin^2(q) - 2r^2 \sin(q) - r^2} + r \cos(q)$$

$$\theta \rightarrow \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{L^2 - r^2 \sin^2(q) - 2r^2 \sin(q) - r^2}}{L}, \frac{r(-\sin(q) - r)}{L} \right)$$

Risolvendo il sistema si ottengono in realtà due coppie di soluzioni, tuttavia la prima viene scartata in quanto non rappresenta adeguatamente il sistema: essa infatti descrive un altro modo di assemblaggio del meccanismo.

Dalla soluzione viene inoltre eliminata la periodicità in quanto non ritenuta interessante.

## 2.2 Analisi di velocità

Derivando l'equazione di chiusura nel tempo, è possibile ottenere la catena cinematica in funzione delle velocità dei componenti del sistema. Anche in questo caso è possibile risolvere il sistema lineare, in quanto composto da tre incognite e due equazioni.

$$\begin{bmatrix} -L\dot{\theta} \sin(\theta) - r\dot{q} \sin(q) - \dot{x} \\ L\dot{\theta} \cos(\theta) + r\dot{q} \cos(q) \end{bmatrix} = 0 \quad (3)$$

Le soluzioni di  $\dot{x}(q)$  e  $\dot{\theta}(q)$  non vengono riportate in quanto molto complesse e non molto interessanti, seppur fondamentali, per lo svolgimento di questo *homework*.

## 2.3 Analisi di accelerazione

Derivando ancora una volta nel tempo l'equazione di chiusura è possibile ottenere l'equazione delle accelerazioni del sistema. Anch'esso è un sistema lineare in due equazioni e tre incognite, per cui è possibile ricavare l'accelerazione dei due cedenti in funzione di quella del movente.

$$\begin{bmatrix} -L\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - L\ddot{\theta} \sin(\theta) - r\dot{q}^2 \cos(q) - r\ddot{q} \sin(q) - \ddot{x} \\ -L\dot{\theta}^2 \sin(\theta) + L\ddot{\theta} \cos(\theta) - r\dot{q}^2 \sin(q) + r\ddot{q} \cos(q) \end{bmatrix} = 0 \quad (4)$$

Anche in questo caso non vengono riportate le soluzioni, ma rimangono consultabili nel *file Mathematica*.

## 3 Equazioni di Newton - Eulero

Lo studio dinamico dei sistemi meccanici può essere svolto utilizzando diversi metodi: se gli strumenti su cui ci si basa sono la *seconda legge di Newton* e il *momento della quantità di moto* (rispettivamente I e II equazione cardinale della dinamica) l'approccio viene definito di tipo Newtoniano.

Con questo metodo è possibile descrivere le relazioni tra le forze e i momenti agenti su un sistema, imponendo l'equilibrio alla rotazione e alla traslazione. Per un sistema piano si possono quindi identificare 3 equazioni

- Equazione di equilibrio alla traslazione lungo x
- Equazione di equilibrio alla traslazione lungo y
- Equazione di equilibrio alla rotazione lungo z

Per poter applicare queste è tuttavia necessario conoscere la posizione del baricentro e talvolta può risultare difficile ottenerla, soprattutto in sistemi composti da più corpi in movimento.

In questo caso, per semplificare i calcoli, si è preferito considerare il sistema come composto da 3 corpi distinti (il telaio viene escluso), ognuno con il proprio baricentro e le proprie equazioni di Newton-Eulero. È importante evidenziare che in questo modo vengono introdotte anche le forze interne nel bilancio per l'equilibrio alla rotazione e alla traslazione.

Per la formulazione delle *equazioni di Newton*, come anticipato, è sufficiente richiamare il *secondo principio della dinamica per i corpi rigidi*, imponendo l'equilibrio delle forze esterne lungo una direzione rispetto all'accelerazione del baricentro del sistema considerato. In questo caso

$$m_i x''_{G_i} = \sum F_{x_j} \quad (5)$$

$$m_i y''_{G_i} = \sum F_{y_j} \quad (6)$$

L'*equazione di Eulero* deriva invece dal principio di conservazione del momento della quantità di moto il quale, per un sistema baricentrico assume la forma

$$I_i \theta''_i = \sum M_j \quad (7)$$

Si procede quindi all'analisi dei tre corpi.

### 3.1 Newton - Eulero per il corpo 1

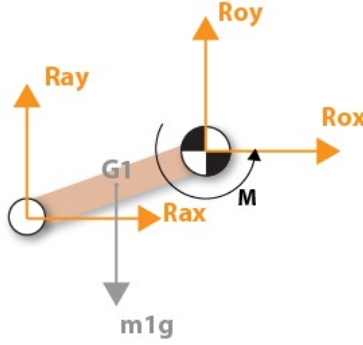


Figura 2: Schema di corpo libero per il corpo 1

Le tre equazioni si riducono a

$$m_1 x''_{G_1} = R_{ax} + R_{ox}$$

$$m_1 y''_{G_1} = R_{ay} + R_{oy} - m_1 g$$

$$I_1 \frac{d^2 \theta_1}{dt^2} = M + M R_a G_1 + M R_o G_1$$



con  $M$  *momento motore* del meccanismo e  $MR_a G_1$  e  $MR_o G_1$  momenti dovuti alle forze interne  $\vec{R}_a$  e  $\vec{R}_o$  rispetto al polo  $G_1$ . Questi sono ottenuti banalmente come

$$MR_o G_1 = G_1 \vec{O} \times \vec{R}_o$$

$$MR_a G_1 = G_1 \vec{A} \times \vec{R}_a$$

NOTA: non viene riportata la notazione di vettore libero per i momenti in quanto, essendo il meccanismo oggetto di studio un meccanismo piano, i momenti hanno solo componente lungo la direzione  $z$ . Questo per alleggerire la notazione.

### 3.2 Newton - Eulero per il corpo 2

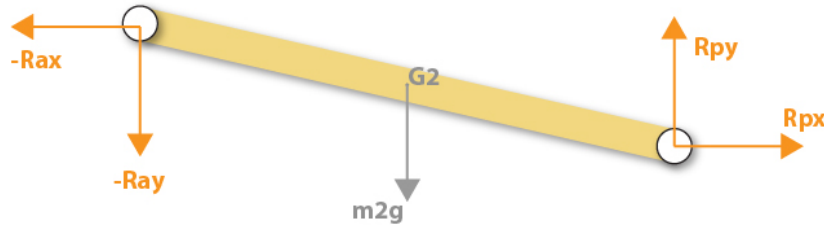


Figura 3: Schema di corpo libero per il corpo 2

Le tre equazioni si riconducono a

$$m_2 x''_{G_2} = R_{p_x} - R_{a_x}$$

$$m_2 y''_{G_2} = -R_{a_y} + R_{p_y} - m_2 g$$

$$I_2 \frac{d^2 \theta_2}{dt^2} = MR_a G_2 + MR_p G_2$$

con  $MR_a G_2$  e  $MR_p G_2$  momenti dovuti alle forze interne  $\vec{R}_a$  e  $\vec{R}_p$  rispetto al polo  $G_2$ . Questi sono ottenuti banalmente come

$$MR_a G_2 = G_2 \vec{A} \times \vec{R}_a$$

$$MR_p G_2 = G_2 \vec{P} \times \vec{R}_p$$

### 3.3 Newton - Eulero per il corpo 3

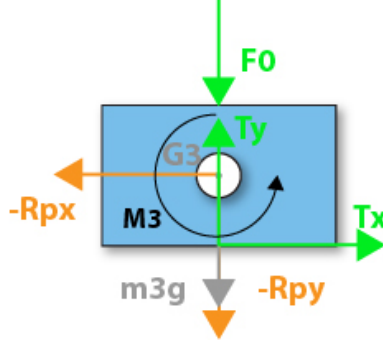


Figura 4: Schema di corpo libero per il corpo 3

Le tre equazioni si riconducono a

$$m_3 x''_{G_3} = T_x - R_{p_x}$$

$$m_3 y''_{G_3} = T_y - R_{p_y} - F_0 - m_3 g$$

$$I_3 \frac{d^2 \theta_3}{dt^2} = M_3 + MT_x G_3$$

con  $M_3$  momento dovuto all'accoppiamento prismatico con il telaio. Esso tuttavia avrà un valore massimo, dovuto al fatto che  $\vec{F}_0$  può non essere sufficiente a mantenere il corpo 3 ancorato alla guida: in tal caso il pistone potrà anche ruotare durante il suo movimento.  $MT_x G_3$  è invece il momento causato dalla forza d'attrito  $\vec{T}_x$  rispetto al polo  $G_2$ . Quest'ultimo è ottenuto banalmente come

$$MT_x G_3 = \vec{h} \times \vec{T}_x$$

con  $|\vec{h}|$  semialtezza del pistone.

## 4 Calcolo del momento motore

Il calcolo del momento motore può essere effettuato attraverso la risoluzione del sistema lineare. Esso tuttavia è composto da 9 equazioni (tre sistemi di N-E) e 10 incognite, che sono

$$M \mid R_{ox} \mid R_{ay} \mid R_{ax} \mid R_{ay} \mid R_{px} \mid R_{py} \mid M_3 \mid T_x \mid T_y$$

e di primo impatto risulta essere indeterminato. Tuttavia è possibile fare la seguente osservazione

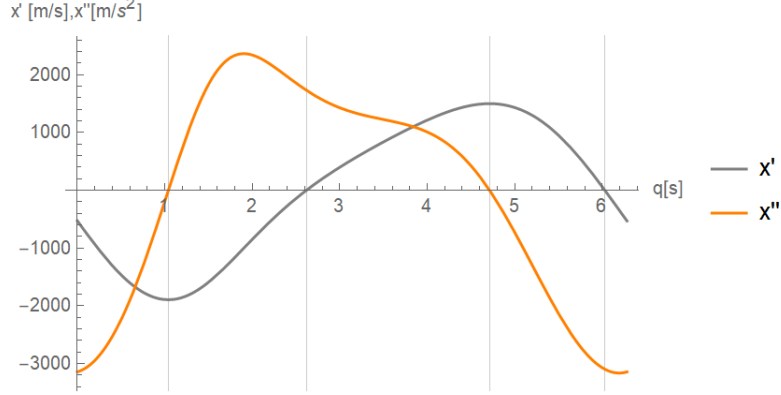


Figura 5: Rappresentazione di velocità e accelerazione del corpo 3

Nel grafico qui riportato (non in scala) si osservano la velocità e l'accelerazione del pistone in funzione dell'angolo di manovella (movente). Si può osservare che nei punti a velocità nulla l'accelerazione è non nulla e viceversa. È corretto assumere quindi che il pistone non ricade mai in situazioni di attrito statico e che le condizioni di moto incipiente precedono sempre condizioni cinetiche.

È inoltre importante ricordare che nei problemi di dinamica inversa è il moto ad essere assegnato e le forze dipendono da essa. In caso contrario, ossia in dinamica diretta, andrebbe discussa e verificata un'eventuale transazione tra condizione cinetica e di aderenza.

Se si avessero ancora dubbi su ciò bisogna ricordare che il coefficiente di attrito varia in funzione del tempo di contatto con una superficie: nei punti morti il pistone ha  $v = \dot{x} = 0$  per solamente un istante ma essendo l'accelerazione non nulla  $f_c$  non ha modo di variare significativamente.

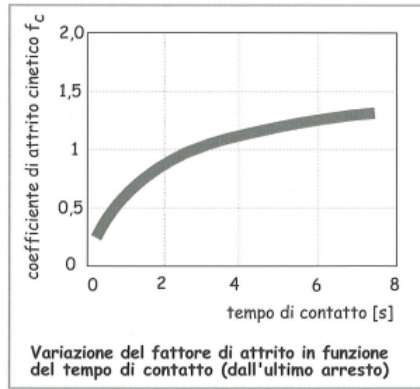


Figura 6: Dipendenza di un generico coefficiente di attrito dal tempo di contatto con una superficie

É quindi possibile identificare la forza di attrito  $\vec{T}_x$  il cui modulo è pari a

$$T_x = -f_c \text{Sign}(\dot{x}) T_y \quad (8)$$

Introducendo quindi questa relazione si riduce il sistema a 9 incognite e risulta perciò completamente risolvibile.

Nel file di lavoro di Mathematica le equazioni di Newton-Eulero sono state risolte utilizzando la funzione *Solve*, che ha permesso di individuare 9 soluzioni, tra cui quella del momento motore.

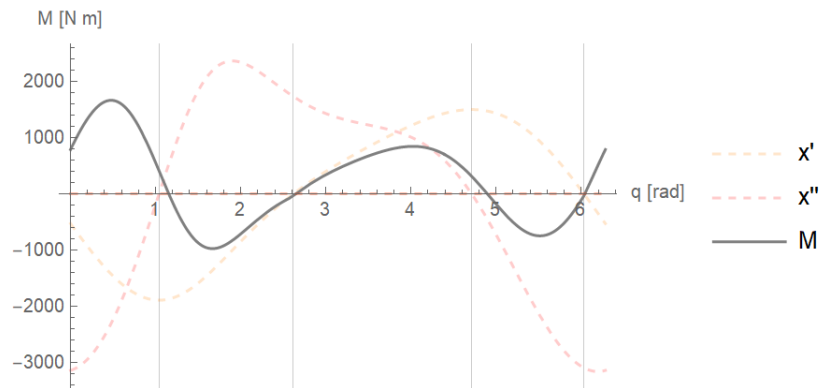


Figura 7: Rappresentazione del momento motore

Osservando il grafico si può notare che la curva non è simmetrica lungo un intero giro di manovella: questo è dovuto a due fattori che caratterizzano

il meccanismo. In primo luogo essendo il meccanismo sцентриato, e quindi a rapido ritorno (come dimostrato nel precedente homework), il momento richiesto nella fase di ritorno è minore rispetto a quello necessario per la fase di spinta.

La presenza dell'attrito inoltre fa in modo che il momento non si annulli nei punti a velocità ed accelerazione nulla: si ha quindi una lieve distensione della curva verso destra.

Quest'ultimo inoltre deforma ulteriormente la curva in quanto l'attrito, opponendosi al moto, contribuisce alla riduzione di velocità del pistone fino al raggiungimento di un punto morto: il momento richiesto nella fase frenante è quindi minore rispetto al caso ideale, privo di attrito.

## 5 Calcolo delle reazioni vincolari in A e in P

Le reazioni vincolari in  $A$  e in  $P$  sono frutto della risoluzione del sistema di equazioni. In particolare da esso sono state ricavate  $R_{a_x}$ ,  $R_{a_y}$ ,  $R_{p_x}$  e  $R_{p_y}$ . Per rispettare a pieno la richiesta del problema, vengono calcolati i moduli delle reazioni  $R_a$  e  $R_p$  attraverso

$$R_a = \sqrt{R_{a_x}^2 + R_{a_y}^2} \quad (9)$$

$$R_p = \sqrt{R_{p_x}^2 + R_{p_y}^2} \quad (10)$$

La consegna richiede inoltre una rappresentazione in funzione del tempo e non più in funzione dell'angolo di manovella. É necessario quindi definire esplicitamente quest'ultimo in funzione del tempo. Il meccanismo, lavorando a velocità angolare  $\omega$  costante, permette la seguente formulazione

$$q = \omega t = \Omega t \quad (11)$$

É quindi possibile rappresentare le reazioni interne richieste

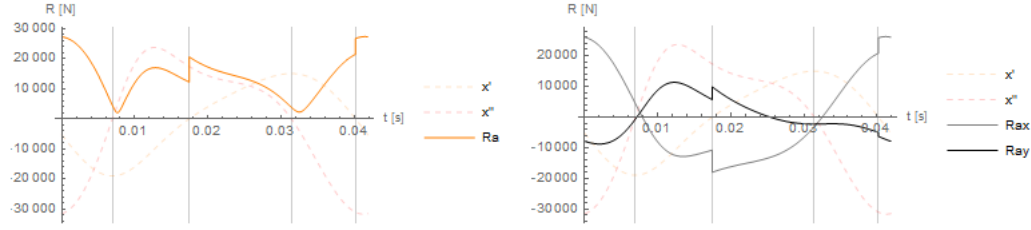


Figura 8: Rappresentazione della reazione vincolare  $R_a$  e delle sue componenti

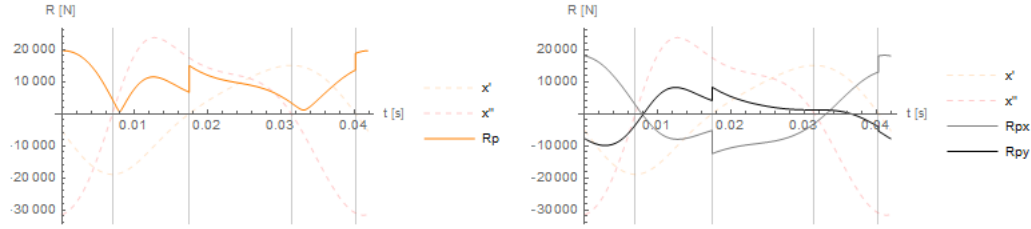


Figura 9: Rappresentazione della reazione vincolare  $R_p$  e delle sue componenti

Come è possibile notare, entrambe le coppie di grafici riportati (sia il modulo, sia le singole componenti delle due reazioni vincolari) presentano delle discontinuità. Questo è dovuto al fatto che nella definizione di attrito  $T_x$  è stata introdotta una dipendenza dal segno della velocità lineare  $\dot{x}$  del pistone. Questo comporta che per una variazione del segno della velocità avvenga un'inversione della forza stessa. Tuttavia questo non influisce solamente sulla forza di attrito, ma si ripercuote sull'intera risoluzione del sistema. Sul foglio di lavoro di Mathematica è possibile osservare la definizione completa di  $R_a$  e  $R_p$ : in esse è presente una dipendenza dal segno di una funzione molto complessa, correlata al segno della velocità.

Questo giustifica l'improvvisa discontinuità delle due forze nel grafico. Come anticipato precedentemente, è stato riportato anche il grafico della velocità del pistone: è facilmente osservabile che le discontinuità appena discusse corrispondano al passaggio da una velocità negativa a una positiva (in particolare corrispondono ai punti morti del meccanismo) e quindi a un'inversione del moto. Questo conferma la spiegazione appena illustrata.

## 6 Calcolo della forza di attrito e della forza normale

La forza di attrito e la forza normale agenti sul pistone sono stati ottenuti risolvendo il sistema di equazioni di Newton-Eulero. Vengono dunque riportate in scala in funzione del tempo. Nel grafico viene inoltre riportata la velocità del pistone stesso (non in scala, bensì maggiorata di un fattore 1000 per renderla graficamente confrontabile con le reazioni richieste).

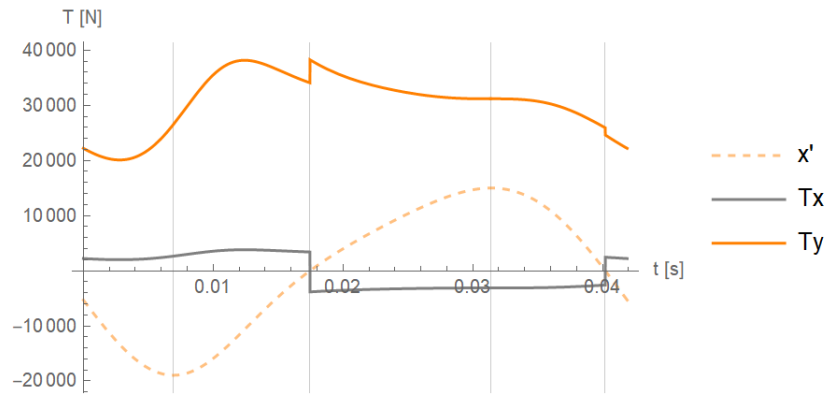


Figura 10: Rappresentazione della reazione normale e della forza di attrito

Come illustrato precedentemente, l'inversione della velocità del pistone fa variare il verso della forza di attrito, che tuttavia influenza le altre grandezze, tra cui la reazione normale.

Sul foglio di lavoro di Mathematica è possibile osservare la definizione completa di  $T_x$  e  $T_y$ : in esse è presente una dipendenza dal segno di una funzione molto complessa, correlata al segno della velocità.

È importante notare che  $T_y$  risulta sempre positiva: questo conferma l'ipotesi di vincolo unilatero. Per mantenere l'equilibrio lungo la direzione  $y$  non è infatti necessario che  $T_y$  si annulli o inverta il proprio verso.

### 6.1 Calcolo nell'ipotesi di vincolo bilatero

Nell'ipotesi che il vincolo prismatico presente tra il corpo 3 e il telaio sia di tipo bilatero e che la forza esterna  $\vec{F}_0$  sia nulla, l'analisi dinamica del meccanismo differisce leggermente.

In primo luogo a variare è la definizione di forza di attrito, che seppur continuando a descrivere una condizione cinetica, cambia

$$T_{x_{new}} = -fc \left| \vec{T}_y \right| \text{Sign}(\dot{x}) \quad (12)$$

Questo avviene perché in un vincolo bilatero la reazione normale presente tra i due corpi può variare in verso, in quanto il punto di contatto tra essi può variare (il telaio è presente anche sopra il pistone, infatti costituisce il cilindro associato). In particolare, riferendosi al baricentro  $G_3$  del pistone, il punto di contatto con il telaio può avvenire sopra o sotto di esso a distanza  $h$  semialtezza del cilindro.

La forza di attrito tuttavia dipende solamente dal segno della velocità: essa infatti si oppone al movimento del corpo. Non dipende perciò dal verso della reazione normale, bensì dal suo modulo. A differenza del caso unilatero è quindi necessario specificarlo, introducendo il modulo del vettore  $\vec{T}_y$ .

Cambiando il punto di contatto tra il corpo 3 e il telaio varia anche il punto di applicazione della forza di attrito, la quale avrà quindi origine al di sopra o sotto del baricentro. Grazie a questo il momento generato dalla forza di attrito cambierà verso a seconda del punto di applicazione. In particolare, variando il verso del braccio

$$\begin{aligned} MG_3 T_{x_{new}} &= -h \text{Sign}(T_y) T_{x_{new}} \\ MG_3 T_{x_{new}} &= h \text{Sign}(T_y) fc \left| \vec{T}_y \right| \text{Sign}(\dot{x}) \\ MG_3 T_{x_{new}} &= h fc \vec{T}_y \text{Sign}(\dot{x}) \end{aligned} \quad (13)$$

Come è possibile osservare, sostituendo la definizione di  $T_{x_{new}}$  all'interno del momento, si ha che il prodotto tra  $\text{Sign}(T_y)$  e  $\left| \vec{T}_y \right|$  corrisponde esattamente a  $\vec{T}_y$ : il momento rimane quindi invariato.

Le equazioni di Newton - Eulero per i corpi 1 e 2 rimangono pertanto invariate, mentre quelle per il corpo 3 diventano

$$\begin{aligned} m_3 x''_{G_3} &= T_{x_{new}} - Rpx \\ m_3 y''_{G_3} &= T_y - R_{py} - m_3 g \end{aligned}$$



$$I_3 \frac{d\theta_3}{dt^2} = M_3 + MG_3 T_{x_{new}}$$

Risolvere questo sistema è molto complicato: il calcolatore ci impiega diverso tempo per trovare le soluzioni richieste. È possibile tuttavia ricercare una soluzione numerica (*NSolve*) al fine di ridurre l'attesa (fino al 50%), ottenendo una soluzione approssimata

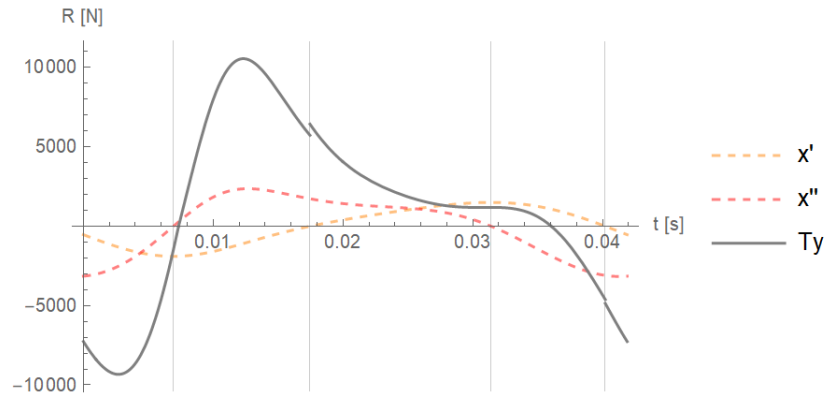


Figura 11: Rappresentazione della forza normale nell'ipotesi di vincolo bilatero

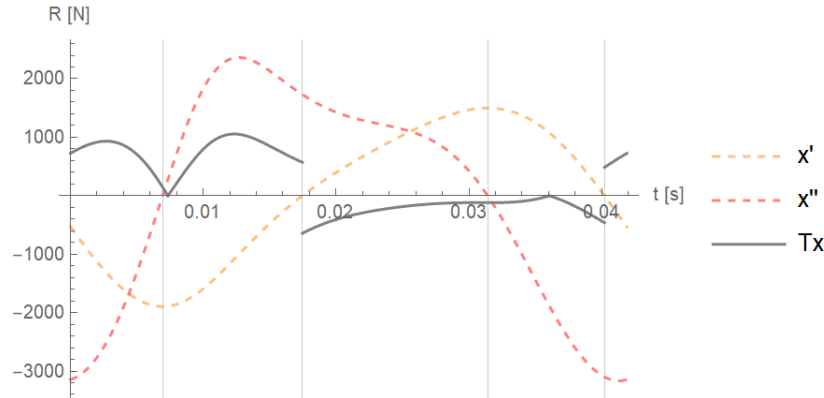


Figura 12: Rappresentazione della forza di attrito nell'ipotesi di vincolo bilatero

In entrambi i grafici si possono osservare delle discontinuità in corrispondenza degli zeri delle curve di velocità: come spiegato precedentemente, con

il variare del verso del moto cambiano le espressioni delle grandezze, in quanto anche nel caso di vincolo bilatero permane la dipendenza dal segno della velocità del pistone.

Seppur banale è importante notare che la reazione vincolare assume valori negativi a differenza del caso unilatero: l'ipotesi di vincolo bilatero è stata quindi confermata.

## 7 Calcolo dei lavori

Viene infine richiesto di calcolare il lavoro meccanico, il lavoro resistente e il lavoro dissipato durante il movimento del meccanismo.

In generale, l'equazione dell'energia per un sistema meccanico è

$$P_m + P_{res} + P_{diss} = \frac{d}{dt} (E_{cin} + E_{pot}) \quad (14)$$

In particolare, se un meccanismo opera in regime periodico (come in questo caso) si ha che

$$\int_0^{T^*} P_m + P_{res} + P_{diss} dt = \int_0^{T^*} \frac{d}{dt} (E_{cin} + E_{pot}) dt = 0 \quad (15)$$

Riscrivibile anche come

$$L_m + L_{res} + L_{diss} = 0 \quad (16)$$

In questo sistema meccanico le forze e i momenti che compiono lavoro sono la *forza di attrito*, la *forza peso* dei corpi 1 e 2 e il *momento motore*.

### 7.1 Lavoro del momento motore

Ricordando la definizione di potenza

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = \vec{T} \cdot \vec{\omega} \quad (17)$$

è intuitivo calcolare la potenza del momento motore moltiplicando la coppia ( $\vec{M}$ ) per la velocità angolare ( $\vec{\Omega}$ ). Si ottiene quindi

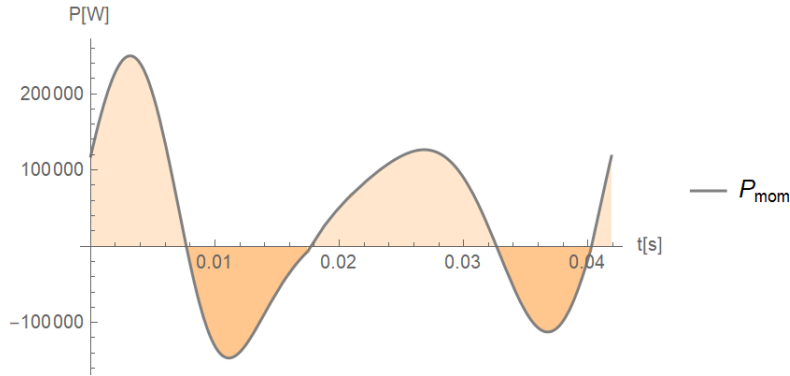


Figura 13: Curva di potenza del momento motore. L'area corrisponde al lavoro svolto

Come si può osservare dal grafico il momento motore produce una potenza negativa nelle fasi di decelerazione, in modo da mantenere  $\omega = cost$ . Essa quindi si oppone al moto in alcuni tratti: il lavoro prodotto per cui non è esclusivamente motore ma a tratti resistente.

Come anticipato nell'equazione (15), il lavoro è ottenuto integrando la potenza in un intervallo di tempo. Esso quindi risulta

$$L_{mot} = \int_0^{t^*} M \Omega dt = \int_0^{t^*} M \frac{d\theta}{dt} dt = \int_0^{\theta^*} M d\theta \quad (18)$$

In questo caso il calcolo dell'integrale indefinito non è stato possibile in quanto l'espressione del momento motore era troppo complessa. É stata quindi individuata un'approssimazione numerica.

## 7.2 Lavoro della forza $F_0$

Ricordando la definizione di lavoro

$$L = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad (19)$$

è immediato affermare che il lavoro resistente compiuto dalla forza esterna  $\vec{F}_0$  è nullo in quanto, il prodotto scalare con il vettore spostamento risulta pari a zero, infatti i due vettori sono disposti ortogonalmente.

### 7.3 Lavoro delle forze peso

A differenza del caso precedente, risultano non nulli i lavori compiuti dalle forze peso del *corpo* 1 e del *corpo* 2. Anch'essi possono essere calcolati come integrazione nel tempo della potenza a essi associata. In particolare

$$P_{peso1} = -m_1 g \frac{dy_{G1}}{dt} \quad (20)$$

$$P_{peso2} = -m_2 g \frac{dy_{G2}}{dt} \quad (21)$$

Il peso del *corpo* 3 invece non produce lavoro, in quanto  $y_{G3} = \text{cost.}$  Le potenze appena ricavate sono quindi

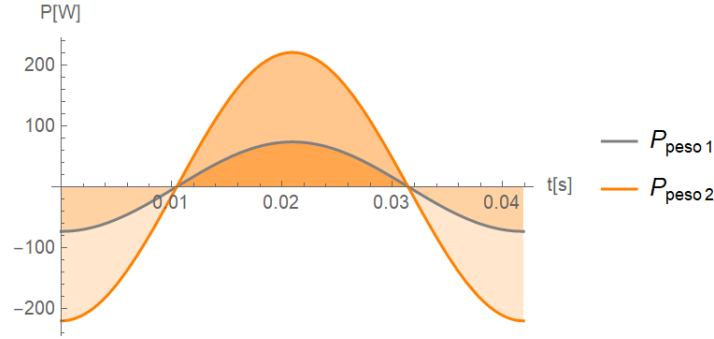


Figura 14: Curva delle potenze generate dalle forze peso. L'area corrisponde al lavoro svolto

Osservando il grafico si può notare che le potenze hanno andamento cosinusoidale. Questo è corretto in quanto lungo un intero giro di manovella i baricentri dei corpi oscillano in direzione verticale. Per comprendere meglio l'oscillazione, basta considerare i baricentri come punti che descrivono una circonferenza, e la coordinata  $y$  come proiezione di questi sull'asse verticale.

È importante notare che le forze peso producono potenza (e quindi lavoro) positiva in alcuni tratti: questo è dovuto al fatto che queste forze contribuiscono al movimento del meccanismo, facilitandolo, nei tratti in cui la velocità è concorde con le forze stesse. In questi tratti si compirà quindi lavoro motore.

$$L_{peso1} = \int_0^{t^*} -m_1 g \frac{dy_{G1}}{dt} dt = \int_0^{y^*} -m_1 g dy_{G1} \quad (22)$$

$$L_{peso_2} = \int_0^{t^*} -m_2 g \frac{dy_{G_2}}{dt} dt = \int_0^{y^*} -m_2 g dy_{G_2} \quad (23)$$

## 7.4 Lavoro della forza di attrito

Il lavoro della forza di attrito è ottenibile sempre attraverso l'integrazione nel tempo della potenza da esso prodotta

$$P_{att} = T_x \dot{x} = T_x \frac{dx}{dt} \quad (24)$$

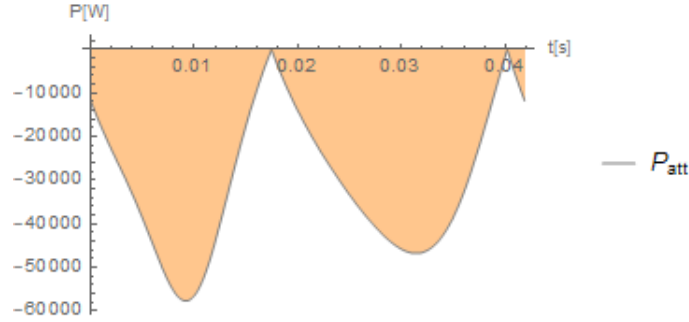


Figura 15: Curva di potenza di attrito. L'area corrisponde al lavoro svolto

Si noti che la potenza dissipata è sempre negativa durante il movimento del sistema. Questo è corretto in quanto la potenza (e quindi l'energia) uscente da un sistema è per convenzione negativa. In particolare la forza di attrito non contribuisce all'aumento dell'energia del sistema in analisi ma solo a una sua diminuzione, per cui il grafico risulta corretto.

Il lavoro svolto è quindi

$$L_{att} = \int_0^{t^*} T_x \dot{x} dt = \int_0^{t^*} T_x \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{x^*} T_x dx \quad (25)$$

## 7.5 Lavoro motore, resistente e dissipato

È stato detto precedentemente che i lavori prodotti dalle forze e dal momento non hanno un unico ruolo durante il movimento del meccanismo. È quindi

bene richiamare le definizioni di momento motore, resistente e dissipato affinché si individuino le corrette componenti.

**Lavoro motore:** è il lavoro prodotto da forze che favoriscono il moto. Essendo applicato sul sistema, risulta sempre positivo

**Lavoro resistente:** è il lavoro generato da forze che si oppongono al moto, quali forze peso, momenti frenanti etc. Essendo in opposizione al moto, risulta sempre negativo

**Lavoro dissipato:** è il lavoro prodotto da forze dissipative, quali le forze di attrito. Risulta sempre negativo

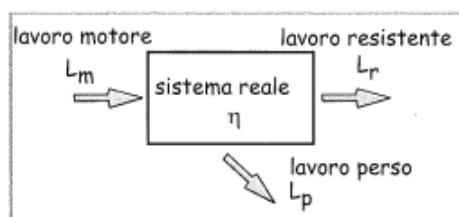


Figura 16: Convenzione segno dei lavori agenti su un sistema

Il lavoro motore è quindi dato dal contributo del momento motore quando esso è positivo e dal contributo delle forze peso quando esse producono lavoro positivo. In questo caso è stato calcolato come integrazione nel tempo della potenza motrice.

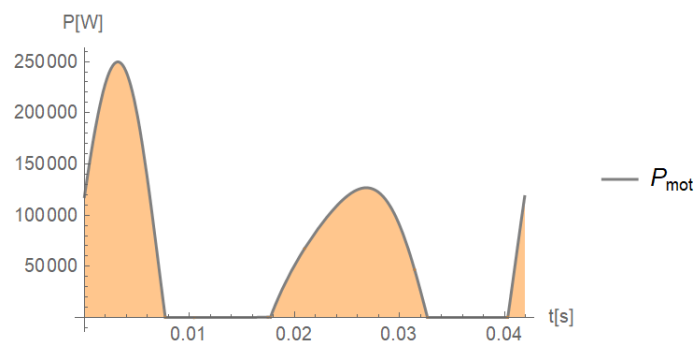


Figura 17: Potenza motore complessiva. L'area racchiusa corrisponde al lavoro prodotto

Il lavoro resistente è dato dal contributo del momento motore e delle forze peso quando essi hanno comportamento resistivo, ossia nei tratti a potenza negativa

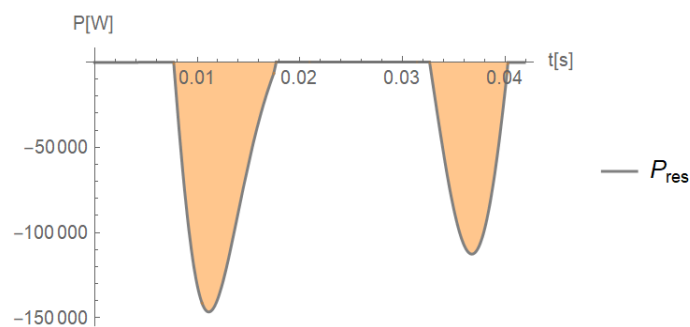


Figura 18: Potenza resistente complessiva. L'area racchiusa corrisponde al lavoro prodotto

Il lavoro dissipato è dato dal contributo delle forze dissipative. In questo caso combacia quindi con il lavoro svolto dalla forza di attrito  $T_x$

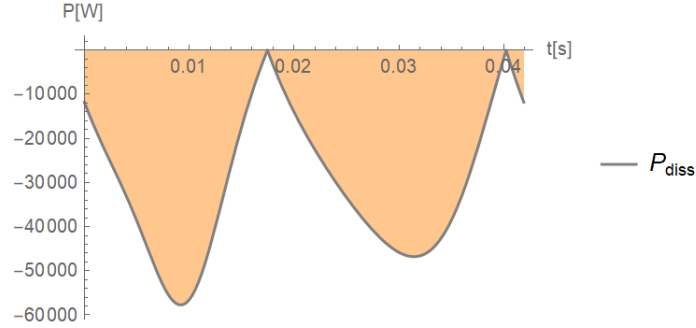


Figura 19: Potenza dissipata complessiva. L'area racchiusa corrisponde al lavoro prodotto

Dall'equazione (14) si possono inoltre verificare due aspetti

- La derivata dell'energia cinetica+potenziale è pari alla somma delle 3 potenze in qualsiasi istante di tempo
- La somma dei lavori in  $k$  periodi è zero

Per verificare il primo punto è innanzitutto necessario calcolare l'energia cinetica e potenziale del meccanismo. Si noti che nell'equazione  $E_{cin}$  corrisponde all' *energia cinetica totale*, data dalla somma dell'energia cinetica *traslazionale* e dall'energia cinetica *rotazionale*

$$E_{cin} = E_{cin tr} + E_{cin rot} \quad (26)$$

con

$$E_{cin tr} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_{G_1}^2 + \dot{y}_{G_1}^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_{G_2}^2 + \dot{y}_{G_2}^2) + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_{G_3}^2 + \dot{y}_{G_3}^2) \quad (27)$$

$$E_{cin rot} = \frac{1}{2} I_1 (\dot{q}^2) + \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}^2) \quad (28)$$

Avendo considerato il contributo dato dalle forze peso nel calcolo dei lavori, l'energia potenziale risulta nulla

$$E_{pot} = 0 J \quad (29)$$



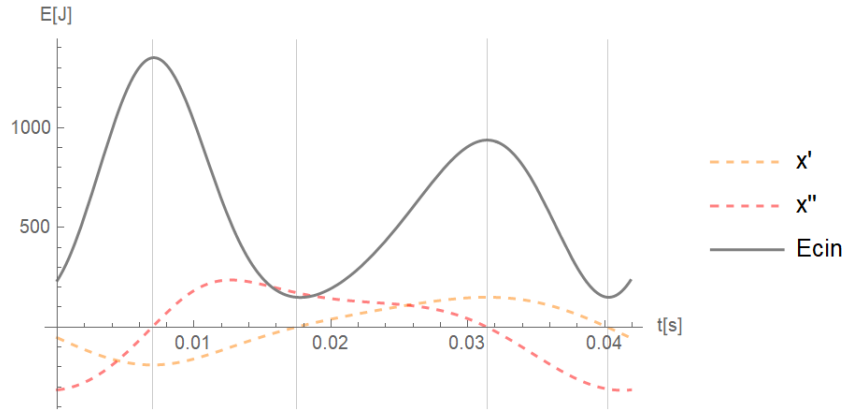


Figura 20: Energia totale del sistema. In questo caso coincide con quella cinetica

Si può notare che l'energia totale, coincidendo con quella cinetica, raggiunge il suo massimo nei punti ad accelerazione nulla, infatti essi corrispondono ai punti a velocità massima (in modulo). I minimi della curva sono invece raggiunti nei punti morti, dove la velocità è nulla.

L'andamento periodico dell'energia conferma inoltre che la macchina lavora in regime periodico.

La *potenza totale* è invece data dalla somma delle tre potenze precedentemente discusse

$$P_{tot} = P_{mot} + P_{res} + P_{diss} \quad (30)$$

Derivando infine l'energia cinetica si ottiene

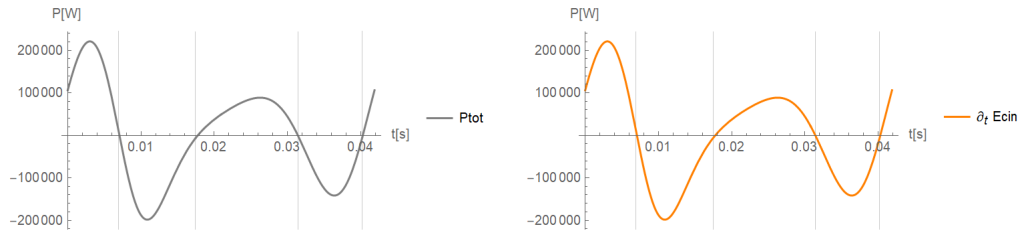


Figura 21: Rappresentazione della potenza totale e della derivata dell'energia cinetica

Le due curve sono identiche in ogni istante di tempo, per cui l'equazione dell'energia, e quindi il primo punto, sono soddisfatti.

Rimane solamente da verificare che la somma dei tre lavori integrati su un intero periodo faccia complessivamente zero. Si procede quindi al calcolo numerico

$$L_{mot} = \int_0^{T^*} P_{mot} dt = 2675.61 J$$

$$L_{res} = \int_0^{T^*} P_{res} dt = -1392.8 J$$

$$L_{diss} = \int_0^{x^*} T_x dx = -1282.81 J$$

NOTA: nel calcolo dei lavori sarebbe stato lecito non considerare il contributo dato dalle forze peso. Il meccanismo proposto infatti, dopo un intero giro di manovella, ritorna esattamente nella posizione iniziale. Le forze peso sono di tipo conservativo, ovvero il lavoro da esse prodotto dipende solamente dagli estremi del percorso di integrazione: se questi sono uguali (moti periodici, come in questo caso) il lavoro da esse prodotto è nullo.

$$\Delta L = L_m + L_{res} + L_{diss} = 2675.61 - 1392.8 - 1282.81 \sim 0.0006 J$$

Il risultato è valido e approssimabile a zero: si ha infatti una differenza alla quarta cifra decimale, attribuibile agli errori dovuti all'integrazione numerica (*NIntegrate*). L'equazione dell'energia è nuovamente soddisfatta.

**EXTRA:** Essendo il meccanismo in regime periodico, è possibile calcolare il rendimento su un periodo  $T$

$$\eta = \frac{|L_{res}|}{L_{mot}} \sim 0.52 \quad (31)$$

È stato detto che le forze peso sono di tipo conservativo, per cui dopo un intero giro di manovella il lavoro da esse prodotto è nullo: questo non dovrebbe influenzare il rendimento. Il calcolo del rendimento senza considerare il loro contributo porta a

$$\eta = \frac{|L_{resNOpeso}|}{L_{motNOpeso}} = \frac{|L_{mom_{neg}}|}{L_{mom_{pos}}} \sim 0.519 \quad (32)$$

La conservatività delle forze è quindi confermata: la piccola differenza tra i due rendimenti è attribuibile all'integrazione approssimata (*NIntegrate*) dei lavori dopo un periodo  $T$ .

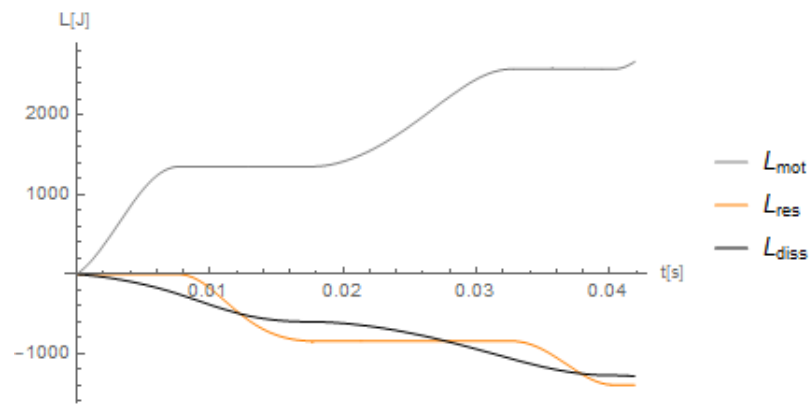


Figura 22: Lavori compiuti in un periodo

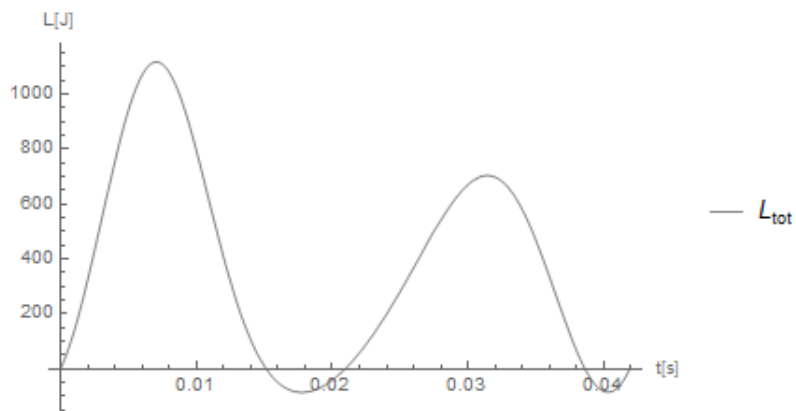


Figura 23: Lavoro totale in un periodo