Aufgabenblatt 1 - Aufgabe 1

20. Oktober 2014

(a)

$$\frac{1}{n} \prec 1 \prec \log\log n \prec \log n \asymp \log n^3 \prec \log n^{\log n} \prec n \log n$$
$$\text{und} \quad n \log n \prec n^{0.01} \prec \sqrt{n} \prec n^8 \prec 2^n \prec 8^n \prec n^n \prec n!$$

<u>Beweise:</u>
Zunächst gilt es zu beweisen, dass

$$\frac{1}{n} \in o(1) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{1} = 0$$

gilt. Der Beweis ist trivial, denn es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)}{1}$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \square$$

und daraus folgt, dass $\frac{1}{n} \prec 1$ gilt.
Analog dazu sind die folgenden Beweise.

<u>$1 \prec \log\log n$:</u>

$$\frac{1}{\log\log n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow 1 \prec \log\log n \qquad \square$$

<u>$\log\log n \prec \log n$:</u>
Hier muss noch ein Beweis rein.

<u>$\log n \asymp \log n^3$:</u>
$\log n \in \mathcal{O}(\log n^3)$ gilt genau dann, wenn $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log n^3} < \infty$ gilt. Für den Grenzwert von $\frac{\log n}{\log n^3}$ für $n \to \infty$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log n^3} = \frac{\log n}{3 \cdot \log n} = \frac{1}{3}$$

woraus folgt, dass die Behauptung wahr ist.

$\underline{\log n^3 \prec \log n^{\log n}}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\log n^3}{\log n^{\log n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot \log n}{\log n \cdot \log n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\log n} \\
&= 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

$\underline{\log n^{\log n} \prec n \log n}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\log n^{\log n}}{n \log n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log n \cdot \log n}{n \log n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} \qquad mit\ l'Hospital \\
&= 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

$\underline{n \log n \prec n^{0.01}}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{n^{0.01}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n \log n}{} l'Hospital \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^{0.99}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^{0.99}}{n} \\
&= 0 \qquad \square
\end{aligned}$$

$\underline{n^{0.01} \prec n^{\frac{1}{2}}}$:
Da Polynome mit einem höheren Grad immer schneller Wachsen, als Polynome mit einem niedrigeren, folgt die Behauptung. $\square$

$\underline{n^{\frac{1}{2}} \prec n^8}$:
Siehe vorheriger Beweis. $\square$

$\underline{n^8 \prec 2^n}$:
Hier kommt noch ein Beweis hin.

$\underline{2^n \prec 8^n}$:
Hier kommt noch ein Beweis hin.

$\underline{8^n \prec n!}$:
Für $n \to n+1$ wird n^8 mit 8 multipliziert, $n!$ jedoch mit $n+1$. Deshalb steigt $n!$ auf Dauer stärker als n^8. (Beweis kann durch Induktion gemacht werden).

$\underline{n! \prec n^n}$:
Alle einzelnen Faktoren, außer dem n-ten sind bei $n!$ kleiner als bei n^n, weshalb letztere Funktion schneller steigt.

(b) (i)

Behauptung: Für beliebige $b > 1$ gilt: $log_b(n) \in \Theta(log_2 n)$

$$\Leftrightarrow 0 < lim_{n\to\infty}\ inf \frac{log_b(n)}{log_2(n)} \leq lim_{n\to\infty}\ sup \frac{log_b(n)}{log_2(n)} < \infty$$

Für $b = 2$ ist $0 < lim_{n\to\infty}\ inf \frac{log_b(n)}{log_2(n)} = lim_{n\to\infty}\ sup \frac{log_b(n)}{log_2(n)} = 1 < \infty$

Für $b > 2$ ist $log_b(n) = \frac{log_2(n)}{log_2(b)}$

$$\Leftrightarrow 0 < lim_{n\to\infty}\ inf \frac{log_2(n)}{log_2(n) * log_2(b)} \leq lim_{n\to\infty}\ sup \frac{1}{log_2(b)}$$

Aber: $lim_{n\to\infty}\ inf \frac{1}{log_2(b)} = 0$

Also: Für beliebige $b > 2$ gilt: $log_b(n) \notin \Theta(log_2 n)$

(ii)

Behauptung: $f \in O(g) \Rightarrow g \in \omega(f)$

$$\Leftrightarrow lim_{n\to\infty} sup \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \Rightarrow lim_{n\to\infty} inf \frac{f(n)}{g(n)} \Leftrightarrow g \in o(f)$$

$$\Leftrightarrow lim_{n\to\infty} sup \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \Rightarrow lim_{n\to\infty} sup \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$\Leftrightarrow lim_{n\to\infty} sup \frac{f(n)}{g(n)} = 0 < \infty$$

(iii)

Behauptung: $f_c(n) := \sum_{i=0}^{n} c^i : f_c(n) \in \Theta(n) \Leftrightarrow c = 1$

$$0 < lim_{n\to\infty} inf \frac{f_c(n)}{n} \leq lim_{n\to\infty} sup \frac{f_c(n)}{n} < \infty$$

$$0 < lim_{n\to\infty} inf \frac{\sum_{i=0}^{n} c^i}{n} \leq lim_{n\to\infty} sup \frac{\sum_{i=0}^{i} c^i}{n} < \infty$$

Für $c > 1$geht $\frac{f_c(n)}{n}$gegen ∞, für $c > 0$geht $\frac{f_c(n)}{n}$gegen 0.

Also muss $c = 1$ genau dann, wenn $f_c(n) \in \Theta(n)$.