

# FGI2 Übungen Blatt 1

Oliver Sengpiel, 6322763  
Daniel Speck, 6321317  
Daniel Krempels, 6YYYYYY

20. Oktober 2014

## 1.3

### 1.3.1

$L(A_n)$  als regulärer Ausdruck:

$$L(A_n) = (a^{2i} \cdot d \cdot b^{2i}) + (a^{2i-1} \cdot c \cdot b^{2i-1}) + (a^n \cdot d) + (d) \text{ mit } i \in \{1, \dots, \frac{n}{2}\}$$

### 1.3.2

$L(A_n)$  als Menge:  $i \in \mathbb{N}$

$$L(A_n) = \{a^{2i} \cdot d \cdot b^{2i} \mid 0 \leq i \leq \frac{n}{2}\} \cup \{a^{2i-1} \cdot c \cdot b^{2i-1} \mid 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\} \cup \{a^n \cdot d\}$$

### 1.3.3

Sei  $M(A_n)$  genau die vom Automaten akzeptierte Sprache.

$L(A_n) \subseteq M(A_n)$ :

$L(A_n)$  wird vom Automaten akzeptiert. Wird vom Startzustand aus eine gerade Anzahl an 'a's gelesen, so erreicht man einen Zustand  $p_i$  mit  $i \bmod 4 = 0$ . Von hier aus kann das folgende 'd' gelesen werden, sowie dieselbe Anzahl an 'b's wie 'a's, hiermit wird auch der Endzustand  $p_1$  erreicht. Dies gilt auch für  $i = 0$ , hier wird ein einziges 'd' gelesen und man erreicht den Zustand  $p_1$ . Wird eine ungerade Anzahl an 'a's gelesen, so wird ein Zustand  $p_i$  mit  $i \bmod 4 = 2$  erreicht. Von diesen aus kann das darauf folgende 'c' gelesen werden und wiederum die selbe Anzahl an 'b's wie 'a's, und derselbe Endzustand  $p_1$  wird erreicht. Somit werden alle Eingaben von  $L(A_n)$  akzeptiert.

$M(A_n) \subseteq L(A_n)$ :

Alle vom Automaten akzeptierten Wörter sind in  $L(A_n)$  enthalten. Sei  $w \in M(A_n)$ .  $w$  kann drei verschiedene Formen haben: 1.  $w$  kann aus einer beliebigen, geraden Anzahl an 'a's, darauf folgend ein 'd' und darauf folgend genau so viele 'b's wie 'a's bestehen. In diesem Fall gilt  $w \in L(A_n)$ . 2.  $w$  kann auch aus  $n$  'a's, gefolgt von einem 'd' bestehen. In diesem Fall gilt ebenfalls  $w \in L(A_n)$ .

3. Oder  $w$  ist aus einer ungeraden Anzahl an 'a's und der gleichen Anzahl an 'b's aufgebaut, genau zwischen 'a's und b's ein 'c'. Auch dieses  $w$  ist in  $L(A_n)$  enthalten. Somit sind alle Wörter, die vom Automaten gelesen werden können, auch in  $L(A_n)$ , also gilt:  $M(A_n) \subset L(A_n)$ .

### 1.3.4

$L(A_n)$  ist regulär, da diese Sprache von einem endlichen Automaten akzeptiert wird und (wie in Teilaufgabe 1.3.1 geschehen) durch einen regulären Ausdruck beschrieben werden kann.

### 1.3.5

$A = \bigcup_{n \geq 0} L(A_n)$ . Nun ist gegeben, dass  $n$  beliebig ist. Damit  $A$  regulär ist, und also von einem endlichen Automaten akzeptiert wird, muss es eine Schleife in einem Wort  $w \in (a^{2i} \cdot c \cdot b^{2i})$  geben, bei dem  $i > n$ ,  $n$  Anzahl der Zustände des Automaten. Doch sobald eine Schleife in dem Wort auftritt, wird das Wort nicht mehr akzeptiert, da zum Beispiel nicht mehr garantiert werden kann, dass genau so viele 'a's wie 'b's gelesen werden, oder dass nur ein 'c' oder ein 'd' gelesen wird. Damit ist die Vereinigung aller  $L(A_n)$  für  $n \geq 0$  nicht regulär.

$A = \bigcup_{n \geq 0} L(A_n)$  ist aber kontextfrei, denn es lässt sich eine Grammatik dazu aufstellen:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A|B \\ A &\rightarrow aaAbb|acb|d \\ B &\rightarrow aaB|d \end{aligned}$$

## 1.4

### 1.4.1

Sei  $A := (Q, \Sigma, \delta, \{q^0\}, F)$  ein beliebiger endlicher Automat und  $A' := (Q', \Sigma', \delta', \{q'^0\}, F')$  ein Automat mit  $L(A') = \{w^{rev} | w \in L(A)\}$ , dann erhalten wir  $A'$  durch folgendes Verfahren:

1. Vertauschen des Anfangszustandes mit den Endzuständen:  
Wir konstruieren zunächst einen NFA, der den Anfangszustand von  $A$  als Endzustand hat, und bei dem die Endzustände des Automaten  $A$  die Anfangszustände sind.
2. Umkehren der Übergangsrelationen:  
Nun konstruieren wir die Übergangsrelation  $\delta'$  mit  $\delta' = \{(q, a, p) | (p, a, q) \in \delta\}$ . Wir haben die Kanten unseres Automaten also alle umgedreht.

### 3. Erstellen des Potenzautomaten:

Um vom NFA wieder auf einen DFA zu kommen konstruieren wir nun den Potenzautomaten. Der Potenzautomat hat nun den alten Anfangszustand von A als Endzustand und einen Anfangszustand  $q'$ , der für alle Endzustände von A steht.

Der Automat, den wir erhalten haben ist  $A'$ .

#### 1.4.2

$L(A) = \{e, f\}^* \{eef\} \{e, f\}^*$ . Sei  $M(A)$  genau die Menge der vom Automaten akzeptierten Wörter.

$L(A) \subseteq M(A)$ :  $L(A)$  wird von A akzeptiert. Von  $p_0$  aus können sowohl beliebig viele 'f's als auch beliebig viele 'e's akzeptiert werden. Werden nur 'f's gelesen, bleibt der Automat in  $p_0$ , werden nur 'e's gelesen, geht der Automat erst in den Zustand  $p_1$  und dann in den Zustand  $p_2$  und liest dort alle weiteren 'e's. Da der Automat vollständig ist, können von jedem Zustand aus 'e's und 'f's gelesen werden. Laut  $L(A)$  muss danach die Kombination  $eef$  gelesen werden können. Unabhängig vom Zustand des Automaten vorher geht der Automat nun nach  $p_3$ , den Endzustand. Hier können nun wieder beliebig viele 'e's und f's geesen werden, also wird  $L(A)$  von A azeptiert, und  $L(A) \subseteq M(A)$ .

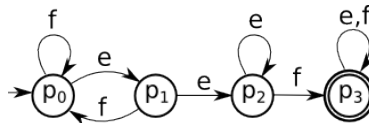
$M(A) \subseteq L(A)$ : Alle vom Automaten akzeptierten Wörter liegen in  $L(A)$ . Sei  $w \in M(A)$ .  $w$  kann aus beliebig vielen 'e's oder 'f's bestehen, mit der Bedingung, dass irgendwo in dem Wort die Abfolge 'eef' vorkommt. Dies ist in  $L(A)$  gegeben, damit gilt  $L(A) = M(A)$  und  $L(A)$  beschreibt genau die Menge der akzeptierten Wörter von A.

#### 1.4.3

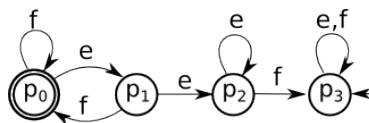
$$L(A) = (e + f)^* + (eef) + (e + f)^*$$

#### 1.4.4

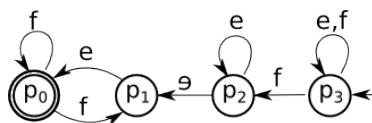
Zunächst nehmen wir uns den Ausgangsautomaten A:



Dann vertauschen wir Anfangs- und Endzustände des Automaten und erhalten folgenden Automaten:



Im Schritt danach drehen wir die Übergangsrelation um:



... und sind fertig, da der Potenzautomat dieses Automaten wieder der Automat selbst ist.

### 1.4.5

Sei  $M(B)$  genau die Menge der vom Automaten  $B$  akzeptierten Wörter. Annahme:  $L(B) := \{e, f\}^* \{fee\} \{e, f\}^* = M(B)$ .

$L(B) \subseteq M(B)$ :  $L(B)$  wird von  $B$  akzeptiert. Von  $p_3$  aus können sowohl 'e's als auch 'f's gelesen werden. Generell kann von jedem Zustand aus ein 'e' oder ein 'f' gelesen werden, da der Automat vollständig ist. Laut  $L(B)$  muss  $B$  die Kombination 'fee' an einer Stelle des Worts lesen können. Unabhängig vom Zustand des Automaten wechselt dieser nach Lesen von 'fee' in den Endzustand  $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ . Hier können beliebig viele weitere 'e's und 'f's von  $L(B)$  gelesen werden, damit akzeptiert der Automat  $L(B)$ .

$M(B) \subseteq L(B)$ : Jedes Wort  $w \in M(B)$  ist auch in  $L(B)$ .  $w$  kann in  $p_3$  sowohl mit einem 'e' als auch mit einem 'f' beginnen. Bei fortlaufenden 'e's bleibt der Automat im Startzustand  $p_3$ , bei fortlaufenden 'f's wechselt DFA  $B$  nach  $\{p_2, p_3\}$  und verbleibt dort. Wird von dort aus ein 'e' gelesen, wechselt der Automat zu  $\{p_1, p_2, p_3\}$ . Folgt in  $w$  nun ein 'f', springt der Automat zurück nach  $\{p_2, p_3\}$ . Um zu einem Endzustand zu gelangen, muss  $w$  irgendwo im Wort die Folge 'fee' beinhalten, damit der Automat in einen Endzustand wechselt. Da der Automat nur in den Zuständen 'voranschreitet', wenn ein solches Teilwort gelesen wird.  $w$  kann also mit beliebig vielen 'e' und 'f's beginnen, muss die Abfolge fee beinhalten und kann mit beliebig kombinierten 'e's und 'f's enden. Dies entspricht auch  $L(B)$ , somit wird  $w$  von  $L(B)$  akzeptiert.